

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



**João Francisco Coelho de Albuquerque
Figueiredo**

**Aplicação do Método do Carregamento Estático
Equivalente na Otimização Topológica de
Estruturas Planas**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento
de Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Ivan Fabio Mota de Menezes

Rio de Janeiro
Dezembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer toda a minha família, principalmente meus pais, Elizabeth e Julio e meu irmão, João Gabriel, a por todo o apoio e incentivo ao longo de toda a minha formação. Nos momentos mais desafiadores dessa jornada, seu amor e carinho sempre estiveram presentes e tornaram os problemas mais fáceis. Nada disso seria possível sem vocês, muito obrigado por tudo que vocês me deram.

Agradeço à PUC-Rio e ao meu orientador, Ivan Menezes, que me guiou com grande didática e paciência durante a confecção do trabalho, principalmente durante os momentos de maior dificuldade. Sou muito grato pelo seu apoio, pela sua compreensão e pela sua disponibilidade, tudo isso foi determinante para que eu pudesse consolidar meu entendimento sobre os temas deste trabalho. Tenho você como a principal referência das qualidades que um professor deve apresentar em sua didática e relação com os alunos.

Faço questão de agradecer aos grandes amigos Alexandre, Pedro, Isadora e Luísa, e, em especial, à minha namorada, Carolina, que estiveram ao meu lado durante todos os desafios desses anos de graduação em Engenharia Mecânica. Eu não teria conseguido sem a ajuda de vocês. Não tenho dúvidas que vocês são o que eu vou levar de mais valioso desses últimos anos para o resto da vida.

Por fim, quero agradecer aos meus colegas da Falconi, por toda a compreensão e todos os ensinamentos ao longo dos últimos anos. Que continuemos crescendo e aprendendo para construir um mundo mais eficiente e melhor.

RESUMO

Aplicação do Método do Carregamento Estático Equivalente na Otimização Topológica de Estruturas Planas

As estruturas reais projetadas pelo homem sofrem carregamentos que variam ao longo do tempo. A otimização topológica é uma técnica numérica que consiste em eliminar material de uma dada estrutura (*i.e.* reduzir o peso desta estrutura), de tal maneira que a rigidez seja maximizada. No entanto, o processo de otimização topológica para a condição de carregamento dinâmico é extremamente custoso, sob o ponto de vista computacional. O presente trabalho estuda uma solução para contornar este problema, o Método do Carregamento Estático Equivalente, e apresenta uma aplicação desta técnica em um exemplo real.

O método reduz o custo computacional vinculado ao problema por meio da identificação do conjunto de carregamentos estáticos capazes de gerar o mesmo campo de deslocamentos na estrutura que o carregamento dinâmico. Além disso, este trabalho apresenta uma revisão teórica de todas as etapas envolvidas na resolução de um problema de otimização topológica para estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos.

Palavras chaves: Otimização estrutural, otimização topológica, carregamento estático equivalente, carregamento dinâmico, múltiplos casos de carregamento

ABSTRACT

Topological Optimization of Structures Subjected to Dynamic Loads Using Equivalent Static Loads

Real man made structures are subjected to loads that vary with respect to time. Topological optimization is a numeric technique which consists of eliminating material from a given structure (*i.e.* reducing weight), while maximizing rigidity. However, the computational cost of topology optimization calculations when dynamic loads are applied is extremely high. In this paper, a solution is studied for this problem – the Equivalent Static Load Method, and is presented its application in a real example.

The method lowers the computational cost of solving this problem by identifying the set of static loads capable of generating the same displacement field as the original dynamic loads. Furthermore, this paper presents a theoretical revision of all the steps involved in the solution to the topological optimization problem for structures subjected to dynamic loads

Keywords: Structural optimization, topological optimization, equivalent static load, dynamic loads, multiple loading condition

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	7
1.1.	Objetivo e estrutura do trabalho	9
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	9
2.1.	Apresentação do Problema	9
2.2.	Análise Dinâmica	11
2.3.	Método do Carregamento Estático Equivalente (ESL)	12
2.3.1.	Obtenção das cargas estáticas equivalentes	12
2.4.	Otimização Estrutural	13
2.4.1.	Otimização Topológica	14
3.	RESULTADOS NUMÉRICOS	17
3.1.	Exemplo 1	17
3.1.1.	Um caso de carregamento estático	18
3.1.2.	Dois casos de carregamento estático	19
3.1.3.	Estudo com “n” casos de carregamentos estáticos equivalentes	20
3.2.	Exemplo 2	21
3.2.1.	Um caso de carregamento estático	22
3.2.2.	Dois casos de carregamento estático	23
3.2.3.	Estudo com “n” casos de carregamentos estáticos equivalentes	24
4.	CONCLUSÕES	25
5.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	26

Lista de figuras

Figura 1 – (a) Favos de uma colmeia; (b) dente-de-leão [2].....	7
Figura 2 – (a) Arranha-céus sujeitos à ação dos ventos [3]; (b) ponte sujeita à correnteza de um rio [4]	8
Figura 3 – (a) Modelo de viga engastada; (b) força variável aplicada.....	9
Figura 4 – Fluxograma mostrando o processo de resolução de problemas de otimização topológica com o método de ESL. Adaptado de Lavôr, 2019. [1]	10
Figura 5 - (a) Modelo de viga engastada; (b) forças aplicadas [8]	18
Figura 6 – Topologia final otimizada para apenas um caso de carregamento estático	18
Figura 7 – Topologia final otimizada para dois casos separados de carregamento..	19
Figura 8 – Topologia final otimizada para “n” casos de carregamento estático equivalente	20
Figura 9 - (a) Modelo de viga engastada; (b) forças aplicadas	21
Figura 10 - Topologia final otimizada para apenas um caso de carregamento estático	22
Figura 11 - Topologia final otimizada para dois casos separados de carregamento.	23
Figura 12 - Topologia final otimizada para “n” casos de carregamento estático equivalente	24

1. Introdução

Um fato interessante de se observar no mundo é a constante presença de figuras geométricas em estruturas naturais. Desde esferas, se fazendo presentes no dente-de-leão, até hexágonos, vistos nos favos das colmeias, essas formas permeiam o mundo natural, conforme ilustrado na Figura 1. Embora isso confira um elemento estético deslumbrante, em muitos casos esse não é o seu principal propósito. Na verdade, essas estruturas se configuram dessa forma por motivos de eficiência. Como sempre, a natureza segue a lei da maior eficiência com o mínimo de energia gasta [1] e, em diversos contextos, as estruturas poligonais se mostram as mais eficientes.



Figura 1 – (a) Favos de uma colmeia; (b) dente-de-leão [2]

O homem percebeu esse fato e se propôs a estudar mais a fundo o tema, para aplicar em estruturas artificiais. Esse é o princípio da disciplina de otimização, que nada mais é do que a escolha de um elemento a partir de um conjunto de possibilidades, para atender a algum critério. Em problemas mais simples, em geral, esse critério diz respeito à maximização ou minimização de alguma função objetivo.

A otimização como processo matemático foi desenvolvido durante a Segunda Guerra Mundial, a partir da necessidade da otimização dos processos logísticos e de treinamento das pessoas. George B. Dantzig estudava esses problemas durante a Grande Guerra e, em 1947, publicou o Método Simplex [2]. Após o fim do conflito armado, as indústrias se interessaram por esses métodos, como uma forma de melhorar suas operações, maximizar receitas e reduzir custos.

Nos projetos de engenharia, os problemas de otimização aparecem constantemente. É sempre desejável atingir os objetivos do projeto, trabalhando com o mínimo de tempo e de material (custo). Isso gera uma série de decisões complexas de projeto, com relação a qual material escolher, qual forma o objeto deve ter, como aumentar a eficiência e a segurança do produto sem aumento de custo, entre outras. Evidentemente, não é possível realizar cálculos de otimização para cada pequena decisão ao longo do projeto, no entanto, para os itens mais

importantes, é fundamental deixar de lado a experiência e intuição do projetista e recorrer à disciplina de otimização.

O presente trabalho se propõe a estudar a otimização topológica quando aplicada ao caso de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos. Esse é um tema de extrema importância, uma vez que a grande maioria das estruturas projetadas pelo homem está exposta a carregamentos que variam ao longo do tempo. A força causada pelos ventos em prédios ou pelos rios nas pontes são alguns exemplos reais desses esforços dinâmicos, apresentados na Figura 2.



Figura 2 – (a) Arranha-céus sujeitos à ação dos ventos [3]; (b) ponte sujeita à correnteza de um rio [4]

O desenvolvimento de técnicas de otimização estrutural considerando carregamentos dinâmicos apresenta desafios adicionais quando comparado aos problemas que envolvem apenas carregamentos estáticos. Em primeiro lugar, como veremos mais à frente, toda a base teórica e computacional foi desenvolvida para o tratamento de carregamentos estáticos na peça ou estrutura em questão. A extensão dessas técnicas para consideração de carregamentos dinâmicos é uma tarefa relativamente complexa, sob o ponto de vista matemático. Uma alternativa interessante e relativamente simples, consiste em “dividir” ou “converter” os carregamentos dinâmicos em múltiplos carregamentos estáticos, aproveitando assim, toda a base teórica existente.

Essa solução gera um segundo desafio: o processo de otimização para muitos casos de carregamento eleva bastante o custo computacional. Em função desse cenário, surge a solução que será estudada neste trabalho. O Método do Carregamento Estático Equivalente (**Equivalent Static Load – ESL**) [5] é capaz de identificar, para um determinado carregamento dinâmico, qual seria o carregamento estático capaz de gerar um campo de deslocamentos equivalente. Com isso, torna-se viável o estudo dos casos de carregamento dinâmico.

1.1. Objetivo e estrutura do trabalho

O principal objetivo deste trabalho é empregar o Método do Carregamento Estático Equivalente na otimização topológica de uma estrutura plana, como uma forma de complementar os estudos acerca deste tema e validar a metodologia para a otimização de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: após a introdução, será feita uma síntese de toda a fundamentação teórica sobre cada uma das etapas aplicadas na solução do problema de otimização a ser apresentado. Na sequência, será apresentado o problema numérico, seguido da sua resolução, empregando o método citado. Por fim, os resultados serão apresentados e serão traçadas as conclusões finais.

2. Fundamentação teórica

2.1. Apresentação do Problema

As estruturas do mundo real estão sujeitas a esforços que variam ao longo do tempo, em função de eventos externos, como ventos, marés, terremotos, tráfego de pessoas ou veículos, máquinas rotativas, entre outros. Nesse contexto, o trabalho irá abordar um problema de otimização topológica em uma estrutura submetida a carregamentos dinâmicos. Na Figura 3, pode-se observar um exemplo de uma viga simples sofrendo um forçamento que varia ao longo do tempo, como o gráfico ao lado descreve:

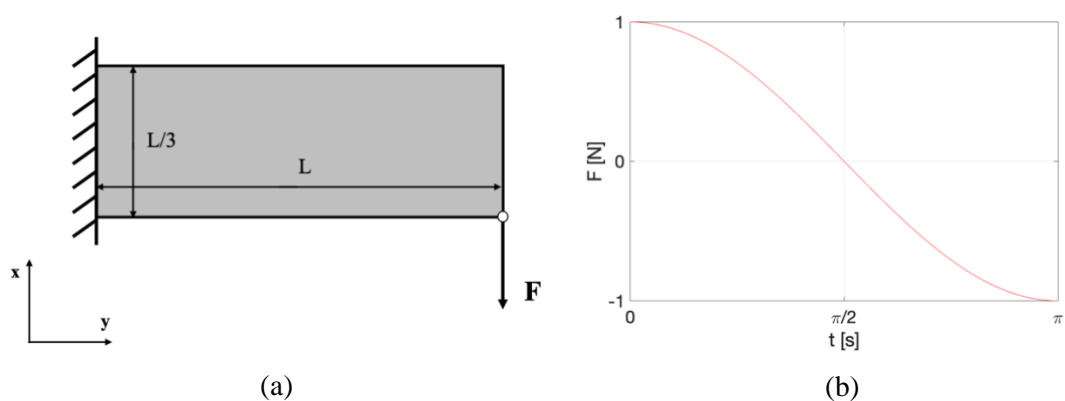


Figura 3 – (a) Modelo de viga engastada; (b) força variável aplicada

A resolução de um problema de otimização para casos como esse é extremamente cara computacionalmente em função da ordem de grandeza do sistema de equações que deve ser resolvido, devido à variabilidade do forçamento aplicado. Com isso, será empregado o Método do Carregamento Estático Equivalente, com o objetivo de reduzir tais custos.

Para que se possa iniciar adequadamente a Fundamentação Teórica e facilitar a construção do conhecimento acerca do tema, é importante ter uma visão geral sobre os passos que serão percorridos durante a resolução do problema definido. Na Figura 4, pode-se explorar o fluxograma que demonstra a sequência de etapas a serem percorridas no emprego do método de ESL em problemas de otimização:

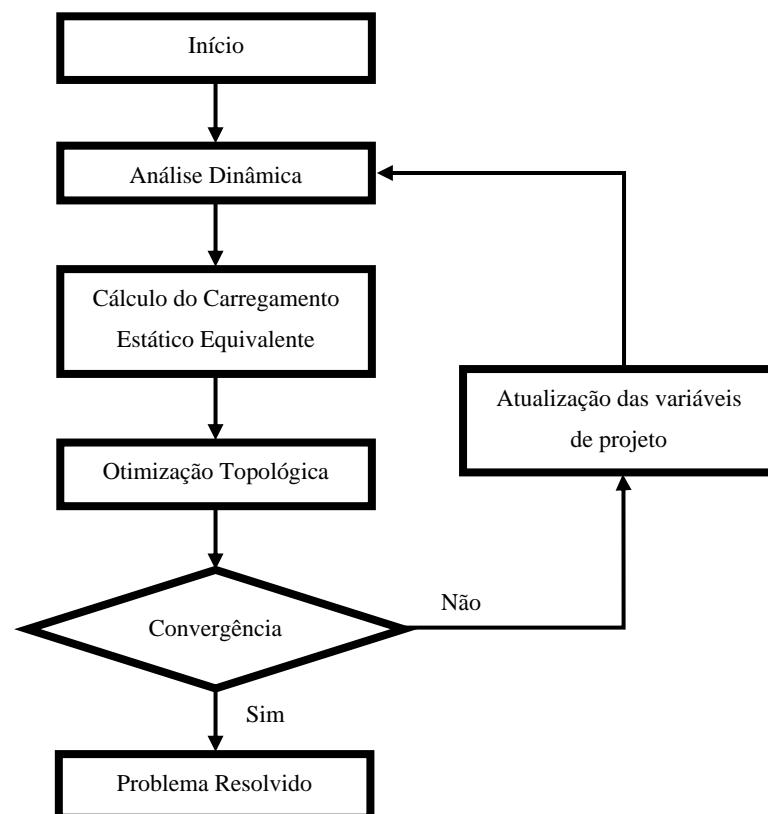


Figura 4 – Fluxograma mostrando o processo de resolução de problemas de otimização topológica com o método de ESL. Adaptado de Lavôr, 2019. [1]

Na sequência, cada uma das etapas acima será explorada em maior profundidade, para que seja possível construir, de forma clara e didática, o conhecimento neste método de resolução.

2.2. Análise Dinâmica

De acordo com o fluxograma apresentado na Figura 4, a primeira etapa de resolução do problema de otimização topológica é a análise dinâmica. Evidentemente, antes de aprofundar nessa etapa, é necessário definir o modelo numérico que representa o problema. Essa definição envolve selecionar o problema físico que será estudado, ou seja, identificar o tipo de estrutura, sua forma, dimensões, material e quais são as condições de carregamento e esforços aos quais ela estará submetida. A partir desse ponto, é feita a elaboração do modelo matemático representativo do problema real, que conterà as informações necessárias para o desenvolvimento da análise dinâmica.

Para a construção do modelo matemático, será fundamental a utilização do Método de Elementos Finitos (MEF) [11]. Isso se faz necessário porque o estudo de estruturas reais implica a necessidade de modelar geometrias bi ou tridimensionais para as quais não se conhece soluções analíticas. Desse modo, o MEF permite a discretização do domínio, subdividindo estruturas contínuas em partes, representadas por nós, com o intuito de simplificar a análise de deslocamentos para uma geometria complexa.

Baseada na análise de elementos finitos, a análise dinâmica tem como objetivo principal identificar os deslocamentos, velocidades e acelerações sofridos pela estrutura estudada em cada instante de tempo, em virtude do forçamento variável. Para isso, é empregada a equação do movimento na sua forma matricial que, para o caso simples de uma análise linear elástica, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (2.1)$$

onde \mathbf{b} corresponde ao vetor de variáveis de projeto, $\mathbf{M}(\mathbf{b})$, $\mathbf{C}(\mathbf{b})$ e $\mathbf{K}(\mathbf{b})$ correspondem às matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, respectivamente, e $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$ e $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ representam os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, nessa ordem. $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ expressa o forçamento dinâmico a que a estrutura está submetida.

Em geral, a resolução da Equação (2.1) fornece, primeiramente, o vetor $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, contendo o deslocamento no tempo de cada um dos nós definidos anteriormente. Essa será a informação principal que permitirá o cálculo do carregamento estático equivalente.

2.3. Método do Carregamento Estático Equivalente (ESL)

Conforme foi discutido anteriormente, o cálculo da otimização topológica de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos apresenta um elevado custo computacional, em função dos muitos sistemas de equações que deverão ser resolvidos. O Método do Carregamento Estático Equivalente foi proposto como uma forma de contornar esse problema e viabilizar os cálculos de otimização das estruturas que sofrem esforços dinâmicos.

O carregamento estático equivalente é definido como aquele que, em uma análise estática, produz o mesmo campo de deslocamentos que é produzido pelas cargas dinâmicas em um determinado instante de tempo. Na prática, como foi visto anteriormente, tudo começa com o desenvolvimento da modelagem matemática do problema real, seguido pela resolução do problema dinâmico e, consequentemente, a obtenção do campo de deslocamentos.

A partir desse campo, o objetivo passa a ser identificar quais seriam as cargas estáticas que gerariam os mesmos deslocamentos, para cada instante de tempo. Para isso, é empregada a seguinte equação:

$$\mathbf{F}_{ESL}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}_s(t) \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{b})$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{u}_s(t)$ representa o vetor de deslocamentos estáticos e $\mathbf{F}_{ESL}(t)$ corresponde ao carregamento estático equivalente, para um determinado instante de tempo.

2.3.1. Obtenção das cargas estáticas equivalentes

Evidentemente, a Equação (2.2) resulta em uma expressão, em função do tempo, para o carregamento estático equivalente. Isso é um problema, uma vez que, para o processo de otimização topológica, esse carregamento contínuo ainda traria um custo computacional extremamente elevado. Em função disso, é necessário empregar um processo de “seleção” das cargas estáticas, de modo que elas sejam capazes de representar o todo e gerar uma otimização topológica coerente com a realidade do carregamento dinâmico original.

Esse processo se inicia com a identificação dos tempos críticos, ou seja, os instantes de tempo em que ocorrem picos de deformação na estrutura. Com os tempos críticos identificados, é possível substituir, na Equação (2.2), o vetor $\mathbf{u}_s(\mathbf{t})$ por $\mathbf{u}_s(\mathbf{t}_c)$, aplicando os instantes de tempo encontrados. Com isso, será possível identificar os carregamentos estáticos correspondentes:

$$\mathbf{F}_{ESL}(\mathbf{t}_c) = \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}_s(\mathbf{t}_c) \quad (2.3)$$

A resolução deste problema (Eq. (2.3)) para todos os instantes de tempo críticos irá gerar o conjunto de casos de carregamento estático que serão fornecidos à próxima etapa de otimização topológica. Percebe-se que, por meio desse processo, foi possível transformar um carregamento dinâmico em um conjunto de casos de carregamentos estáticos, resolvendo assim o problema do elevado custo computacional decorrente de calcular a otimização topológica para uma estrutura carregada dinamicamente.

2.4. Otimização Estrutural

A disciplina da Otimização Estrutural tem como objetivo principal descobrir qual seria a menor quantidade de material necessária para a estrutura permanecer viável. James Clerk Maxwell foi pioneiro nos estudos de otimização quando, em 1872, baseado apenas na teoria da elasticidade, calculou as tensões principais de uma estrutura e propôs, conceitualmente, que a estrutura mais eficiente em termos de uso de material seria aquela com treliças nas mesmas direções das tensões principais.

Hoje, a otimização estrutural recorre às técnicas de programação matemática para identificar a configuração da estrutura que produzirá uma performance ótima em relação a alguma métrica definida. Além disso, devem ser respeitadas as restrições de projeto, como tensão de falha, frequência natural crítica e máximos deslocamentos permitidos. A otimização estrutural se divide em 3 áreas: otimização dimensional, de forma e topológica:

- **Dimensional:** busca otimizar as dimensões de uma estrutura, para reduzir peso ou custo de fabricação, entre outros. É uma técnica comumente utilizada para minimizar o peso de uma treliça que deve sustentar uma determinada carga, mantendo-se a topologia inicial e variando-se, por exemplo, os diâmetros das barras.

- **Forma/Geometria:** comum na Engenharia Aeroespacial, para projetos de aerofólios, por exemplo, onde o algoritmo de otimização identifica as posições ideais dos nós, definindo uma nova geometria (forma) da estrutura, capaz de minimizar o custo da estrutura ao diminuir o atrito com o fluido.
- **Topológica:** consiste em alteração da disposição espacial dos elementos da estrutura ou no padrão de conectividade entre esses elementos. A partir do projeto original, o algoritmo é empregado para retirar material de alguma região, a fim de minimizar seu peso e custo, mas garantindo que não irá falhar. É esta área que será explorada no presente trabalho.

2.4.1. Otimização Topológica

A Otimização Topológica busca descobrir qual seria a forma mais eficiente de se distribuir material em uma região específica, de modo a satisfazer as restrições de projeto. O termo *topologia* vem da matemática, onde ela é considerada uma extensão da geometria. Contudo, enquanto a geometria se propõe a estudar matematicamente os objetos e formas, a topologia busca analisar as diversas possibilidades de configurações e formas para os objetos e suas relações de adjacência. Evidentemente, a aplicação deste tema na área de Otimização Estrutural é ampla e extremamente importante.

2.4.1.1. Otimização Topológica de Estruturas

A Otimização Topológica está intimamente conectada aos estudos do Método de Elementos Finitos (MEF), um método matemático de discretização de domínios contínuos, de modo a simplificar e viabilizar alguns cálculos. Para a presente aplicação, a união dos dois temas foi proposta inicialmente por Bendsøe e Kikuchi em 1988. A partir disso, o conhecimento no assunto avançou bastante e, hoje, a definição mais geral diz que a otimização topológica em estruturas contínuas deve determinar, para cada ponto discretizado no espaço, se deve haver material ou não.

Uma outra forma de definir é dizer que a otimização topológica busca determinar o número, a localização e a forma de furos e sua conectividade em um determinado domínio. Assim, tendo sido definido o domínio, as condições de

contorno, os carregamentos e as restrições, a estrutura pode assumir a configuração que irá atingir o melhor desempenho dentro dos critérios de projeto.

As métricas de desempenho devem ser escolhidas cuidadosamente, para que o projeto alcance o seu propósito real. Algumas das métricas mais comuns são a fadiga de um componente mecânico, o nível de vibração tolerável, o peso, a rigidez ou a *compliance*, ou seja, o inverso da rigidez. Esta última pode ser também considerada como a flexibilidade da estrutura, e é dada por:

$$\phi(\rho, u) = F^T u \quad (2.5)$$

onde F corresponde ao vetor de forças externas e u , ao vetor de deslocamentos nodais.

Dado um domínio de referência, considerando a função objetivo como a *compliance*, pode-se afirmar que o objetivo da Otimização Topológica torna-se encontrar o melhor tensor de rigidez ao longo desse domínio, ou seja, buscar maximizar a rigidez.

2.4.1.2. Otimização Topológica de Estruturas para múltiplos casos de carga independentes

Em geral, ao dimensionar uma estrutura, se observa uma grande quantidade de casos de carregamento. Nesse contexto, a função objetivo a ser minimizada pode ser tratada como um somatório das *compliances* de cada um dos casos. Para um conjunto com m casos de carga e dados F_i (para $i = 1, \dots, m$), é possível escrever a formulação da geral da otimização da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \phi(\mathbf{u}(\mathbf{b})) = \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i^T \mathbf{u}_i(\mathbf{b}) \\ \text{s. a.: } \sum_{e=1}^n V_e - V_{\max} \leq 0 \\ 0 < b_{\min} \leq b_e \leq b_{\max}, \quad e = 1, \dots, n \\ \text{com } \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}(\mathbf{b}) = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (2.6)$$

onde \mathbf{b} é o vetor de variáveis de projeto, \mathbf{F} corresponde ao vetor de forças externas, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{m} é o número de casos de carregamento. V_e e $V_{máx}$ correspondem ao volume de cada elemento e ao volume máximo permitido. \mathbf{K} representa a matriz de rigidez e n é o número de elementos de discretização da estrutura.

2.4.1.3. Otimização Topológica de Estruturas para carregamentos dinâmicos

Em problemas de carregamentos dinâmicos, que são de fato o tema central deste trabalho, o que anteriormente era interpretado como um somatório das *compliances*, agora será visto como uma integral no tempo, de modo a considerar todo o intervalo de variações no forçamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \phi_d(\mathbf{u}(\mathbf{b}), t) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{F}^T \mathbf{u}_i(\mathbf{b}) dt \\ s. t.: \sum_{e=1}^n V_e - V_{máx} \leq 0 \\ 0 < b_{mín} \leq b_e \leq b_{máx}, \quad e = 1, \dots, n \\ com \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad t = t_0, \dots, t_f \end{array} \right. \quad (2.7)$$

onde ϕ_d é a compliance da estrutura sujeita a carregamentos dinâmicos, \mathbf{M} e \mathbf{C} são as matrizes de massa e amortecimento, respectivamente e $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ são os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração.

No presente trabalho, a equação dinâmica exposta na última linha da Eq. 3.3 será discretizada no tempo e resolvida pelo método implícito de integração Newmark- β , que calcula a resposta estrutural no tempo $t + \Delta t$ como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (2.8)$$

3. Resultados Numéricos

Nesta seção, o objetivo primário será apresentar exemplos de resultados numéricos, de acordo com a metodologia desenvolvida na seção anterior, como uma forma de complementar o entendimento acerca do tema. Para a resolução do problema, foi empregado o programa PolyTop desenvolvido em Matlab por Lavôr e Pereira [8], com algumas modificações, permitindo a solução de problemas estáticos com múltiplos casos de carregamento.

3.1. Exemplo 1

Este exemplo, originalmente apresentado por Behrou e Guest, 2017 [8] e revisitado por Lavôr, 2019 [1], apresenta uma viga retangular, com uma extremidade engastada e a outra livre. Os parâmetros empregados, a geometria do problema, as condições de contorno e a representação gráfica dos carregamentos dinâmicos aplicados estão apresentados na Tabela 1:

<i>propriedade</i>	<i>parâmetro</i>	<i>valor</i>	<i>unidade</i>
Raio	r_{min}	0,01375	<i>m</i>
Módulo de Elasticidade	E_0	2×10^{11}	<i>Pa</i>
Poisson	ν	$1/3$	-
Comprimento da viga	L	0,9	<i>m</i>
Espessura da viga	$thick$	0,01	<i>m</i>
Tempo	t_f	π	<i>s</i>
Passo temporal	Δt	$\pi/20$	<i>s</i>
Volume máximo permitido	V_{max}	35%	-

Tabela 1 – Parâmetros do exemplo analisado [8]

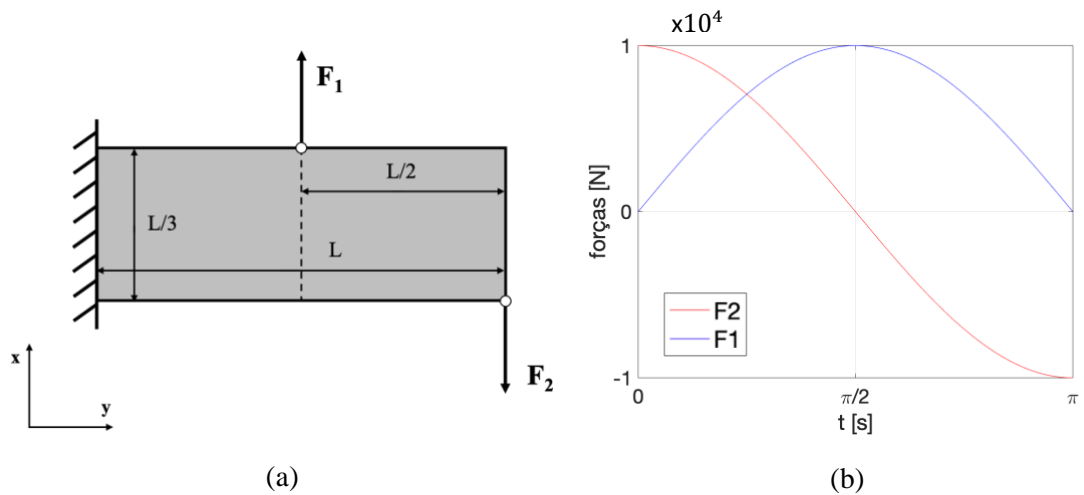


Figura 5 - (a) Modelo de viga engastada; (b) forças aplicadas [8]

3.1.1. Um caso de carregamento estático

Primeiramente, será apresentado o resultado do processo de otimização topológica para apenas um caso de carregamento estático, com ambas as forças aplicadas na viga sendo consideradas estáticas e com módulo equivalente ao valor máximo assumido por ambas. O resultado da topologia da viga está apresentado abaixo:



Figura 6 – Topologia final otimizada para apenas um caso de carregamento estático

Vale destacar alguns pontos interessantes sobre a configuração final da viga. Em primeiro lugar, é possível identificar como a estrutura é fundamentalmente composta por duas barras horizontais espessas, uma na extremidade inferior e outra na superior. Esses componentes serão comprimidos e tracionados pelos momentos fletores produzidos pelas cargas aplicadas na viga e, por isso, sua presença é fundamental. A região intermediária (entre as barras), a princípio, não necessita de material, em virtude

de sua proximidade do eixo neutro da viga, onde os esforços de tração e compressão são significativamente menores.

Além disso, é notável a existência de barras transversais na região entre os dois pontos de atuação das forças. Isso ocorre uma vez que esta região está submetida a esforços cortantes produzido pelos carregamentos. No entanto, como ambas as forças aplicadas têm o mesmo módulo e sentidos contrários, toda a região entre F_1 e o engaste não observa esforço cortante algum. Também por esse motivo, não se observa barras transversais nessa região.

Esse ponto é extremamente importante e ilustra muito bem a importância de considerar múltiplos casos de carga ao estudar a otimização topológica de estruturas. Este primeiro item é um caso extremamente particular de configuração das cargas, onde elas possuem exatamente o mesmo módulo, o que permite a ausência de suportes transversais na região discutida. No entanto, em situações reais, com carregamentos dinâmicos, existe uma alta probabilidade de, em algum momento, a região “sentir” esforços cortantes, em virtude de diferenças nas forças aplicadas. Caso isso não fosse considerado e este primeiro resultado fosse tido como definitivo, seria fabricada uma estrutura inadequada para suportar os esforços dinâmicos apresentados.

3.1.2. Dois casos de carregamento estático

Para o segundo item, será apresentada a topologia final considerando, novamente, carregamentos estáticos, porém analisando 2 casos de carga diferentes. Isso significa que, desta vez, será considerada a possibilidade de as cargas não apresentarem o mesmo módulo. Com isso, pode-se observar uma configuração diferente:



Figura 7 – Topologia final otimizada para dois casos separados de carregamento

Conforme era esperado, de acordo com a interpretação do primeiro caso, a região compreendida entre o apoio e o ponto de aplicação de F_1 agora possui material. Retomando a explicação anterior, isso ocorre dado que, neste item, ao considerar casos de carregamento diferentes, está sendo englobada a possibilidade de as forças não se cancelarem, produzindo esforços cortantes na região destacada.

3.1.3. Estudo com “n” casos de carregamentos estáticos equivalentes

No terceiro caso, será estudado o tema central de fato, ou seja, a aplicação do Método do Carregamento Estático Equivalente. Serão consideradas cargas dinâmicas que, de acordo com o método discutido na seção anterior, serão convertidas em um determinado número de casos de carregamentos estáticos:



Figura 8 – Topologia final otimizada para “n” casos de carregamento estático equivalente

Aqui fica claro, novamente, em função da presença das estruturas transversais ao longo de toda a viga, a consideração dos múltiplos casos de carga possíveis dadas as duas forças aplicadas na viga. É interessante de notar como o segundo caso apresentado é muito mais próximo do terceiro do que do primeiro. Novamente, esse fato serve como um reforço para a importância de se considerar múltiplos casos de carregamentos ao calcular a otimização topológica de uma estrutura, independentemente do carregamento ser estático ou dinâmico.

3.2. Exemplo 2

Neste segundo exemplo, a geometria da estrutura estudada é semelhante, mas possui algumas distinções importantes. A viga, neste exemplo, é bi apoiada e as forças são aplicadas na superfície superior, a $L/3$ e $2L/3$ da sua extremidade esquerda. Novamente, os parâmetros empregados, a geometria do problema, as condições de contorno e a representação gráfica dos carregamentos dinâmicos aplicados estão expostos na Tabela 2:

<i>propriedade</i>	<i>parâmetro</i>	<i>valor</i>	<i>unidade</i>
Raio	r_{min}	0,01375	<i>m</i>
Módulo de Elasticidade	E_0	2×10^{11}	<i>Pa</i>
Poisson	ν	$1/3$	-
Comprimento da viga	L	0,9	<i>m</i>
Espessura da viga	<i>thick</i>	0,01	<i>m</i>
Tempo	t_f	π	<i>s</i>
Passo temporal	Δt	$\pi/20$	<i>s</i>
Volume máximo permitido	V_{max}	35%	-

Tabela 2 – Parâmetros do exemplo 2 analisado

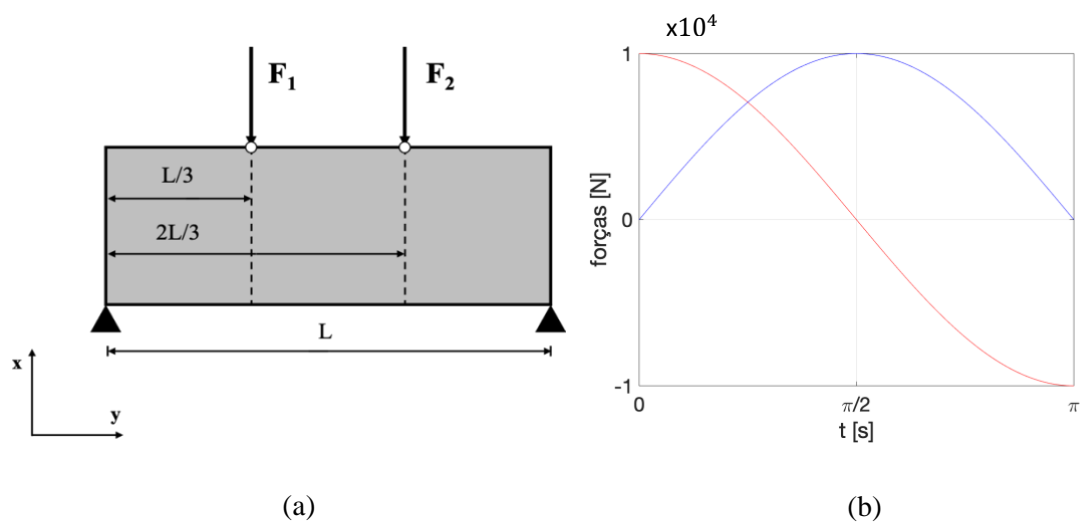


Figura 9 - (a) Modelo de viga biapoiada; (b) forças aplicadas

3.2.1. Um caso de carregamento estático

Assim como foi feito no primeiro exemplo, serão apresentados três resultados de otimização diferentes, com diferentes casos de carregamento em cada. Em primeiro lugar, será analisado a situação com apenas um caso de carregamento estático. Neste caso, ilustrado na Figura 10, as duas forças estáticas serão aplicadas com mesmo módulo, direção e sentido nas posições apresentadas anteriormente:



Figura 10 - Topologia final otimizada para apenas um caso de carregamento estático

Em uma comparação com o primeiro caso do exemplo anterior, ficam evidentes algumas diferenças marcantes, principalmente em função da alteração dos suportes da viga. Destaca-se a ausência da barra na extremidade inferior da viga, uma vez que os suportes bi apoiados permitem uma resistência à tração existente na região inferior, produzida pelos esforços de flexão impostos pelos forçamentos.

Outro ponto notável é a simetria da estrutura. Como os suportes e as forças foram configuradas de forma simétrica na viga, a princípio, seria esperado que a estrutura resultante também apresentasse simetria. Contudo, como vimos anteriormente, é fundamental que sejam calculados os casos dinâmicos das cargas, tendo em vista que esses cálculos consideram situações onde as forças podem ter módulos ou sentidos diferentes, podendo gerar resultados contra intuitivos para esse tipo de expectativa.

3.2.2. Dois casos de carregamento estático

Na sequência, será estudado o segundo cenário, onde serão considerados dois casos de carregamento. Assim como foi discutido no primeiro exemplo, agora será abordada a possibilidade das cargas terem sentidos opostos, produzindo o resultado mostrado na Figura 11:



Figura 11 - Topologia final otimizada para dois casos separados de carregamento

É possível observar na imagem que, em comparação com o caso anterior, houve um aumento no grau de complexidade da estrutura otimizada. Agora, sendo considerado o caso de cargas com sentidos opostos, a região central da viga apresenta uma configuração de barras transversais, além de ser possível identificar a presença de barras na extremidade inferior da viga.

Entretanto, a simetria da estrutura se mantém, uma vez que não estão sendo considerados os instantes em que, potencialmente, as forças podem apresentar módulos diferentes, gerando desequilíbrios na estrutura.

3.2.3. Estudo com “n” casos de carregamentos estáticos equivalentes

Finalmente, para o terceiro caso, serão estudadas as cargas dinâmicas, sendo convertidas em “n” casos de carregamentos estáticos equivalentes. Assim como no primeiro exemplo, aqui está de fato sendo empregado o Método do Carregamento Estático Equivalente. Na Figura 12 pode ser observado o resultado:



Figura 12 - Topologia final otimizada para “n” casos de carregamentos estáticos equivalentes

Assim como no exemplo 1, fica clara a similaridade entre o segundo caso e o terceiro, sendo a análise de apenas um caso de carregamento estático nitidamente mais simples e, provavelmente, inadequada para suportar os esforços dinâmicos, na forma em se apresentam no mundo real.

As mesmas estruturas transversais que aparecem na região central da viga otimizada no caso anterior se manifestam nesta análise, sendo um reflexo dos casos em que as forças apresentam sentidos opostos. Além disso, no entanto, fica evidente a ausência do elemento de simetria na estrutura. O ponto de junção das barras transversais que, no caso anterior, se posicionava centralizado em relação aos apoios e aos pontos de aplicação das forças, agora se mostra consideravelmente deslocado para a esquerda. Isso ocorre em função de um desequilíbrio nas magnitudes das forças no caso dinâmico estudado.

Mais uma vez, conforme foi comentado para o primeiro exemplo, fica evidente a necessidade de, em problemas de otimização, ser tratado o caso dinâmico para as cargas impostas à estrutura em questão. Não basta analisar os casos de máximo carregamento ou máximo deslocamento da estrutura, uma vez que ocorrem diferenças significativas dos esforços sofridos pela peça quando, em determinados instantes de tempo, os forçamentos se configuram de formas assimétricas ou diferentes entre si. Tais

configurações são capazes de gerar falhas na estrutura, quando não projetadas adequadamente.

4. Conclusões

De acordo com os pontos apresentados na seção de Fundamentação Teórica deste trabalho, a expectativa era de que o Método do Carregamento Estático Equivalente seria capaz de converter um carregamento dinâmico aplicado em uma estrutura em um carregamento estático, gerando um mesmo campo de deslocamentos na peça.

A importância do ESL é evidente, ao se constatar que a maioria das estruturas reais sofre esforços dinâmicos. Construções como pontes, edifícios e torres de transmissão elétrica são alguns casos onde a otimização topológica pode ser empregada, obtendo-se relevantes economias de material e maximizando-se rigidez. No entanto, o fato de essas estruturas estarem submetidas a esforços variáveis ao longo do tempo impunha um alto custo computacional para o cálculo da otimização topológica.

Nesse contexto, o ESL se propõe a converter esses carregamentos dinâmicos em estáticos, viabilizando os cálculos e promovendo os ganhos desejados. O presente trabalho empregou o método em um caso real e constatou, reforçando a literatura existente sobre o tema, sua efetividade para resolver o problema de otimização topológica sem elevados custos computacionais.

Evidentemente, ainda existem pontos a serem aprofundados na literatura acerca deste tópico, seja através de novas abordagens para as análises, seja pela elaboração de outros tipos de modelos. Segundo Lavôr [1], o estudo de novas formas de reduzir o número de casos de carregamento produzidos pelo Método do Carregamento Estático Equivalente é uma possibilidade interessante. Para isso, podem ser utilizados os picos de deslocamentos ou uma análise estocástica [1]. Outra possibilidade seria a comparação de modelos numéricos com modelos experimentais [1]. Além disso, a implementação do método para modelos tridimensionais é um ponto que ainda pode ser mais desenvolvido [1] e, por fim, poderia se considerar não linearidades nos problemas [1]. As pesquisas ainda estão sendo conduzidas para aprimorar o entendimento no tema.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LAVÔR, Bárbara Valéria de Abreu. **Otimização Topológica de Estruturas Planas sob a Ação de Cargas Dinâmicas utilizando o Método do Carregamento Estático Equivalente**. Orientador: Prof. Anderson Pereira. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Engenharia Mecânica), Pontifícia Universidade Católica, [S. l.], 2019.
- [2] GASS, S. I.; ASSAD, A. A.. **An annotated timeline of operations research: An informal history**, volumen 75. Springer Science & Business Media, 2005
- [3] Simetria na Natureza
Disponível em <shorturl.at/nxJS6>. Acesso em 09/11/2020
- [4] Guia da Engenharia: Ação do Vento em Estruturas
Disponível em <<https://www.guiadaengenharia.com/calculo-vento-estruturas-exercicio/>>. Acesso em 09/11/2020.
- [5] Ponte do Ipanema é interditada pelo DER, em Águas Belas
Disponível em <<https://www.portalagresteviolenito.com.br/2020/04/04/ponte-do-ipanema-e-interditada-pelo-der-em-aguas-belas/>>. Acesso em 09/11/2020.
- [6] KANG, B.S.; CHOI, W. S.; PARK G. J.; **Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement**. Computers & Structures, 2001.
- [7] CHOI, W. S.; PARK G. J.; **Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads based on Modal Analysis**. International Journal for Numeric Methods in Engineering, 1999.
- [8] LAVÔR, B. V. A.; PEREIRA, A.; **Topology optimization of structures subjected to dynamic loads using equivalent static loads**. International Congress of Mechanical Engineering, 2019
- [9] BEHROU, R; GUEST, J. K.; **Topology optimization for transient response of structures subjected to dynamic loads**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2017.
- [10] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I., F.; **PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012.
- [11] SCHMIT, L. A.. **Structural design by systematic synthesis**. In: PROCEEDINGS OF THE SECOND NATIONAL CONFERENCE ON ELECTRONIC COMPUTATION, ASCE, SEPT., 1960, 1960.

