

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Sérgio Rebello Soares do Valle

Modelagem Simulação e Componentes de um Tricóptero

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia
Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro
Setembro de 2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador.

Agradeço à minha família, fundamental em toda a minha formação pessoal e profissional.

Agradeço à Puc-Rio, a todos os professores da minha graduação e ao LDSM pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Modelagem, simulação e componentes de um Tricóptero

Cada vez mais, drones estão sendo utilizados em diversas finalidades. Dentre elas, fotografia, mapeamento de terrenos, vigilância aérea, exploração de minério, óleo e gás, mercado imobiliário, construção, busca e resgate, aplicações militares, dentre muitas outras. A maior parte dos drones utilizados são quadricópteros, mas modelos que operam com três hélices (tricópteros) dispõem de algumas vantagens em relação aos de quatro. Tricópteros costumam ser mais eficientes e, por consequência, ter maior autonomia. Além disso têm um menor custo inicial de construção, menor probabilidade de falhas por possuírem menos motores, e maior manobrabilidade. Essas vantagens indicam um grande potencial no seu estudo. Por isso esse trabalho visa aprofundar o conhecimento desses veículos. Aqui, é estudada a física dos tricópteros, desenvolvendo um modelo matemático para esse tipo de veículo, a partir do qual são realizadas simulações de manobras para validação do modelo e melhor compreensão do seu comportamento, com discussão de como o sistema de controle atua para a realização das manobras, controle de atitude e estabilização. Através da ferramenta Matlab/Simulink, foi realizada a simulação das manobras e, através da ferramenta Solidworks, foi construído um modelo tridimensional simplificado considerando suas principais características geométricas, utilizado para determinação de propriedades de massa, como a matriz de momentos de inércia. São, também, analisados os principais componentes de um tricóptero: Chassi, motor, hélices, IMU (e seus componentes), baterias e controlador PID. Com discussão do funcionamento, tipos existentes e suas vantagens e desvantagens.

Palavras chaves: Tricóptero. Drone. Tri-rotor. UAV. Voo. Simulação. Modelagem. Controle. Componentes.

ABSTRACT

Modeling, simulation, and components of a Tricopter

Increasingly, drones are being used for various purposes. Among them, photography, land mapping, aerial surveillance, ore, oil and gas exploration, real estate market, construction, search and rescue, military applications, among many others. Most of the drones used are quadcopters, but models that operate with three propellers (tricopters) have some advantages over those with four. Tricopters are usually more efficient and, as a result, have greater autonomy. In addition, they have a lower initial construction cost, less probability of failure due to having fewer engines, and greater maneuverability. These advantages indicate great potential in their study. Therefore, this work aims to deepen the knowledge of these vehicles. Here, the physics of the tricopter is studied, developing a mathematical model for this type of vehicle, from which simulations of maneuvers are performed to validate the model and better understand its behavior, with discussion of how the control system acts to perform the maneuvers, attitude control and stabilization. Using the Matlab / Simulink tool, the simulation of the maneuvers was performed and, using the Solidworks tool, a simplified three-dimensional model was built considering its main geometric characteristics, used to determine mass properties, as the matrix of moments of inertia, for example. The main components of a tricopter are also analyzed: Chassis, engine, propellers, IMU (and its components), batteries and PID controller. With discussion of working principles, existing types and their advantages and disadvantages.

Key-words: Tricopter. Drone. Tri-rotor. UAV. Flight. Simulation. Modeling. Control. Components

SUMÁRIO

| | | |
|--------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO: | 1 |
| 2 | PRINCÍPIOS DO VOO DE UM TRICÓPTERO | 5 |
| 2.1. | Voo estacionário | 5 |
| 2.2. | Aumentar altitude | 6 |
| 2.3. | Inclinar para a frente e para trás | 6 |
| 2.4. | Voo reto nivelado | 7 |
| 2.5. | Inclinar para a direita ou esquerda | 7 |
| 2.6. | Giro em torno do eixo vertical | 8 |
| 3 | TRICÓPTERO E COMPONENTES | 10 |
| 3.1. | Chassi | 13 |
| 3.2. | Motores | 14 |
| 3.3. | Hélices | 19 |
| 3.4. | IMU | 22 |
| 3.4.1. | Giroscópio | 22 |
| 3.4.2. | Acelerômetro | 24 |
| 3.4.3. | Magnetômetro | 24 |
| 3.5. | Baterias | 25 |
| 3.6. | Controlador | 26 |
| 4 | CONCEITOS PRELIMINARES | 29 |
| 4.1. | Matrizes de inércia e massa | 29 |
| 4.2. | Referencial local e global | 31 |
| 4.3. | Ângulos de Euler | 32 |
| 5 | MODELAGEM | 35 |
| 5.1. | Forças e Momentos Causados Pelos Motores | 35 |
| 5.2. | Condições de Equilíbrio Estático | 38 |
| 5.3. | Equações de Newton-Euler | 41 |
| 5.4. | Ângulos de Euler e Matrizes de Transformação | 43 |
| 5.4.1. | Definição dos Ângulos de Euler e obtenção da matriz de Transformação: | 44 |
| 5.4.2. | Matriz de Transformação: Referenciais Local - Global | 45 |
| 5.4.3. | Matriz de Transformação: Referencial Local - Ângulos de Euler | 46 |
| 5.5. | Visão Geral da Modelagem | 47 |
| 6 | SIMULAÇÃO | 50 |
| 6.1. | Modelo Solidworks | 50 |

| | | |
|--------|---|----|
| 6.2. | Modelo Matlab/Simulink | 52 |
| 6.3. | Resultados | 52 |
| 6.3.1. | Voo estacionário | 53 |
| 6.3.2. | Aumento de altitude seguido de voo estacionário | 56 |
| 6.3.3. | Voo reto e nivelado | 58 |
| 6.3.4. | Oscilação Vertical e nivelamento | 61 |
| 7 | CONCLUSÃO | 63 |
| 8 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 64 |
| 9 | ANEXO | 66 |

Lista de figuras

- Figura 1: Desenho do helicóptero de da Vinci (retirada de https://www.pngitem.com/middle/obobww_leonardo-da-vinci-hd-png-download/)
- Figura 2: Superfícies de controle de um avião (retirada de <http://www.aerospaceweb.org/question/aerodynamics/q0208.shtml>)
- Figura 3: Esquema do tricóptero estudado. Na imagem da direita a vista de cima e na imagem da esquerda a vista por trás.
- Figura 4: Decomposição do peso e FT no equilíbrio estático. O peso é vertical e o sistema de coordenadas fica alinhado com o veículo
- Figura 5: (a) Condição para inclinar-se à frente (b) Condição para inclinar-se para trás
- Figura 6: (a) Condições para inclinar à direita (b) Condições para inclinar à esquerda
- Figura 7: Condições para guinada (a) sentido anti-horário (b) horário
- Figura 8: Dados do tricóptero e de seus componentes
- Figura 9: Vista superior do tricóptero com dimensões
- Figura 10: Vista lateral do tricóptero com dimensões
- Figura 11: Vista frontal do tricóptero com dimensões
- Figura 12: Vista oblíqua do tricóptero
- Figura 13: visualização do chassi
- Figura 14: Servo-motor utilizado para inclinar o rotor traseiro e motor traseiro
- Figura 15: Ilustração esquemática do princípio de funcionamento do motor elétrico DC com escovas. Tirada de <https://www.youtube.com/watch?v=LAtPHANefQo> em 13/11/2020
- Figura 16: Esquerda: Polo positivo faz contato com extremidade inferior. Direita: Polo positivo passa a fazer contato com extremidade superior

Figura 17: (a) Armação intermediária introduzida (b) Várias armações intermediárias introduzidas. Torque mais constante

Figura 18: Esquema do motor BLDC Inrunner

Figura 19: Esquema do motor BLDC Outrunner

Figura 20: Perfil de um aerofólio e ângulo de ataque

Figura 21: Redirecionamento do escoamento e componentes da força aerodinâmica. Sustentação em verde e arrasto em vermelho. Retirada de <https://swyde.com/s/Lift>

Figura 22: Modelo 3D das hélices do tricóptero, construído pelo Solidworks

Figura 23: Inertial Measurement Unit - Unidade de Medição Inercial

Figura 24: Giroscópio empregado na aviação

Figura 25: Giroscópio de estrutura vibratória.

Figura 26: Esquema de um acelerômetro. Retirada de <https://www.fierceelectronics.com/sensors/what-accelerometer>

Figura 27: magnetômetro de efeito Hall. Retirada de http://wikid.io.tudelft.nl/WikID/index.php/Hall_effect_Magnetometer

Figura 28: Bateria utilizada no tricóptero

Figura 29: Posição relativa dos referenciais

Figura 30: Ângulos de Euler

Figura 31: Esquema da geometria do tricóptero estudado

Figura 32: Forças e momentos gerados pelos propulsores

Figura 33: Diagrama de blocos das equações de Newton-Euler

Figura 34: Diagrama de blocos das matrizes de transformação Local-Global

Figura 35: Diagrama de blocos geral do modelo

Figura 36: Modelo do Solidworks visto por trás

Figura 37: Modelo do Solidworks visto pela frente

Figura 38: Dados obtidos pelo Solidworks com a ferramenta "propriedades de massa"

Figura 39: Diagrama de blocos construído no Simulink

Figura 40: Velocidade dos 3 motores

Figura 41: Ângulo do motor traseiro

Figura 42: Ângulo de rolagem

Figura 43: Altura do drone em função do tempo

Figura 44: Aceleração vertical em função do tempo

Figura 45: trajetória tridimensional do drone
Figura 49: trajetória tridimensional do tricóptero em aumento de altitude

Figura 46: Velocidade e ângulo dos motores para aumento de altitude e posterior voo estacionário

Figura 47: Altura do tricóptero em função do tempo

Figura 48: Acelerações em função do tempo

Figura 49: trajetória tridimensional do tricóptero em aumento de altitude

Figura 50: Componentes da aceleração (à esquerda) e força (à direita) na situação de voo reto e nivelado onde $F_{estático}$ é a força necessária para manter o voo estacionário.

Figura 51: Velocidade dos motores e ângulo do rotor traseiro para voo reto e nivelado.

Figura 52: Três coordenadas da posição e aceleração na direção x

Figura 53: Ângulos de Euler em função do tempo no voo reto e nivelado

Figura 54: Trajetória do tricóptero em voo reto nivelado

Figura 55: Trajetória tridimensional do tricóptero mudando de altitude

Figura 56: Acelerações verticais resultantes ao longo da trajetória oscilatória

Figura 57: Velocidades angulares e ângulo do motor traseiro em função do tempo

1 INTRODUÇÃO:

O ato de voar tem intrigado a humanidade durante toda a história. Mas apenas muito recentemente, com os rápidos avanços da tecnologia os primeiros veículos capazes de voar começaram a ser desenvolvidos. Os primeiros voos foram possíveis graças ao desenvolvimento do motor a combustão interna que possui relação peso potência baixa o suficiente para tal. Após isso, sucessivos desenvolvimentos tecnológicos foram reduzindo o custo e aumentando a versatilidade e aplicabilidade de aeronaves. Hoje, desde foguetes até drones, esses veículos realizam diversas funções importantes e que têm se tornado indispensáveis.

As primeiras aeronaves a deixar o solo foram os aviões. Estes são classificados como aeronaves de asa fixa. São eficientes e estáveis, mas são incapazes de pairar ou pousar verticalmente. Para isso é necessário que o veículo esteja parado em relação ao ar, mas suas asas estejam em movimento, para que possam gerar sustentação. Na natureza, as aves batem suas asas gerando sustentação enquanto seus corpos não se movem. O conceito de asa rotativa contorna esse problema, no qual o veículo voa sustentado por hélices, sendo cada pá uma asa. Esse tipo de aeronave é demasiadamente instável e, por isso, foi necessário muito tempo para que o primeiro voo bem sucedido ocorresse, ainda que a ideia tenha surgido relativamente cedo, proposta por Leonardo da Vinci. O nome helicóptero deriva das palavras gregas hélix (espiral ou hélice) e pteron (asa)

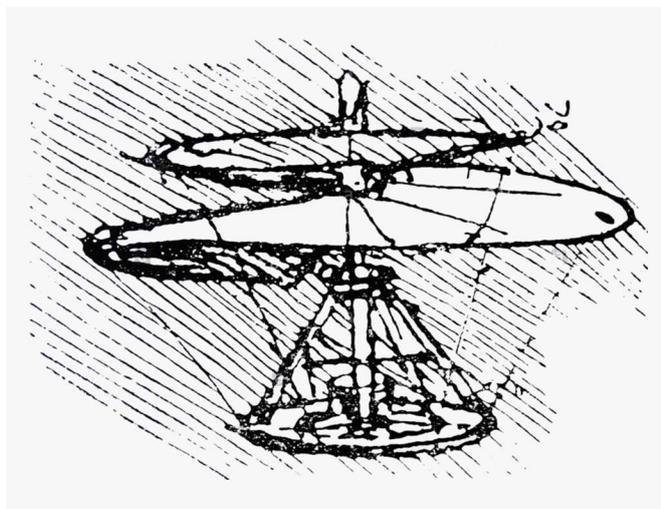


Figura 1: Desenho do helicóptero de da Vinci (retirada de https://www.pngitem.com/middle/obobww_leonardo-da-vinci-hd-png-download/)

A primeira fonte de instabilidade dessas aeronaves é o torque de reação que ocorre em cada uma das suas hélices. Se não houver nenhuma compensação, a aeronave gira descontroladamente no sentido contrário. Para contornar esse problema pode-se usar pares de hélices que giram em sentidos opostos, o torque de uma compensando e cancelando o da outra, ou inclinar-se uma das hélices de modo a produzir uma força com componente horizontal realizando o torque compensatório.

O próximo, e mais desafiador, problema desse tipo de aeronave é o controle e estabilização de sua trajetória. Os aviões utilizam superfícies de comando em suas asas para mudar a quantidade de sustentação que cada uma delas produz e assim mover a aeronave em torno de seus 3 eixos.

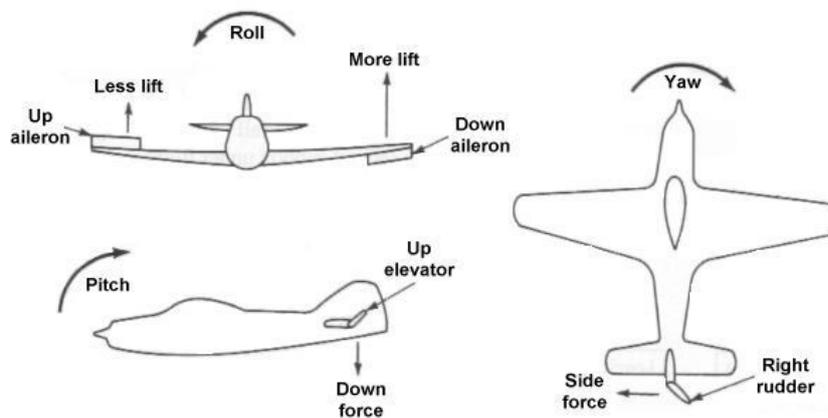


Figura 2: Superfícies de controle de um avião (retirada de <http://www.aerospaceweb.org/question/aerodynamics/q0208.shtml>)

Realizar esse tipo de controle em uma hélice é muito mais tecnicamente demandante. A primeira aeronave de asa rotativa a contornar esses desafios foi o helicóptero. Uma única hélice é usada para gerar sustentação e uma outra, menor é utilizada apenas para compensar o torque de reação inclinada 90° em relação á horizontal. Para contornar o problema de manobrabilidade, um intrincado sistema atua para, sob comando, gerar sustentação assimétrica em torno da hélice e poder inclinar o helicóptero na direção desejada controlando sua trajetória ou estabilizando seu voo. Esse comando se chama "cíclico" e funciona aumentando o ângulo de ataque das pás de um lado e reduzindo-o do outro, assim, conforme as pás giram, seu ângulo de ataque é aumentado e diminuído de acordo com a sua posição.

O conceito de voo de um veículo de asa rotativa é compensar o peso com a força de sustentação da(s) hélice(s), inclinando essa força para que a componente vertical cancele o peso e a componente horizontal controle sua trajetória. O helicóptero descrito acima executa isso perfeitamente, mas não é a única forma de fazê-lo e, também, não é muito viável em pequenas escalas. O quadricóptero contorna o problema do torque de reação utilizando dois pares de hélices que giram em sentidos opostos e controla sua trajetória aumentando e diminuindo devidamente hélices individualmente para quebrar a simetria das forças de sustentação, inclinandose. O problema dessa solução é o mesmo motivo pelo qual aeronaves de asa rotativa com mais de 2 hélices nunca foram bem sucedidos. Ao mudar a velocidade e, portanto, a sustentação de uma das hélices individualmente, diversos efeitos simultâneos são causados no veículo. Aumentar a velocidade de uma das hélices, por exemplo, com a finalidade de inclinar o drone em um sentido, quebra o equilíbrio dos torques de reação e faz com que seja necessária uma resposta das outras hélices para compensar isso. Esse tipo de instabilidade e co-dependência entre as hélices torna praticamente impossível o comando por um ser humano.

Recentemente, porém, os softwares de controle se desenvolveram ao ponto de serem capazes de lidar com esses tipos de instabilidade tornando possível a aplicação prática desses veículos. Graças a um conceito chamado de fly-by-wire, onde o piloto não controla diretamente as hélices ou componentes de comando, mas executa inputs definindo sua intenção e o controlador de voo os traduz, executando a manobra desejada. Assim, o comando de ir para frente é transformado pelo controlador nas alterações necessárias em cada um dos rotores para executar a ação.

O tema desse trabalho é o tricóptero. Por possuir 3 hélices, não possui pares cancelando os torques de reação e, para manter sua estabilidade, pode possuir, em um de seus rotores ou em todos, um servo-motor que o inclina conforme necessário para cancelar o efeito das reações. Mais detalhes sobre sua dinâmica serão dados mais adiante. No momento é suficiente entender que esse veículo, por essa característica, se torna ainda mais instável. Assim, ao longo desse trabalho será estudada a fundo sua dinâmica e serão apresentadas estratégias de controle.

Cada vez mais, drones em geral estão sendo utilizados em diversas finalidades. Dentre elas, fotografia, mapeamento de terrenos, vigilância aérea, exploração de minério, óleo e gás, mercado imobiliário, construção, busca e resgate, aplicações militares dentre muitas outras. A maior parte dos drones utilizados são quadricópteros, mas modelos que operam com três hélices (tricópteros) dispõem de algumas vantagens em relação aos de quatro. Costumam ser mais eficientes e por consequência ter maior autonomia. Além disso têm um custo inicial de construção menor, têm menor probabilidade de falhas por possuírem menos motores, e maior manobrabilidade. Essas vantagens e aplicações indicam um grande potencial no seu estudo. Por isso esse trabalho visa aprofundar o conhecimento desses veículos.

2 PRINCÍPIOS DO VOO DE UM TRICÓPTERO

Como foi comentado anteriormente, o tricóptero apresenta uma enorme instabilidade. Logo sua dinâmica precisa ser controlada por um controlador de voo. Mais adiante será detalhado todo o equacionamento necessário para esse controle e como o controlador atua para estabilizar e executar trajetórias desejadas. Nessa seção, será abordado o princípio de voo de um tricóptero de forma simplificada e qualitativa, bem como as estratégias para execução de algumas manobras. Isso, com a finalidade de tornar mais familiar o comportamento dinâmico desse tipo de veículo.

O tricóptero estudado aqui, possui três rotores sendo um deles livre para girar, se inclinando como na Figura 3. Os dois rotores dianteiros giram em sentidos contrários. As velocidades de rotação são representadas por Ω e seus sentidos pelas setas. Nota-se que dois rotores giram no sentido anti-horário e dois no sentido horário. Nos índices, “D” significa que é dianteiro, “T”, que é traseiro, “d”, que é direito e “e”, que é esquerdo. Cada uma das três hastes que conectam os rotores ao centro de massa tem o mesmo comprimento l e fazem um ângulo de 120° entre si. Na figura da direita é possível observar a inclinação do rotor traseiro definida pelo ângulo δ .

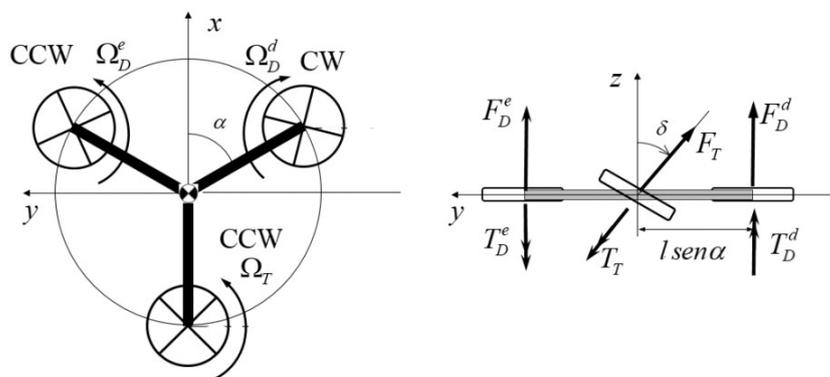


Figura 3: Esquema do tricóptero estudado. Na imagem da direita a vista de cima e na imagem da esquerda a vista por trás.

2.1. Voo estacionário

Para que o tricóptero permaneça em voo estacionário as forças dos três rotores devem cancelar o peso, e os torques de reação devem se equilibrar. Os dois rotores dianteiros giram em sentidos opostos e geram torques opostos que se cancelam. O rotor traseiro é inclinado para produzir uma componente vertical (de sustentação) e uma horizontal que aplica um torque no corpo do veículo compensando o seu próprio

torque de reação. Essa componente horizontal produziria uma aceleração no eixo y já que não há outra força nessa direção para compensá-la. Então, o veículo deve se inclinar para que a componente do peso, agora presente nesse eixo, equilibre essa força. Essa inclinação é mostrada de forma exagerada na Figura 4.

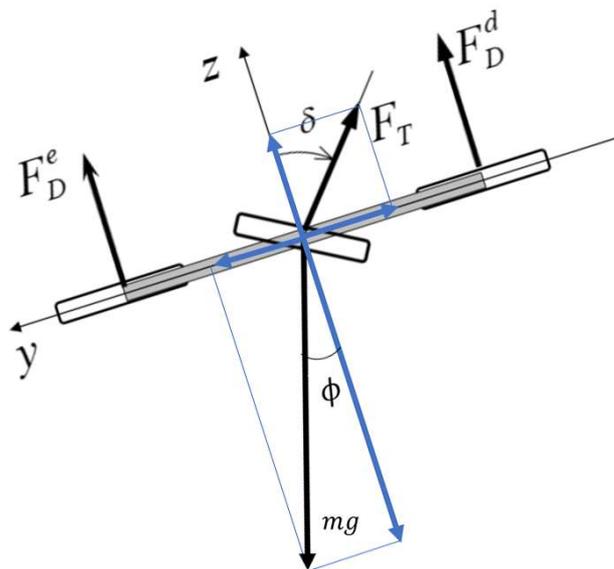


Figura 4: Decomposição do peso e F_T no equilíbrio estático. O peso é vertical e o sistema de coordenadas fica alinhado com o veículo

2.2. Aumentar altitude

Para iniciar uma subida, a sustentação resultante dos três motores deve passar a ser maior do que o peso. Para isso os três motores devem aumentar suas sustentações em conjunto sem quebrar o equilíbrio de momentos. Os dois motores dianteiros devem aumentar suas rotações igualmente. Isso aumenta tanto a sustentação quanto o torque de reação, mas como os dois motores giram em sentidos opostos, esses torques se cancelam. O motor traseiro deve aumentar sua rotação também, o que aumenta ambas as componentes de F_T mostradas na Figura 4, logo, o torque de reação a mais, é automaticamente compensado.

2.3. Inclinarse para a frente e para trás

Para inclinar-se à frente, basta que os dois rotores dianteiros diminuam sua sustentação enquanto o traseiro aumenta. Os torques de reação dos rotores dianteiros diminuem igualmente e continuam se cancelando. O aumento do torque de reação do

rotor traseiro é novamente compensado pelo aumento da componente horizontal de F_T . Logo o equilíbrio de momentos em torno do eixo transversal é quebrado e o veículo se inclina para a frente. Para inclinar-se para trás, o oposto deve acontecer onde os motores dianteiros aumentam suas velocidades juntos e o motor traseiro diminui.

Nas figuras que ilustram as condições, a cor verde significa aumento, e a vermelha, diminuição.

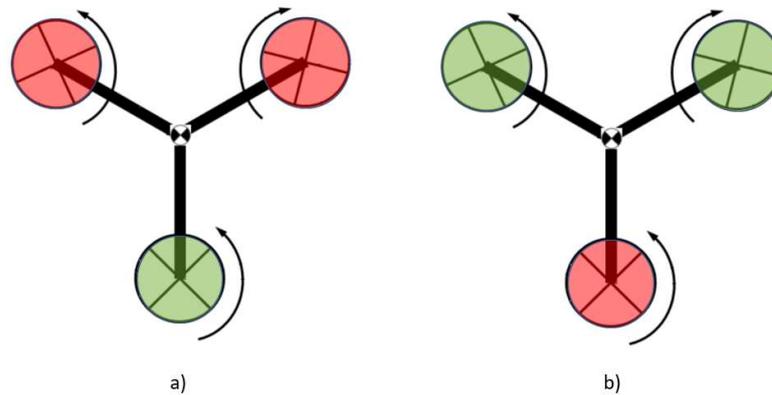


Figura 5: (a) Condição para inclinar-se à frente (b) Condição para inclinar-se para trás

2.4. Voo reto nivelado

Após se inclinar para a frente, o equilíbrio de momentos em torno do eixo transversal deve ser reestabelecido. Para isso os motores devem voltar à uma configuração parecida com a de voo estacionário, mas nesse caso é necessário que a resultante de sustentação dos três rotores seja maior que o peso do veículo. Isso porque o veículo está inclinado e a sustentação possui uma componente vertical que cancela o efeito do peso, e uma horizontal que vence a resistência do ar mantendo o movimento retilíneo uniforme.

2.5. Inclinar para a direita ou esquerda

Para se inclinar para um dos lados o veículo deve quebrar o equilíbrio de momentos em torno do eixo longitudinal. Para isso, basta que a sustentação do motor de um lado aumente e a do outro diminua, mas assim, as velocidades dos motores dianteiros passam a ser diferentes, os torques de reação não mais se cancelam e o rotor traseiro deve se inclinar para reestabelecer o equilíbrio.

Ou seja, para se inclinar para a esquerda o motor direito deve aumentar sua rotação e o esquerdo deve diminuir. Isso causa um torque de reação resultante no

sentido anti-horário. O motor traseiro, então, diminui sua inclinação (e, portanto, sua velocidade, para manter a componente vertical constante) até reestabelecer o equilíbrio.

Para se inclinar para a direita o motor esquerdo deve aumentar sua rotação e o direito deve diminuir. Agora é causado um torque de reação no sentido horário. O motor traseiro deve, então, aumentar sua inclinação e velocidade até reestabelecer o equilíbrio.

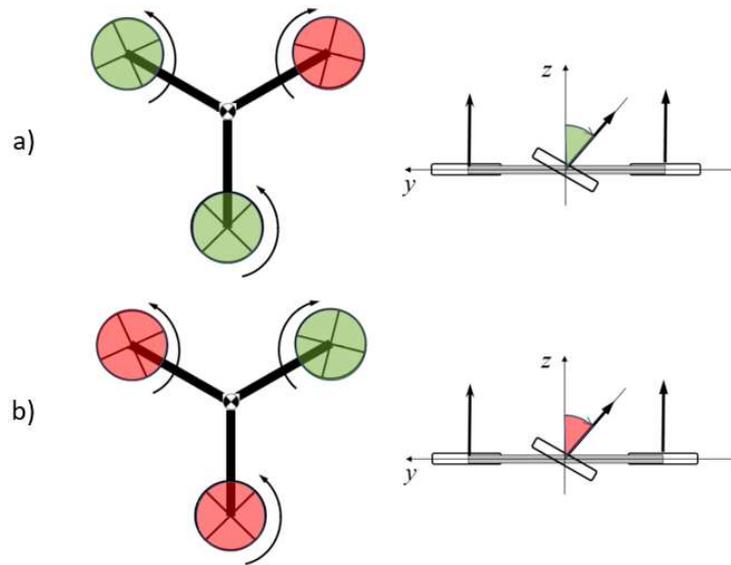


Figura 6: (a) Condições para inclinar à direita (b) Condições para inclinar à esquerda

2.6. Giro em torno do eixo vertical

O veículo deve quebrar o equilíbrio dos torques de reação. Se as velocidades dos rotores dianteiros se alterarem, haverá uma assimetria na sustentação, e o veículo irá realizar um giro indesejado em torno do eixo longitudinal. Logo, é o rotor traseiro que comanda esse movimento.

Para girar no sentido anti-horário (virando para a esquerda) o rotor traseiro aumenta sua inclinação e velocidade angular simultaneamente, a fim de manter a componente vertical constante e aumentar a lateral. Para girar no sentido horário, ele diminui sua inclinação e velocidade angular simultaneamente, por razão análoga.

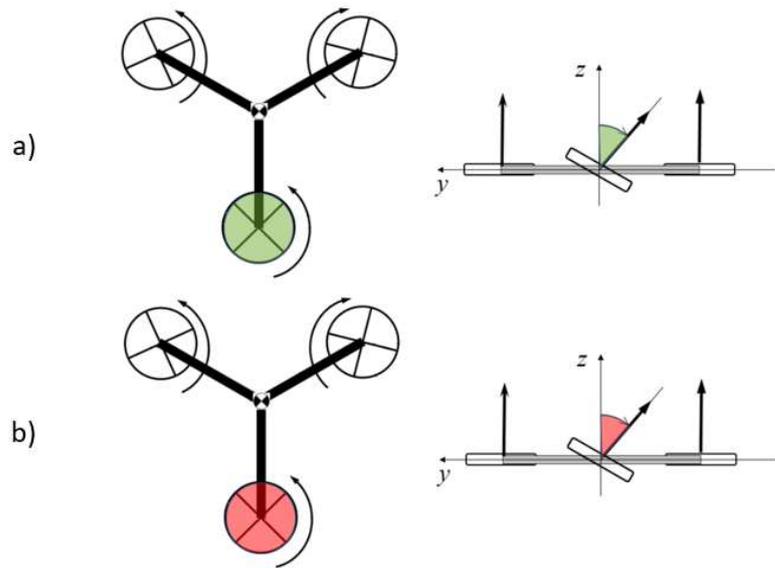


Figura 7: Condições para guinada (a) sentido anti-horário (b) horário

3 TRICÓPTERO E COMPONENTES

O tricóptero estudado nesse trabalho é da marca e modelo Quamum Trifecta. A Figura 8 é uma tabela com alguns dados e especificações. A Figura 12 mostra o drone de vários ângulos e algumas medidas importantes.

Dados Trirrotor LDSM

Lista dos Principais Componentes

| | Marca Tipo | Dimensões | Massa | Quantidade |
|---------------------------|---------------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| Chassis (Frame) | Quamum Trifecta | Vide Fotos | ~160,0 g | 1 160 g |
| Servo Motor | Turnigy TGY 9018 MG | 28,8×23×12,1 mm | 14,7 g | 1 14,7 g |
| Motor | Multistar 2209 1200Kv | (D×h) 27,8×21,2 mm | 39,8 g | 3 119,4 g |
| ESC | EMAX Simon Series 20A | ~ 52,1×26,9×8 mm | 31,3 g <i>c/ cabos</i> | 3 93,9 g |
| Par de Engrenagens | (D×h) 1 × 1 | ~ 14,9×8,6 ~ 14,9×7,0 | 5,0 g | 1 |
| Outros | --- | --- | 15,0 g | --- |
| TOTAL PARCIAL | | | | ~ 408 g |
| Bateria | Turnigy LiPo 3S (11,1 V) 1800 mAh 30C | 104,8×33,8×2,1 mm | 145,7 g <i>c/ cabos</i> | 1 147,5 g |
| TOTAL PARCIAL | | | | ~ 555,5 g |
| Hélices | Carbono | 2 pás D 116 mm | 2,5 g | 3 7,5 g |
| | Plástico | 3 pás D 110 mm | 4,4 g | 13,2 g |
| Fixação Hélices | ---- | | 2,5 g <i>Incluídos 2 parafusos</i> | 3 7,5 g |
| TOTAL PARCIAL | | | | 2 pás 162,5 g 3 pás 168,2 g |
| TOTAL ESTIMADO | | | | 2 pás 570,5 g 3 pás 576,2 g |

Figura 8: Dados do tricóptero e de seus componentes

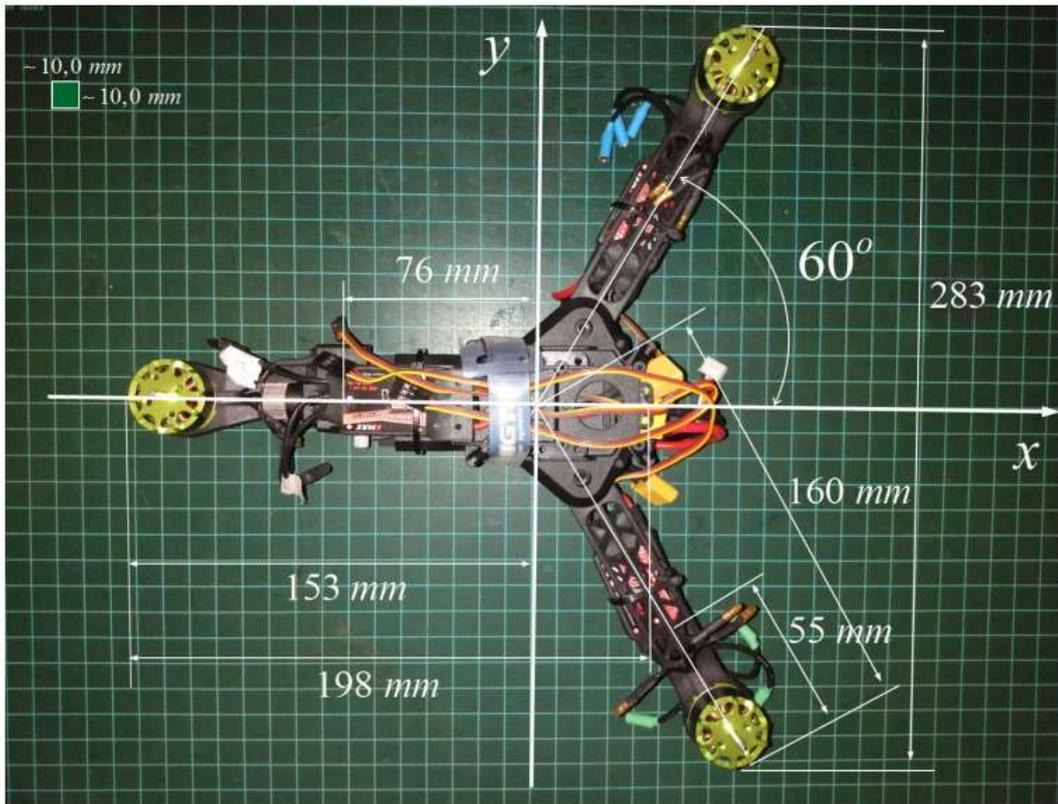


Figura 9: Vista superior do tricóptero com dimensões

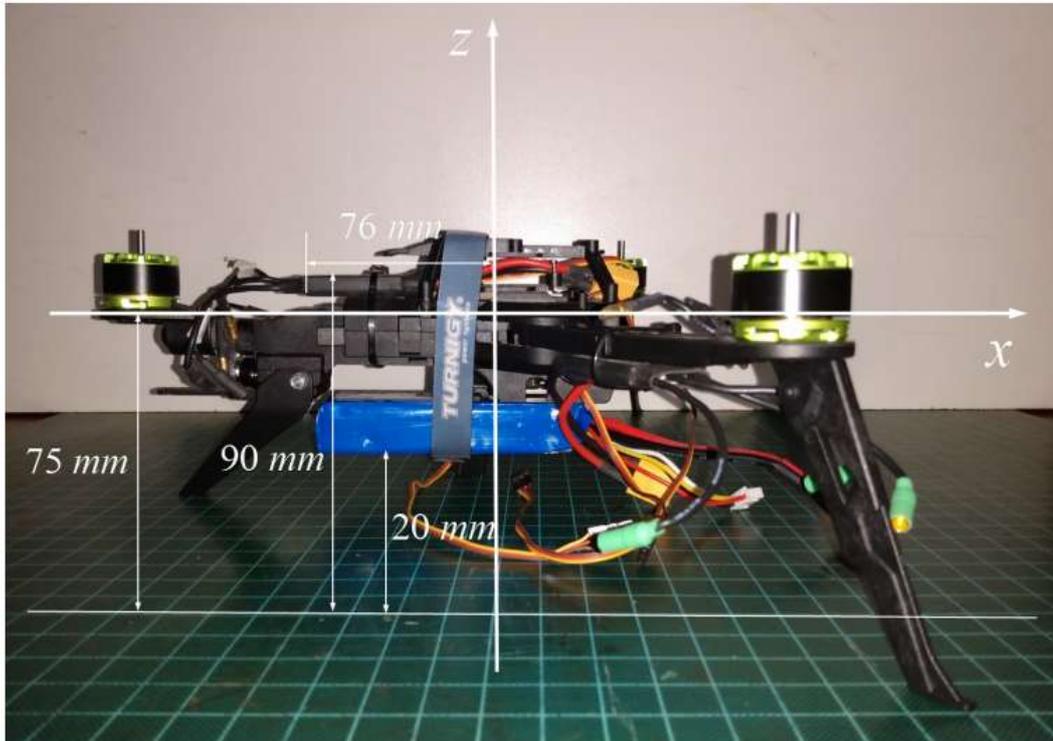


Figura 10: Vista lateral do tricóptero com dimensões

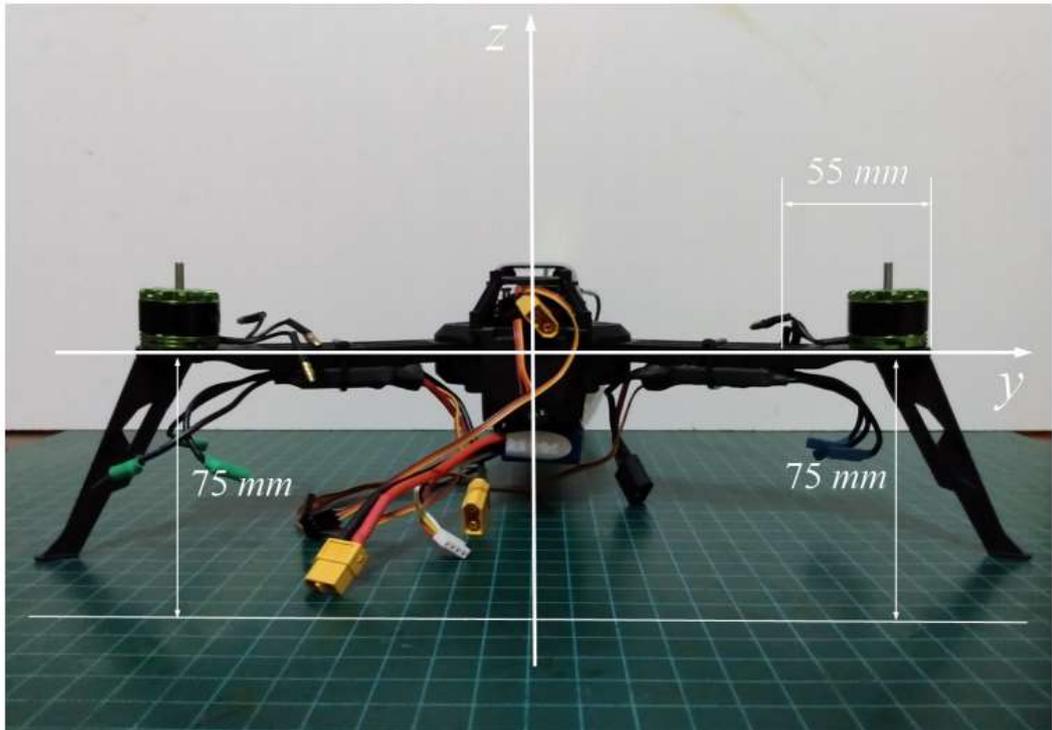


Figura 11: Vista frontal do tricóptero com dimensões

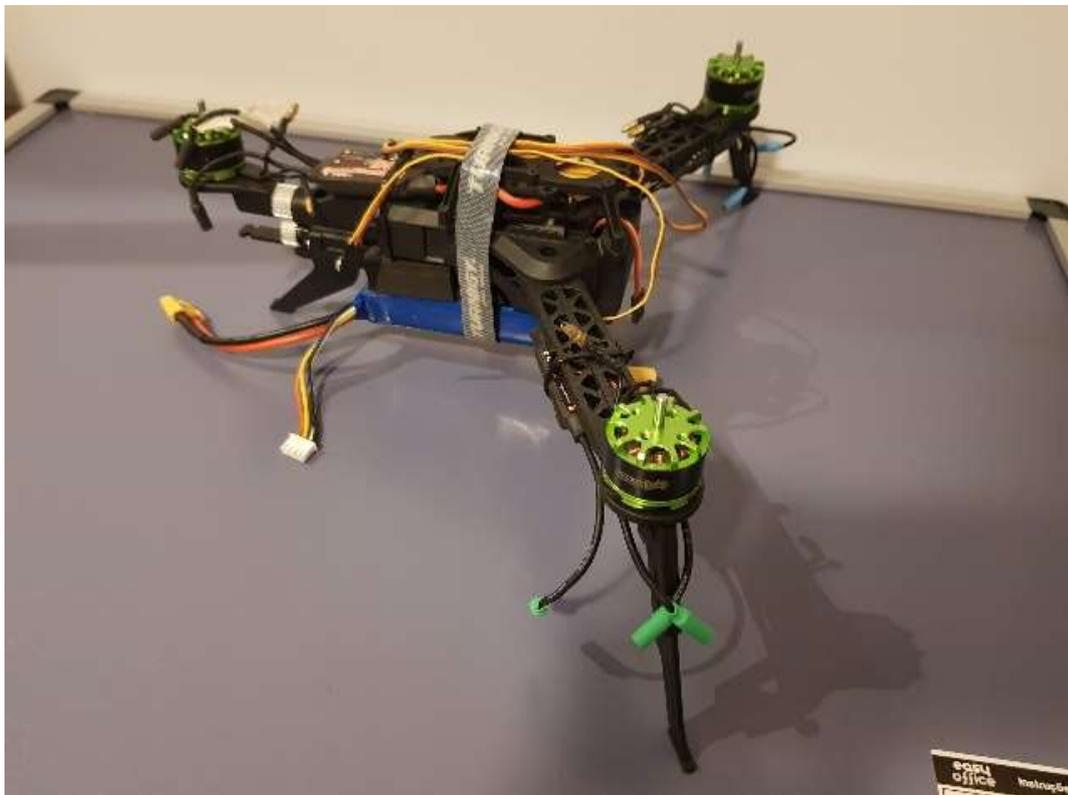


Figura 12: Vista oblíqua do tricóptero

3.1. Chassi

Há dois tipos principais de chassi ou corpo. O mais utilizado em tri-rottores é o frame Y e o segundo é o frame T. O drone estudado nesse trabalho possui frame Y. Para um bom funcionamento e equilíbrio do veículo é importante que os 3 rotores formem, entre si, um triângulo equilátero e que o centro de massa coincida com o centro geométrico desse triângulo (a Figura 3 mostra essa relação geométrica, onde o ângulo α é igual a 60 graus).



Figura 13: visualização do chassi

O frame Y possui 3 braços de mesmo comprimento separados entre si de ângulos iguais a 120° . Esse tipo de chassi apresenta a vantagem de que o centro de massa tende a ficar muito próximo do centro geométrico do veículo e chassi. Toda a carga e componentes mais pesados estarão posicionados muito próximos à junção dos 3 braços. Caso o veículo esteja sendo utilizado para filmagem, a câmera, se posicionada à frente, pode ter um ângulo de visão de 120° , o que na maior parte dos casos é mais do que o necessário.

O frame T possibilita filmagens com ângulos maiores ou qualquer aplicação em que seja necessário um espaço maior na parte da frente. Acaba requerendo maior complexidade de modelagem e estrutural.

3.2. Motores

Motores elétricos de corrente contínua sem escovas (Brushless Direct Current Motor – BLDCM) possuem algumas vantagens significativas em relação aos motores com escovas. Algumas dessas vantagens são, uma maior relação torque/peso (muito vantajosa para aplicação em aeronaves de pequeno tamanho, como drones), maior vida útil, menos ruído, menos interferência eletromagnética (menos interferência com o funcionamento do IMU), e maior potência por volume, limitada praticamente apenas pela geração de calor.

As vantagens citadas, ilustram suficientemente o porquê de se optar por motores BLDC. Nesses, o controle da velocidade é feito através da frequência de alimentação conforme será detalhado mais adiante. Assim, já que, para o controle apropriado de um drone, é necessário o controle preciso da velocidade de rotação das hélices individualmente, esse tipo de motor passa a apresentar mais uma vantagem nessa aplicação. Já o controle da inclinação do rotor traseiro é feito por um servo-motor. O motor BLDC tem controle preciso de sua velocidade e o servo-motor, controle preciso de sua posição angular, exatamente o que é necessário para o controle adequado do tricóptero. Ambos serão abordados aqui.

O servo-motor é um motor elétrico de corrente contínua com escovas que possui um sensor que mede a posição angular e envia um feedback para o controlador. Assim o controlador determina a voltagem a ser aplicada a para estabelecer uma determinada posição angular desejada.



Figura 14: Servo-motor utilizado para inclinar o rotor traseiro e motor traseiro

O princípio de funcionamento de um motor elétrico com escovas é baseado na Força de Lorentz. O motor é composto de duas partes, uma que se move, que é o rotor, e outra que não se move, que é o estator (observar Figura 15). O estator é posicionado por fora gerando um campo magnético dentro do qual fica o rotor. O estator pode ser feito de ímãs permanentes ou de eletroímãs. O rotor é preso ao eixo do motor e é constituído de uma armação de metal pela qual passa uma corrente elétrica. Essa armação tem formato aproximado de “U” e está conectada a uma fonte de tensão através de escovas que deslizam sobre o contato elétrico de ambas as extremidades, daí o nome desse tipo de motor. Esse contato tem que deslizar já que o rotor, enquanto o motor está em funcionamento, está girando. Essa armação é orientada de forma que os lados paralelos do “U” sempre estejam perpendiculares ao campo magnético do estator (Figura 15). Nos lados opostos do “U” a corrente elétrica flui em sentidos contrários, gerando forças de sentidos opostos, uma em cada lado, de acordo com a Lei de Lorentz. Essas forças são perpendiculares ao fio e ao campo magnético e, por estarem em lados contrários do eixo, geram torques no mesmo sentido. A Figura 15 ilustra essa situação. Nela, as setas azuis representam o sentido da corrente elétrica e as vermelhas são as forças de Lorentz produzidas nas cargas em movimento.

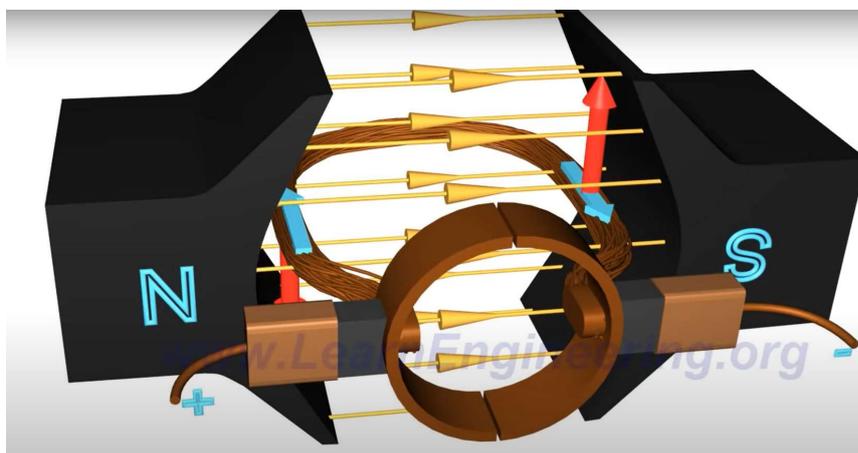


Figura 15: Ilustração esquemática do princípio de funcionamento do motor elétrico DC com escovas. Tirada de <https://www.youtube.com/watch?v=LAtPHANefQo> em 13/11/2020

Conforme a armação gira, é necessário inverter o sentido da corrente nela para continuar produzindo um torque que rotacione o motor. Assim as escovas, conforme a armação gira, mudam a extremidade com a qual fazem contato.

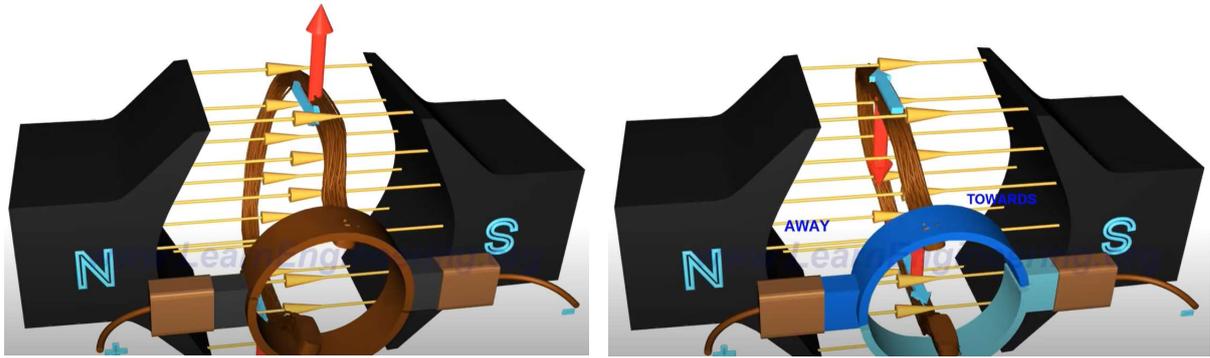


Figura 16: Esquerda: Polo positivo faz contato com extremidade inferior. Direita: Polo positivo passa a fazer contato com extremidade superior

É possível observar que o torque irá variar em função da orientação da armação. Sendo máximo quando o plano da armação é paralelo às linhas do campo magnético e nulo quando for perpendicular. É justamente no momento em que o torque é nulo, que é invertido o sentido da corrente. Assim, introduzindo mais armações em orientações intermediárias é possível ter sempre uma configuração em que o torque é o mais próximo possível do máximo. Basta que o contato elétrico seja feito sempre com a armação cujo plano esteja mais alinhado com as linhas do campo magnético. Quanto mais armações intermediárias forem introduzidas, mais constante será o torque produzido pelo motor.

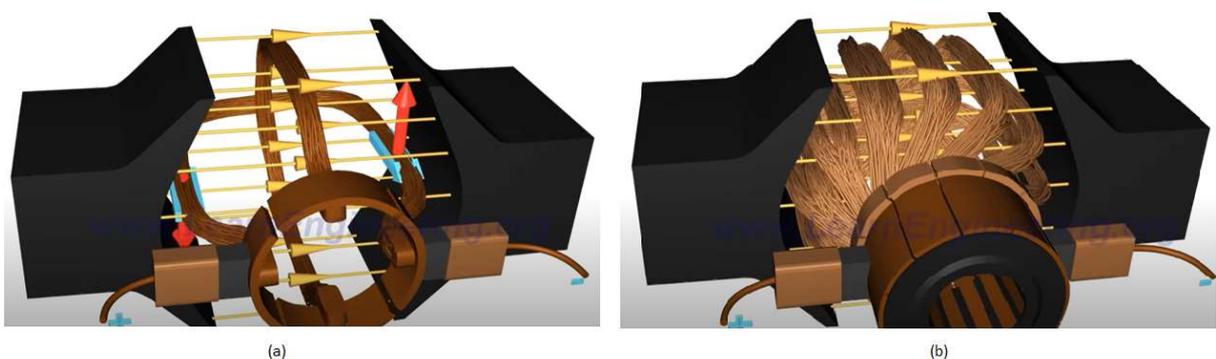


Figura 17: (a) Armação intermediária introduzida (b) Várias armações intermediárias introduzidas. Torque mais constante

O motor BLDC não possui contatos deslizantes, mas seu princípio de funcionamento é parecido com o descrito acima. Um outro modo de interpretar o

funcionamento do motor com escovas é que a corrente elétrica, passando pela armação em “U”, produz um segundo campo magnético, em seu interior, que não está alinhado com o do estator. As forças produzidas, fazem o torque necessário para que os dois campos magnéticos se alinhem. O maior torque será produzido quando o ângulo entre os dois campos for de 90°. Assim, para manter o motor em funcionamento, basta garantir que o campo do rotor esteja sempre defasado em relação ao campo do estator. Dessa forma, o rotor, não importando o quanto gire, vai estar sempre submetido a um torque.

O que mantém a defasagem do campo magnético no motor com escovas, são justamente os contatos deslizantes que passam a fazer contato sempre com novas armações conforme o motor gira. No caso dos motores BLDC a defasagem do campo magnético é feita alternando o acionamento de diferentes armações fixas no estator. Assim o campo magnético gira conforme é produzido por sucessivas armações fixas. O que está girando (no rotor) são ímãs permanentes, logo não é necessário nenhum contato deslizante. O desafio desse tipo de motor é, justamente, sincronizar o acionamento de cada uma dessas fases com a velocidade de rotação do rotor.

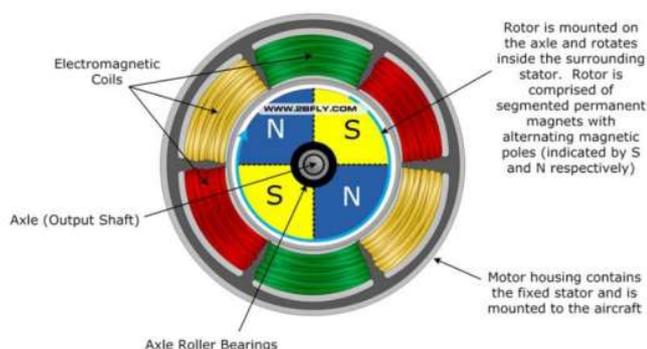


Figura 18: Esquema do motor BLDC Inrunner

Há dois tipos de motor BLDC, os “Outrunners” (figura 19) e “Inrunners” (figura 18). A diferença entre eles se dá na disposição do rotor e do estator. Nos Outrunners o rotor gira por fora do estator e, nos Inrunners, gira por dentro.

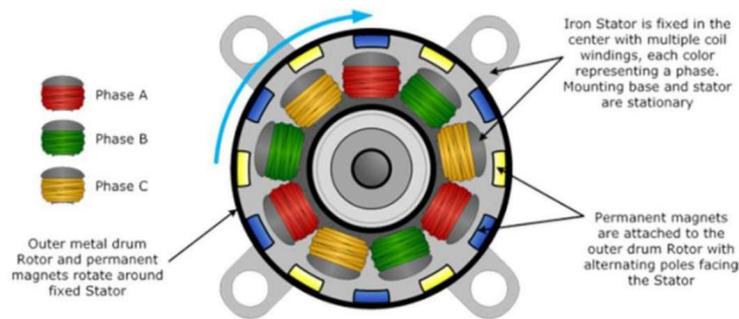


Figura 19: Esquema do motor BLDC Outrunner

Há três fases de arames que são acionadas sequencialmente. Na figura 18 e figura 19, as fases estão representadas em cores diferentes. Quando uma das fases é acionada, os polos dos ímãs permanentes são atraídos pelos polos do campo magnético dos eletroímãs e é produzido um torque, que move o rotor. A partir daí, esta fase é desligada e a fase seguinte é acionada dando continuidade ao movimento do rotor, e assim por diante. Mas para que esse procedimento seja possível, o variador de frequência precisa ser informado da posição angular do rotor para que a fase correta seja acionada. Para isso pode ser utilizado um dispositivo que mede a posição angular em questão e informa ao variador de frequência.

Outra alternativa, para motores que não incorporam esses dispositivos, é, de forma bem simplificada, a seguinte. O variador de frequência introduz corrente em uma das fases o que causa o movimento do rotor, mesmo que no sentido contrário ao desejado. Essa rotação causa uma variação do campo magnético nas fases que não estão energizadas e induz tensões nas mesmas. O variador, mede essas tensões e pode estimar a posição do rotor dessa forma.

Diferentes fases podem ser acionadas simultaneamente para que o torque produzido seja maior. Se duas fases adjacentes forem acionadas com polaridades opostas enquanto os ímãs do rotor estiverem entre elas, estes estarão sujeitos a uma força repulsiva e uma atrativa ao mesmo tempo. Outra estratégia para aumentar o torque é trabalhar com mais polos por fase e mais polos nos ímãs permanentes do rotor. No motor da Figura 19 há 3 polos por fase sendo possível haver mais.

Os motores Inrunners costumam ser mais finos e longos, por estarem sujeitos a forças centrífugas menores, podem operar a velocidades angulares maiores. Já os

Outrunners por estarem dispostos por fora do rotor, possuem maior diâmetro e menor comprimento. São capazes de produzir torque muito maiores e operam em velocidades menores. Os motores do tricóptero estudado são do tipo Outrunner.

3.3. Hélices

As hélices ou propulsores são um elemento importantíssimo para o funcionamento de uma aeronave. São a parte que converte o torque dos motores em forças que irão sustentar e movimentá-la. A designação, veículo de asa rotativa, se justifica pelo fato de as hélices ou propulsores serem, de fato, asas que giram. O perfil de uma hélice é o mesmo perfil de um aerofólio.

Um aerofólio funciona, de forma simplificada, por uma combinação do princípio de Bernoulli com a lei de conservação de momento linear. A geometria do aerofólio, redireciona o escoamento fazendo com que o fluido seja acelerado para baixo e o aerofólio sofre uma força de reação para cima. Ao mesmo tempo o fluido que escoar do lado de cima precisa percorrer uma trajetória maior do que o que escoar por baixo, então sua velocidade aumenta e, pelo princípio de Bernoulli, sua pressão diminui. Esse processo cria um gradiente de pressão através da asa. O que mais contribui para esse redirecionamento do escoamento é o ângulo de ataque da asa, que é definido como o ângulo entre a direção do escoamento e a corda aerofólio. Corda é a linha imaginária que liga dois pontos extremos no perfil, o bordo de ataque e o bordo de fuga. Na Figura 20 são mostrados o perfil de um aerofólio bem como o ângulo de ataque.

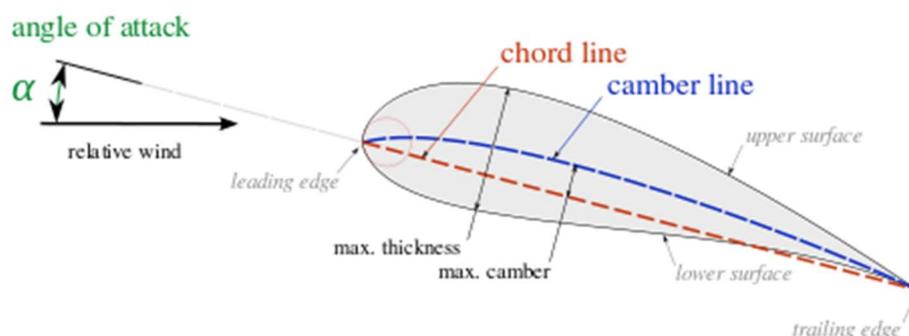


Figura 20: Perfil de um aerofólio e ângulo de ataque

Essa força de reação feita sobre o aerofólio, na verdade, não é vertical. Possui duas componentes, uma perpendicular ao escoamento e outra na direção do escoamento, que resiste ao movimento da asa. A primeira é, propriamente, a força de sustentação que é desejada, a segunda é a força de arrasto, indesejada. O fato é que não é possível produzir sustentação sem que haja produção de arrasto em conjunto.

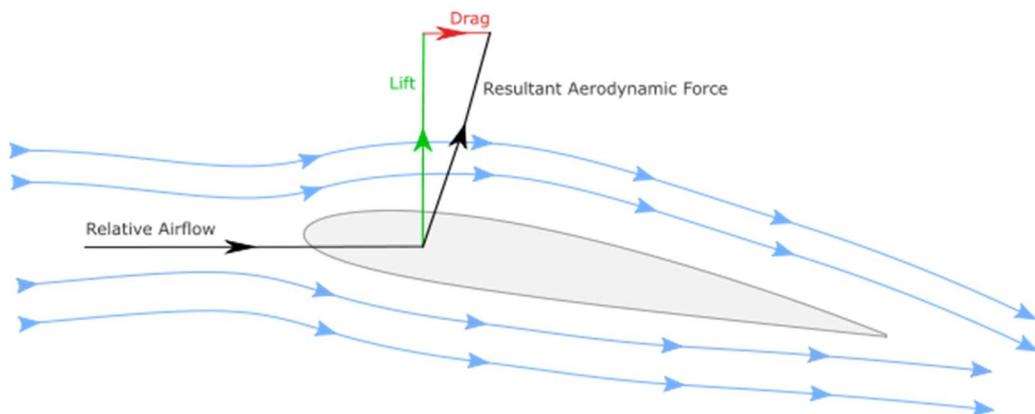


Figura 21: Redirecionamento do escoamento e componentes da força aerodinâmica. Sustentação em verde e arrasto em vermelho. Retirada de <https://swyde.com/s/Lift>

Além do ângulo de ataque, a velocidade do escoamento também influencia na força que é produzida. A sustentação é proporcional ao quadrado da velocidade. Assim dado um fluido (no caso, ar), tanto a sustentação quanto o arrasto, dependem da velocidade, do ângulo de ataque e da geometria do aerofólio.

No caso de uma hélice, a velocidade do escoamento do fluido muda ao longo de seu comprimento, sendo máxima nas pontas e mínima perto do centro. Para que haja máxima eficiência, é desejável produzir sustentação constante ao longo do comprimento. Logo, o ângulo de ataque da hélice próximo ao seu centro é maior, e nas pontas é menor. Esses ângulos de ataque são fixos, logo, no funcionamento de um drone, o único parâmetro que se altera é a velocidade do escoamento, por causa das variações de velocidade angular.

As forças de sustentação produzidas ao longo da hélice, são combinadas em uma força de sustentação total que é proporcional ao quadrado da velocidade angular. É possível determinar, experimentalmente, a constante C_L que relaciona as duas grandezas de acordo com a equação 3.3.1. No caso do arrasto, as forças ao longo da hélice se combinam em um torque de reação que é relacionado com a velocidade

angular da hélice de forma análoga. A constante C_M da equação 3.3.2 pode ser determinada da mesma forma.

$$F = C_L \Omega^2 \quad (3.3.1)$$

$$T = C_M \Omega^2 \quad (3.3.2)$$

Essas relações serão de grande importância pois são a base do equacionamento que irá determinar as forças resultantes causadas pelos motores no veículo. Os valores de C_L e C_M foram determinados para o tricóptero desse trabalho:

$$C_L = 10^{-6} N \cdot s^2 \quad (3.3.3)$$

$$C_M = 10^{-9} N \cdot m \cdot s^2 \quad (3.3.4)$$

Um aerofólio é projetado para escoamento em um só sentido, ou seja, não produz sustentação se o sentido do escoamento for invertido. Da mesma forma, hélices são projetadas para um só sentido de rotação. A maior parte das hélices são construídas respeitando a regra da mão direita, sendo a direção da força de sustentação a mesma do vetor velocidade angular. Mas como uma das hélices (a do rotor frontal direito) deve girar no sentido contrário às outras duas (sentido horário), seu perfil é inverso.

A hélices utilizadas no drone desse trabalho possuem duas pás cada, e estão ilustradas na Figura 22 obtida através de um modelo 3D feito na ferramenta Solidworks.



Figura 22: Modelo 3D das hélices do tricóptero, construído pelo Solidworks

3.4. IMU

O IMU (Inercial Measurement Unit) É a unidade eletrônica que determina a posição e orientação do veículo com base na medição de acelerações angulares e lineares. Integrando-se essas medidas, é então, possível obter as velocidades e posições lineares e angulares da aeronave. Para isso são utilizados giroscópios e acelerômetros. Dados obtidos através de apenas esses dois sensores podem não ser muito precisos pois o giroscópio desvia lentamente ao longo do tempo contribuindo para resultados que se desviem do real. Então, a maioria dos IMU's utilizam magnetômetros em conjunto. Combinando inputs desses 3 sensores o IMU pode determinar com maior precisão a posição e orientação da aeronave. Como pequenos erros de medida do acelerômetro podem se somar, também, ao longo do tempo, é interessante combinar os resultados obtidos com o IMU a informações obtidas pelo GPS para tornar os resultados ainda mais precisos.

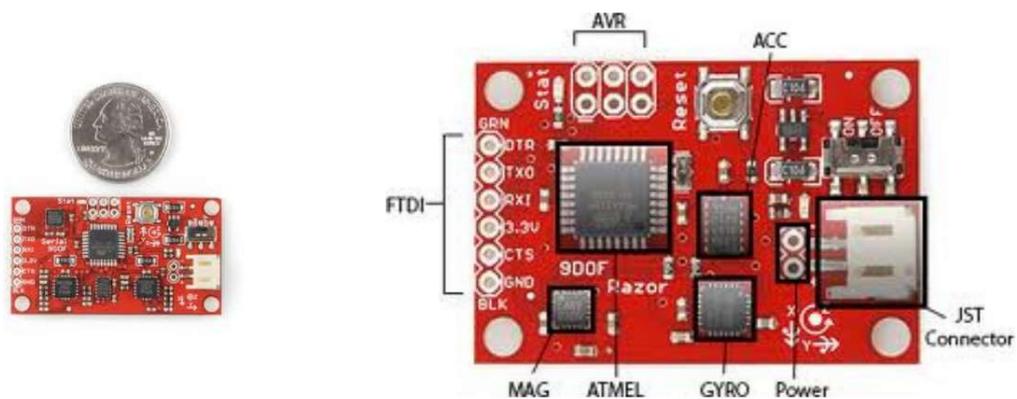


Figura 23: Inertial Measurement Unit - Unidade de Medição Inercial

3.4.1. Giroscópio

Giroscópios, largamente utilizados na aviação, definem o horizonte artificial que, nada mais é do que a orientação de um referencial inercial global. Na aviação em geral, os giroscópios utilizados funcionam através de um disco que gira a uma velocidade alta e, pelo efeito giroscópio mantém sua orientação mesmo que a aeronave esteja rotacionando ao redor de um de seus eixos. Assim a diferença é medida determinando a orientação da aeronave. A utilização desse tipo de giroscópio não seria viável no caso de um drone, por ocupar um grande volume e ser muito pesado. Por isso são utilizados giroscópios de estrutura vibratória que possuem

tamanho e peso muito pequenos e são justamente os utilizados em smartphones, por exemplo.

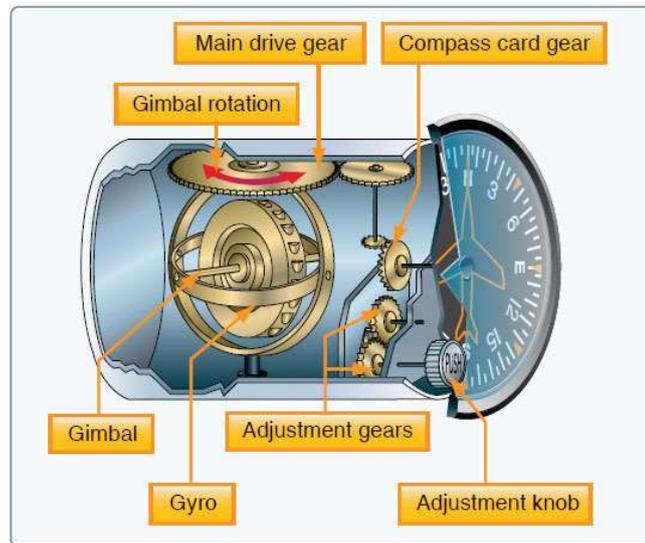


Figura 24: Giroscópio empregado na aviação

O princípio físico de funcionamento desse tipo de giroscópio é baseado na força de Coriolis. Estruturas que vibram, tendem a continuar vibrando no mesmo plano, mesmo que seu suporte gire. Assim, caso o suporte mude sua orientação, a estrutura vibrante assume, referente a ele, uma nova direção de oscilação. Através da medição dessa oscilação, é possível determinar a taxa de rotação num determinado eixo. A vibração da estrutura é induzida por piezo-eletricidade. Essas características permitem a esse tipo de giroscópio possuir massa e tamanho muito reduzidos. Por isso sua utilidade para essa aplicação.

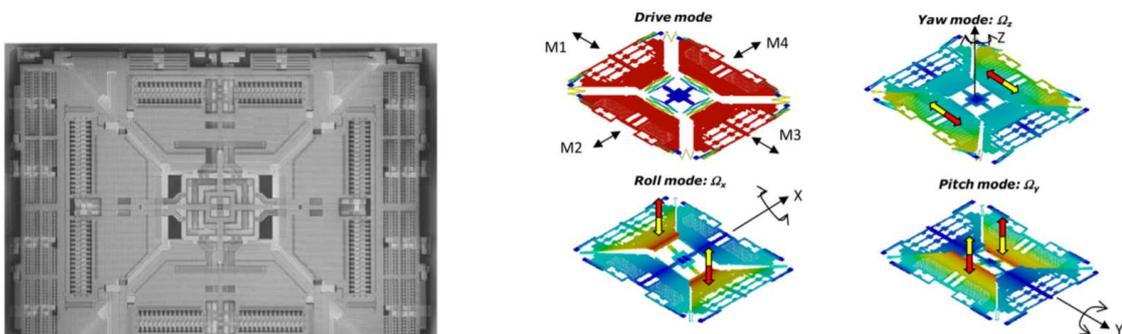


Figura 25: Giroscópio de estrutura vibratória.

Retirada de <https://www.blackhat.com/docs/eu-14/materials/eu-14-Nakibly-Gyrophone-Eavesdropping-Using-A-Gyroscope-wp.pdf>

3.4.2. Acelerômetro

O acelerômetro é composto de pequenas massas presas a molas que podem se deslocar ao longo de um eixo de sensibilidade. Através do deslocamento de cada massa ao longo de desses eixos, é possível determinar a aceleração. Para obter os 3 componentes da aceleração são necessários 3 desses, um orientado paralelamente a cada um dos eixos. A gravidade é uma aceleração constante que deve ser levada em consideração. Assim o IMU é calibrado para esse valor constante de aceleração em uma das direções globais, que não causa nenhuma mudança de velocidade.

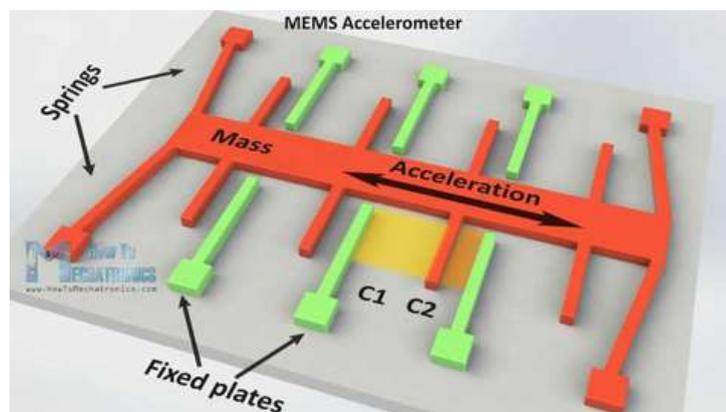


Figura 26: Esquema de um acelerômetro. Retirada de <https://www.fierceelectronics.com/sensors/what-accelerometer>

3.4.3. Magnetômetro

O magnetômetro utiliza o efeito Hall para determinar a intensidade e direção do campo magnético, determinando o norte magnético. Quando uma corrente elétrica é exposta a um campo magnético transversal, surge uma diferença de potencial transversal a ambos. A medição dessa diferença de potencial pode ser usada para determinar o campo magnético que está atuando sobre o condutor na direção específica (perpendicular às duas diferenças de potencial). Com um arranjo estratégico de magnetômetros é possível determinar a direção das linhas do campo magnético.

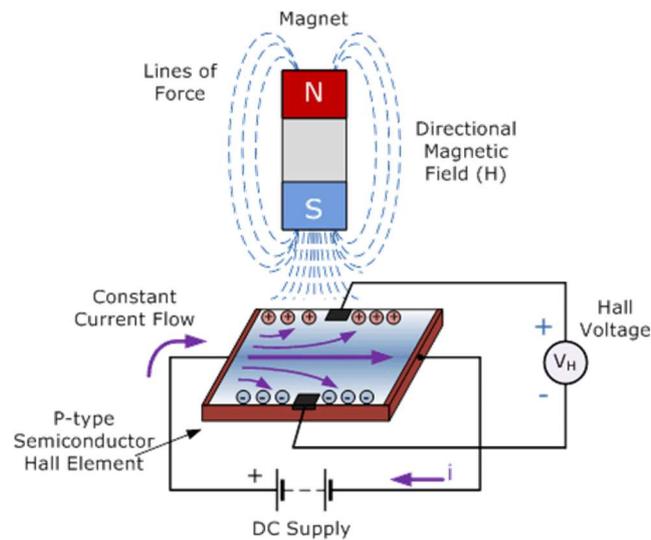


Figura 27: magnetômetro de efeito Hall. Retirada de http://wikid.io.tudelft.nl/WikiD/index.php/Hall_effect_Magnetometer

Os ímãs dos motores elétricos podem interferir com as medidas, e outros materiais ferromagnéticos podem defletir o campo magnético atrapalhando, assim a medição do campo magnético terrestre.

3.5. Baterias

Há diversos tipos de baterias no mercado, para diversas aplicações e, alguns, já ultrapassados tecnologicamente. Os mais utilizados hoje em dia são os de íons de Lítio (Li-ion). A bateria utilizada no drone desse trabalho é de Polímero de Lítio (Li-Po). A única diferença entre os dois é que o eletrólito líquido das Li-ion é substituído por um polímero sólido na Li-Po.

Uma bateria é caracterizada por alguns parâmetros:

Número de células, que é codificado como nSmP. Sendo n o número de células de 3,7V que estão conectadas em série, e m o número de células conectadas em paralelo. Logo, por exemplo, uma bateria composta de 6 células de 3,7V, sendo três pares de células ligadas em paralelo, então ligados em série entre si, seria designado por 3S2P.

Capacidade medida em mAh. Que se refere à quantidade de corrente que a bateria pode produzir. Uma bateria de 2000 mAh pode produzir 2A por uma hora ou 1A por duas horas, por exemplo.

Capacidade de descarga que é designada por dois números. O primeiro se refere à corrente máxima que pode ser produzida continuamente e o segundo à que pode ser produzida por curtos períodos de tempo sem causar danos à bateria. Numa bateria de 2000 mAh com capacidade denotada por 25-50C é capaz de gerar 25*2000mA continuamente e 50*2000mA por curtos períodos.

A bateria utilizada nesse drone (Figura 28) tem suas especificações dadas abaixo:

- Tipo: Polímero de Lítio (Li-Po).
- Dimensões: 105 x 34 x 22 mm
- Capacidade: 1800 mAh
- Capacidade de descarga: 20-30 C
- Voltagem: 3 células de 3.7V em série (3S). Total de 11.1V



Figura 28: Bateria utilizada no tricóptero

3.6. Controlador

Existem diversos tipos de controladores no mercado. O controlador trabalhado aqui é do tipo PID, cuja sigla significa (Proportional, Integral and Derivative). Esse tipo de controlador funciona da seguinte forma:

Um estado desejado é comparado com o estado presente. Um “erro” é calculado e o controlador age no sistema com base em três parâmetros. Um é proporcional ao erro em si, o segundo é proporcional à taxa de variação do erro e o terceiro é proporcional à integral do erro no tempo. Para entender melhor o

funcionamento desse tipo de controlador, será analisado o exemplo a seguir, onde é empregado um controlador.

Um bloco de massa M que desliza sem atrito deve ser posicionado por um controlador na posição desejada. Esse controlador inicialmente realiza uma força F proporcional à distância que o bloco está da posição desejada. Essa distância é o erro.

Inicialmente é aplicada uma força que acelera o bloco em direção à posição desejada e decresce proporcionalmente à distância. Mas quando a distância chega a zero, o bloco possui velocidade elevada e ultrapassa o ponto desejado. Agora o controlador começa a aplicar uma força contrária ao movimento do bloco até que este inverta o sentido da sua velocidade e volte em direção à posição desejada. Não é preciso muito para perceber que o bloco repetirá esse comportamento como se estivesse preso a uma mola e ficará oscilando indefinidamente. O controlador Proporcional gera oscilações ao redor do ponto de equilíbrio.

Para solucionar esse problema, pode ser introduzido um segundo parâmetro que realiza uma força proporcional à velocidade do bloco em sentido contrário. Assim o bloco, ao ser acelerado em direção à posição desejada, começa a sofrer uma segunda força que o impede de acelerar demais. Dessa forma ele não passa muito do ponto ou, até mesmo, nem chega a passar. Esse novo parâmetro atua como um amortecedor que reduz as oscilações e faz com que rapidamente o bloco se estabeleça na posição desejada. Caso uma nova posição seja desejada o controlador age da mesma forma de novo posicionando o bloco corretamente.

Agora imagine que o bloco esteja em um plano inclinado. Se for aplicado o controlador descrito até agora, para esta nova situação, o bloco ficará posicionado abaixo da posição desejada. Mesmo que seja colocado na posição correta, o peso o fará deslocar-se para baixo. Assim que o erro não for mais nulo, o controlador começará a aplicar uma força proporcional a essa distância, mas só quando essa força for igual à componente do peso que o desloca, o bloco entrará em equilíbrio. Um controlador Proporcional e Derivativo não é capaz de posicionar o bloco corretamente nesse caso, gerando um erro chamado “steady state error”.

Para solucionar esse problema, pode ser introduzido um terceiro parâmetro, que realiza uma força proporcional à integral do erro no tempo. Desse modo, conforme o bloco fica posicionado a uma distância constante do ponto desejado, essa distância é integrada em relação ao tempo e uma força proporcional a esse valor passa a ser aplicada. Essa integral é a área do gráfico “erro vs tempo” e cresce até que o erro passe a ser nulo. A partir daí, a integral passa a ser constante e a força aplicada também. O bloco fica posicionado no ponto desejado.

Esse exemplo serviu para ilustrar e mostrar a importância de cada um dos três parâmetros utilizados pelo controlador PID. Nele, esses parâmetros determinam a proporcionalidade das forças aplicadas em função da grandeza sendo medida (erro, taxa de variação do erro e integral do erro) e, para o funcionamento otimizado do controlador, devem ser ajustados. Um raciocínio análogo se aplica a qualquer controlador PID e o processo de determinar os parâmetros que otimizem o funcionamento do controlador se chama “PID Tuning”.

4 CONCEITOS PRELIMINARES

4.1. Matrizes de inércia e massa

Mais a seguir serão introduzidas as equações de Newton-Euler para esse veículo. Essas equações relacionam as forças e momentos resultantes em um corpo qualquer com as acelerações, tanto lineares quanto angulares, que resultam. Para a correta determinação dessas acelerações resultantes é necessário que sejam introduzidas as informações referentes à geometria do corpo. Estas, são dadas na forma das matrizes de massa e inércia.

Mais à frente será mostrado como foram determinadas essas matrizes do veículo. Por agora será dada uma breve explicação do seu conceito.

As equações de Newton-Euler para um referencial inercial são dadas na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

Analisando as matrizes 4.1.1 e 4.1.2, vê-se que forças só causam acelerações na mesma direção em que são aplicadas, o que condiz com a realidade. A matriz de massa é simplesmente o produto da massa do corpo pela matriz identidade, sendo $F_i = m\dot{v}_i$, onde i é um dos 3 eixos cartesianos. Já os momentos podem gerar acelerações angulares em direções diferentes da em que foram aplicados, por isso, na matriz de inércia, os termos de fora da diagonal não são necessariamente nulos.

O momento de inercia de uma partícula de massa m , que gira em torno de um eixo a uma distância r é definido pela equação:

$$J = mr^2 \quad (4.1.3)$$

Em coordenadas cartesianas, pode-se escrever a equação 4.1.3 para uma partícula que gira em torno qualquer um dos 3 eixos:

$$J_x = m(y^2 + z^2)$$

$$J_y = m(x^2 + z^2)$$

$$J_z = m(x^2 + y^2)$$

Para determinar o momento de inércia de um corpo não pontual, basta imaginar que este seja constituído de infinitas partículas de massa dm , cujo momento de inércia se calcula como mostrado, e somar os resultados das partículas constituintes realizando uma integral em todo seu volume.

$$J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm$$

$$J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm$$

$$J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

Estes são os termos da diagonal principal da matriz de inércia, respectivamente J_{xx} , J_{yy} e J_{zz} , e representam a resistência desse corpo em girar em torno de cada um desses eixos. Os termos da matriz M que não estão na diagonal principal são dados por:

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int_V (x \cdot y) dm$$

$$J_{xz} = J_{zx} = \int_V m(x \cdot z) dm$$

$$J_{yz} = J_{zy} = \int_V (y \cdot z) dm$$

Nota-se que a matriz J é diagonal já que termos opostos á diagonal principal são iguais.

A razão de haver esses termos mistos é que todo corpo possui 3 eixos principais de rotação perpendiculares entre si. Um deles possui o menor momento de inércia, o outro, o maior momento de inércia, e o terceiro, possui um momento de inércia intermediário, podendo ocorrer de 2 ou até 3 desses valores serem iguais. Se os eixos em relação aos quais estão sendo calculados os momentos de inércia estiverem alinhados com esses 3 principais, teremos uma matriz de inércia diagonal. O que isso significa fisicamente é que se for realizado um torque em torno desses eixos, isso resultará em uma aceleração angular somente naquele eixo. Mas se o sistema de coordenadas não estiver alinhado com esses 3 eixos principais, haverá termos fora da diagonal principal da matriz de inércia. Isso porque torques feitos em eixos diferentes dos eixos principais de rotação causam efeitos em outros eixos também.

4.2. Referencial local e global

Até agora sempre que se tratou do sistema de coordenadas, os eixos foram definidos em relação ao corpo do tricóptero. Sendo o eixo x , longitudinal, o y transversal e o z , vertical, todos eles passando pelo centro de massa. Caso o veículo gire em qualquer direção, o sistema de coordenadas gira junto, mantendo sempre a mesma orientação em relação ao corpo do veículo. Esse sistema de coordenadas será chamado aqui de Referencial Local e as coordenadas, expressas nele, serão designadas pelas letras (x, y, z) minúsculas.

Para navegar o drone e expressar a posição e orientação do mesmo em relação às suas redondezas, porém, é preciso de um sistema de coordenadas baseado num referencial fixo, que não se mova junto com o veículo. Esse sistema de coordenadas será chamado de Referencial Global e as coordenadas, expressas nele, serão designadas pelas letras (X, Y, Z) maiúsculas.

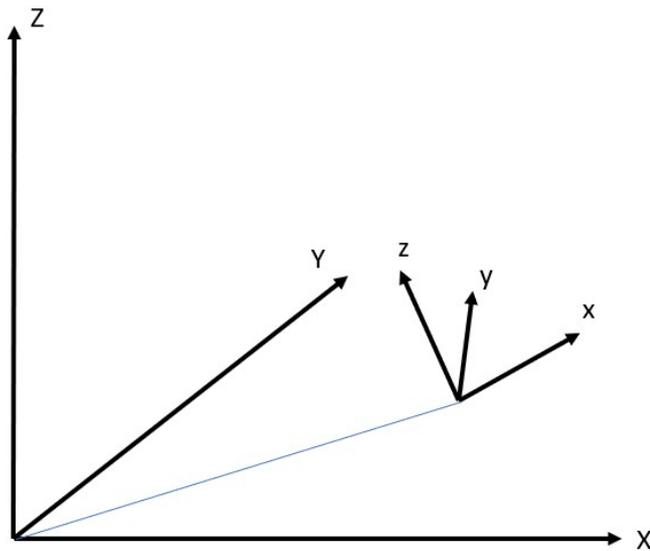


Figura 29: Posição relativa dos referenciais

Como o Referencial Local (x, y, z) se move em relação ao Global (X, Y, Z) , a orientação do drone em relação à sua vizinhança é expressa nos ângulos que (x, y, z) fazem com (X, Y, Z) . Esses ângulos são os Ângulos de Euler.

4.3. Ângulos de Euler

Os Ângulos de Euler serão definidos rigorosamente quando forem ser definidas as matrizes de transformação entre os referenciais Local e Global. Aqui serão apenas apresentados. Esses ângulos expressam a orientação de um corpo com respeito a sua vizinhança. Seu conceito fundamental é que qualquer rotação pode ser decomposta em 3 rotações em torno de 3 eixos linearmente independentes entre si, numa ordem específica. Essa rotação pode ser definida com os 3 ângulos que foram rotacionados em cada eixo do referencial local. Ou seja, são um sistema de coordenadas para orientações e giros, ao invés de posições e translações. O estado de um drone pode ser, então, totalmente definido com 6 graus de liberdade, sendo 3 referentes à posição (X, Y, Z) e 3 à orientação (ângulos de Euler).

O veículo estudado possui um referencial local que não está sempre alinhado com o global. A rotação necessária para, partindo da orientação do referencial global, chegar-se à do local, é decomposta em 3 rotações sucessivas uma em torno de cada eixo, que resultam na orientação atual do veículo. É importante notar que, a cada uma das rotações, a próxima é feita em torno de um dos eixos seguintes em sua nova

orientação. Mais tecnicamente, os ângulos de Euler são medidos em relação a referenciais intermediários conforme os passos adiante.

Outro ponto importante é que deve ser respeitada a sequência em que são feitas as rotações. Ou, seja, dados 3 ângulos de Euler quaisquer (um para cada eixo), a orientação obtida realizando as rotações em torno dos eixos z , y e x , nesta ordem, é diferente da obtida realizando as rotações em torno dos eixos em uma outra ordem qualquer. E, também, ao ir de uma orientação para a outra girando em torno dos eixos z , y e x , nesta ordem, o caminho de volta deve desfazer os giros em x , y e z , nesta ordem inversa. Isso significa que para definir corretamente uma orientação, é necessário, não só definir o ângulo o qual se rotaciona em torno de cada eixo, mas também em que ordem deve ser feito conforme os passos a seguir ilustrados na Figura 30:

1. Partindo de (X, Y, Z) , gira-se um ângulo ψ em torno de Z . Uma nova orientação intermediária (x', y', z') é estabelecida, onde z' e Z coincidem. Os outros dois eixos formam um ângulo ψ com seus correspondentes.
2. A partir de (x', y', z') gira-se um ângulo θ em torno de y' . Uma nova orientação intermediária (x'', y'', z'') é estabelecida, onde y'' e y' coincidem.
3. A partir de (x'', y'', z'') gira-se um ângulo ϕ em torno de x'' . Chega-se a (x, y, z) , e x coincide com x'' .

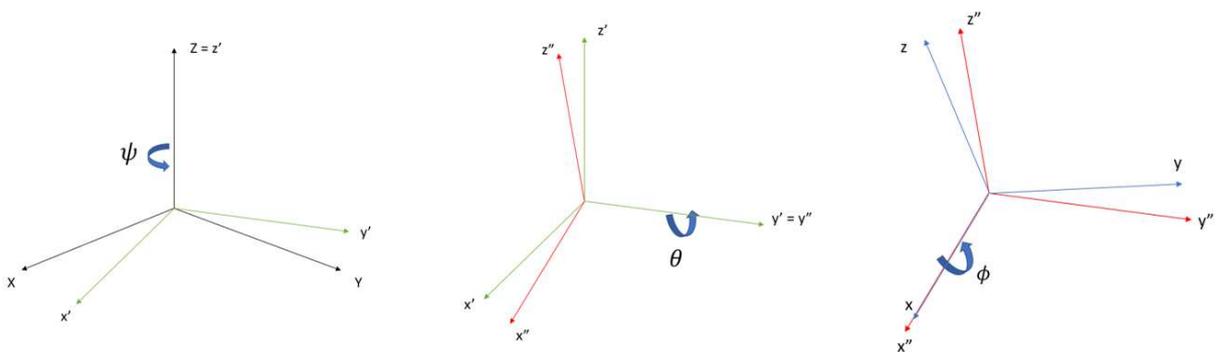


Figura 30: Ângulos de Euler

Giros realizados ao redor do eixo x , longitudinal, são chamados de rolagem (roll) e definidos pelo ângulo ϕ . Giros ao redor do eixo y , transversal, recebem o nome de arfagem (pitch) e são representados pelo ângulo θ . E giros em torno do eixo vertical, z , são chamados de guinada (yaw) e representados por ψ .

5 MODELAGEM

5.1. Forças e Momentos Causados Pelos Motores

Em primeiro lugar precisamos deduzir as equações que irão relacionar as velocidades de rotação nos 3 três rotores e o ângulo de inclinação do Servo motor que atua no rotor de cauda, com as forças e momentos resultantes sobre o veículo, causados por esses motores. Pode-se, então, somar a esse resultado, quaisquer forças e momentos externos que também estejam atuando sobre o veículo.

Quando um rotor gira com velocidade angular Ω , ele causa uma força de sustentação F e um torque T . Essas forças e torques são determinadas por:

$$F = C_L \Omega^2 \quad (5.1.1)$$

$$T = C_M \Omega^2$$

Onde C_L é o coeficiente de empuxo e C_M é o coeficiente de torque (de reação).

$$\begin{cases} \sum F = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} \\ \sum M = J\vec{\alpha} = J\dot{\vec{\omega}} \end{cases}$$

A Figura 31 ilustra os sentidos de rotação, as dimensões do veículo e as posições dos eixos.

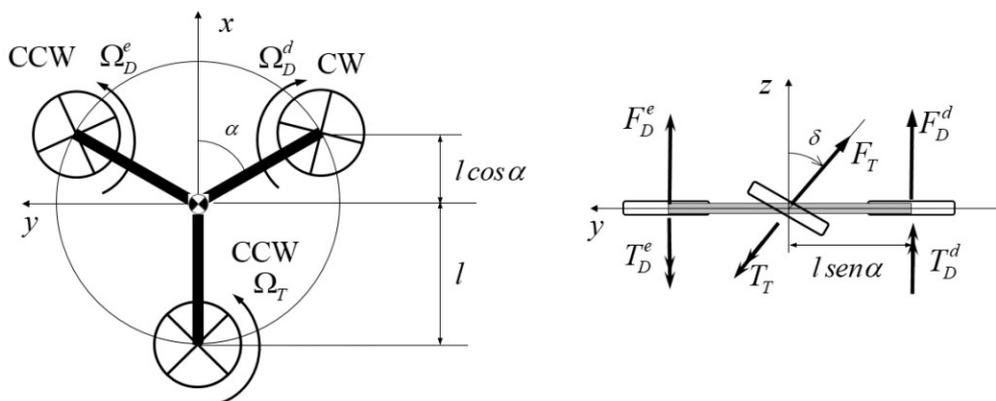


Figura 31: Esquema da geometria o tricóptero estudado

O momento resultante em torno do eixo x é determinado levando-se em consideração somente as forças F_D^e e F_D^d feitas pelos dois motores dianteiros (o subscrito especifica

se é dianteiro ou traseiro e o sobrescrito especifica entre esquerdo e direito) que, multiplicados pelo braço $l \sin 60^\circ$ que é a distância até o eixo x, resultam em dois torques opostos.

$$\sum M_x = F_D^e l \sin \alpha - F_D^d l \sin \alpha$$

Substituindo com a equação (5.1.1):

$$\sum M_x = C_L \Omega_D^{e^2} l \sin \alpha - C_L \Omega_D^{d^2} l \sin \alpha$$

Para o momento em torno do eixo y leva-se em consideração os torques causados pelas forças dos 3 motores e a componente horizontal do torque de reação do motor da cauda. Como o motor traseiro está inclinado de um ângulo δ , seu torque de reação (T_T) tem componentes nos eixos y e z.

$$\sum M_y = F_T l \cos \delta - F_D^d l \cos \alpha - F_D^e l \cos \alpha + T_T \sin \delta$$

$$\sum M_y = C_L \Omega_T^2 l \cos \delta - C_L \Omega_D^{d^2} l \cos \alpha - C_L \Omega_D^{e^2} l \cos \alpha + C_M \Omega_T^2 \sin \delta$$

Onde F_T é a força gerada pelo motor traseiro que está inclinado de um ângulo δ .

Para o momento resultante em torno de z leva-se em consideração as componentes em z dos torques de reação dos 3 motores e o torque causado pela componente y da força F_T . No caso dos dois motores dianteiros (T_D^e e T_D^d), o torque de reação só tem componente em z.

$$\sum M_z = F_T l \sin \delta + T_D^d - T_D^e - T_T \cos \delta$$

$$\sum M_z = C_L \Omega_T^2 l \sin \delta + C_M \Omega_D^{d^2} - C_M \Omega_D^{e^2} - C_M \Omega_T^2 \cos \delta$$

Para o cálculo das forças resultantes em cada um dos eixos o procedimento é mais simples porque basta levar em consideração a contribuição das forças, sem ter que incluir os torques de reação.

Nenhuma das forças dos 3 rotores está alinhada com o eixo x logo:

$$\sum F_x = 0$$

A força resultante em y é dada apenas pela componente de F_T alinhada com este, dada a inclinação do motor traseiro.

$$\sum F_y = -F_T \text{sen } \delta$$

$$\sum F_y = -C_L \Omega_T^2 \text{sen } \delta$$

A força resultante em z é calculada levando-se em consideração as forças dos 3 motores (componentes alinhadas com este, logo decompõe-se F_T).

$$\sum F_z = F_D^d + F_D^e + F_T \cos \delta$$

$$\sum F_z = C_L \Omega_D^{d^2} + C_L \Omega_D^{e^2} + C_L \Omega_T^2 \cos \delta$$

Logo, o sistema de equações que relaciona as velocidades de rotação dos três motores e o ângulo de inclinação do servo-motor com a força e momento resultantes é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = -C_L \Omega_T^2 \text{sen } \delta \\ \sum F_z = C_L \Omega_D^{d^2} + C_L \Omega_D^{e^2} + C_L \Omega_T^2 \cos \delta \\ \sum M_x = C_L \Omega_D^{e^2} l \text{sen } \alpha - C_L \Omega_D^{d^2} l \text{sen } \alpha \\ \sum M_y = C_L \Omega_T^2 l \cos \delta - C_L \Omega_D^{d^2} l \cos \alpha - C_L \Omega_D^{e^2} l \cos \alpha + C_M \Omega_T^2 \text{sen } \delta \\ \sum M_z = C_L \Omega_T^2 l \text{sen } \delta + C_M \Omega_D^{d^2} - C_M \Omega_D^{e^2} - C_M \Omega_T^2 \cos \delta \end{array} \right.$$

Escrevendo esse sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_L \text{sen } \delta \\ C_L & C_L & C_L \text{cos } \delta \\ -C_L l \text{sen } \alpha & C_L l \text{sen } \alpha & 0 \\ -C_L l \text{cos } \alpha & -C_L l \text{cos } \alpha & (C_M \text{sen } \delta + C_L l \text{cos } \delta) \\ C_M & -C_M & (-C_M \text{cos } \delta + C_L l \text{sen } \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_D^{d^2} \\ \Omega_D^{e^2} \\ \Omega_T^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

5.2. Condições de Equilíbrio Estático

Assim como foi discutido qualitativamente quando foram tratados os princípios de voo de um tricóptero, agora, de posse das equações determinadas até aqui, será feita uma análise quantitativa para determinar as condições necessárias para que haja equilíbrio estático, ou seja, voo estacionário. Para isso, basta determinar que a soma de momentos e forças em torno de todos os eixos seja nula. Assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right.$$

- Condição para momento nulo em torno do eixo x:

$$C_L \Omega_D^{e^2} l \text{sen } \alpha - C_L \Omega_D^{d^2} l \text{sen } \alpha = 0$$

$$\Omega_D^e = \Omega_D^d \quad (5.2.1)$$

- Condição para momento nulo em torno do eixo y:

$$C_L \Omega_T^2 l \text{cos } \delta - C_L \Omega_D^{d^2} l \text{cos } \alpha - C_L \Omega_D^{e^2} l \text{cos } \alpha + C_M \Omega_T^2 \text{sen } \delta = 0$$

$$-C_L (\Omega_D^{d^2} + \Omega_D^{e^2}) l \text{cos } \alpha + C_L \Omega_T^2 l \text{cos } \delta + C_M \Omega_T^2 \text{sen } \delta = 0$$

$$C_L (\Omega_D^{d^2} + \Omega_D^{e^2}) l \text{cos } \alpha = \Omega_T^2 (C_L l \text{cos } \delta + C_M \text{sen } \delta)$$

Uma vez que $\Omega_D^e = \Omega_D^d$:

$$2C_L\Omega_D^{e2}l \cos \alpha = \Omega_T^2(C_Ll \cos \delta + C_M \sin \delta)$$

$$\frac{\Omega_D^e}{\Omega_T} = \sqrt{\frac{C_Ll \cos \delta + C_M \sin \delta}{2C_Ll \cos \alpha}} \quad (5.2.2)$$

- Condição para momento nulo em torno do eixo z:

$$\sum M_z = C_L\Omega_T^2 l \sin \delta + C_M\Omega_D^{d2} - C_M\Omega_D^{e2} - C_M\Omega_T^2 \cos \delta = 0$$

Já que $\Omega_D^e = \Omega_D^d$

$$C_L\Omega_T^2l \sin \delta - C_M\Omega_T^2 \cos \delta = 0$$

$$\frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{C_M\Omega_T^2}{C_L\Omega_T^2l}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{1}{l} \frac{C_M}{C_L} \quad (5.2.3)$$

- Condição para força nula no eixo x:

$$\sum F_x = 0$$

- Condição para força nula no eixo y:

O rotor traseiro realiza uma força no eixo y, que serve para compensar o torque de reação causado por ele próprio, mas não há nenhuma outra força nessa direção que possa compensar esta e equilibrar o veículo. Ou seja, é impossível que o veículo permaneça equilibrado em voo estacionário na posição horizontal. Para que seja possível, deve ser introduzido um ângulo de rolagem (em torno do eixo x), inclinándose o suficiente para que a componente da força peso, agora presente nesse eixo, cancele a força feita pelo rotor traseiro. Assim, tem-se:

$$-C_L\Omega_T^2 \sin \delta + mg \sin \phi = 0$$

$$\Omega_T = \sqrt{\frac{mg \sen \phi}{C_L \sen \delta}} \quad (5.2.4)$$

- Condição para força nula no eixo z:

$$C_L \Omega_D^{d^2} + C_L \Omega_D^e{}^2 + C_L \Omega_T^2 \cos \delta - mg \cos \phi = 0$$

onde ϕ é o ângulo de rolagem. Ou seja, $mg \cos \phi$ é a componente da força peso que está alinhada com o eixo z do referencial local do drone.

Mais uma vez, se $\Omega_D^e = \Omega_D^d$, então:

$$C_L (\Omega_T^2 \cos \delta + 2\Omega_D^e{}^2) = mg \cos \phi \quad (5.2.5)$$

As quações 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4 e 5.2.5, definem as condições para que o drone permaneça em voo estacionário. Substituindo Ω_D^e da equação 5.2.2 em 5.2.5, tem-se:

$$\Omega_T^2 = \frac{mg \cos \phi}{C_L \left(\cos \delta \frac{C_L l \cos \delta + C_M \sen \delta}{C_L l \cos \alpha} \right)} \quad (5.2.6)$$

Combinando as equações 5.2.4 e 5.2.6 para eliminar Ω_T :

$$\frac{mg \sen \phi}{C_L \sen \delta} = \frac{mg \cos \phi}{C_L \left(\cos \delta \frac{C_L l \cos \delta + C_M \sen \delta}{C_L l \cos \alpha} \right)}$$

$$\frac{\sen \phi}{\cos \phi} = \frac{\sen \delta}{\left(\cos \delta \frac{C_L l \cos \delta + C_M \sen \delta}{C_L l \cos \alpha} \right)}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_L l \sen \delta \cos \alpha}{(C_L l \cos \delta \cos \alpha + C_L l \cos \delta + C_M \sen \delta)} \right) \quad (5.2.7)$$

Com esse valor de ϕ é possível encontrar Ω_T através da equação 5.2.4 e depois encontrar Ω_D^e substituindo em 5.2.5. Já que $\Omega_D^e = \Omega_D^d$, estão definidas as velocidades

angulares de todos os motores, bem como o ângulo de rolagem ϕ e o ângulo do rotor da cauda δ .

Finalmente, o sistema 5.2.8 define as condições necessárias para que o veículo permaneça em voo estacionário:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \tan^{-1} \frac{1}{l} \frac{C_M}{C_L} \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_L l \sin \delta \cos \alpha}{(C_L l \cos \delta \cos \alpha + C_L l \cos \delta + C_M \sin \delta)} \right) \\ \Omega_T = \sqrt{\frac{mg \sin \phi}{C_L \sin \delta}} \\ \Omega_D^e = \sqrt{\frac{mg \cos \phi}{2C_L} - \frac{\Omega_T^2 \cos \delta}{2}} \\ \Omega_D^e = \Omega_D^d \end{array} \right. \quad (5.2.8)$$

Assim, estão definidas velocidades angulares de todos os motores, bem como o ângulo do servo, para a condição desejada.

5.3. Equações de Newton-Euler

Como foi dito anteriormente, as equações de Newton-Euler relacionam as forças e momentos resultantes em um corpo qualquer com as acelerações, tanto lineares quanto angulares, que resultam de sua aplicação. Até agora, foram determinadas as equações que determinam as forças e momentos resultantes que os motores realizam sobre o veículo. Aqui, de posse das matrizes de inércia e massa, serão encontradas as relações dessas forças e momentos com as acelerações.

As equações de Newton-Euler para um referencial inercial são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\dot{\vec{v}} \\ \sum \vec{M} = \frac{d\vec{h}}{dt} = J\dot{\vec{\omega}} \end{array} \right.$$

onde, \vec{p} é o momento linear e \vec{h} é o momento angular, M é a matriz de massa e J é a matriz de inércia.

Para o referencial local do veículo que é móvel são necessárias correções nas equações de Newton-Euler

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{p} = m\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times m\vec{v} \\ \sum \vec{M} = \frac{d\vec{h}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{h} = J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} \end{cases}$$

Escrevendo as equações de Newton na forma matricial:

$$\sum \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\sum \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left(\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left(\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} \right)$$

Escrevendo as equações de Euler na forma matricial:

$$\sum M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy})\omega_z\omega_y + J_{yz}(\omega_y^2 + \omega_z^2) + (J_{xz}\omega_y - J_{xy}\omega_z)\omega_x \\ (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x + J_{xz}(\omega_z^2 + \omega_x^2) + (J_{xy}\omega_z - J_{yz}\omega_x)\omega_y \\ (J_{zz} - J_{xx})\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + (J_{yz}\omega_x - J_{xz}\omega_y)\omega_z \end{bmatrix}$$

Logo, para determinar as forças e momentos atuantes no veículo dadas as taxas de variação das velocidades escalares e angulares medidas no referencial local, são usadas as equações 5.3.1 e 5.3.2:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left(\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} \right) \quad (5.3.1)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy})\omega_z\omega_y + J_{yz}(\omega_y^2 + \omega_z^2) + (J_{xz}\omega_y - J_{xy}\omega_z)\omega_x \\ (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x + J_{xz}(\omega_z^2 + \omega_x^2) + (J_{xy}\omega_z - J_{yz}\omega_x)\omega_y \\ (J_{zz} - J_{xx})\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + (J_{yz}\omega_x - J_{xz}\omega_y)\omega_z \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

E para determinar as taxas de variação das velocidades escalares e angulares medidas no referencial local, dadas as forças e momentos resultantes:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy})\omega_z\omega_y + J_{yz}(\omega_y^2 + \omega_z^2) + (J_{xz}\omega_y - J_{xy}\omega_z)\omega_x \\ (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x + J_{xz}(\omega_z^2 + \omega_x^2) + (J_{xy}\omega_z - J_{yz}\omega_x)\omega_y \\ (J_{zz} - J_{xx})\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + (J_{yz}\omega_x - J_{xz}\omega_y)\omega_z \end{bmatrix} \right) \quad (5.3.4)$$

5.4. Ângulos de Euler e Matrizes de Transformação

Até o momento já foram deduzidas as equações que relacionam as velocidades e ângulos dos motores do veículo com as forças e momentos resultantes, e as equações que relacionam essas forças e momentos resultantes (somados a qualquer outros externos) com as taxas de variação das velocidades escalares e angulares medidas no referencial local. Integrando-as com respeito ao tempo, obtém-se as velocidades escalares e angulares nesse referencial.

Agora, só resta obter, através destas informações, a posição e orientação em relação ao referencial global para cada tempo. Para isso, primeiro é necessário obter uma matriz de transformação (rotação) do referencial local para o global, que será usada para, conhecida a orientação do veículo, converter o vetor velocidade escalar de um referencial para o outro. A orientação é dada em função dos ângulos de Euler, apresentados na seção 4.3 e revisitados com mais rigor aqui.

Neste trabalho esses ângulos serão chamados de rolagem (roll), arfagem (pitch), e guinada (yaw) e definirão a orientação do veículo a todo momento da mesma forma que as coordenadas X,Y,Z definem sua posição. Esses 6 graus de liberdade definem completamente o estado do veículo estudado. O movimento de rolagem é feito em torno do eixo x e é representado pela letra ϕ . O de arfagem é feito em torno do eixo y e é representado pela letra θ . O de guinada é feito em torno do eixo z e é representado pela letra ψ .

Assim, dado um vetor (velocidade ou aceleração linear medida pelo IMU, por exemplo) cujas coordenadas são conhecidas no referencial local, e conhecidos os ângulos de Euler que definem a orientação. Para obter as coordenadas globais desse vetor basta multiplicá-lo por uma matriz de rotação apropriada. Esta será obtida multiplicando matrizes de rotação intermediárias que serão definidas a seguir.

5.4.1. Definição dos Ângulos de Euler e obtenção da matriz de Transformação:

Partindo do referencial global (X,Y,Z) chega-se ao primeiro referencial intermediário (x',y',z') rotacionado ψ graus em torno do eixo Z. Essa rotação sempre corresponde ao ângulo de guinada (yaw). A matriz de rotação 5.4.1 converte vetores de (X,Y,Z) para (x',y',z').

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

Agora, partindo do novo referencial (x',y',z') , chega-se ao segundo referencial intermediário (x'',y'',z'') , rotacionado Θ graus em torno do eixo y' , que correspondem sempre ao ângulo de arfagem (pitch). A matriz 5.4.2 realiza a transformação.

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (5.4.2)$$

Por último, partindo do referencial obtido com a segunda rotação, chega-se ao referencial local do veículo (x,y,z) , rotacionado ϕ graus em torno do eixo x'' , que correspondem sempre ao ângulo de rolagem (roll). A matriz 5.4.3 realiza a transformação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (5.4.3)$$

Esse procedimento define os ângulos de Euler ϕ , Θ e ψ . É importante perceber que cada um desses ângulos é definido em relação a um referencial diferente. ψ é o ângulo de (x',y',z') em relação a (X,Y,Z) , Θ de (x'',y'',z'') em relação a (x',y',z') e ϕ do referencial local em relação a (x'',y'',z'') . Isso será particularmente importante na transformação das velocidades angulares.

5.4.2. Matriz de Transformação: Referenciais Local - Global

Logo, para converter vetores do referencial global (X,Y,Z) para o local (x,y,z) é necessário aplicar o produto das três matrizes obtidas anteriormente na ordem justificada a seguir.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Realizando o produto das 3 matrizes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (5.4.4)$$

Para a transformação do referencial local para o global é necessário encontrar a inversa da matriz 5.4.4. Já que a inversa de uma matriz de rotação é sua transposta, temos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5.4.5)$$

5.4.3. Matriz de Transformação: Referencial Local - Ângulos de Euler

Agora, para relacionar as velocidades angulares, medidas no referencial local, com as referentes aos ângulos de rolagem, arfagem e guinada ($\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$), temos:

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}$$

Porém, como cada um dos ângulos de Euler é definido em relação a um referencial diferente, cada um dos vetores de velocidade angular está expresso em um referencial diferente também. O de guinada está expresso em relação ao referencial global, o de arfagem em relação ao (x', y', z') e o de rolagem em relação a (x'', y'', z'') conforme comentado anteriormente. Logo, para que seja feita a soma vetorial, é necessário o emprego das matrizes de rotação utilizadas anteriormente:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = T_\phi \left(\dot{\phi} + T_\theta \left(\dot{\theta} + T_\psi \dot{\psi} \right) \right)$$

$$\text{Onde } T_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ e } T_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cada vetor é convertido para a base do próximo e somado com este até q a soma seja expressa no referencial local.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = T_\phi \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \text{sen } \theta \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \text{sen } \theta \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \cos \phi + \text{sen } \phi \cos \theta \dot{\psi} \\ \cos \phi \cos \theta \dot{\psi} - \text{sen } \phi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Explicitando as velocidades angulares:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \cos \theta \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.4.6)$$

Para converter no sentido contrário basta obter a matriz inversa.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (5.4.7)$$

5.5. Visão Geral da Modelagem

Com o equacionamento desenvolvido até aqui, é possível:

- Obter forças e momentos resultantes em função das velocidades de rotação dos motores e ângulo de inclinação do servo-motor (equação 5.1.2)

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_L \text{sen } \delta \\ C_L & C_L & C_L \text{cos } \delta \\ -C_L l \text{sen } \alpha & C_L l \text{sen } \alpha & 0 \\ -C_L l \text{cos } \alpha & -C_L l \text{cos } \alpha & (C_M \text{sen } \delta + C_L l \text{cos } \delta) \\ C_M & -C_M & (-C_M \text{cos } \delta + C_L l \text{sen } \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_D^{d^2} \\ \Omega_D^{e^2} \\ \Omega_T^2 \end{bmatrix}$$

Figura 32: Forças e momentos gerados pelos propulsores

- obter as acelerações lineares e angulares causadas por essas resultantes em conjunto com outras externas (Equações de Newton-Euler equações 5.3.3 e 5.3.4)

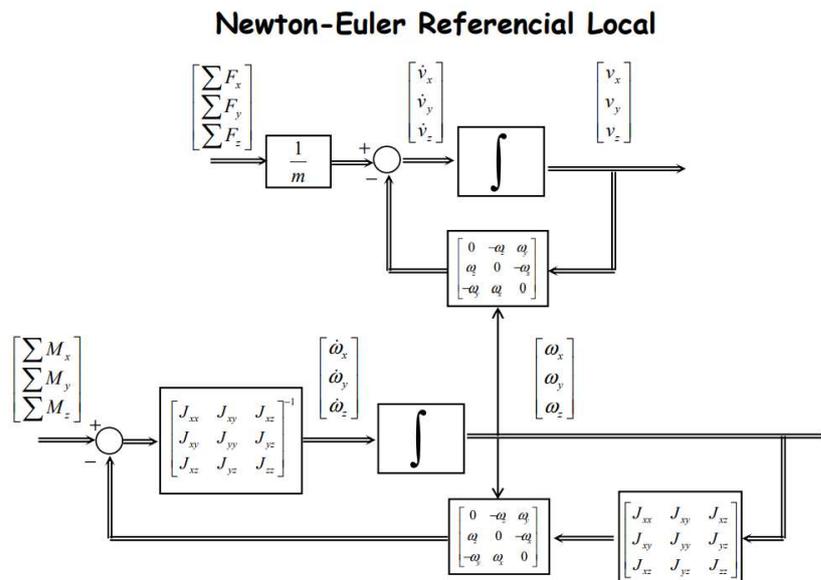


Figura 33: Diagrama de blocos das equações de Newton-Euler

- transformar os vetores entre os referenciais local e global (equações 5.4.5 e 5.4.7).

Cinemática 3D Referencial Local → Referencial Global

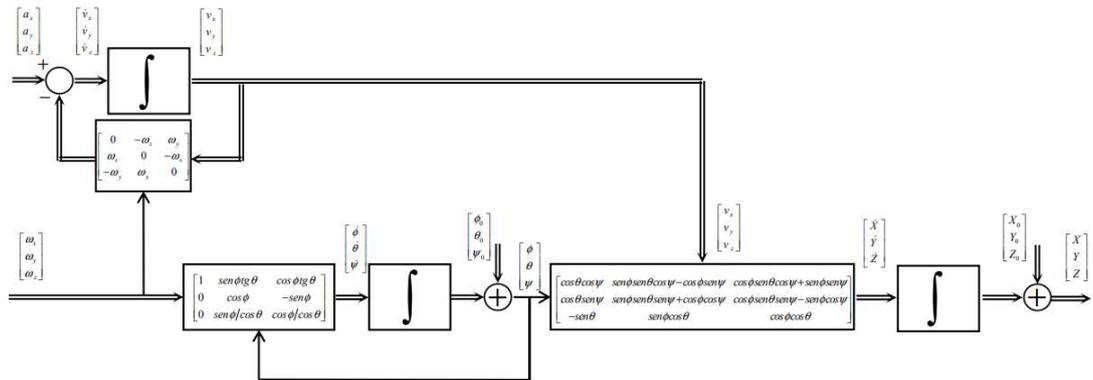


Figura 34: Diagrama de blocos das matrizes de transformação Local-Global

A Figura 35 mostra o diagrama de blocos do modelo desenvolvido aqui. As forças e momentos, que são as entradas desse diagrama, são obtidas através da soma das forças e momentos obtidos da equação 5.1.2 com quaisquer outras externas (como peso, por exemplo).

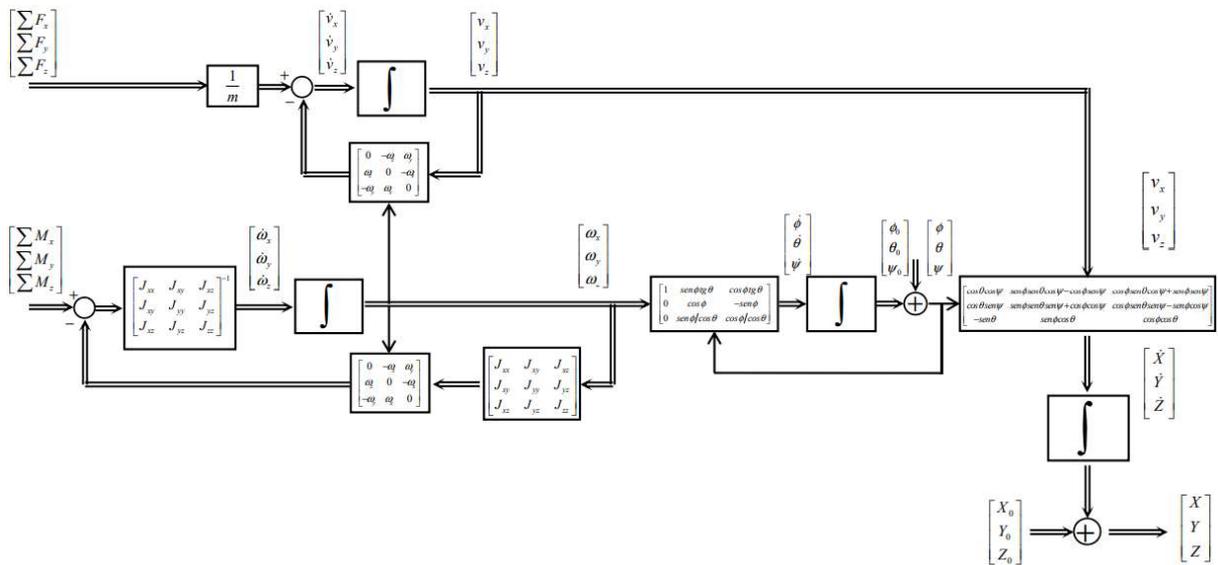


Figura 35: Diagrama de blocos geral do modelo

A seguir será mostrado como aplicar essa modelagem para simular e controlar o veículo.

6 SIMULAÇÃO

Na seção 5, foi desenvolvido todo o equacionamento necessário para a modelagem e simulação do voo do drone. Nessa seção, será mostrado o procedimento que foi usado para realizar as simulações bem como seus resultados.

Foram utilizadas as ferramentas computacionais, Matlab/Simulink e Solidworks. Com o Solidworks foi construído um modelo 3D do tricóptero usado para determinar a matriz de inércia. Com o Simulink foi criado um diagrama de blocos com todo o equacionamento da seção 5 e um script no Matlab realizou as simulações com base nesse diagrama.

6.1. Modelo Solidworks

O modelo tridimensional, que foi utilizado para a determinação da matriz de inércia, está mostrado na Figura 36 e Figura 37. Com a ferramenta “propriedades de massa” é possível obter alguns dados sobre a geometria do objeto. Esses dados podem ser vistos na Figura 38.

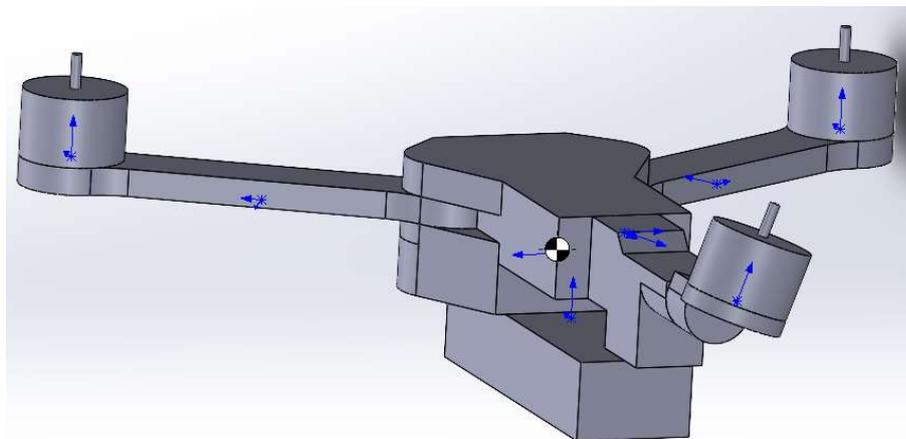


Figura 36: Modelo do Solidworks visto por trás

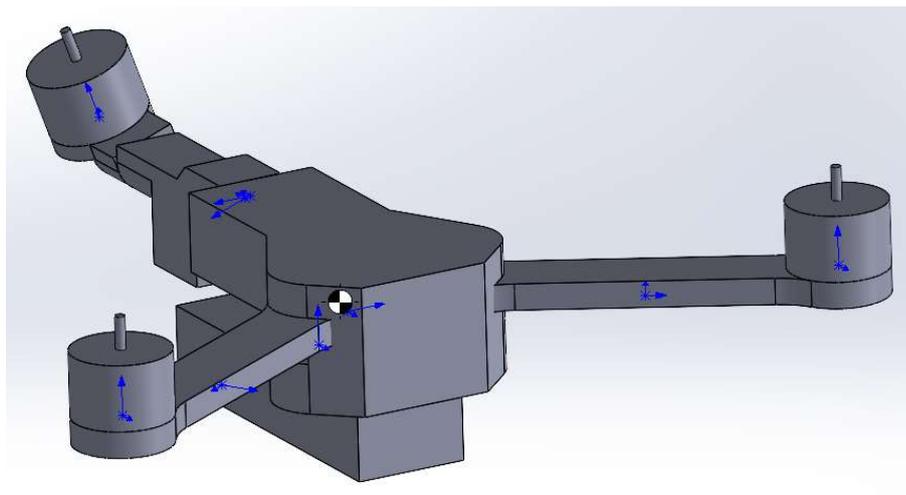


Figura 37: Modelo do Solidworks visto pela frente

| | | |
|---|------------------|------------------|
| Propriedades de massa de Montagem | | |
| Configuração: Valor predeterminado | | |
| Sistema de coordenadas: -- valor predeterminado -- | | |
| Massa (substituída pelo usuário) = 555.00 gramas | | |
| Volume = 365972.47 milímetros cúbicos | | |
| Área de superfície = 74483.29 milímetros quadrados | | |
| Centro de massa: (milímetros) | | |
| X = -3.49 | | |
| Y = -0.20 | | |
| Z = 1.87 | | |
| Eixos principais de inércia e momentos de inércia principais: (gramas * milímetros quadrados) | | |
| Tomado no centro da massa. | | |
| lx = (1.00, 0.03, 0.02) | Px = 1303629.38 | |
| ly = (-0.03, 1.00, 0.00) | Py = 1900345.57 | |
| lz = (-0.02, 0.00, 1.00) | Pz = 2824848.17 | |
| Momentos de inércia: (gramas * milímetros quadrados) | | |
| Obtido no centro de massa e alinhado com o sistema de coordenadas de saída. | | |
| Lxx = 1304745.08 | Lxy = 15051.03 | Lxz = 33515.15 |
| Lyx = 15051.03 | Lyy = 1899978.33 | Lyz = -2635.50 |
| Lzx = 33515.15 | Lzy = -2635.50 | Lzz = 2824099.71 |
| Momentos de inércia: (gramas * milímetros quadrados) | | |
| Tomados no sistema de coordenadas de saída. | | |
| lxx = 1306713.89 | lxy = 15434.20 | lxz = 29887.70 |
| lyx = 15434.20 | lyy = 1908683.44 | lyz = -2841.17 |
| lzx = 29887.70 | lzy = -2841.17 | lzz = 2830879.46 |

Figura 38: Dados obtidos pelo Solidworks com a ferramenta "propriedades de massa"

Há duas matrizes de inércia na Figura 38. Para a simulação é necessário utilizar a que foi tomada no centro de massa no veículo. Como a origem do sistema de coordenadas do modelo 3D não necessariamente corresponde com o centro de

massa, o programa também obtém uma matriz de inercia para esse sistema, mas ela não é útil para essa aplicação.

6.2. Modelo Matlab/Simulink

Todo o equacionamento da seção 5 foi reproduzido em um modelo Matlab/Simulink. O diagrama de blocos desse modelo é análogo ao mostrado na Figura 35, com a adição de, um bloco que obtém as forças e momentos produzidos pelos motores, e a força da gravidade. Na Figura 39, O bloco “Motores” é a entrada do sistema e alimenta as velocidades angulares dos três motores e ângulo do rotor traseiro ao sistema. O bloco “Forças e momentos” determina as forças e momentos que os motores causam. O bloco “Equações de Newton-Euler” determina as acelerações causadas por essas forças ainda no referencial local. O bloco “Cinemática Local-Global” transforma os vetores para o sistema de coordenadas Global e integra os sinais para determinar a orientação e posição do veículo. Por fim o bloco “Outras Forças” utiliza a informação da orientação do veículo para determinar a orientação da força da gravidade (considerada 10 m/s) no referencial local.

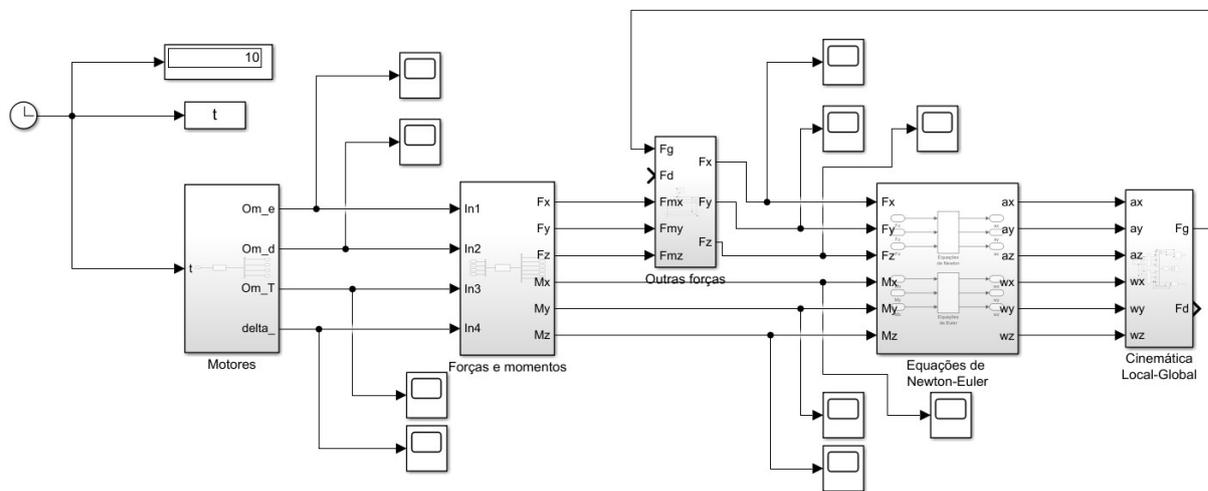


Figura 39: Diagrama de blocos construído no Simulink

Cada bloco é mostrado em separado no Anexo.

6.3. Resultados

Foram simuladas diferentes manobras com o objetivo de validar o modelo matemático e entender com mais profundidade a dinâmica. O objetivo é mostrar como

os motores atuam para executar cada uma das manobras de forma detalhada pondo as equações desenvolvidas até aqui à prova.

6.3.1. Voo estacionário

Conforme foram obtidas as condições de equilíbrio estático na seção 5.2, a primeira simulação verifica essas condições. Iniciando com os motores ligados, o drone deve permanecer parado com altitude constante. Aos 8 segundos os motores são desligados e o tricóptero deve entrar em queda livre.

Ao substituir os parâmetros do drone nas equações do sistema 5.2.8, os valores obtidos são, conforme mostrados nos gráficos a seguir:

- Velocidades dos 3 rotores iguais a $\Omega_{estatico} = 1360 \text{ rad/s}$. O que equivale a aproximadamente 13000 RPM.
- Ângulo do rotor traseiro: $\delta = 6,54 \times 10^{-3} \text{ rad}$, aproximadamente $0,4^\circ$.
- Ângulo de rolagem: $\phi = -0,125^\circ$.

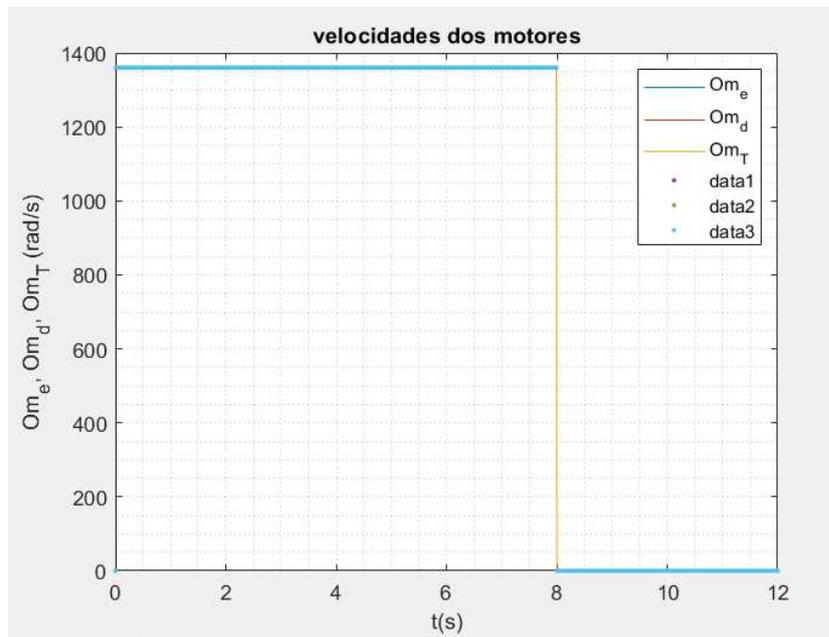


Figura 40: Velocidade dos 3 motores

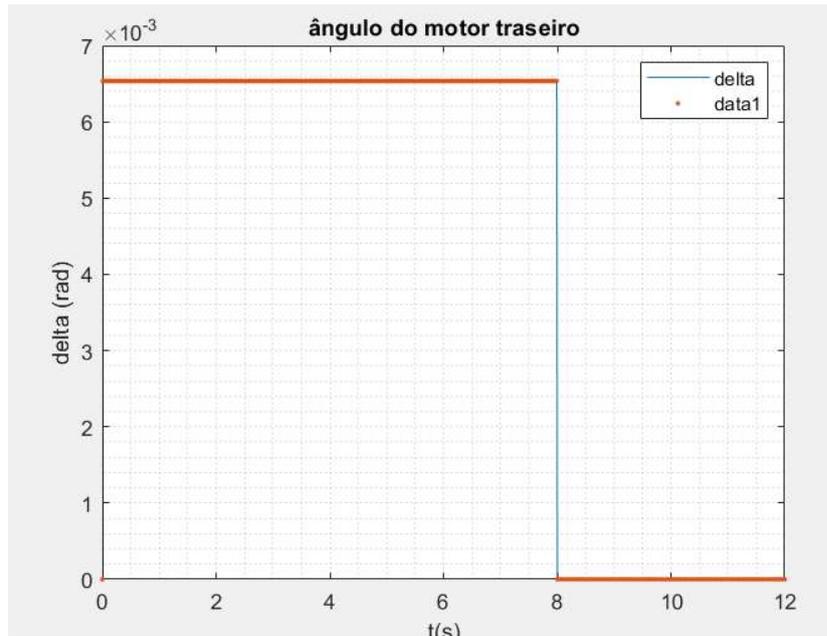


Figura 41: Ângulo do motor traseiro

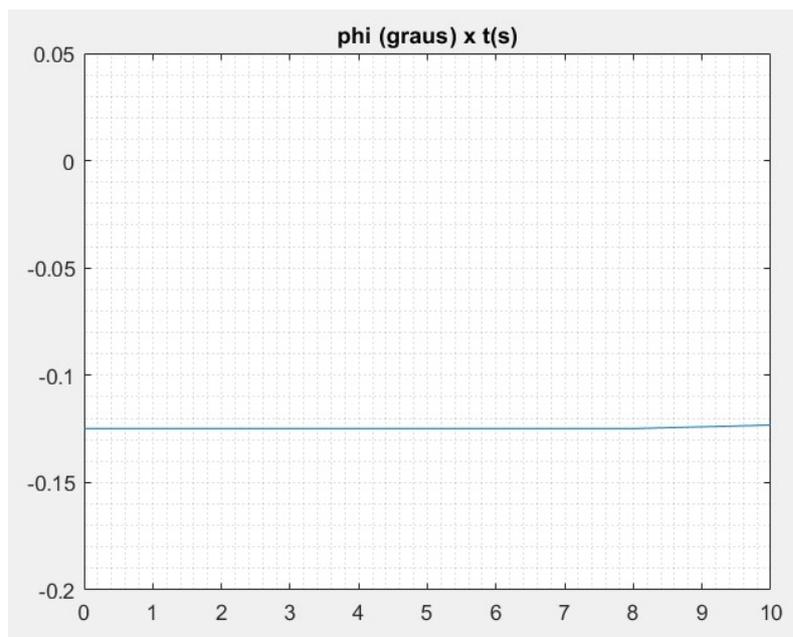


Figura 42: Ângulo de rolagem

O ângulo do rotor traseiro necessário para manter o equilíbrio de momentos é muito pequeno e, da mesma forma, também é o ângulo de rolagem necessário para

evitar o deslocamento lateral. Isso mostra que eventuais perdas de eficiência causadas pela inclinação de um rotor são pequenas.

Como esperado, o tricóptero permanece em voo estacionário até entrar em queda livre aos 8 segundos (Figura 43). A Figura 44 mostra a aceleração vertical à qual o drone está submetido, que é igual a zero no início e passa a ser igual à gravidade aos 8 segundos, quando os motores desligam.

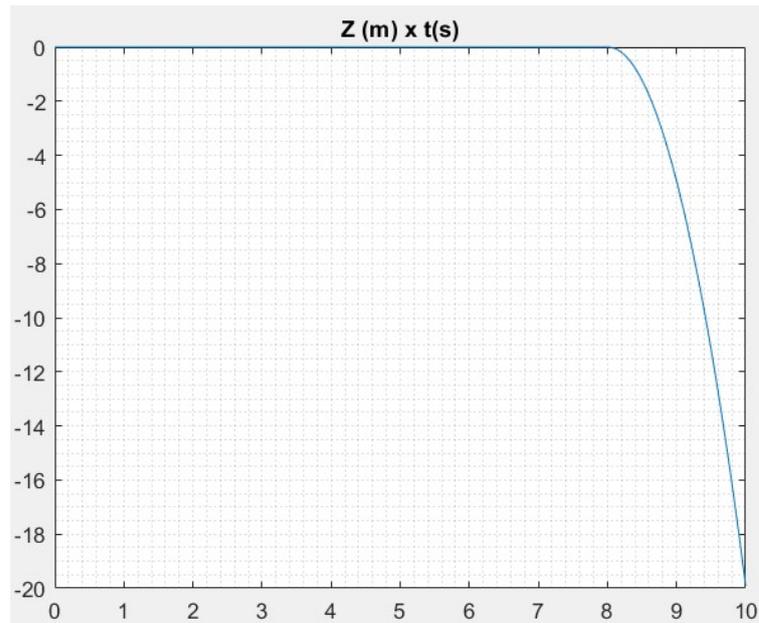


Figura 43: Altura do drone em função do tempo

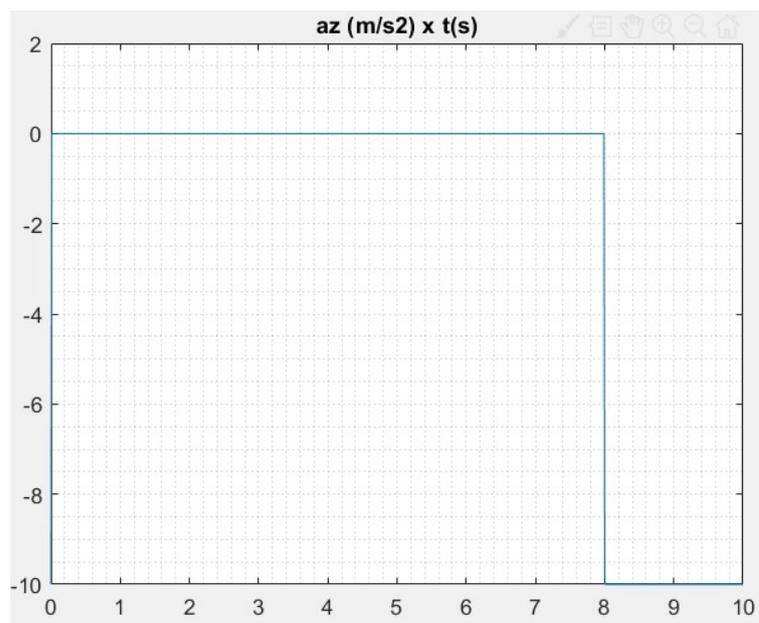


Figura 44: Aceleração vertical em função do tempo

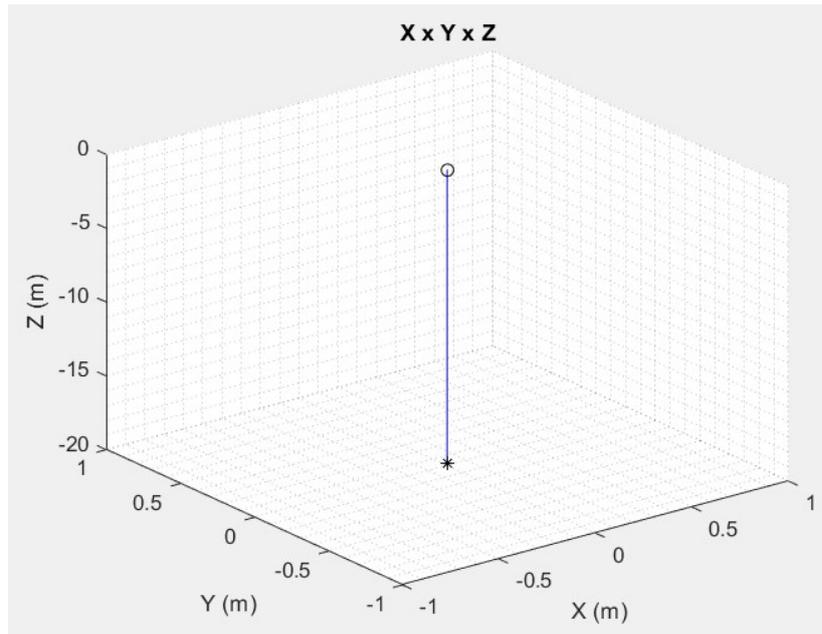


Figura 45: trajetória tridimensional do drone

Na Figura 45, a trajetória mostrada é percorrida pelo drone a partir dos 8 segundos. Antes desse instante, o tricóptero estava parado no ponto superior.

6.3.2. Aumento de altitude seguido de voo estacionário

Agora será testada a capacidade de aumentar a altitude. Essa manobra foi explicada na seção 2.2 e, segundo o que foi discutido, basta que os 3 motores aumentem suas velocidades na mesma proporção. A inclinação do motor traseiro não precisa mudar pois o torque de reação a mais, devido ao aumento de rotação, é automaticamente compensado pelo aumento da componente horizontal de sustentação. Assim, nessa simulação, os motores começam com velocidade angular 1,4 vezes maior que no voo estacionário. Quando $t=1s$, os motores desligam e o veículo para de acelerar para cima até que sua velocidade chega a zero aos 10 m de altura, quando os motores ligam novamente na condição de voo estacionário. Isso se mantém até 8 segundos quando os motores são desligados e o drone volta a descer.

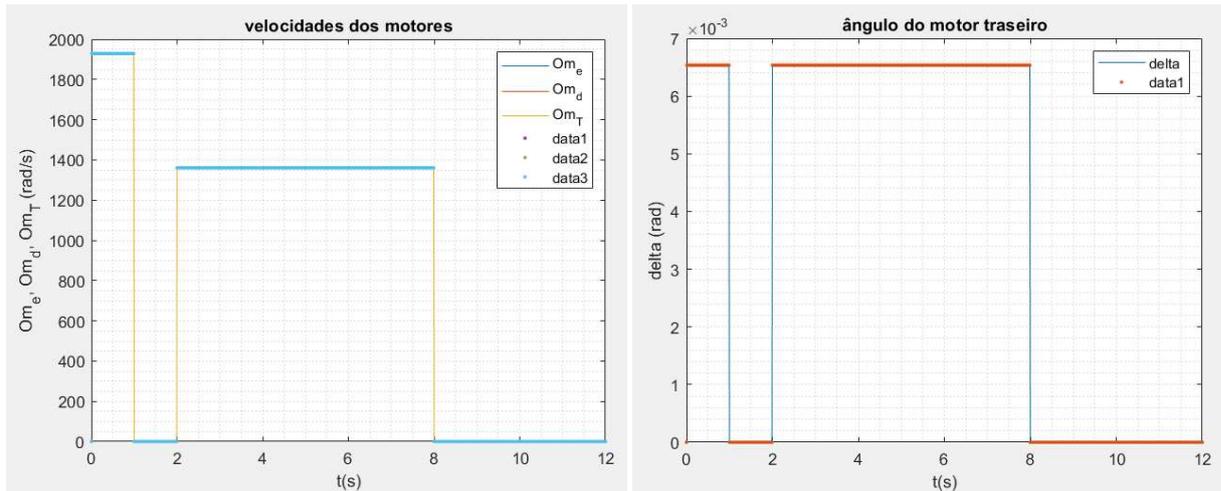


Figura 46: Velocidade e ângulo dos motores para aumento de altitude e posterior voo estacionário

A Figura 46, mostra que os motores adotam diferentes velocidades, mas o rotor traseiro mantém a inclinação.

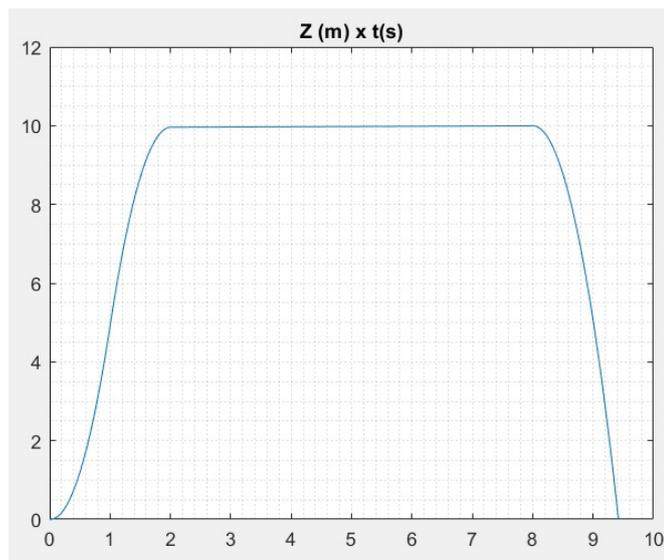


Figura 47: Altura do tricóptero em função do tempo

O tricóptero, de fato, sobe até os 10 metros e permanece, como esperado, em voo estacionário. Como a força de sustentação é proporcional ao quadrado da velocidade angular (equação 3.3.1), e $1,4^2$ é aproximadamente igual a $\sqrt{2}$, a força (e, portanto, a aceleração) gerada pelos motores é o dobro do peso. Logo, a aceleração resultante inicial é 10 m/s e, quando os motores desligam, passa a ser -10 m/s, se mantendo em 0 quando estão ligados na condição de voo estacionário.

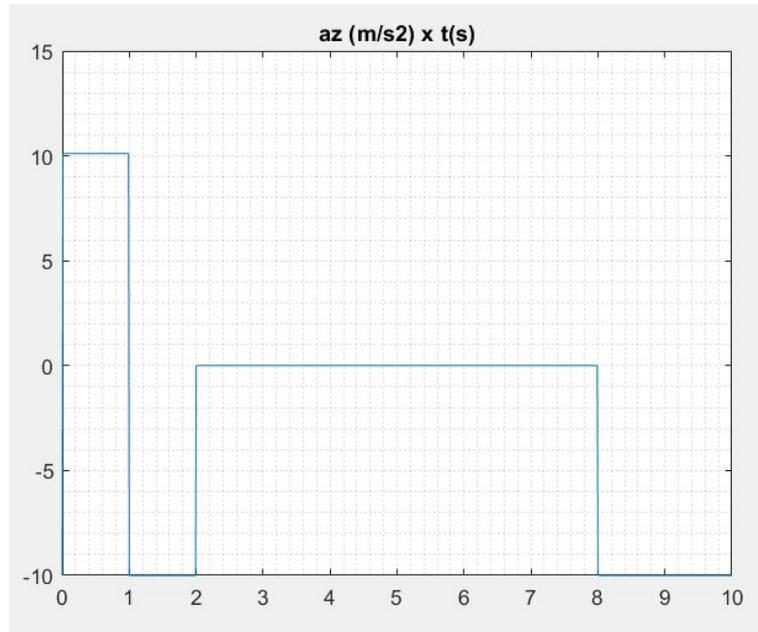


Figura 48: Acelerações em função do tempo

A figura mostra a trajetória percorrida pelo drone:

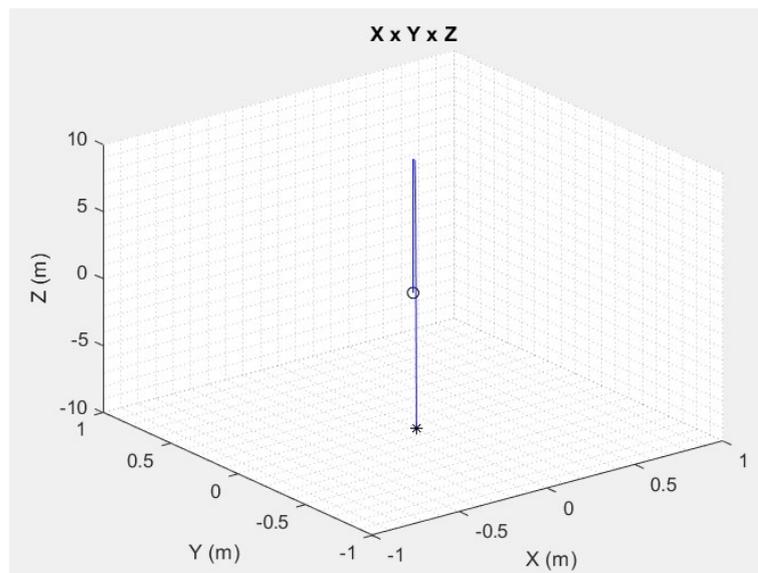


Figura 49: trajetória tridimensional do tricóptero em aumento de altitude

O tricóptero vai da posição $(0,0,0)$ até a posição $(0,0,10)$ onde permanece parado e depois entra em queda livre. O asterisco representa o final de sua trajetória.

6.3.3. Voo reto e nivelado

Para realizar o voo reto e nivelado o drone precisa produzir uma força de sustentação maior que seu peso ao mesmo tempo em que está inclinado para a frente. O objetivo é produzir uma aceleração horizontal, na direção x , de 1 m/s^2 . Para isso,

os motores devem girar com velocidade $\Omega_{rn} = \sqrt{1/\cos \theta_{rn}} \Omega_{estatico}$ (já que $F_{rn} = (1/\cos \theta_{rn})F_{estatico}$) e ângulo de arfagem $\theta_{rn} = \tan^{-1}(1/10) = 5,71^\circ$.

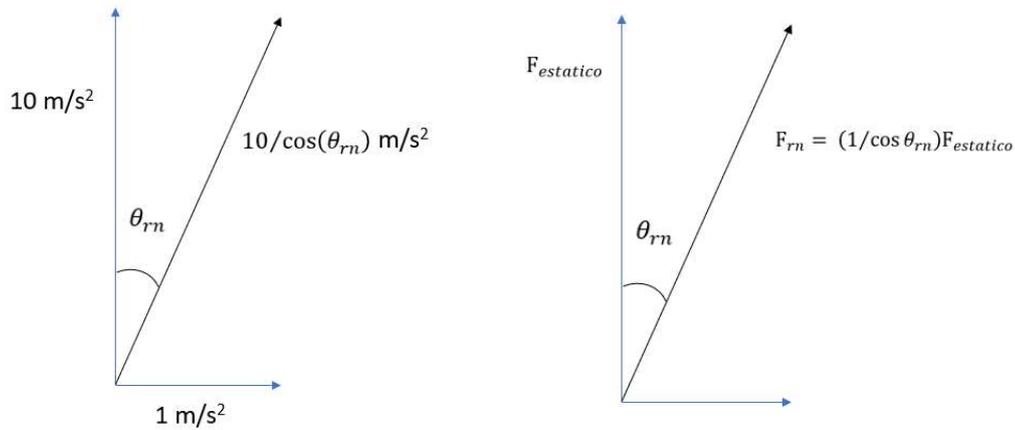


Figura 50: Componentes da aceleração (à esquerda) e força (à direita) na situação de voo reto e nivelado onde $F_{estático}$ é a força necessária para manter o voo estacionário.

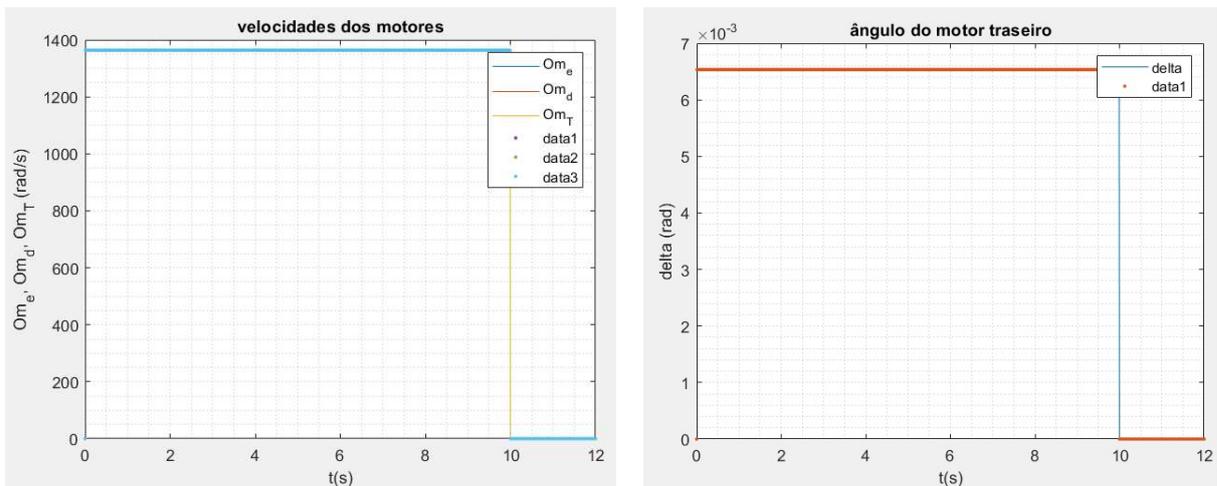


Figura 51: Velocidade dos motores e ângulo do rotor traseiro para voo reto e nivelado.

A velocidade angular dos motores é muito próxima à necessária para o voo estacionário (apenas 1,0025 vezes maior), isso porque o ângulo de arfagem foi em torno de apenas 6° .

Na Figura 52, a altitude (Z) e a posição em Y permanecem constantes e iguais a zero, mas a posição em X aumenta quadraticamente, conforme esperado. A aceleração em X é a única que não deve ser zero e assume o valor desejado de 1m/s.

Os ângulos, θ e ϕ assumem os valores definidos anteriormente e permanecem constantes.

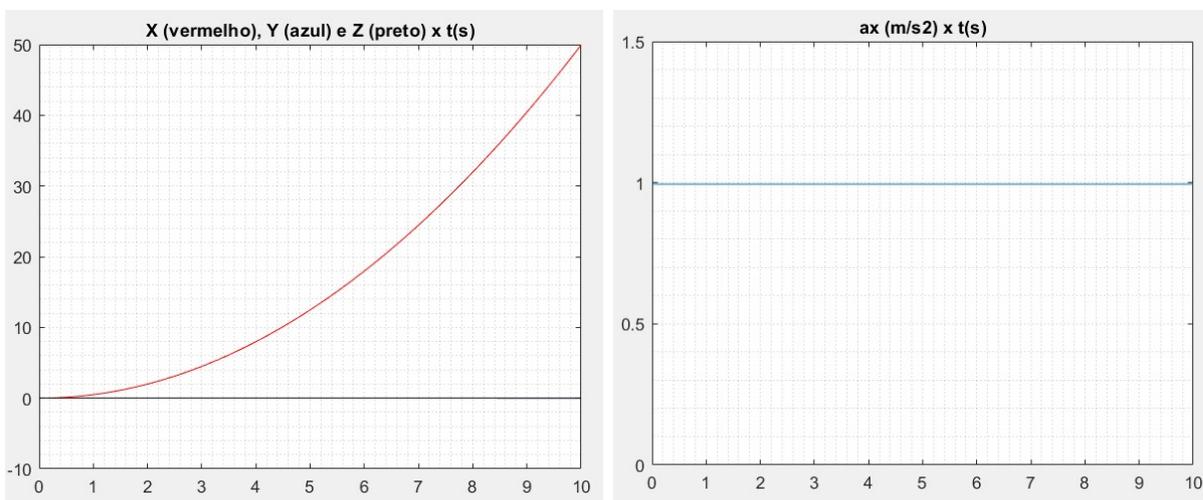


Figura 52: Três coordenadas da posição e aceleração na direção x

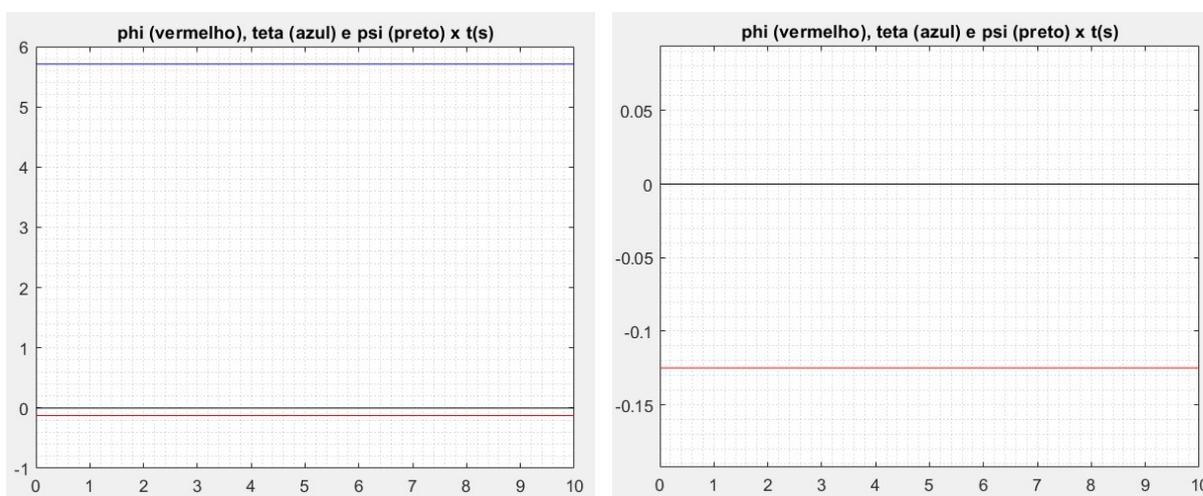


Figura 53: Ângulos de Euler em função do tempo no voo reto e nivelado

A Figura 54, mostra a trajetória retilínea do drone.

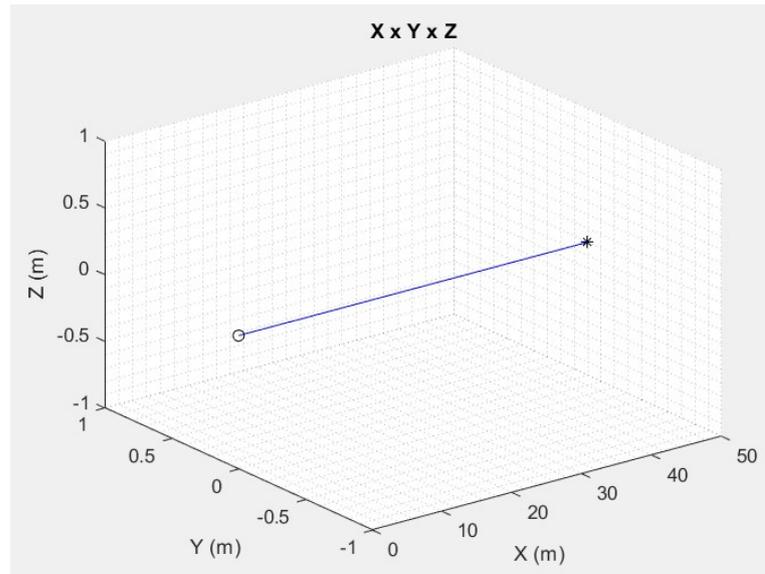


Figura 54: Trajetória do tricóptero em voo reto nivelado

6.3.4. Oscilação Vertical e nivelamento

Nesse caso, o tricóptero viaja a 1m/s e inicia uma série de mudanças de altitude até que estabelece o voo reto e horizontal a uma altitude 10 metros mais alta. Os motores ligam e desligam duas vezes antes de estabelecer voo horizontal, dessa forma, combinando os casos anteriores.

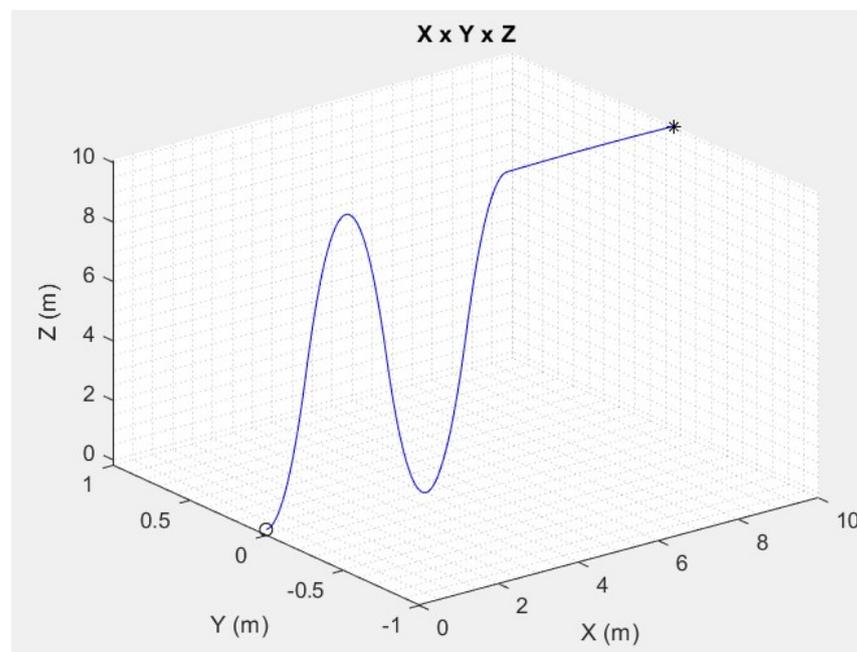


Figura 55: Trajetória tridimensional do tricóptero mudando de altitude

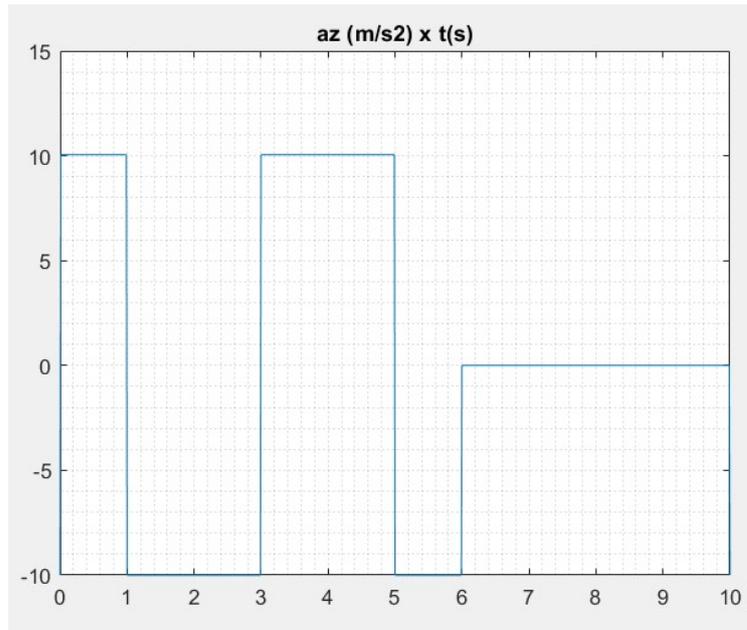


Figura 56: Acelerações verticais resultantes ao longo da trajetória oscilatória

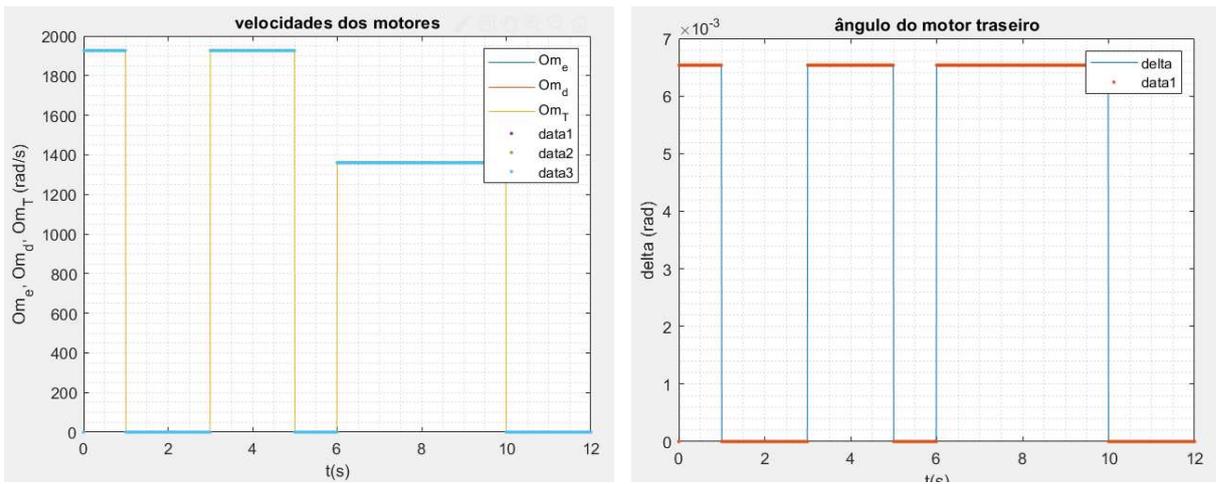


Figura 57: Velocidades angulares e ângulo do motor traseiro em função do tempo

7 CONCLUSÃO

As simulações realizadas, validaram a modelagem desenvolvida nesse trabalho. Como, em todas elas, as velocidades dos motores e sua variação no tempo foram predefinidas antes da simulação e não possuíam nenhum tipo de feedback em tempo real, trajetórias ou manobras mais complexas não puderam ser testadas. Se esses testes fossem realizados em um modelo real, imprecisões de medição, outras forças, como perturbações atmosféricas, entre muitos outros fatores imprevisíveis fariam o drone desviar da trajetória desejada. Esses desafios introduzem a necessidade de um sistema que possa, em tempo real, atuar nos motores alterando suas velocidades de modo a corrigir desvios que fatalmente ocorrerão. Esse é justamente o sistema de controle PID tratado na seção 3.6. O modelo desenvolvido é designado como de malha aberta, e serve como base para a implementação do controle. Basta que o estado atual (6 graus de liberdade) seja comparado com o estado desejado e as devidas correções sejam feitas pelo controlador. Como as saídas passam a servir de base para as entradas, esse tipo de sistema (com controle) recebe o nome de malha fechada.

Esse trabalho, então, serve de base para futuros aprofundamentos e eventual aplicação de um sistema de controle de malha fechada. Futuros estudos no laboratório LDSM poderão usufruir dos resultados obtidos aqui. Uma sugestão, é a incorporação de um algoritmo de controle à malha desenvolvida. Assim seria possível testar trajetórias e manobras de grande complexidade. Outra sugestão é a adaptação desse modelo, em malha fechada, no controlador de um tricóptero real. O próprio veículo que serviu de modelo para esse trabalho pode ser instrumentado e utilizado em tais testes. As propriedades de massa obtidas, também podem ser refinadas com um modelo 3D mais detalhado, o que tornará as simulações mais precisas.

Os motores BLDC, também são um ótimo objeto de estudo para futuros trabalhos, já que são fundamentais para o desenvolvimento do voo de veículos leves. Há um grande potencial no seu estudo e muito o que ser aprimorado.

8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Speranza Neto, M., "Dinâmica de Multicópteros", Notas de Aula MEC 2359 Dinâmica de Veículos e ENG1730 Dinâmica de Sistema,, DEM/PUC-Rio, 2019.
- [2] HERRERO, Rubén Antuña. Drone design. 12/07/2017. 81p. (Industrial Engineering) – Dumlupinar Universitesi, Kütahya, Turquia, 2017
- [3] PE, Paul J. Coco. MAE 586 Project Work in Mechanical Engineering: Tricopter Design. 2012. 56p. (Mechanical Engineering) – NC State University, 2012
- [4] DAS, Suman K.; GOUDA, Dinesh K.; DASH, Anirudha. Experimental research and design of Tricopter. 2019. 5p. International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)sin
- [5] AHMED, Nada M. Ali; SALEH, Muna Hadi. Tri-copter Drone Modeling with PID Control Tuned by PSO Algorithm. 2018. International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 181 – No. 25
- [6] SRIGRAROM, Sutthiphong et. al. Development of Flight Control for UGS Tri-copter MAV. Journal of Unmanned Systems Technology, 2016, Vol. 4
- [7] JANNASCH Ian; SABATTA Deon. Design and construction of a self-levelling tricopter using gain scheduling and PID controllers. School of Electrical and Electronic Engineering Science University of Johannesburg. South Africa. 2019.
- [8] KAMBUSHEV Martin, BILIDEROV Stefan, VARBANOV Yavor. Synthesis and Study of the Mathematical Model of a Tricopter. Faculty "Aviation", Dolna Mitropolia, Bulgaria. 2016
- [9] ŻREBIEC Jakub. Modelling of Unmanned Aerial Vehicle: Tricopter. AGH University of Science and Technology, Department of Automatics and Biomedical Engineering. Krakow, Poland. AUTOMATYKA/ AUTOMATICS. 2016. Vol. 20. No. 1
- [10] SOMEFUN, O. A. Simulation and Development of a Tricopter for Parcel Delivery with SimMechanics and SolidWorks3D. Department of Electrical and Electronics Engineering Federal University of Technology. Akure, Nigeria. 2016.
- [11] SAI, Sai Khun; TUN, Hla Myo. Modeling and Analysis of Tri-Copter (VTOL) Aircraft. International Journal of Emerging Engineering Research and Technology. Volume 3, Issue 6. June 2015. PP 54-62.
- [12] SAHIN, H.; OKTAY, T. Powerplant System Design for Unmanned Tricopter. The Eurasia Proceedings of Science, Technology, Engineering & Mathematics (EPSTEM). Volume 1, Pages 9-21. 2017

- [13] KUMAR Saurabh; NAIK Gaurav K. Modelling and Analysis of a Tricopter. Department of Industrial Design. National Institute of Technology Rourkela. Rourkela. 2014.
- [14] KAMBUSHEV Martin; BILIDEROV Stefan; VARBANOV Yavor. Synthesis and Study of the Mathematical Model of a Tricopter. Scientific Research and Education in the Air Force-afases. Dolna Mitropolia. Bulgaria. 2016
- [15] ZOU Jie-Tong; SU Kuo-Lan; TSO Haw. The modeling and implementation of tri-rotor flying robot. National Formosa University. National Yunlin University of Science and Technology. Yunlin County. Taiwan. 2012.
- [16] SABABHA Belal H.; ZU'BI Hamzeh M. Al; RAWASHDEH Osamah A. A rotor-tilt-free tricopter UAV: Design, modelling, and stability control. Int. J. Mechatronics and Automation, Vol. 5, Nos. 2/3. 2015
- [17] MOHAMED Mohamed Kara; LANZON Alexander. Design and Control of Novel Tri-rotor UAV. The University of Manchester. Manchester. 2012
- [18] VISHAL P. Venkata; NATARAJAN V. Control System Design for Tricopter using Filters and PID controller. University, Chennai. India.
- [19] SERVAIS Etienne; D'ANDRÉA-NOVEL Brigitte; MOUNIER Hugues. Ground Control of a Hybrid Tricopter. 2015.
- [20] SONG Ziwei et. al. Modeling and Maneuvering Control for Tricopter Based on the Back-stepping Method. Nanjing. 2016
- [21] RAMP Michalis; PAPADOPOULOS Evangelos. On Modeling and Control of a Holonomic Vectoring Tricopter. 2015.
- [22] AREGA Asalifew Belachew. Design of Super twisting Sliding Mode Controller for Hovering Stabilization of Tricopter UAV. 2016. 70p. Department of Electrical and Computer Engineering. Addis Ababa University. Addis Ababa, Ethiopia. 2016.
- [23] KAMBUSHEV M., BILIDEROV S. Defining the Control Law for Yaw Mechanism Control of a Tricopter. Aviation Faculty – National Military Universitat "Vasil Levski. Veliko Turnovo. 2015.

9 ANEXO

SCRIPT DO MATLAB E DIAGRAMA DE BLOCOS DO SIMULINK:

simula_dinamica_3R:

```
clc
clear all
close all

global J
global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M phi_estatico

% Drone maciço
m=0.555;

% Matriz de Inércia
Jxx=1304745/10^9;
Jyy=1899978/10^9;
Jzz=2824099/10^9;
Jxy=15051/10^9;
Jxz=33515/10^9;
Jyz=-2635/10^9;

J=[Jxx Jxy Jxz;
   Jxy Jyy Jyz;
   Jxz Jyz Jzz];

% Inversa Matriz (Tensor) de Inércia
J1=inv(J);

% Matriz de Massa
M=m*eye(3);

% Inversa da Matriz de Massa
M1=inv(M);

% Forças e Momentos Externos aplicados ao corpo OBS: ALTERAR O NOME DO ARQUIVO
% forcas_momentos_Fz_Mx_1
entrada_voo_estacionario
% entrada_aumento_de_altitude
% entrada_reto_nivelado
% entrada_circular

% Simulação

sim('dinamica_Newton_Euler_3R')

zerar_variaveis

plotar_animacao_CM

plotar_dinamica_3R
```

Entrada_voo_estacionario:

```
%
% Gera as velocidades dos motores
%

global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M phi_estatico
```

```

t0=0; t1=1; t2= 2; t3=8;
tf=10;
deltat=0.01;

% equações das condições de equilíbrio estático
m=0.555;
g=10;
alpha=60*pi/180;
l=0.153;
C_L=10^-6;
C_M=10^-9;
delta=atan(C_M/(C_L*l));
phi_estatico=atan(C_L*l*sin(delta)*cos(alpha)/(C_L*l*cos(delta)*cos(alpha)+C_L*l*cos(delta)+C_M*sin(delta));
omega_T=sqrt(m*g*sin(phi_estatico)/(C_L*sin(delta)));
omega_e=sqrt(m*g*cos(phi_estatico)/(2*C_L)-omega_T^2*cos(delta)/2);
omega_d=omega_e;

i=0;
for t=0:deltat:tf
    i=i+1;
    t_(i)=t;

    Om_e(i) = 0;
    Om_d(i) = 0;
    Om_T(i) = 0;
    delta_(i) = 0;

    if t >= t0 & t < t3
        Om_e(i) = omega_e;
        Om_d(i) = omega_d;
        Om_T(i) = omega_T;
        delta_(i) = delta;
    end
end

t_OM=t_; Ome=Om_e; Omd=Om_d; OmT=Om_T; Delta=delta_;

clear t t_ Om_e Om_d Om_T delta_

w0=[0;0;0];
E0=[-phi_estatico;0;0];
v0=[0;0;0.1];
r0=[0;0;0];

```

entrada_aumento_de_altitude:

```

%
% Gera as velocidades dos motores
%

global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M phi_estatico

t0=0; t1=1; t2= 2; t3=8;
tf=10;
deltat=0.01;

% equações das condições de equilíbrio estático
m=0.555;
g=10;
alpha=60*pi/180;
l=0.153;
C_L=10^-6;
C_M=10^-9;
delta=atan(C_M/(C_L*l));
phi_estatico=atan(C_L*l*sin(delta)*cos(alpha)/(C_L*l*cos(delta)*cos(alpha)+C_L*l*cos(delta)+C_M*sin(delta));

```

```

omega_T=sqrt(m*g*sin(phi_estatico)/(C_L*sin(delta)));
omega_e=sqrt(m*g*cos(phi_estatico)/(2*C_L)-omega_T^2*cos(delta)/2);
omega_d=omega_e;

k=1.418;

i=0;
for t=0:deltat:tf
    i=i+1;
    t_(i)=t;

    Om_e(i) = 0;
    Om_d(i) = 0;
    Om_T(i) = 0;
    delta_(i) = 0;

    if t >= t0 & t < t1
        Om_e(i) = k*omega_e;
        Om_d(i) = k*omega_d;
        Om_T(i) = k*omega_T;
        delta_(i) = delta;
    end
    if t >= t2 & t < t3
        Om_e(i) = omega_e;
        Om_d(i) = omega_d;
        Om_T(i) = omega_T;
        delta_(i) = delta;
    end
end

end

t_OM=t_; Ome=Om_e; Omd=Om_d; OmT=Om_T; Delta=delta_;

clear t t_ Om_e Om_d Om_T delta_

w0=[0;0;0];
E0=[-phi_estatico;0;0];
v0=[0;0;0.1];
r0=[0;0;0];

```

entrada_reto_nivelado

```

%
% Gera as velocidades dos motores
%

global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M phi_estatico

t0=0; t1=1; t2= 2; t3=8;
tf=10;
deltat=0.01;

% equações das condições de equilíbrio estático
m=0.555;
g=10;
alpha=60*pi/180;
l=0.153;
C_L=10^-6;
C_M=10^-9;
delta=atan(C_M/(C_L*l));
phi_estatico=atan(C_L*l*sin(delta)*cos(alpha)/(C_L*l*cos(delta)*cos(alpha)+C_L*l*cos(delta)+C_M*sin(delta));
omega_T=sqrt(m*g*sin(phi_estatico)/(C_L*sin(delta)));
omega_e=sqrt(m*g*cos(phi_estatico)/(2*C_L)-omega_T^2*cos(delta)/2);
omega_d=omega_e;

k=sqrt(1/(cos(atan(1/10))));

```

```

i=0;
for t=0:deltat:tf
    i=i+1;
    t_(i)=t;

    Om_e(i) = 0;
    Om_d(i) = 0;
    Om_T(i) = 0;
    delta_(i) = 0;

    if t >= t0 & t < tf
        Om_e(i) = k*omega_e;
        Om_d(i) = k*omega_d;
        Om_T(i) = k*omega_T;
        delta_(i) = delta;
    end
end

t_OM=t_; Ome=Om_e; Omd=Om_d; OmT=Om_T; Delta=delta_;

clear t t_ Om_e Om_d Om_T delta_

teta_reto_nivelado=atan(1/10);

w0=[0;0;0];
E0=[-phi_estatico;teta_reto_nivelado;0];
v0=[0;0;0.1];
r0=[0;0;0];

```

entrada_oscilacao_vertical:

```

%
% Gera as velocidades dos motores
%

global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M phi_estatico

t0=0; t1=1; t2= 3; t3=5; t4=6;
tf=10;
deltat=0.01;

% equações das condições de equilíbrio estático
m=0.555;
g=10;
alpha=60*pi/180;
l=0.153;
C_L=10^-6;
C_M=10^-9;
delta=atan(C_M/(C_L*l));
phi_estatico=atan(C_L*l*sin(delta)*cos(alpha)/(C_L*l*cos(delta)*cos(alpha)+C_L*l*cos(delta)+C_M*sin(delta));
omega_T=sqrt(m*g*sin(phi_estatico)/(C_L*sin(delta)));
omega_e=sqrt(m*g*cos(phi_estatico)/(2*C_L)-omega_T^2*cos(delta)/2);
omega_d=omega_e;

k=1.416;

i=0;
for t=0:deltat:tf
    i=i+1;
    t_(i)=t;

    Om_e(i) = 0;
    Om_d(i) = 0;
    Om_T(i) = 0;

```

```

delta_(i) = 0;

if t >= t0 & t < t1
    Om_e(i) = k*omega_e;
    Om_d(i) = k*omega_d;
    Om_T(i) = k*omega_T;
    delta_(i) = delta;
end
if t >= t2 & t < t3
    Om_e(i) = k*omega_e;
    Om_d(i) = k*omega_d;
    Om_T(i) = k*omega_T;
    delta_(i) = delta;
end

if t >= t4 & t < tf
    Om_e(i) = omega_e;
    Om_d(i) = omega_d;
    Om_T(i) = omega_T;
    delta_(i) = delta;
end

end

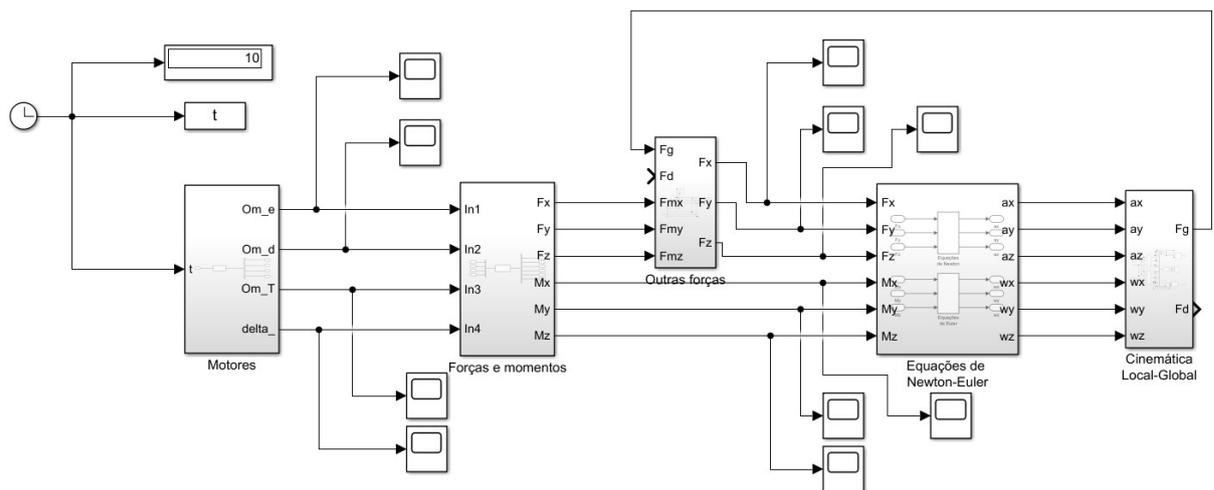
t_OM=t; Ome=Om_e; Omd=Om_d; OmT=Om_T; Delta=delta_;

clear t t_ Om_e Om_d Om_T delta_

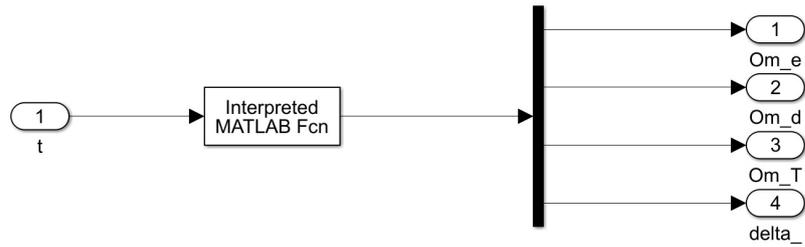
w0=[0;0;0];
E0=[-phi_estatico;0;0];
v0=[1;0;0.1];
r0=[0;0;0];

```

dinamica_Newton_Euler_3R:



-Bloco Motores:



Interpreted Matlab function:

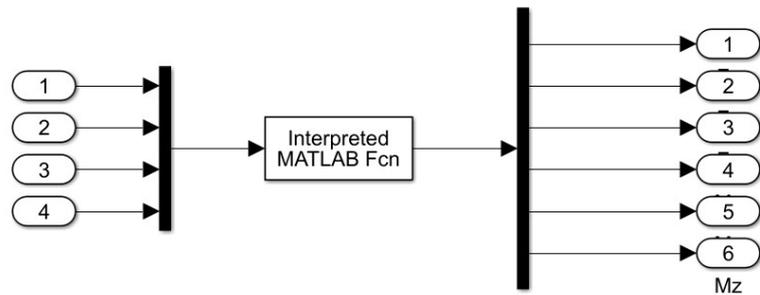
```
function [y] = ws_delta(t)

global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M

if t <= t_OM(1)
    Om_e = 0;
    Om_d = 0;
    Om_T = 0;
    delta = 0;
else
    if t > t_OM(length(t_OM))
        Om_e = 0;
        Om_d = 0;
        Om_T = 0;
        delta = 0;
    else
        Om_e = interp1(t_OM,Ome,t);
        Om_d = interp1(t_OM,Omd,t);
        Om_T = interp1(t_OM,OmT,t);
        delta = interp1(t_OM,Delta,t);
    end;
end;

y=[Om_e;Om_d;Om_T;delta];
```

-Bloco Forças e momentos:



Interpreted Matlab function:

```
function v_FM = f_m(omDe,omDd,omT,delta)
```

```

% global t_OM Ome Omd OmT Delta
global alpha l C_L C_M

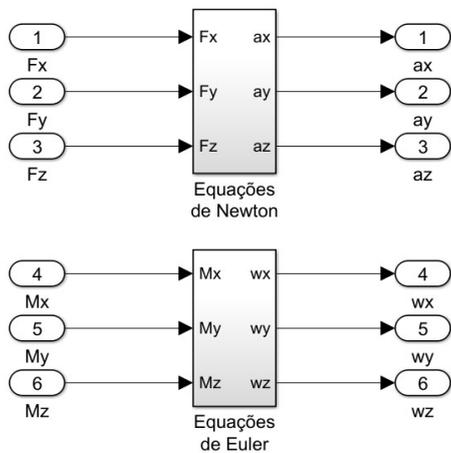
v_omega=[omDe^2;omDd^2;omT^2];

MD=[0,0,0;
    0,0,-C_L*sin(delta);
    C_L,C_L,C_L*cos(delta);
    -C_L*l*sin(alpha),C_L*l*sin(alpha),0;
    -C_L*l*cos(alpha),-C_L*l*cos(alpha),(C_M*sin(delta)+C_L*cos(delta));
    C_M,-C_M,(-C_M*cos(delta)+C_L*sin(delta))];

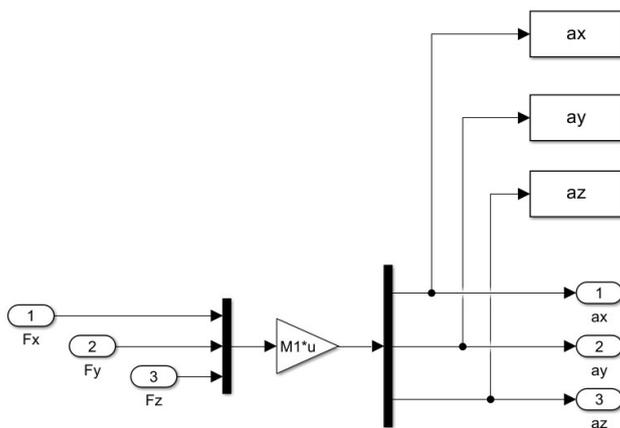
v_FM = MD*v_omega;

```

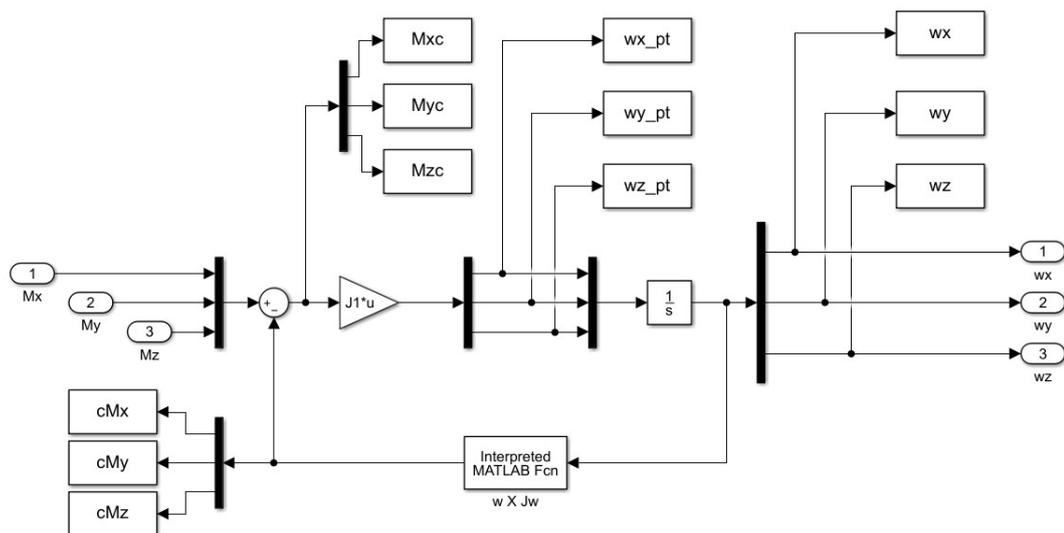
-Bloco Equações de Newto-Euler:



--Bloco Equações de Newton:



--Bloco Equações de Euler:



Interpreted Matlab function:

```

%
% Velocidade Angular vetorial Quantidade de Movimento Angular
%
function [M_J]=w_X_Jw(wx,wy,wz)

% wx, wy, wz --> velocidades angulares no referencial local
% M_J <-- correção momentos no referencial local

global J

w=[wx; wy; wz];

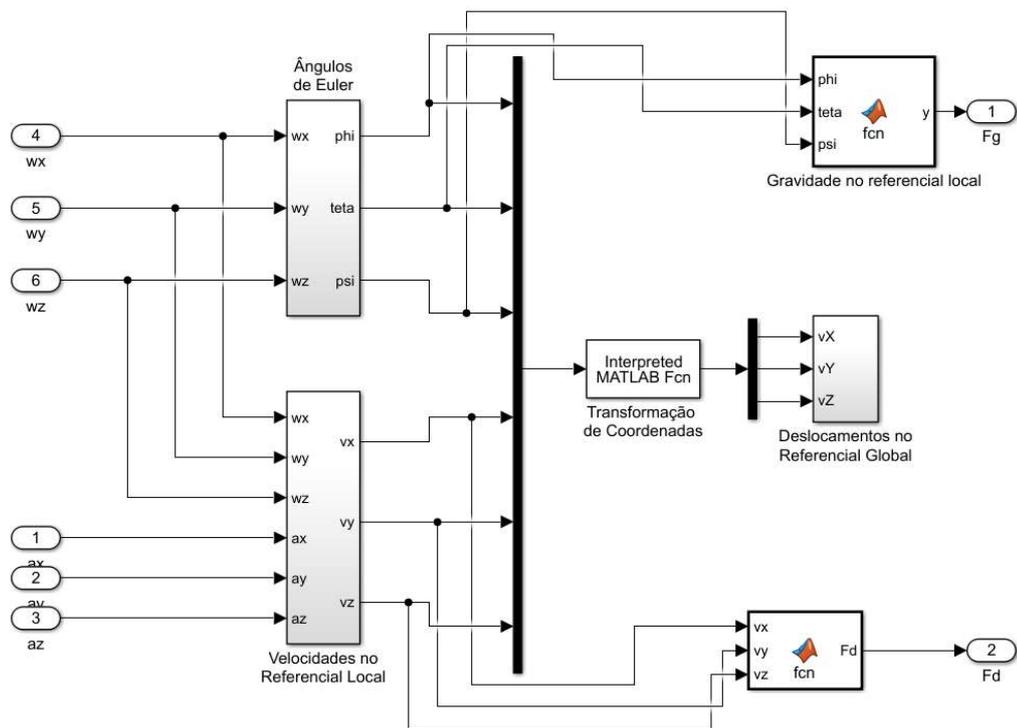
h=J*w;

M_J=cross(w,h);

end

```

-Bloco Cinemática Local-Global:



Interpreted Matlab function:

```

%
% Transformação de Coordenadas Local --> Global
%
function[v_glob]=Loc2Glob(phi,teta,psi,vx,vy,vz)

% vx, vy, vz --> variáveis no referencial local
% phi, teta, psi --> ângulos de Euler
% v_glob <-- variáveis no referencial global

v_glob=[ cos(psi)*cos(teta), cos(psi)*sin(phi)*sin(teta) - cos(phi)*sin(psi),
sin(phi)*sin(psi) + cos(phi)*cos(psi)*sin(teta);
        cos(teta)*sin(psi), cos(phi)*cos(psi) + sin(phi)*sin(psi)*sin(teta),
cos(phi)*sin(psi)*sin(teta) - cos(psi)*sin(phi);
        -sin(teta), cos(teta)*sin(phi),
cos(phi)*cos(teta)]*[vx; vy; vz];

end

```

Gravidade no referencial local:

```

function y = fcn(phi, teta, psi)

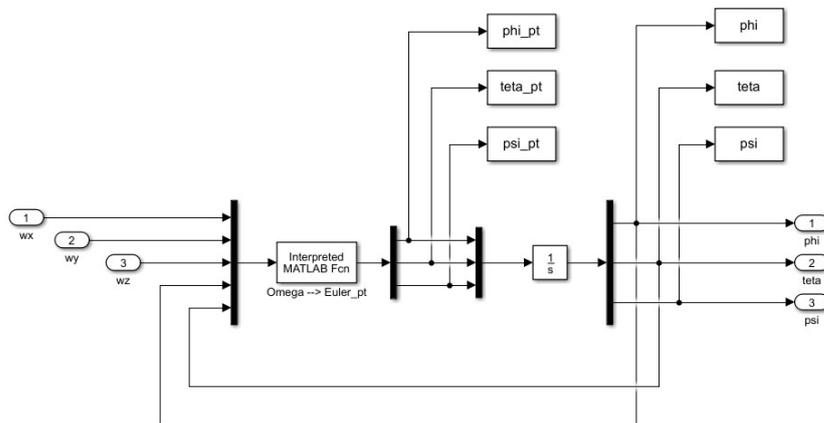
Fg=0.555*10;

Rot=[ cos(psi)*cos(teta), cos(teta)*sin(psi), -sin(teta);
      cos(psi)*sin(phi)*sin(teta) - cos(phi)*sin(psi), cos(phi)*cos(psi) +
sin(phi)*sin(psi)*sin(teta), cos(teta)*sin(phi);
      sin(phi)*sin(psi) + cos(phi)*cos(psi)*sin(teta), cos(phi)*sin(psi)*sin(teta) -
cos(psi)*sin(phi), cos(phi)*cos(teta)];

y = Rot*[0;0;-Fg];

```

--Bloco Ângulos de Euler:



Interpreted Matlab function:

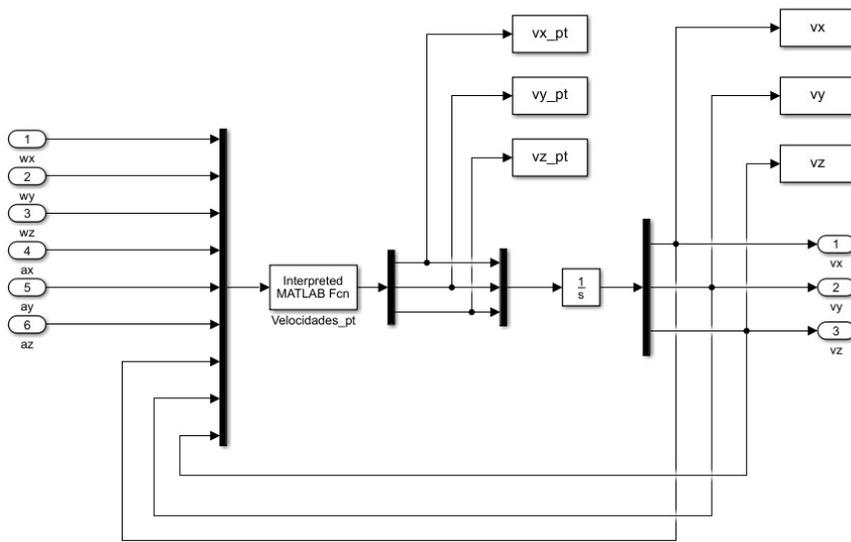
```
%
% Taxa Variação Velocidades Locais
%
function [e_pt]=Euler_pt(wx,wy,wz,phi,teta)

% wx, wy, wz --> velocidades angulares no referencial local
% phi, teta --> ângulos de Euler em relação à x e y locais
% e_pt <-- taxas de variação das velocidades no referencial local

e_pt=[ 1, sin(phi)*tan(teta), cos(phi)*tan(teta);
       0,          cos(phi),      -sin(phi);
       0, sin(phi)/cos(teta), cos(phi)/cos(teta)]*[wx; wy; wz];

end
```

--Bloco Velocidades no Referencial Local:



Interpreted Matlab function:

```

%
% Taxa Variação Velocidades Locais
%
function [v_pt]=Velocidades_pt (wx,wy,wz,ax,ay,az,vx,vy,vz)

% wx, wy, wz --> velocidades angulares no referencial local
% ax, ay, az --> acelerações lineares no referencial local
% vx, vy, vz --> velocidades lineares no referencial local
% v_pt <-- taxas de variação das velocidades no referencial local

v_pt=[ax; ay; az]-cross([wx; wy; wz],[vx; vy; vz]);

end

```

-Bloco Outras Forças:

