

## 6 Apêndices

### 6.1. Processos Estocásticos

Processo de Markov é um processo em que a distribuição de probabilidade do valor futuro de uma variável depende apenas do seu valor atual. Random Walk é um processo de Markov que possui incrementos independentes na forma  $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ , onde  $\varepsilon_t$  é um fator de erro com distribuição normal, onde  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Random walk pode ser com ou sem crescimento (*drift*). Um Processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, é um processo de Markov em tempo contínuo com incrementos independentes, onde estes incrementos são normalmente distribuídos com variância que cresce linearmente com o tempo. É uma versão de Random Walk em tempo contínuo, na forma:

$$x_t = x_{t-1} + dz \quad \text{onde} \quad dz = \varepsilon \sqrt{dt} \quad \text{e} \quad \varepsilon \sim N(0,1)$$

Movimento Aritmético Browniano (MAB) é um processo de Wiener com drift, portanto, também é um random walk. A sua forma é:

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + \mu dt + \sigma dz \\ dx &= \mu dt + \sigma dz \quad dx \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \end{aligned}$$

Movimento Geométrico Browniano (MGB) é um processo de tempo contínuo onde os incrementos são proporcionais e não mais absolutos como no MAB. A sua forma é:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz$$

Podemos observar que o incremento proporcional, ou taxa de incremento em  $x$ ,  $\left(\frac{dx}{x}\right)$ , é um MAB e portanto temos  $\frac{dx}{x} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ .

Podemos também escrever  $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$  e verificar que  $\frac{dx}{x}$  é também o incremento em  $\ln x$ . Uma variável lognormal é uma variável cujo logaritmo natural tem uma distribuição normal. Se  $\frac{dx}{x}$  tem distribuição normal, e  $\frac{dx}{x} = \frac{d}{dx}(\ln x)$ , então  $x$  tem distribuição lognormal, ou seja, um MGB. A distribuição de  $d \ln x$  pode ser determinada através do Lema de Itô. Seja  $x$  uma variável lognormal na forma  $dx = \mu x dt + \sigma x dz$ , e  $R = \ln x$ . Então  $\partial R / \partial x = 1/x$ ,  $\partial^2 R / \partial x^2 = -1/x^2$  e  $\partial R / \partial t = 0$ . Por Itô temos:

$$dR = \left( \frac{\partial R}{\partial x} \mu x + \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) dt + \frac{\partial R}{\partial x} \sigma x dz$$

$$dR = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

$$R = \ln x \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (6.1)$$

Podemos observar que se os incrementos proporcionais  $\Delta x/x$ , ou sejam, os retornos, são normalmente distribuídos, então os incrementos absolutos  $\Delta x$  são lognormalmente distribuídos.

## 6.2. Programação Dinâmica com Processos Estocásticos Distintos

No caso de duas variáveis estocásticas, em que uma das variáveis segue um Movimento Geométrico Browniano e a outra siga um processo de reversão à média, por exemplo, a equação de valor do projeto se altera.

A Equação Geral de Bellman para duas variáveis onde  $u_t$  é a variável de controle e  $C(x, y, u, t) \Delta t$  é o fluxo de lucros durante um período de tempo  $\Delta t$  é:

$$F(x, y, t) = \max_{u_t} \left\{ C(x, y, u, t) \Delta t + \frac{1}{1 + \rho \Delta t} E_t [F(x_{t+\Delta t}, y_{t+\Delta t}, t + \Delta t)] \right\}$$

$$(1 + \rho\Delta t)F(x, y, t) = \max_{u_t} \left\{ C(x, y, u, t)\Delta t(1 + \rho\Delta t) + E_t [F(x_{t+\Delta t}, y_{t+\Delta t}, t + \Delta t)] \right\}$$

$$\rho\Delta tF(x, y, t) = \max_{u_t} \left\{ C(x, y, u, t)\Delta t + E_t [F(x_{t+\Delta t}, y_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - F(x, y, t)] \right\}$$

Quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  tende a zero e o tempo é contínuo, a equação de Bellman, pode ser escrita como:

$$\rho F(x, y, t) = \max_u \left\{ C(x, y, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF(x, y, t)] \right\}$$

Se  $x$  segue um MGB na forma de  $dx = \alpha_x xdt + \sigma_x xdz_x$ , e  $y$  segue um processo de reversão a média na forma  $dy = \eta(\bar{y} - y)ydt + \sigma_y ydz_y$ , por exemplo, e  $E(dz_x \cdot dz_y) = \lambda dt$ , desenvolvendo  $dF(x, y, t)$  por Itô e desprezando os termos  $dt$  de maior ordem, temos:

$$dF(x, y, t) = F_x dx + F_y dy + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} dx^2 + \frac{1}{2} F_{yy} dy^2 + F_{xy} dx dy + F_{xt} dx dt + F_{yt} dy dt$$

$$dF(x, y, t) = F_x (\alpha_x xdt + \sigma_x xdz_x) + F_y (\alpha_y ydt + \sigma_y ydz_y) + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_x^2 x^2 dt + \frac{1}{2} F_{yy} \sigma_y^2 y^2 dt + F_{xy} \sigma_x \sigma_y xy \lambda dt$$

Então

$$E[dF] = \left( F_x \alpha_x x + F_y \alpha_y y + F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_x^2 x^2 + \frac{1}{2} F_{yy} \sigma_y^2 y^2 + F_{xy} \sigma_x \sigma_y xy \lambda \right) dt$$

Substituindo na equação de Bellman, temos:

$$\rho F(x, y, t) = \max_u \left\{ C(x, y, u, t) + F_x \alpha_x x + F_y \alpha_y y + F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_x^2 x^2 + \frac{1}{2} F_{yy} \sigma_y^2 y^2 + F_{xy} \sigma_x \sigma_y xy \lambda \right\}$$

Podemos expressar o valor ótimo de  $u$  como uma função de  $F(x, y, t)$ ,  $F_x(x, y, t)$ ,  $F_{xx}(x, y, t)$ ,  $F_y(x, y, t)$ ,  $F_{xy}(x, y, t)$ ,  $F_{yy}(x, y, t)$ , bem como de  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , e  $C(x, y, t)$ . Assim, podemos reduzir a expressão da equação de Bellman para:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_{xx}\sigma_x^2x^2 + \frac{1}{2}F_{yy}\sigma_y^2y^2 + F_{xy}\sigma_x\sigma_y xy\lambda + F_x\alpha_x x + F_y\eta(\bar{y} - y)y - \\ - \rho F(x, y, t) + F_t + C(x, y, u, t) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

A diferença desta equação para a solução obtida por Contingent Claims Analysis é que em Programação Dinâmica substituímos a taxa livre de risco por uma taxa de risco exógena  $\rho$ . Assim, a taxa de apreciação do projeto (*drift rate*)  $\alpha$  também é dada por  $\alpha = \rho - \delta$ . No caso de um processo de reversão à média a taxa de distribuição de dividendos ( $\delta$ ), ou convenience yield no caso de commodities, é uma função do valor do projeto, e não constante como no caso de um MGB.

### 6.3. Transformação Algébrica da Árvore Binomial

Para fazermos esta transformação, inicialmente estabelecemos a relação entre  $V_0$  e  $V_t$  do fluxo determinístico. A partir da equação (3.5) temos:

$$\begin{aligned} E[V_i] &= \sum_{t=i}^m \frac{E[C_t]}{(1+\mu)^{t-i}} \quad \text{ou simplesmente} \\ V_i &= \sum_{t=i}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^{t-i}} \\ V_i &= \sum_{t=i}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^t} (1+\mu)^i \\ V_i &= (1+\mu)^i \sum_{t=i}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^t} \\ V_i &= (1+\mu)^i \left[ \frac{C_i}{(1+\mu)^i} + \sum_{t=i+1}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^t} \right] \\ V_i - C_i &= (1+\mu)^i \sum_{t=i+1}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^t} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Fazendo  $i = i + 1$  e substituindo em (3.5)

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= \sum_{t=i+1}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^{t-(i+1)}} \\ V_{i+1} &= \sum_{t=i+1}^m \frac{C_t}{(1+\mu)^t} (1+\mu)^{(i+1)} \end{aligned}$$

$$V_{i+1} = (1 + \mu)^{(i+1)} \sum_{t=i+1}^m \frac{C_t}{(1 + \mu)^t}$$

$$V_{i+1} = (1 + \mu) \underbrace{(1 + \mu)^i \sum_{t=i+1}^m \frac{C_t}{(1 + \mu)^t}}_{V_i - C_i} \text{ como podemos ver pela equação (6.3)}$$

Então:

$$V_{i+1} = (1 + \mu)(V_i - C_i) \quad (6.4)$$

Não há fluxo de caixa ou pagamento de dividendos no instante inicial ( $i = 0$ ), uma vez que o projeto ainda não foi iniciado, portanto  $C_0 = 0$ . Os únicos fluxos existentes no instante inicial são os que correspondem ao valor presente dos investimentos no projeto, e que representam uma saída de caixa, mas que não são computados para efeito do cálculo do Valor Presente do projeto. Dessa forma temos:

$$V_1 = (1 + \mu)V_0 \quad (6.5)$$

A taxa de distribuição dos fluxos de caixa é assumida constante em cada período e igual a

$$\delta_i = \frac{C_i}{V_i} \quad \text{e} \quad C_i = \delta_i V_i \quad (6.6)$$

Em condições de incerteza temos:

$$C_{i,j} = \delta_i V_{i,j} \quad (6.7)$$

Substituindo (3.10) em (6.7) temos<sup>18</sup>:

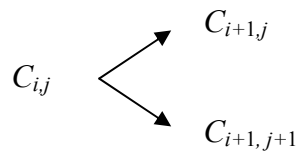
$$C_{i,j} = \delta_i \left[ V_0 u^{i-j} d^j \prod_{k=1}^{i-1} (1 - \delta_k) \right]$$

---

<sup>18</sup> Note que usamos sempre o valor do projeto pré-dividendo.

Calculando  $C_{i+1, j}$  em função do fluxo de caixa anterior  $C_{i, j}$ , para obtermos a fórmula de recorrência, temos:

$$\begin{aligned}
 C_{i+1, j} &= \delta_{i+1} V_0 u^{i+1-j} d^j \prod_{k=1}^{i+1} (1 - \delta_k) \\
 C_{i+1, j} &= \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} (1 - \delta_i) u \cdot \underbrace{\delta_i V_0 u^{i-j} d^j \prod_{k=1}^{i+1} (1 - \delta_k)}_{C_{i, j}} \\
 C_{i+1, j} &= \frac{\delta_{i+1} (1 - \delta_i)}{\delta_i} u \cdot C_{i, j} \tag{6.8}
 \end{aligned}$$



Por analogia temos:

$$C_{i+1, j+1} = \frac{\delta_{i+1} (1 - \delta_i)}{\delta_i} d \cdot C_{i, j} \quad \begin{cases} i = 2, 3, \dots, m \\ j = 0, 1, 2, \dots, i \end{cases} \tag{6.9}$$

$$\text{e } C_{i, j} = \delta_i V_0 u^{i-j} d^j \quad i = 1 \tag{6.10}$$

Com (6.8), (6.9) e (6.10) obtemos as fórmulas para os pseudo fluxos de caixa como função do pseudo fluxo do período anterior e da taxa de distribuição de dividendos  $\delta_i$ .

$$C_{i+1, j} = f(C_{i, j}, \delta_i, \delta_{i+1}, \sigma)$$

Essas fórmulas podem ser também expressas em função dos fluxos determinísticos, simplificando ainda mais o seu cálculo.

$$C_{i+1,j} = f(C_i, \sigma, \mu)$$

Substituindo (3.8) em (6.10) temos:

$$C_{i,j} = \delta_i V_0 u^{i-j} d^j \quad i = 1$$

Como  $\delta_i = \frac{C_i}{V_i}$  ficamos com:

$$C_{i,j} = \frac{C_i}{V_i} V_0 u^{i-j} d^j \quad i = 1$$

Substituindo (6.5) na equação, ficamos com:

$$C_{i,j} = \frac{C_i}{V_i} \frac{V_1}{(1+\mu)} u^{i-j} d^j \quad i = 1$$

Como  $i = 1$ , ficamos com:

$$C_{1,j} = \frac{C_1}{1+\mu} u^{1-j} d^j \quad (6.11)$$

Fazendo substituição semelhante em (6.8) e (6.9) temos:

$$C_{i+1,j} = \frac{\delta_{i+1}(1-\delta_i)}{\delta_i} u \cdot C_{i,j}$$

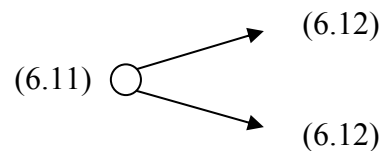
$$C_{i+1,j} = \frac{C_{i+1}}{V_{i+1}} \frac{V_i}{C_i} \left(1 - \frac{C_i}{V_i}\right) \cdot C_{i,j} u$$

Usando (6.4) e substituindo na equação temos:

$$C_{i+1,j} = \frac{C_{i+1}}{(1+\mu)(V_i - C_i)} \frac{V_i}{C_i} \left(\frac{V_i - C_i}{V_i}\right) \cdot C_{i,j} u$$

$$\begin{cases} C_{i+1,j} = \frac{C_{i+1}}{C_i(1+\mu)} \cdot C_{i,j} u \\ C_{i+1,j+1} = \frac{C_{i+1}}{C_i(1+\mu)} \cdot C_{i,j} d \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, m \quad j = 0, 1, 2, \dots, i \quad (6.12)$$

A expressão (6.11) fornece o valor dos pseudo fluxos de caixa no primeiro período do projeto. A partir deste, usando as fórmulas em (6.12) podemos obter o valor dos pseudo fluxos de caixa nos períodos e estados subseqüentes em função do fluxo de caixa imediatamente anterior, da taxa de desconto  $\mu$  e dos parâmetros  $u$  e  $d$ .



**Figura 35 – Modelo Matemático para Árvores de Decisão**

Essa modelagem é apropriada para utilização em programas de software de geração de árvores de decisão, onde a estruturação do problema através de fórmulas incrementais como as da Figura 35 é mais simples. Para o caso de linguagens de programação geralmente é mais fácil trabalhar com vetores e matrizes com fórmulas absolutas, demonstradas a seguir. Partindo da equação (6.12) com uma mudança de variável, temos:

$$C_{i,j} = \frac{C_i}{C_{i-1}(1+\mu)} \cdot C_{i-1,j} u$$

Substituindo o valor de  $C_{i-1,j}$  temos:

$$C_{i,j} = \frac{C_i}{C_{i-1}(1+\mu)} u \cdot \frac{C_{i-1}}{C_{i-2}(1+\mu)} \cdot C_{i-2,j} u$$

Substituindo o valor de  $C_{i-2,j}$  e assim sucessivamente até o período 1:

$$C_{i,j} = \frac{C_i}{C_{i-1}(1+\mu)} u \cdot \frac{C_{i-1}}{C_{i-2}(1+\mu)} u \cdot \frac{C_{i-2}}{C_{i-3}(1+\mu)} u \dots C_{1,j}$$



$$C_{i,j} = \frac{C_i}{C_{i-1}(1+\mu)} u \cdot \frac{C_{i-1}}{C_{i-2}(1+\mu)} u \cdot \frac{C_{i-2}}{C_{i-3}(1+\mu)} u \dots \frac{C_1}{1+\mu} u^{1-j} d^j$$

$$C_{i,j} = \frac{C_i}{(1+\mu)^i} u^{i-j} d^j \quad (6.13)$$

Com qualquer uma das fórmulas (6.12) ou (6.13), os pseudo fluxos de caixa são expressos como funções de  $C_i$ ,  $\mu$ ,  $u$  e  $d$ , todas constantes conhecidas. Podemos estruturar uma árvore de decisão com probabilidades neutras a risco  $p$  e  $(1-p)$  e os pseudo fluxos de caixa, que descontados a valor presente à taxa livre de risco nos dará o valor do projeto no instante zero. Sem a inclusão de nenhuma flexibilidade gerencial, o valor determinado por este modelo será idêntico ao valor determinado para o projeto em condições de certeza.

$$V_0 = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \frac{E[C_{i,j}]}{(1+r)^i} \quad \text{onde} \quad E[C_{i,j}] = \binom{i}{j} p^{i-j} (1-p)^j C_{i,j} \quad \text{e} \quad p = \frac{e^{rt} - d}{u - d}$$

Para programas que utilizem a expressão incremental, a fórmula a utilizar será:

$$V_0 = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j} p^{i-j} (1-p)^j C_{i,j}}{(1+r)^i} \quad (6.14)$$

A fórmula absoluta é:

$$V_0 = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j} p^{i-j} (1-p)^j}{(1+r)^i} \cdot \frac{C_i}{(1+\mu)^i} u^{i-j} d^j \quad (6.15)$$

## 6.4. Código VBA

### 6.4.1. Determinação da Volatilidade do Projeto através da SMC

A simulação de Monte Carlo considera as variáveis estocásticas previamente definidas e tem como objetivo determinar a volatilidade do projeto. Ela pode ser feita diretamente através de programas de simulação amplamente disponíveis no mercado como @Risk e Crystall Ball. Alternativamente, pode-se utilizar o código apresentado a seguir.

```

Sub Findvol2()

'Faz N recalculos do Fluxo de Caixa que está na planilha
'e acha a média e desvio padrão do retorno do projeto
\'(k)

    Dim Retorno As Double, Sk2 As Double, Vol As Double
    Dim I As Long
    Dim N As Long

    Sk2 = 0
    Retorno = 0
    N = Range("N").Value
    'Application.ScreenUpdating = False
    Application.Calculation = xlManual

    For I = 1 To N
        Application.Calculate
        Retorno = Retorno + Range("k").Value
        Sk2 = Sk2 + Range("k").Value * Range("k").Value
        Range("counter").Value = I
    Next I

    m = N
    Vol = Sqr((m * Sk2 - Retorno * Retorno) / (m * m))
    Mean = Retorno / m

    Range("vol").Value = Vol      'Retorna o valor de Vol
    Range("mean").Value = Mean   'Retorna o valor de Mean

    Application.Calculation = xlAutomatic

End Sub

```

### 6.4.2. Exemplo de 4 Períodos: Valor do Projeto

O código a seguir calcula o Valor do Projeto sem Opções do exemplo em 3.4.7:

```

Dim u As Double, d As Double, p As Double

u = Exp(sigma)
d = 1 / u
p = (1 + r - d) / (u - d)

V0 = 0
CI(1) = C1
CI(2) = C2
CI(3) = C3
CI(4) = C4

For i = 1 To M
  For J = 0 To i
    CIJ(i,J) = (CI(i)/(1 + k) ^ i) * (u ^ (i - J))*d^J

    V0=V0+((WorksheetFunction.Fact(i)/
    (WorksheetFunction.Fact(i-J)*
    WorksheetFunction.Fact(J)))*p^(i-J)*(1-p)^J
    *CIJ(i,J))/((1+r)^i)

  Next J
Next i
ComputeValue = V0

End Function

```

### 6.4.3. Exemplo de 4 Períodos: Valor do Projeto com Opção de Abandono

O código a seguir calcula o Valor do Projeto com opção de abandono no terceiro ano do exemplo apresentado em 3.4.7:

```

Public Function ComputeOption(C1, C2, C3, C4, sigma As
Double, mu, r, M As Integer, Aband, T As Integer)

'Determina valor do projeto com opções a partir dos
dados calculados anteriormente via SMC.
'Opção de abandono no ano 3. T é o período em que
ocorre a opção
'Aband é o valor de abandono. M é o número de períodos
do problema
'CI(4) são os fluxos determinísticos. CIJ(4,4) são os
pseudo fluxos

Dim CIJ(4, 4) As Double, V0 As Double, CI(4)
Dim u As Double, d As Double, p As Double, S As Integer

u = Exp(sigma)

```

```

d = 1/u
p = (1+r-d)/(u-d)

V0 = 0
CI(1)=C1;   CI(2)=C2;   CI(3)=C3;   CI(4)=C4

'Calcula valor do instante zero até o periodo antes da
opção

For I=0 To T-1
  For J=0 To I

    CIJ(I,J)=(CI(I)/(1+μ)^I)*(u^(I-J))*d^J

    V0=V0+((WorksheetFunction.Fact(I)/(WorksheetFunction.Fact(I-J)*WorksheetFunction.Fact(J)))*p^(I-J)*(1-p)^J*CIJ(I,J))/(1+r)^I

  Next J
Next I

'Calcula o valor do período da opção até o final,
compara com a opção 'de abandono e toma a decisão
ótima.

For S=0 To T
  Prob=(WorksheetFunction.Fact(T)/(WorksheetFunction.Fact(T-S)*WorksheetFunction.Fact(S)))*p^(T-S)*(1-p)^S

  VX=0

  For I = T To M
    For J = S To I+S-T
      CIJ(I,J)=(CI(I)/(1+μ)^I)*(u^(I-J))*d^J

      Prob1=(WorksheetFunction.Fact(I-T)/(WorksheetFunction.Fact(I-T-J+S)*WorksheetFunction.Fact(J-S)))*p^(I-T-J+S)*(1-p)^(J-S)

      A=(Prob1*CIJ(I,J))/((1+r)^(I-T)*(1+r)^T)

      VX=VX+A
    Next J
  Next I

  Max=Prob*WorksheetFunction.Max(VX,(Aband+CIJ(T,S)))/(1+r)^T
  V00=V00+Max
Next S

ComputeOption = V0 + V00
End Function

```

## 6.5. Simulação de Monte Carlo

### 6.5.1. Risco de Tráfego

O processo estocástico para o tráfego de veículos na rodovia foi assumida como sendo um Movimento Geométrico Browniano, cujos parâmetros foram obtidos a partir da série histórica do PIB brasileiro entre 1970 e 2001. Devido a limitações na capacidade da rodovia, estimou-se que o tráfego máximo é limitado a 20.000 veículos TMDA. Na Figura 36 vemos a projeção do tráfego no período (linha em negrito), bem como a Simulação de Monte Carlo para esta variável, observado a limitação superior estabelecida no tráfego de veículos.

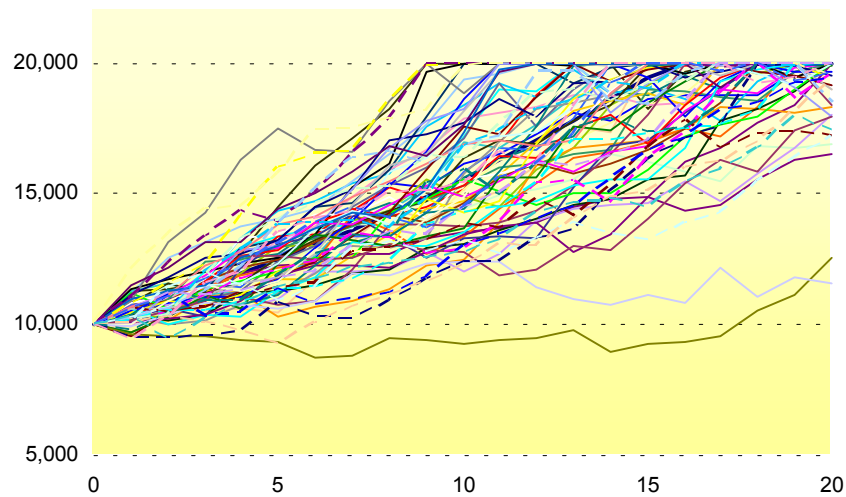
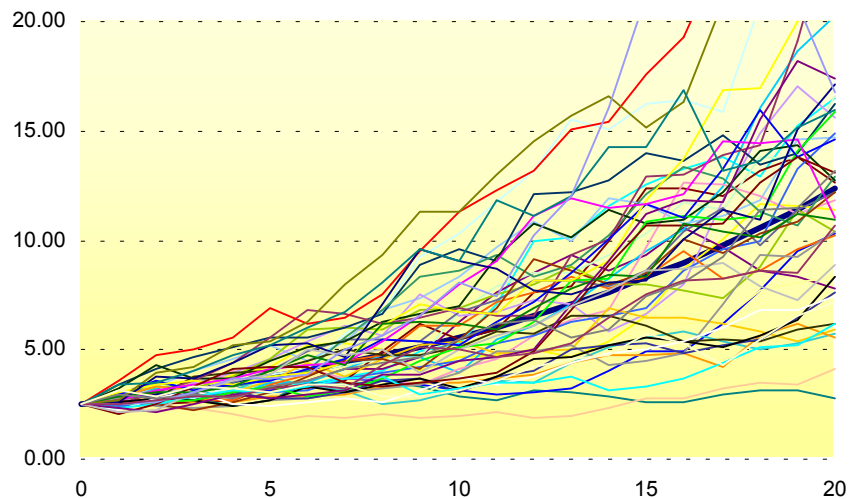


Figura 36 – Tráfego: Simulação de Monte Carlo

### 6.5.2. Risco de Câmbio

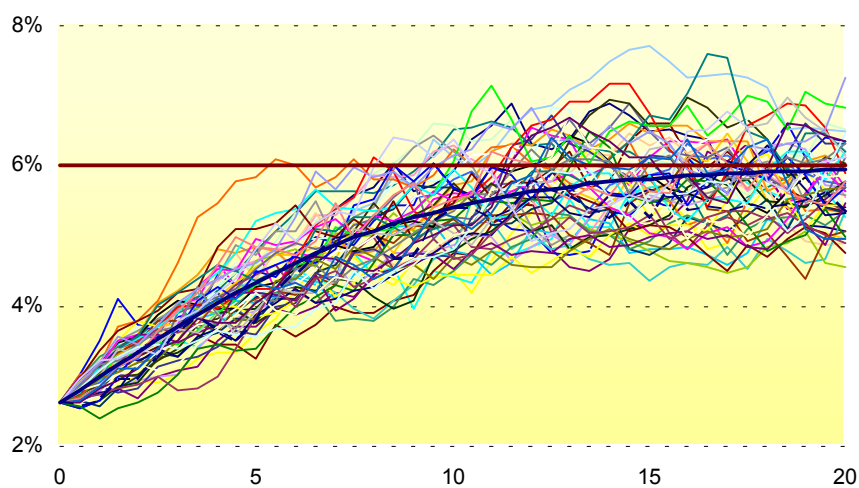
O risco cambial foi modelado como uma MGB, dado que a série histórica brasileira pós-plano Real não indica que a taxa de câmbio siga um processo de reversão à média como seria de se esperar. A Figura 37 ilustra a projeção realizada e também como o processo foi simulado.



**Figura 37 – Taxa de Câmbio: Simulação de Monte Carlo**

### 6.5.3. Risco de Taxa de Juros

Para a taxa de juros foi utilizada a série histórica da LIBOR de 6 meses. O processo estocástico adotado foi o processo de reversão à média Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck. A média de longo prazo, a projeção e a simulação realizada estão ilustrados na Figura 38.

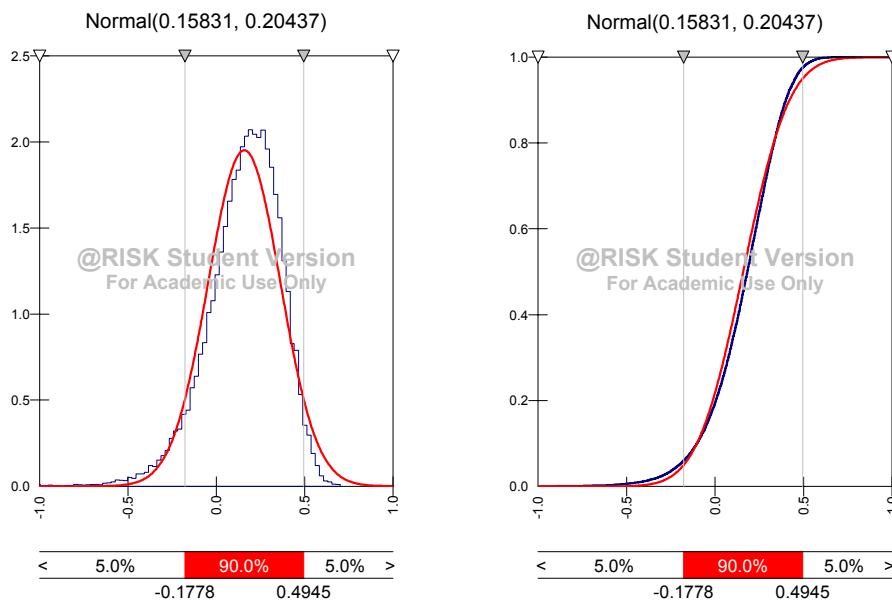


**Figura 38 – Taxa de Juros: Simulação de Monte Carlo**

## 6.6. Verificação da Premissa de Normalidade dos Retornos

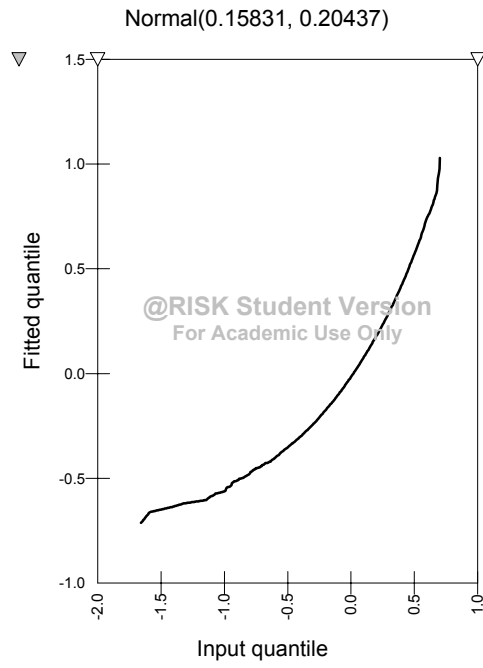
A premissa segunda afirma que em um mercado onde os preços refletem todas as informações futuras disponíveis, os retornos do projeto terão distribuição normal, uma vez que variações em torno do valor do projeto serão fruto apenas de eventos imprevistos, e portanto, aleatórios.

Através de uma Simulação de Monte Carlo do projeto, foram obtidas 50.000 amostras dos retornos do projeto que foram em seguida analisadas para verificação da premissa de normalidade da sua distribuição. Os testes indicaram que a distribuição que mais se aproxima dos dados da amostra é uma distribuição Logística, seguida da distribuição Normal, cuja comparação através das distribuições de densidade e cumulativa estão mostradas na Figura 39.



**Figura 39 – Erro da Distribuição dos Retornos**

O  $p$ -value para a normalidade da distribuição é  $p < 0.005$ , o que indica uma boa aproximação para esta distribuição. Na Figura 40 podemos ver o Q-Q plot da amostra, que é também um teste para normalidade da série que indica os quantis de uma distribuição normal padrão.



**Figura 40 – QQ Plot dos Retornos**



## 7. Referências Bibliográficas

BLACK, F., and SCHOLES, M.; **The pricing of options and corporate liabilities.**; Journal of Political Economy 81 (May-June): 637-659, 1973.

BOYLE, P. (1977). **Options: A Monte Carlo Approach.** Journal of Financial Economics, 4, 323-338.

BREALEY, R.; MYERS, S. C.; **Principles of Corporate Finance;** Sixth Edition, McGraw Hill, 1999.

BRENNAN, M. e E. SCHWARTZ (1985). Evaluating **natural resources investments.** Journal of Business, 58, 135-157.

CASTRO, ALESSANDRO L; **Avaliação de Investimentos de Capital em Projetos de Geração Termoeletrica no Setor Elétrico Brasileiro usando Teoria da Opções Reais;** Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 2000.

CLEWLOW, LES; STRICKLAND, CHRIS; **Implementing Derivatives Models;** England, John Wiley & Sons, 1998.

COPELAND, T; ANTIKAROV, V; **Real Options;** New York, Texere LLC, 2001.

COX, J. e S. ROSS (1976). **The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process.** Journal of Financial Economics, 3, 145-166.

De FINETTI, B. (1937). **La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives.** Ann. Inst.Henri Poincaré 7, 1—68. Translation reprinted in H.E. KYBURG and H.E. SMOKLER, Eds.(1980), **Studies in Subjective Probability**, 2nd ed., Robert Krieger, New York, 53—118.

DIXIT, AVINASH; PINDYCK, ROBERT S.; **Investment under Uncertainty;** Princeton, NJ, USA, Princeton University Press, 1994.

Geske, R; and M. Shastri; **Valuation by Approximation: A comparison of alternative option valuation techniques.**; Journal of Financial and Quantitative Analysis 20, no. 1:45-71, 1985.

GIBSON, R. e E. SCHWARTZ (1990). **Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims.** Journal of Finance, 45, 959-976.

GOMES, LEONARDO L.; **Avaliação de Termelétricas no Brasil estudando o melhor momento de investimento por modelos de opções reais;** Tese de Doutorado, PUC-Rio, 2002.

GRENADIER, S.; **Option Exercise Games: The Valuation of Real Options and Game Theory**; Journal of Applied Corporate Finance, nº 13, 1996.

HOWARD, R. A.; **Decision Analysis: Practice and Promise**; Management Science, V.34, (1988).

HUANG, C. & R.H. LITZEMBERG; **Foundations for Financial Economics**; Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1988

HULL, J. C.; **Options, Futures, and Other Derivatives Securities**; Prentice Hall, 2a ed. 1993, Englewood Cliffs, NJ;

LEMME, CELSO F.; **Avaliação Econômica de Impactos Ambientais no Brasil: da Atividade Acadêmica ao Financiamento de Longo Prazo de Projetos e Empresas**; Tese de Doutorado, COPPEAD/UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro 2000.

LUENBERGER, DAVID; **Investment Science**; New York, Oxford University Press, 1998.

MAJD, S. e R. PINDYCK (1987). **Time to Build, Option Value, and Investment Decisions**. Journal of Financial Economics, 18, 7-27.

MCDONALD, R. & D. SIEGEL; **The Value of Waiting to Invest**; Quarterly Journal of Economics 101(4), November 1986, pp. 707-727

MERTON, R. (1973). **The Theory of Rational Option Pricing**. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183.

PADDOCK, J., D. SIEGEL e J. SMITH (1988). **Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases**. Quarterly Journal of Economics, 103, 479-508.

PILIPOVIC, D. (1997). **Energy Risk**. McGraw-Hill, Nova York. 105

ROCHA, KATIA; et al.; **O Valor de Opção das concessões nas florestas nacionais da Amazonia**; Rio de Janeiro, IPEA, junho de 2000. (texto para discussão).

SCHWARTZ, E. (1997). **The Stochastic Behaviour of Commodity Prices: Implications for Pricing and Hedging**, The Journal of Finance, 52, 923-973.

SCHWARTZ, E.; CORTAZAR, G; SALINAS, M.; **Evaluating Environmental Investments: A real options approach**; Working paper 4-96. The Anderson School at UCLA, Los Angeles, 1996.

SICK, G.A. (1989b); **Capital Budgeting with Real Options**; New York, Salomon Brothers' Monograph Series in Finance & Economics, 1989-3, 78 pp.

SMITH, H. and ANKUM, L.; **A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy under Competition**; Financial Management, nº 22., 1993.

SMITH, J.E. & K.F. MCCARDLE; **Options in the Real World: Lessons Learned in Evaluating Oil and Gas Investments**; Fuqua/Duke University Working Paper, April 1997, 42 pp.

SMITH, J.E. & R.F. NAU; **Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis**; Management Science, vol.14, no 5, May 1995, pp.795-816

TOURINHO, O.A.F.; **The Valuation of Reserves of Natural Resources: An Option Pricing Approach**; University of California, Berkeley, Phd. Dissertation, November 1979.

TRIGEORGIS, LENOS.; **Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**; USA, MIT Press, 1996.