3 Modelo Teórico

O modelo teórico adotado é baseado em três premissas. A primeira é que o Valor Presente do projeto sem flexibilidade é o melhor estimador não tendencioso do seu valor de mercado (Copeland & Antikarov, 2001). Essa premissa faz com que possamos considerar o mercado completo para o projeto, e conseqüentemente, permite a utilização de um portfólio replicante e do princípio da não arbitragem para determinar as probabilidades neutras a risco do projeto da forma usual em mercados completos. A segunda premissa é que a as variações no valor do projeto seguem um "random walk", o que implica que podemos modelar o processo estocástico do valor do projeto através de um Movimento Geométrico Browniano. A terceira é a de que podemos separar os riscos de mercado dos riscos privados de um projeto, dando tratamento diferenciado a estas duas fontes de incerteza. As considerações a respeito da validade e do impacto destas premissas será analisada posteriormente.

3.1. Determinação da Taxa de Desconto em Mercados Incompletos

A aplicação dos métodos usuais de avaliação de opções reais como Contingent Claims Analysis e Programação Dinâmica apresentam, na prática, algumas limitações. A primeira é que, exceto em alguns casos muito especiais, de um modo geral os mercados são incompletos para a grande maioria dos projetos, o que invalida o uso do Contingent Claims Analysis. Por exemplo, uma empresa que esteja analisando a oportunidade de investir na prestação de serviços de atendimento ao cliente através de um "call center" terá dificuldade de encontrar ativos de mercado que repliquem as características de risco deste investimento. Se o investimento for numa fábrica de sapatos, a dificuldade será a mesma, uma vez que não existe mercado futuro para serviços de atendimento nem sapatos.

Segundo, mesmo quando estas condições ideais ocorrem, é extremamente difícil determinar um portfólio de mercado que possua uma perfeita correlação com os risco do projeto. A solução tradicional de assumir que a volatilidade do projeto é igual à de uma commodity negociada em mercado nem sempre é verdadeira, pois ignora o fato de que o projeto pode ter outras fontes de incerteza além do preço que podem afetar essa correlação. Por fim, a atribuição da taxa de desconto exógena (ρ) no método da programação dinâmica não é derivada de considerações de equilíbrio de mercado, mas apenas reflete a avaliação subjetiva de risco do investidor, e portanto, o valor encontrado para o ativo não pode ser considerado um preço de mercado. Dixit & Pindyck (1994), pag. 152, afirmam que sem um portfólio replicante,

> *"não existe uma teoria para determinar o valor "correto" para a taxa de desconto (ρ) a não ser que façamos premissas restritivas sobre as funções utilidade dos investidores ou gerentes. O CAPM, por exemplo, não seria aplicável, e portanto, não poderia ser utilizado para calcular a taxa de desconto ajustada ao risco da maneira usual".*

O problema aqui levantado, e que limita a utilização dos métodos mencionados anteriormente é que a existência de flexibilidade gerencial em projetos de investimento, ou seja, de opções reais, faz com que o risco deste projeto se altere, uma vez que, agora, o gerente pode escolher exercer estas opções se o projeto estiver no dinheiro, eliminando desta forma parte do "downside risk" e/ou maximizando o retorno do projeto. A conseqüência desta alteração do risco é que a taxa de desconto apropriada para este projeto também se altera. Dessa forma, mesmo que possamos determinar a taxa de desconto apropriada para o risco do projeto tradicional, através do CAPM, por exemplo, com a presença de opções de flexibilidade gerencial o risco do projeto se altera, e conseqüentemente, a taxa computada pelo CAPM não é mais válida. Em mercados completos, o portfólio replicante pode ser rebalanceado para refletir com exatidão os novos fluxos de caixa decorrentes do projeto e suas opções reais, e ao fazermos isso, implicitamente estamos buscando no mercado a taxa de desconto atribuída a este portfólio replicante, e conseqüentemente, ao projeto. Em mercados incompletos, como não é possível estabelecer um portfólio replicante, não sabemos qual a taxa de desconto a aplicar ao projeto que tenha opções reais.

3.1.1. Premissa Primeira

Copeland e Antikarov (2001) propõem uma alternativa para esse problema (Marketed Asset Disclaimer – MAD) que envolve a utilização do CAPM para determinar o valor de mercado do projeto, antes da inclusão das opções reais. Os autores partem do princípio de que o Valor Presente do projeto sem as opções, conforme calculado pelo método do FCD tradicional usando CAPM, é o melhor estimador não tendencioso do valor de mercado do projeto, caso ele fosse negociado no mercado. Dessa forma, o mercado implicitamente se torna completo para o projeto com as opções, uma vez que agora ele pode ser perfeitamente replicado por um portfólio que inclua o projeto original, sem opções. Os autores têm como argumento final o fato de que nada pode ser melhor correlacionado com o projeto do que o próprio projeto. Dessa forma, adotamos a premissa de que uma vez definido o Valor Presente do projeto original, este é o seu valor de mercado, e o problema pode então ser resolvido por qualquer um dos métodos tradicionais para condições de mercado completo.

3.2. O Processo Estocástico do Valor do Projeto

O teorema de Samuelson (1965) mostrou que em mercados eficientes, onde os investidores têm informações completas sobre as expectativas futuras dos fluxos de caixa esperados de um ativo, os preços atuais já refletem toda as informações disponíveis até o momento, e as variações da taxa de retorno deste ativo serão aleatórias, isto é, seguirão um random walk. A implicação disso é que como os investidores já têm expectativas a respeito das flutuações futuras do valor do ativo, essas expectativas já foram incorporadas nos preços. Se as expectativas se realizarem, os investidores irão receber exatamente a sua taxa de retorno esperada, e apenas eventos imprevistos, e portanto, aleatórios, podem alterar esses resultados. Assim, as variações sobre a taxa de retorno esperado também serão aleatórias.

A extensão destes conceitos para o mercado de ativos reais decorre da aplicação da premissa primeira de que o valor presente de um projeto é o melhor estimador do seu valor de mercado. Valendo-nos desta premissa, podemos tratar o projeto como um ativo negociado dentro de um mercado eficiente, uma vez que existe agora um valor de mercado para ele, que é o seu valor presente. Assim, consideramos que o processo estocástico deste ativo real terá comportamento idêntico ao do ativo financeiro de mercado postulado por Samuelson .

Isso significa que mesmo que os fluxos de caixa de um projeto sejam crescentes, decrescentes, ou até cíclicos, os seus retornos seguirão um random walk. Isso será verdade ainda que o projeto esteja sujeito a uma única fonte de incerteza de reversão a média, contando que essa informação já esteja disponível no mercado e incorporada ao seu preço atual.

Copeland e Antikarov aplicaram este teorema para o caso de projetos de investimento, e concluem que qualquer que seja o padrão de evolução dos fluxos de caixa de um projeto, as variações no seu Valor Presente seguirão um random walk também. Dessa forma, se os retornos (R) de um projeto podem ser representados por um random walk na forma de um Movimento Aritmético Browniano (MAB)[1] $R = d\ln x = \mu dt + \sigma dz$, então podemos concluir que o processo seguido por dx é um Movimento Geométrico Browniano (MGB) onde $dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)xdt + \sigma xdz$. Essa premissa permite a combinação de qualquer número de incertezas no modelo do projeto em uma única incerteza representativa, cujos parâmetros podem ser obtidos através de Simulação de Monte Carlo.

Para provar o teorema de Samuelson, assumiremos inicialmente algumas premissas. A primeira é que o risco do ativo é zero, e portanto, a taxa de retorno de mercado ajustada ao risco para este ativo será a taxa livre de risco. Em seguida, assumimos também que todas as taxas de juros do mercado são zero, inclusive a taxa livre de risco, e finalmente, supomos que

[1] O Apêndice 6 mostra os processos estocásticos mais comuns

o preço spot de mercado do ativo segue um processo autoregressivo estacionário na forma:

$$S_{t+1} = aS_t + \varepsilon_t \quad onde \quad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2) \quad e \quad Cov(S_t,\varepsilon_t) = 0 \qquad a < 1$$

S_t é o preço spot atual do ativo, portanto, é uma constante conhecida, e S_{t+1} é o preço spot no próximo período. No tempo atual (t), temos E[S_t] = S_t e Var[S_t] = 0. No tempo futuro ($t+1$) temos:

$$E[S_{t+1}] = E[aS_t + \varepsilon_t] = aE[S_t] + \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{0} = aS_t$$

$$Var[S_t] = Var[aS_t + \varepsilon_t] = a^2 \underbrace{Var[S_t]}_{0} + 2a\underbrace{Cov[S_t,\varepsilon_t]}_{0} + Var[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$$

No tempo futuro ($t+2$), temos:[2]

$$S_{t+2} = aS_{t+1} + \varepsilon_{t+1} = a(aS_t + \varepsilon_t) + \varepsilon_{t+1}$$
$$S_{t+2} = a^2 S_t + a\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$$
$$E[S_{t+2}] = a^2 E[S_t] + aE[\varepsilon_t] + E[\varepsilon_{t+1}] = a^2 S_t$$
$$Var[S_{t+2}] = E[S_{t+2} - E(S_{t+2})]^2$$
$$Var[S_{t+2}] = E[a^2 S_t + a\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} - a^2 S_t]^2$$
$$Var[S_{t+2}] = E[a^2\varepsilon_t^2 + 2a\varepsilon_t\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^2]$$
$$Var[S_{t+2}] = \sigma_\varepsilon^2(a^2 + 1)$$

A fórmula de recorrência será então:

$$E[S_{t+T}] = a^T E[S_t] = a^T S_t$$

$$Var[S_{t+T}] = \sigma_\varepsilon^2 \left[\left(\sum_{n=1}^{T} a^{2(n-1)} + 1\right) + 1\right] \qquad T = 1,2,....\infty$$

Dependendo do valor do parâmetro a, o processo de S_t pode ser crescente ou decrescente. Se $a<1$, o processo será estacionário.

---

[2] Note que $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - E^2(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, portanto $E[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2$

Mostraremos que qualquer que seja a evolução dos preços de S_t, mesmo que S_t seja declinante, a taxa de retorno de S_t será constante e igual à taxa de mercado ajustada ao risco, que no caso é zero.

Um ativo tem valor porque ele dá direito a um fluxo de caixa futuro ao seu detentor. Considerando a ausência de custos de armazenamento, podemos expressar o valor de um ativo como o somatório do valor presente de um "strip" de contratos futuros (Figura 5) para a entrega de *$1* em um tempo futuro ($t + T$). Se o preço dos contratos futuros não se alterar no tempo, num mundo onde as taxas de juros são zero e sem convenience yield, então o valor do ativo também será constante.

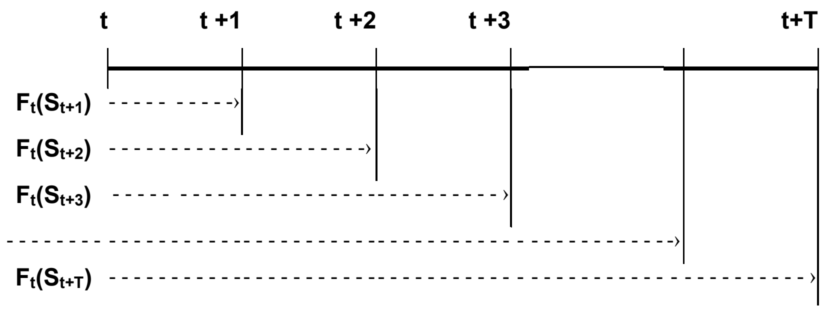

Figura 5 – Strip de Contratos Futuros

O preço no tempo (t) de um contrato futuro para entrega de *$1* no tempo ($t+T$) sem juros e sem convenience yield é dado por $F_t(S_t+T) = E_t(S_t+T)$. Para $T = 3$, teremos:

$$F_t(S_{t+3}) = E_t(S_{t+3})$$
$$F_t(S_{t+3}) = E_t(a^3 S_t + a^2 \varepsilon_{t+1} + a\varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3}) = a^3 S_t$$

O preço no tempo ($t+1$) de um contrato futuro para entrega de *$1* no tempo ($t+3$) será:

$$F_{t+1}(S_{t+3}) = E_{t+1}(S_{t+3})$$
$$F_{t+1}(S_{t+3}) = E_{t+1}(a^3 S_t + a^2 \varepsilon_{t+1} + a\varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3}) = a^3 S_t + a^2 \varepsilon_{t+1}$$

A única diferença neste caso é que em ($t+1$), o erro $\varepsilon t+1$ já existe e é conhecido. A variação no preço futuro de um período para o outro, visto do tempo (t) é:

$$E_t\left[F_t(S_{t+3}) - F_{t+1}(S_{t+3})\right] = E_t\left[a^3 S_t - (a^3 S_t + a^2 \varepsilon_{t+1})\right]$$
$$E_t\left[F_t(S_{t+3}) - F_{t+1}(S_{t+3})\right] = a^2 E_t\left[\varepsilon_{t+1}\right]$$
$$E_t\left[F_t(S_{t+3}) - F_{t+1}(S_{t+3})\right] = 0$$

Concluímos que mesmo que o preço spot se altere, o valor esperado das mudanças no preço futuro não se altera. Como o valor do ativo é o somatório dos preços futuros, o valor esperado do preço spot também não se altera, e o valor do ativo será constante (contanto que adicionemos de volta os dividendos pagos a cada período). Como o valor é constante, a taxa de retorno esperada deste ativo será zero. Quaisquer alterações que ocorram no futuro serão fruto de efeitos imprevistos, e portanto, aleatórios, e o retorno deste ativo terão variações aleatórias seguindo um random walk.

3.2.1. Premissa Segunda

Baseado nas conclusões de Samuelson (1965), e seguindo Copeland e Antikarov (2001), assumimos que o retorno do projeto tem distribuição normal, portanto, o processo estocástico do valor do projeto segue um Movimento Geométrico Browniano, ou seja, o projeto tem uma distribuição lognormal. A premissa da lognormalidade do valor do projeto é utilizada por diversos autores, entre eles McDonald e Siegel (1986). As principais críticas à consideração da lognormalidade de projetos vem de Dixit e Pindyck (1994, pg. 137). Os autores argumentam que se o projeto não apresenta flexibilidade gerencial que permita a suspensão da produção quando os custos superarem as receitas, então o valor do projeto poderá assumir valores negativos, descaracterizando a sua lognormalidade. Da mesma forma, se o gerente tiver flexibilidade para suspender a operação do projeto nestes casos, o valor também não seguirá uma distribuição lognormal. E finalmente, numa indústria competitiva, o equilíbrio de longo prazo forçará o preço, e conseqüentemente o projeto, a seguir um processo de reversão à média.

É padrão na literatura sobre opções financeiras assumir que ações de empresas negociadas em bolsa seguem uma distribuição lognormal, embora isso também seja apenas uma aproximação da realidade. Ações não podem ter valor negativo porque são opções sobre o valor da empresa – o detentor de uma ação tem direito aos fluxos futuros líquidos da empresa. Caso os fluxos se tornem desinteressantes, o detentor da ação abre mão desses direitos e o valor da ação vai para zero. Um projeto com opção de abandono tem características semelhantes a uma ação. Em Project Finance, onde o projeto tem características de empresa independente, essa identidade é total, pois se o valor do empreendimento ficar negativo o acionista abandonará o projeto entregando-o aos credores.

No modelo adotado para a premissa segunda, assume-se que os fluxos de caixa do projeto a cada período são distribuídos aos acionistas, e que o valor do empreendimento sofre uma descontinuidade no instante dessa distribuição, reduzindo-se o seu valor pelo valor do dividendo distribuído. Dessa forma, esse modelo implicitamente assume que se o fluxo de caixa for negativo em qualquer período, o dividendo será também negativo, representando uma necessidade de aporte/investimento do acionista naquele período, e evitando que o projeto se torne negativo. Dado que a modelagem do processo estocástico do projeto é realizada com base na planilha do valor esperado dos fluxos de caixa, em ocorrendo um fluxo esperado futuro negativo, esse valor será considerado como um investimento necessário, e o seu valor presente adicionado ao valor do investimento inicial exigido pelo projeto.

Seja V_i o valor de um projeto que não paga dividendos no período i e V_{i+1}/V_i o seu retorno no período de tempo entre i e $i+1$. De acordo com a premissa segunda de que os retornos seguem um caminho aleatório, o logaritmo do retorno $\ln(V_{i+1}/V_i)$ é normalmente distribuído, e definimos v e σ^2 como a média e variância desta distribuição normal. Quando os períodos de tempo tendem a zero, este modelo estocástico pode ser expresso como um Movimento Aritmético Browniano (MAB) na forma $d\ln V = v dt + \sigma dz$, onde $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ é o processo de Wiener padrão.

A premissa de que a distribuição do logaritmo do valor dos retornos do projeto em qualquer tempo é normal implica em que a distribuição do valor do projeto em si é lognormal. Dessa forma, mudanças em V_i serão lognormalmente distribuídas em podem ser modeladas através de um Movimento Geométrico Browniano (MGB) na forma $dV = \mu V dt + \sigma V dz$, onde $\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$.

3.3. Modelagem do Risco Privado

Smith e Nau (1993) propõem a separação entre o risco privado de um projeto, não correlacionado com o mercado, e o risco de mercado, para o qual o mercado é completo. O risco de mercado é definido como o risco que pode ser perfeitamente hedgeado através de negociação de títulos de mercado. O risco privado, ou técnico, decorre de uma incerteza do projeto que não pode ser hedgeada. A incerteza de preço num projeto de exploração de petróleo, por exemplo, é um risco de mercado, uma vez que pode ser eliminado através de operações de hedge no mercado futuro. As incertezas a respeito do volume de petróleo que pode ser extraído do reservatório, por sua vez, configuram um risco privado, já que não existe nenhum ativo de mercado que replique as características dessa incerteza.

Com essa separação, podemos decompor os fluxos do projeto nos seus componentes privados e de mercado. O risco de mercado é então valorado observando-se o preço de mercado de ativo ou portfólio de ativo que repliquem o risco e retorno do projeto e utilizando-se a condição de não arbitragem. O risco privado pode ser modelado utilizando-se as preferências subjetivas de um investidor avesso a risco, através de uma função utilidade para determinar o seu Equivalente Certo, que é então descontado à taxa livre de risco. No item 3.3.3 este conceito será apresentado em mais detalhe.

Se considerarmos que o investidor possui uma carteira diversificada de investimentos, e que este projeto não representa uma parcela significativa da sua riqueza, então podemos assumir que ele será neutro ao risco privado, e o Equivalente Certo será somente o Valor Esperado. Essa premissa se baseia no fato de que o mercado irá remunerar o investidor apenas pela parcela de risco não diversificável (sistemático), uma vez que o risco não sistemático pode ser totalmente eliminado através da diversificação dos seus investimentos. Uma outra maneira de chegarmos a esta mesma conclusão é observar que o risco privado medido pelo seu Beta será zero, uma vez que não possui correlação alguma com o índice de mercado, supondo sempre a premissa de diversificação do investidor.

3.3.1. Premissa Terceira

Assumimos que podemos fazer a separação entre o risco privado e o risco de mercado, e dar tratamento diferenciado para cada um deles. Dessa maneira, efetivamente substituímos o problema de mercados incompletos por um problema onde o mercado é parcialmente completo. Com o tratamento diferenciado do risco privado, podemos considerar o mercado completo para o risco de mercado e utilizar uma função utilidade para calcular o Equivalente Certo do risco privado.

3.3.2. Investidor Neutro a Risco Privado

O risco privado decorre de uma incerteza não correlacionada com o mercado, portanto, não passível de ser hedgeado com instrumentos do mercado financeiro. Um investidor diversificado, ou uma empresa de grande porte com uma carteira de investimentos diversificada e milhares de acionistas, deve ser neutro ao risco privado, uma vez que este é um risco não sistemático que pode ser eliminado através de uma estratégia adequada de diversificação. Por não ser correlacionado com o mercado, o seu Beta é zero, e nenhum prêmio de risco deve ser atribuído ao risco privado nesses casos, e a modelagem é feita determinando-se o Valor Esperado desta incerteza considerando-se que o investidor é neutro ao risco privado, que é então descontado a valor presente à taxa livre de risco. Como o modelo utilizado já utiliza a avaliação neutra a risco para determinar o Valor Presente do projeto, a inclusão do risco privado nesse caso não implica em nenhuma modificação teórica maior no modelo.

3.3.3. Investidor Avesso ao Risco Privado

O conceito de que empresas de capital aberto devem ter comportamento neutro a risco não sistemático vem de Ekern e Wilson (1974), que mostraram que para uma empresa com um grupo de acionistas com função utilidade exponencial, a tolerância ao risco da empresa é o somatório da tolerância ao risco de cada um dos seus acionistas. À medida que o número de acionistas aumenta, este somatório também aumenta e a aversão ao risco diminui. Lintner (1965, 1970) conclui também que à medida que o número de investidores aumenta em um mercado de capitais perfeito, o preço de risco de mercado tende a zero no limite e a aversão ao risco desaparece, fazendo com que os Equivalentes Certos sejam iguais ao Valor Esperado. No entanto, se considerarmos que o investidor não é suficientemente diversificado, e este investimento no projeto representar uma parcela considerável da sua riqueza, é provável que este investidor apresente um comportamento avesso ao risco privado.

É comum observar-se empresas abrir mão de quotas de investimento em projeto grande porte com o objetivo de reduzir a sua exposição ao risco – essa inclusive é a principal justificativa para a estruturação de projetos na modalidade de Project Finance. Se uma empresa detém poucos projetos no seu portfólio e as cotas de investimento na empresa representam uma parcela significativa da riqueza dos seus acionistas, isso implica que os acionistas não estão suficientemente diversificados.

A principal justificativa para esse comportamento na literatura financeira é que os mercados não são perfeitos, existindo fricções (riscos de insolvência, custos de transação, informação imperfeita, pequeno número de acionistas, acionistas não diversificados, conflitos de interesse entre credores e acionistas, etc.) que criam assimetrias com relação a possíveis perdas advindas do projeto. Greenwald e Stiglitz (1990) argumentam que as empresas agirão de forma avessa a risco como resultado de problemas de informação imperfeita no mercado de capitais, incluindo assimetrias de informação entre provedores de capital e gerentes. March e Shapira (1987) observaram que na prática os gerentes sistematicamente demonstram aversão a risco a partir do momento em que a empresa atingiu os seus objetivos ou metas pré-estabelecidas. Hackett (1985) observou que não é realista assumir que os gerentes são meros agentes dos acionistas, uma vez que eles são os responsáveis também por tentar conciliar os interesses de todos os "stakeholders" da empresa (acionistas, credores, empregados, fornecedores, clientes, comunidade e os próprios gerentes). Swalm (1966) levantou funções utilidade para um grupo de 100 executivos numa grande empresa industrial, e notou que eles eram fortemente avessos a risco. Spetzler (1966) chegou as mesmas conclusões em um estudo semelhante numa grande empresa de petróleo entre os gerentes responsáveis por decisões de investimento.

Walls, Morahan e Dyer (1995) observaram que na Phillips Petroleum os gerentes apresentavam comportamento fortemente avesso a risco nas decisões de alocação de capital envolvendo investimentos que poderiam trazer importantes conseqüências negativas para a empresa, mesmo quando o risco sistemático já havia sido levado em consideração. Num estudo empírico sobre as atitudes a risco de gerentes, MacCrimmon and Wehrung (1986), e Shapira (1995) também apresentaram evidências que gerentes são freqüentemente avessos a risco não sistemático.

Uma das justificativas é que os acionistas nem sempre estão otimamente diversificados. Embora isso seja claro em empresas familiares ou de capital fechado, alguns estudos apontam para o fato de que esta situação é mais comum do que deveria. Concluímos então que no contexto da empresa, os gerentes na prática apresentam comportamento avesso a risco privado em projetos de grande volume de investimentos relativo a empresa, e que este comportamento é ditado por imperfeições do mercado. Em empresas de menor porte, como é típico de empresas familiares com pequeno número de acionistas, é de se supor que este tipo de comportamento seja mais acentuado. E se os acionistas não são suficientemente diversificados, é provável que vejamos uma tendência de diversificação via empresa para compensar este fato.

Smith e Nau (1993) sugerem adotar nesses casos uma função utilidade que reflita a aversão a risco do investidor para achar o Equivalente Certo do risco privado, a partir do qual pode ser utilizada à taxa livre de risco para descontar esse fluxo a valor presente. Uma forma comum para a modelagem da aversão ao risco é a função utilidade exponencial negativa na forma:

$$u(x) = a - b\,e^{-cx} \tag{3.1}$$

onde $a > 0$ e $b > 0$ são constantes e c é o coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt, $c = ARA = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$. Definimos TR como sendo o nível de tolerância ao risco da empresa, onde $TR = 1/c$, e sem perda de generalidade, podemos fazer os coeficientes a =1 e b =1, para ficar então com:

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{TR}} \tag{3.2}$$

O Equivalente Certo (EC) é o Valor Esperado de uma loteria ou investimento, menos o seu prêmio de risco. Considerando uma função utilidade exponencial na forma da Equação (3.2) e probabilidades discretas, temos:

$$EC(x) = -TR\,\ln\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\left(1 - e^{-\frac{x_i}{TR}}\right)\right] \tag{3.3}$$

Em tempo contínuo, teremos:

$$EC(x) = -TR\,\ln\left[\int y\,f(y)dy\right] \tag{3.4}$$

onde $y = u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{RT}}$

A função utilidade exponencial permite que a utilidade do investidor seja caracterizada unicamente pelo seu coeficiente de aversão ao risco c ou pelo seu nível de tolerância ao risco *TR*. A *TR*, por sua vez, é o valor monetário que faz a empresa indiferente entre jogar ou não uma loteria onde existe probabilidade de 50% de ganhar *X* e 50% de perder *X/2*, conforme diagrama da Figura 6:

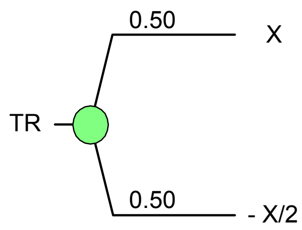

Figura 6 – Nível de Tolerância ao Risco

Note que o Valor Esperado desta loteria é positivo, de forma que um investidor neutro a risco sempre preferiria jogar a loteria, se ela lhe fosse oferecida a custo zero, como é o caso. Apenas a aversão ao risco do investidor, ou seja, o receio de perder o valor de *X/2*, o levaria a recusar jogar esta loteria. Para pequenos valores de *X*, a loteria é preferida por quase todos os investidores, dado o seu valor esperado positivo. À medida que *X* aumenta, a aversão ao risco leva o investidor a considerar a loteria cada vez menos atraente devido ao incremento do valor do possível resultado negativo, até o ponto em que o investidor prefere não mais jogar a loteria. O valor de X que reflete o ponto de equilíbrio onde o investidor é indiferente entre aceitar jogar a loteria ou não é o que denominamos nível de tolerância ao risco deste investidor (*TR*).

A medição do nível de Tolerância ao Risco é feita através de sucessivos questionários onde o valor de *X* vai sendo modificado até se obter o ponto de equilíbrio acima mencionado. Muitas vezes, no entanto, não é possível a determinação da TR através deste método pela impossibilidade de se realizar as entrevistas necessárias, ou até mesmo, definir-se quem entrevistar. Nesses casos, na ausência de um processo de medição direta, Howard (1988) propõe que o nível de Tolerância ao Risco da empresa pode ser inferido a partir dos seus principais dados econômico-financeiros. Analisando um grupo de empresas dos setores de petróleo e petroquímica, ele apresenta um estudo que sugere existir uma relação entre a medida de Tolerância ao Risco (*TR*) e alguns dos principais indicadores econômicos da empresa, como vendas, lucro e patrimônio líquido. Os valores encontrados por Howard, e que representam a média para as empresas pesquisadas, estão apresentados na Tabela 2:

TR/Vendas	0.064
TR/Lucro	1.24
TR/Patr. Líquido	0.157

Tabela 2 – Fatores de Tolerância ao Risco de Howard

Para o caso do projeto analisado neste trabalho, foram utilizados os parâmetros acima para determinação do grau de Tolerância ao Risco da empresa.

3.4. Um Modelo em Tempo Discreto

Seja um projeto com uma vida útil de m períodos, que exige um investimento inicial I para ser implantado e que se espera irá gerar um fluxo de caixa esperado C_i, $i = 1,2,...,m$ em cada período. Esses fluxos de caixa representam os dividendos distribuídos pelo projeto, onde δi é a taxa de distribuição instantânea destes dividendos representada por C_i / V_i , e V_i é o valor do projeto pré-dividendos no período i. A taxa de desconto ajustada ao risco do projeto conforme determinada pelo CAPM é μ. Isso significa que dado o atual valor de mercado do projeto, um investidor exigiria uma taxa de retorno μ para investir nele.[3]

Se o projeto representa a totalidade da empresa, então a taxa μ será a taxa de retorno exigida pelos acionistas (k_e). O projeto está sujeito tanto a incertezas privadas quanto de mercado, que irão afetar os seus fluxos de caixa futuros, e também apresenta suficiente flexibilidade gerencial que permita uma administração ativa dos seus gerentes visando maximizar o seu valor ao longo de sua vida útil. No entanto, a existência desta flexibilidades que representam as Opções Reais do projeto alteram o risco do projeto, uma

[3] Note que μ é a taxa de desconto do projeto. A taxa interna de retorno (TIR) do projeto poderá ser maior ou menor do que μ, dependendo do montante do investimento inicial exigido.

vez que o gerente pode escolher exercer estas opções se elas resultarem num aumento do valor do projeto ou numa redução das possíveis prejuízos, de forma que a taxa de desconto μ anteriormente determinada não é mais a taxa apropriada para descontar os fluxos do projeto com as opções reais. Por esse motivo, utilizaremos probabilidades neutras a risco para que os fluxos do projeto possam ser descontados com a taxa livre de risco.

A modelagem do problema será feita em três etapas onde primeiramente o projeto é analisado em condições de certeza para se determinar o seu Valor Presente Esperado no instante inicial, que de acordo com a premissa primeira, será considerado o seu valor de mercado. Em seguida é realizada uma Simulação de Monte Carlos com o objetivo de reduzir as fontes de incerteza a uma só, definindo com isso o processo estocástico do Valor do Projeto. A terceira e última etapa envolve a criação da árvore binomial do projeto e posterior transformação em árvore de decisão com a incorporação dos instantes de decisão que representam as opções reais, onde ocorre a maximização de valor do projeto.

3.4.1. Modelagem Determinística

Inicialmente determinamos o Valor Presente do Projeto no instante inicial através do método do Fluxo de Caixa Descontado tradicional, utilizando-se para isso uma planilha Excel. Para tanto, calculamos o Valor Esperado dos Fluxos de Caixa do Projeto $\{C_i,\ i = 1, 2, ..., m\}$ em condições de certeza, ainda sem a inclusão das opções reais decorrentes de eventuais flexibilidade gerenciais que o projeto possa apresentar. Estes fluxos de caixa são em seguida descontados a taxa de risco determinada pelo CAPM (μ) para a determinação do Valor Presente do Projeto a cada período, através da fórmula (3.5):

$$V_i = \sum_{t=i}^{m} \frac{E[C_t]}{(1+\mu)^{t-i}} \qquad \text{Valor do Projeto pré-dividendos} \qquad (3.5)$$

De um modo geral consideramos que não existe fluxo de caixa positivo no instante inicial, apenas os investimentos necessários, que não são computados para o cálculo do Valor do Projeto. O Valor Presente do Projeto no instante inicial então é dado por:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{m} \frac{E[C_t]}{(1+\mu)^t}$$

Além do valor do projeto no instante inicial, nessa etapa são também calculados o Valor Presente em cada um dos períodos do projeto. O valor do projeto tende a se reduzir em cada período, à medida que os fluxos de caixa são pagos como dividendos e menos períodos de operação restam no projeto. Na Figura 7 podemos ver a dinâmica da evolução do Valor do Projeto com o tempo em condições de certeza.

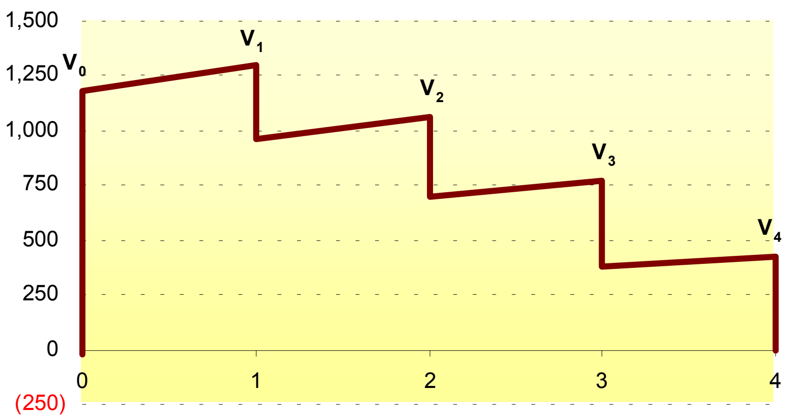

Figura 7 – Dinâmica da Evolução do Valor do Projeto

3.4.2. Simulação de Monte Carlo (SMC)

A distribuição lognormal do valor do projeto pode ser complemente definida através da média e desvio padrão dos seus retornos. Note que pela premissa primeira, assumimos que o valor presente do projeto sem opções é o seu valor de Mercado, como se o projeto fosse um ativo negociado livremente. Assumindo a premissa de mercados eficientes, adquirir o projeto a este preço garante um VPL nulo, e o retorno esperado do projeto será exatamente igual a sua taxa de retorno ajustada ao risco μ. Disso resulta que a média dos retornos μ do projeto é definida exogenamente.

O desvio padrão dos retornos, ou seja, a volatilidades do projeto, pode ser determinada através de uma simulação de Monte Carlo do Movimento Aritmético Browniano dos retornos $d\ln V = vdt + \sigma dz$. Os impactos das incertezas que afetam as variáveis relevantes do projeto e o seu impacto nos retornos podem ser determinados através da simulação dos processos estocásticos de cada um, e como resultado, os fluxos de caixa do projeto também se tornam estocásticos. Cada iteração da simulação gera um novo conjunto de fluxos de caixa futuros dos quais um novo valor de projeto ao final do primeiro período V_1 é computado usando-se (3.5) com $i = 1$, e uma amostra da variável aleatória $\tilde{v}$ é determinada através da equação (3.6)

$$\tilde{v} = \ln\left(\frac{\tilde{V}_1}{V_0}\right) \tag{3.6}$$

onde $E(\tilde{v}) = v$.

Com um número suficiente de iterações (10.000) computadas pela simulação, podemos determinar a volatilidade do projeto através a partir das amostras de $\tilde{v}$. Definimos a volatilidade do projeto como o desvio padrão dos retornos (σ), conforme equação (3.7)[4].

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum \mu_i^2 - \left(\sum \mu_i\right)^2}{n^2}} \tag{3.7}$$

Em um projeto que paga dividendos, a taxa de retorno total do investidor (μ) é composto de uma parcela de ganho de capital, que é a taxa de crescimento do valor do projeto com o tempo (α), mais os dividendos (δ) gerados pelo projeto ao longo da sua vida útil. Assim temos:

$\mu = \alpha + \delta$

[4] O código VBA que efetua a Simulação de Monte Carlo necessária na planilha do projeto está apresentado no apêndice 6.4.

Como veremos a seguir, no modelo de aproximação binomial da evolução do valor do projeto adotado, os dividendos são explícita e discretamente incluídos na árvore binomial do projeto. Assim, nenhuma outra consideração a respeito dos dividendos se faz necessária, e a determinação dos parâmetros do modelo binomial é feita desconsiderando-se qualquer efeito da taxa de distribuição de dividendos a fim de evitar inclui-los novamente. Assim, para a árvore binomial temos $\delta = 0$ e $\mu = \alpha$.

Conforme já mencionado anteriormente, pela premissa segunda assumimos que os retornos do projeto tem distribuição normal, com média $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e volatilidade σ, e conseqüentemente, $\tilde{V}_1$ tem distribuição lognormal. (Equação(6.1)). O projeto será então definido por $(V_0, \mu, \sigma, \delta_i, I)$, e o seu processo estocástico em tempo contínuo será:

$$dV(x,t) = (\mu - \delta_t)V(x,t)dt + \sigma V(x,t)dz \qquad \text{onde} \quad \alpha_t = \mu - \delta_t$$

Em um projeto com vida útil ilimitada, podemos considerar δ como uma constante. De forma inversa, uma taxa de distribuição de dividendos e retorno esperado constantes, implicam que o projeto tem vida infinita[5]. No caso de um projeto com vida útil finita, a taxa de distribuição de dividendos não é constante, pois podemos observar que no último período a taxa de distribuição de dividendo corresponderá a 100% do valor do projeto, uma vez que o valor do projeto será zero após a distribuição do último dividendo e final da sua vida útil. Nesses casos, se considerarmos que a taxa ajustada ao risco do projeto (μ) é uma constante de mercado, uma variação em δt implica que também a taxa de crescimento do valor do projeto também é variável, uma vez que $\mu = \alpha_t + \delta_t$.

---

[5] Definimos o valor do projeto como o valor presente dos fluxos de caixa futuros, $V_0 = \int_{T=0}^{T=\infty} C_t \; e^{-\mu t} dt$. Sabemos que o valor esperado de um ativo sujeito a uma taxa de crescimento α num tempo futuro t é $E(C_t) = C_0 e^{\alpha t}$. Se δ é a taxa de distribuição de dividendos, então temos $C_0 = \delta \, V_0$ e $\alpha = \mu - \delta$, e ficamos com $V_0 = \int_{T=0}^{T} (\delta V_0) \; e^{(\mu-\delta)t} e^{-\mu t} dt = \left[\frac{\delta V_0 e^{-\delta T}}{-\delta} \right]_0^T$. Como sabemos que o valor desta expressão é V_0, podemos verificar que isso apenas ocorrerá se T = ∞.

3.4.3. Árvore Binomial do Projeto

Dado o Valor do Projeto V_0 , o custo de capital μ e a volatilidade σ, conforme determinados anteriormente, o Valor do Projeto é agora modelado no tempo como um processo estocástico lognormal com volatilidade σ, através de uma árvore binomial recombinante discreta, conforme o modelo de Cox, Ross and Rubinstein (1979) (Figura 8).

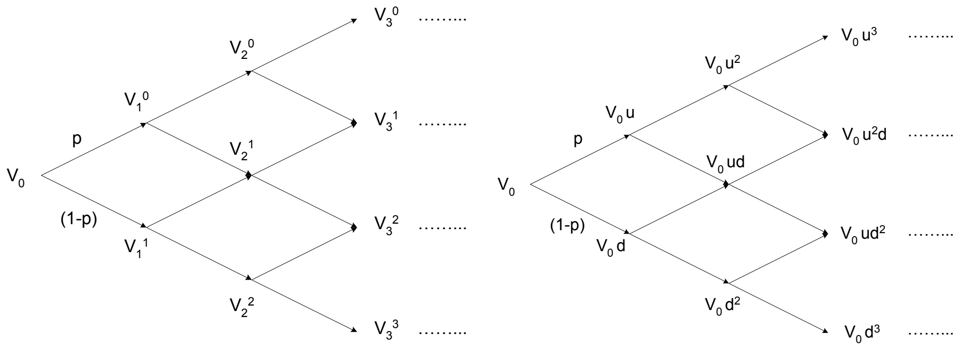

Figura 8 – Árvore Binomial Recombinante

onde $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e a probabilidade de subida é dado por $p = \dfrac{e^{\mu.t} - d}{u - d}$ e $V_{i,j} = V_0 u^{i-j} d^j$ $\quad i = 0,1,2,...m, \quad j = 0,1,2,....i.$

O projeto, no entanto, gera fluxos de caixa (dividendos) em cada período, portanto, o valor do projeto sofre uma descontinuidade no instante dessa distribuição, à semelhança do que ocorre com uma ação que paga dividendos. A taxa de distribuição dos dividendos é dada pela razão entre os Fluxos de Caixa e o Valor do Projeto em cada período conforme computado através do modelo determinístico, onde V_i é dado pela equação (3.5):

$$\delta_i = \frac{C_i}{V_i} \tag{3.8}$$

Em condições de incerteza e com variáveis estocásticas, assumimos a taxa de distribuição de dividendos, embora variável de um período para o outro, se mantém constante para todos os estado de um período, de tal forma que os fluxos de caixa em qualquer estado de um mesmo período sejam sempre uma proporção fixa do valor do projeto naquele período e estado, ou seja:

$$\delta_i = \frac{C_{i,j}}{V_{i,j}} \quad \forall j \tag{3.9}$$

onde i = período (i = 0, 1, 2, ..., m)

j = estado (j = 0, 1, 2, ..., i)

δ_i = taxa de distribuição de dividendos no período i

Assim, uma representação mais correta do valor do projeto no tempo é mostrada na Figura 9:

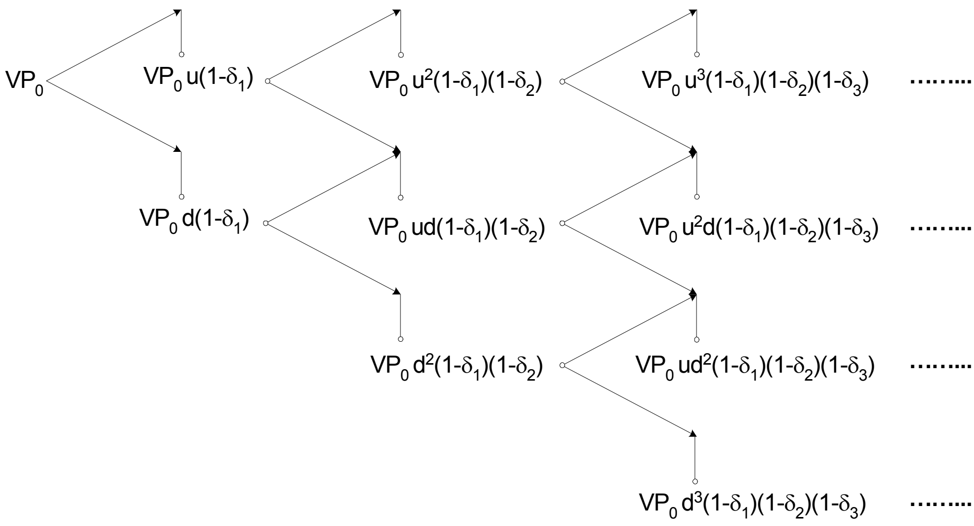

Figura 9 – Árvore Binomial com Dividendos

Podemos verificar que em condições de incerteza, o valor V (i,j) do projeto no período i, estado j, é dado pela seguinte fórmula recorrente:

$$V_{i,j} = V_0 \, u^{i-j} \, d^j \prod_{k=1}^{i-1} (1-\delta_k) \qquad \text{pré-dividendos} \tag{3.10}$$

$$V_{i,j}^{*} = V_0 \, u^{i-j} \, d^j \prod_{k=1}^{i} (1-\delta_k) \qquad \text{ex-dividendos} \tag{3.11}$$

onde $V_{i,j}$ = valor do projeto no período i e estado j, pré-dividendos

$V^*_{i,j}$ = valor do projeto no período i e estado j, ex-dividendos

A probabilidade P(i,j) e ocorrer o valor V(i,j) é:

$$P(i,j) = \binom{i}{j} p^{i-j}(1-p)^j \tag{3.12}$$

onde $\binom{i}{j} = \dfrac{i!}{(i-j)!\,j!}$ é o coeficiente binomial e $p = \dfrac{e^{\mu.t} - d}{u-d}$.

Com a árvore binomial apresentada podemos determinar o valor do projeto em condições de incerteza em cada período e estado. A seguir passamos a inserir as flexibilidades gerenciais que o projeto apresenta de forma a observar o seu impacto sobre o valor do projeto. Dado que as opções do projeto alteram o seu fluxo de caixa (e o seu risco), para calcular o valor do projeto com opções é necessário determinar um novo portfólio de mercado que replique os fluxos do projeto em todos os estados e períodos.

Alternativamente, podemos utilizar probabilidades neutras a risco para a mesma finalidade e resultados. Isso é possível devido à premissa do Marketed Asset Disclaimer (MAD) que ao assumir que o Valor Presente do Projeto sem opções de flexibilidade é o melhor estimador não tendencioso do seu valor de mercado, permite modelar o problema como se o mercado fosse completo, computando-se as probabilidades neutras a risco, e dessa forma utilizar a taxa livre de risco para descontar os fluxos de caixa do projeto, ao invés de se adotar uma taxa de desconto exógena arbitrária.

Por ser mais simples no caso, este será o método adotado, e com isso, os fluxos do projeto serão descontados à taxa livre de risco e a probabilidade p modificada para:

$$p = \frac{e^{r.t} - d}{u-d} \tag{3.13}$$

Antes de passar para a fase seguinte, faremos uma transformação na árvore binomial do projeto, de forma a expressá-la em função dos seus fluxos de caixa determinísticos, ao invés de ser função do valor do projeto nos períodos e estados anteriores. Essa transformação visa facilitar a inclusão das opções de flexibilidade do projeto, que transformarão a árvore binomial numa árvore de decisão. Uma vantagem disso é que a definição das opções do projeto em função dos seus fluxos de caixa permite um maior nível de detalhe do que é possível quando as definimos sobre o valor do projeto a cada período, já que o fluxo de caixa é uma variável mais básica do que o valor do projeto, que é determinado a partir do fluxo de caixa. Uma opção para suspender temporariamente a operação do projeto é mais facilmente modelada como função dos fluxos de caixa suspensos do que como função do valor do projeto. E a partir dos novos fluxos de caixa o valor do projeto pode ser facilmente computado. Outra vantagem é que o valor do projeto sofre descontinuidade ao longo do tempo devido às saídas dos fluxos de caixa em cada período, e com a transformação proposta isso é incorporado automaticamente no modelo.

3.4.4. Árvore de Decisão do Projeto

No modelo de árvore binomial desenvolvido anteriormente, o valor pré-dividendo do projeto no período i e estado j, é dado em função do valor V_0 do projeto no instante inicial, da taxa de drift μ, da volatilidade σ e da taxa de distribuição de dividendos δ_i. (Equação (3.10)). Dessa forma temos $V_{i,j} = f\left(V_0, \sigma, \mu, \delta_i\right)$, onde $V_0 = f\left(C_i, \mu\right)$. Ao incorporamos as opções reais do projeto, transformamos a árvore binomial (incerteza) em uma árvore de decisão (incerteza + opções).

Por outro lado, a modelagem das opções é mais facilmente implantada determinando-se o seu impacto sobre os fluxos de caixa do que sobre o valor do projeto. Dessa forma, fazemos uma transformação algébrica para explicitar o valor do projeto em função de uma série de fluxos de caixa artificiais que têm a propriedade de garantir que o processo estocástico seguido pela função Valor do projeto siga o mesmo Movimento Geométrico

Browniano estabelecido anteriormente. Esses fluxos, que denominaremos de pseudo fluxos de caixa, por sua vez, serão função dos fluxos determinísticos do projeto C_i (i = 1, 2, ..., m), do drift μ e dos parâmetros u e d do modelo binomial. Como estaremos descontando os pseudo fluxos à taxa livre de risco utilizando probabilidades neutras a risco, temos também $p = \frac{e^{r.t} - d}{u - d}$. A principal vantagem desta transformação é que ela permite explicitar a função de valor do projeto em termos de uma variável mais básica, que é o fluxo de caixa do projeto, possibilitando uma maior flexibilidade na modelagem das opções reais do projeto.

Na Figura 10 podemos ver a árvore binomial onde o valor do projeto está expresso em função desses pseudo fluxos. ($V_{i,j} = f\left(C_i, \sigma, \delta_i, \mu\right)$)

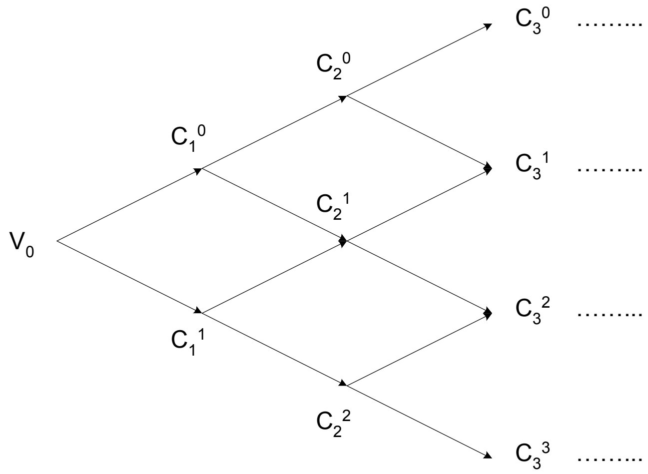

Figura 10 – Pseudo Fluxos de Caixa

Para programas geradores de árvore de decisão, que possuem estrutura incremental, a fórmula do valor do projeto como função dos pseudo fluxos de caixa é dado por:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{i}{j} p^{i-j} (1-p)^j C_{i,j}}{(1+r)^i} \tag{6.14}$$

Para uso com linguagens de programação que utilizam estrutura matricial, a fórmula absoluta é mais indicada:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{i}{j} p^{i-j}(1-p)^j}{(1+r)^i} \cdot \frac{C_i}{(1+\mu)^i} u^{i-j} d^j \tag{6.15}$$

O desenvolvimento destas fórmulas está apresentado no Capítulo 6, apêndice 6.3.

3.4.5. Generalização da Fórmula do Valor do Projeto

A determinação do valor do projeto em outros períodos e estados que não o inicial também pode ser feita. Seja (t) o período e (s) o estado da natureza. O valor pré-dividendos do projeto no período t e estado s será:

$$V_{t,s} = \sum_{i=t}^{m} \sum_{j=s}^{i+s-t} \frac{E\left[C_{i,j}\right]}{(1+r)^{i-t}} \tag{3.14}$$

onde $E\left[C_{i,j}\right] = \binom{i-t}{j-s} p^{i-t-j+s}(1-p)^{j-s} C_{i,j}$.

Na Figura 11 podemos ver uma ilustração do valor do projeto onde $t = 3$ e $s = 1$.

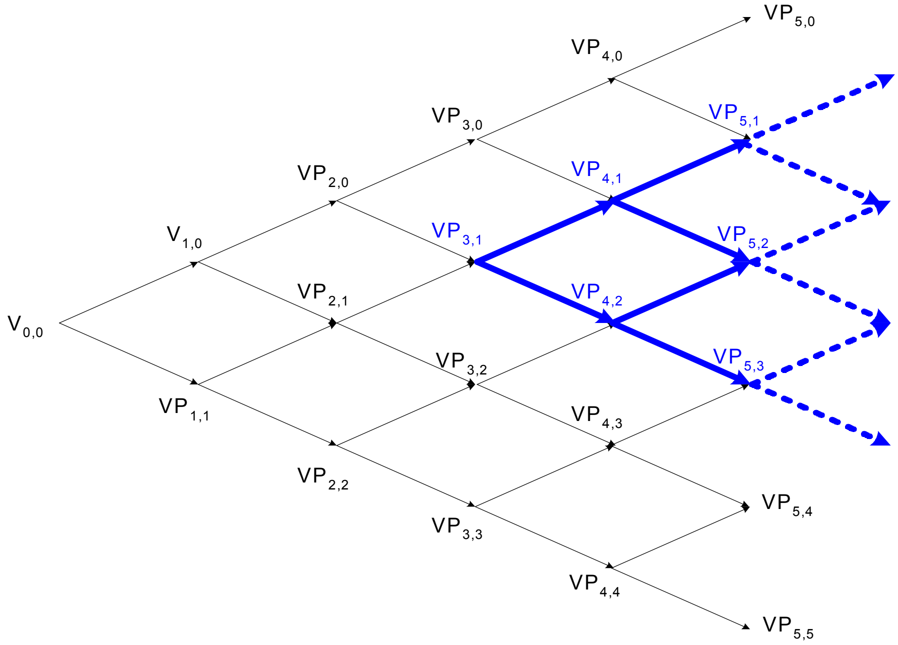

Figura 11 – Valor do Projeto em (*T*,*S*)

A fórmula absoluta de valor nesse caso é dada por [6]:

$$V_{t,s} = \sum_{i=t}^{m} \sum_{j=s}^{i+s-t} \frac{\binom{i-t}{j-s} p^{i-t-j+s}(1-p)^{j-s}}{(1+r)^{i-t}} \cdot \frac{C_i}{(1+\mu)^i} u^{i-j} d^j \qquad (3.15)$$

3.4.6. Modelagem das Opções

Uma vez definido e estruturado o modelo de difusão do valor do projeto, a inclusão das flexibilidades gerenciais é feita inserindo-se os instantes de decisão onde será maximizada a função valor do projeto. A cada oportunidade de se exercer uma opção do projeto, a decisão ótima será do tipo:

max {valor de continuação; valor da opção}

[6] Os valores dos pseudo fluxos de caixa C_{ij} são fixos e constantes, e são função apenas do período *i* e estado *j* . Para o cálculo de $V_{t,s}$ o que muda é apenas o conjunto dos pseudo fluxos de caixa a serem incluídos no somatório e a probabilidade de ocorrência de cada um destes.

O valor de continuação é dado pela fórmula (3.14) já vista. O valor da opção dependerá, é claro, das características dessa flexibilidade gerencial naquele período. Uma opção de abandono, por exemplo, pode significar que a empresa abre mão dos fluxos de caixa futuros em favor de um valor terminal Ω. Uma opção de expansão pode multiplicar o valor dos fluxos de caixa futuros por um fator qualquer, menos o custo do novo investimento. Nesse caso, o novo valor do projeto daquele instante para frente supondo o exercício desta opção há que ser determinado para que possa ser comparado com o valor do projeto sem o exercício, e escolhido o maior. Vamos considerar o caso de uma única opção de abandono no período (T) com valor terminal Ω. A decisão ótima em cada estado possível do período (T) será:

max {valor de continuação; Ω }

O valor do projeto agora, incluindo a opção de abandono no período (T) será a soma de duas partes: os fluxos pré e pós-opção. Primeiramente computam-se os valores esperados dos pseudo fluxos de caixa entre o instante inicial e o instante da opção no período (T). Em seguida, computam-se o valor esperado do projeto em cada estado do instante da opção em diante, até o final da vida útil do projeto. Esse valor de continuação (V_T) é comparado ao valor de abandono, e a decisão ótima é tomado visando sempre a maximização do valor do projeto. Assim, o valor do projeto com opção de abandono no período (T) é dado por:

$$V_0^* = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{E\left[C_{i,j}\right]}{(1+r)^i} + \frac{E\left[\max\left\{V_T, \Omega\right\}\right]}{(1+r)^T}$$

$$V_0^* = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{i}{j} p^{i-j} (1-p)^j C_{i,j}}{(1+r)^i} + \frac{\sum_{S=0}^{T} \binom{T}{S} p^{T-S} (1-p)^S \max\left\{V_{T,S}, \Omega\right\}}{(1+r)^T}$$

Substituindo o valor de continuação do projeto da equação (3.14), ficamos com:

$$V_0^* = \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{\binom{i}{j} p^{i-j}(1-p)^j C_{i,j}}{(1+r)^i} + \frac{\sum_{S=0}^{T}\binom{T}{S} p^{T-S}(1-p)^S \max\left\{\sum_{i=T}^{m}\sum_{j=S}^{i+S-T}\frac{E\left[C_{i,j}\right]}{(1+r)^{i-T}},\Omega\right\}}{(1+r)^T}$$

Substituindo o valor dos fluxos de caixa da equação (3.15) temos:

$$V_0^* = \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{\binom{i}{j} p^{i-j}(1-p)^j \frac{C_i}{(1+\mu)^i} u^{i-j} d^j}{(1+r)^i} +$$

$$+\frac{\sum_{S=0}^{T}\binom{T}{S} p^{T-S}(1-p)^S \max\left\{\sum_{i=T}^{m}\sum_{j=S}^{i+S-T}\frac{\binom{i-T}{j-S} p^{i-T-j+S}(1-p)^{j-S}\cdot\frac{C_i}{(1+\mu)^i} u^{i-j} d^j}{(1+r)^{i-T}},\Omega\right\}}{(1+r)^T}$$

(3.16)

A equação (3.16) nos dá o valor do projeto considerando uma única opção de abandono num período qualquer T[7]. Como definimos anteriormente a função valor como sendo o valor pré-dividendos, o valor de continuação V_T inclui os dividendos do período T. No caso, foi considerado que o eventual abandono do projeto se dará imediatamente após o recebimento dos dividendos do período T. Dessa forma, tanto o dividendo quanto o valor de abandono serão recebidos, portanto, para efeito da análise o valor dos dividendos no período T deve ser acrescido ao valor de abandono Ω na fórmula (3.16) acima.

No caso também foi considerado que o valor terminal Ω é constante. Pode-se verificar que a modelagem de um valor terminal Ω variável em função do período e estado pode ser facilmente implementada. A implementação de outros tipos de opções exige a alteração e adequação das fórmulas apresentadas de forma a considerar as particularidades e o impacto

[7] A verificação da fórmula pode ser feita mostrando que ela reverte para a fórmula (6.15) quando se faz T = S = 0.

de cada tipo de opção. A inclusão de opções múltiplas implica em modelar o valor de continuação de forma a incluir as opções futuras. Em um modelo de programação dinâmica isso é feito automaticamente à medida que o valor do projeto vai sendo computado desde o último período até o período inicial, incorporando o valor de opção a cada instante de decisão existente.

3.4.7. Exemplo

Ilustraremos a estruturação do modelo teórico com um exemplo simples de um projeto de quatro períodos. O projeto está sujeito a uma única fonte de incerteza que é o valor futuro das suas receitas. A taxa de desconto ajustada ao risco do projeto é de 10%, e a taxa livre de risco é de 5%. Começamos a análise calculando o valor esperado dos fluxos de caixa futuros e o valor presente do projeto no instante zero, conforme Tabela 3.

		0	1	2	3	4
Receita			1000	1100	1200	1300
Custo Variável			(400)	(440)	(480)	(520)
Custo Fixo			(240)	(240)	(240)	(240)
Depreciação			(300)	(300)	(300)	(300)
LAIR			60	120	180	240
IR	50%		(30)	(60)	(90)	(120)
Depreciação			300	300	300	300
Investimento		(1,200)				
Fluxo de Caixa		(1,200)	330	360	390	420

VP_0 =	**1,177**	WACC =	10%
Investim =	(1,200)		
VPL =	(23)		

Tabela 3 – Planilha Determinística do Projeto

De acordo com a premissa primeira, assumiremos que \$1.177 é o seu valor atual de mercado. Como o projeto exige um investimento de \$1.200, podemos observar que o projeto tem VPL negativo, o que indique não é ótimo a sua implantação. A evolução do valor do projeto no tempo foi apresentada na Figura 7.

Assumiremos que as receitas futuras do projeto seguem uma distribuição lognormal na forma $dx = \alpha x dt + \sigma x dz$, com drift α = 6.5% e volatilidade σ = 30%. Em seguida fazemos uma Simulação de Monte Carlo modelando as receitas futuras como um Movimento Geométrico Browniano com os parâmetros acima, e computando a cada iteração o valor da taxa de retorno μ, onde $\tilde{\mu} = \ln\left(V\tilde{P}_1 / VP_0\right)$. Calculando o desvio padrão de μ obtemos uma estimativa para volatilidade do projeto de σ = 24.4%. Pela premissa segunda, assumimos que a taxa de retorno μ tem distribuição normal, portanto, o valor do projeto terá distribuição lognormal, que será aproximada através de uma árvore binomial.

O próximo passo é o cálculo dos valores de u, d, e da probabilidade neutra a risco p, conforme fórmulas já definidas anteriormente. Os pseudo fluxos de caixa são computados utilizando-se as fórmulas (6.11) e (6.12), e o valor do projeto é determinado aplicando-se os procedimentos usuais de Programação Dinâmica, começando-se do período final e retornando ao instante inicial descontando-se os fluxos à taxa livre de risco com probabilidades neutras a risco. Na Figura 12 podemos ver o modelo utilizado, observando-se que o valor presente obtido através da árvore binomial é o mesmo da planilha determinística.

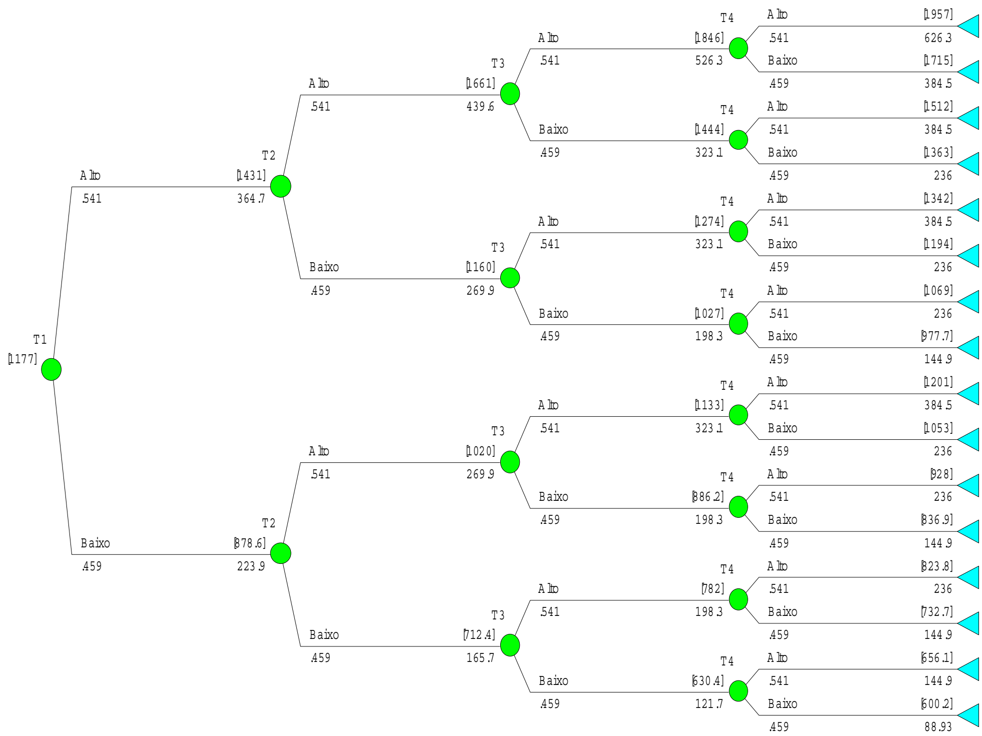

Figura 12 – Árvore de Decisão do Projeto

O projeto tem uma opção de abandono no terceiro ano da sua vida útil, pelo valor terminal de $350. Inserimos um nó de decisão que modela a flexibilidade gerencial existente no ano 3 do projeto, conforme demonstrado na Figura 13.

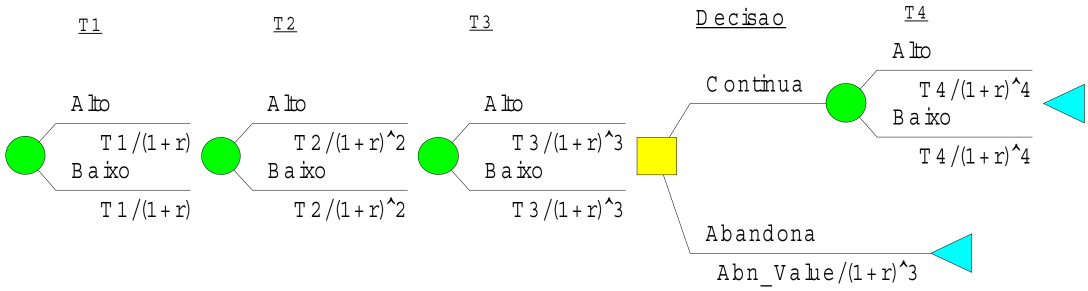

Figura 13 – Modelo do Projeto com Opção de Abandono

Com a inclusão da opção de abandono, um novo valor presente do projeto é calculado utilizando-se probabilidades neutras a risco, conforme ilustrado na Figura 14. Em alguns estados a opção de abandono será exercida, e o valor do projeto com esta opção real aumenta para $1.232.

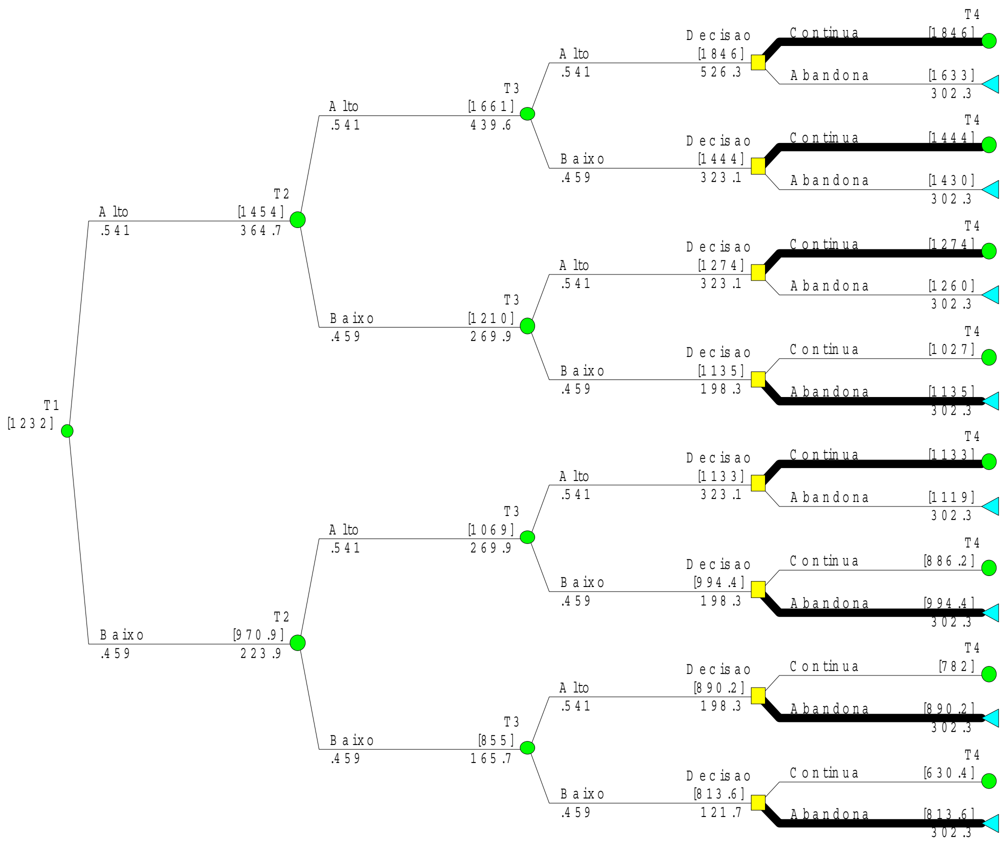

Figura 14 – Projeto com Opção de Abandono

O mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a linguagem de programação Visual Basic (VBA). No apêndice 6.4 é apresentado o código VBA utilizado para a função que calcula o valor do projeto sem opção (ComputeValue) e para o valor do projeto com opção de abandono no terceiro ano (ComputeOption).

Uma vez definida a árvore de decisão do projeto e seus parâmetros estocásticos, opções adicionais podem ser incluídas com facilidade. Supondo que a opção de abandono possa ser exercida também no ano 2, e que exista ainda a opção de expandir o projeto 30% neste mesmo ano um custo de \$100. A modelagem do problema está apresentada na Figura 15 e na Figura 16 está representada a árvore de decisão completa do projeto. Podemos observar que o valor do projeto aumenta nesse caso para \$1.301, e que a opção de expansão apenas não será exercida no estado mais desfavorável do ano 2, enquanto que a opção de abandono continua sendo exercida apenas no ano 3. As linhas em negrito na Figura 16 indicam a decisão ótima que a empresa deve tomar naquele estado.

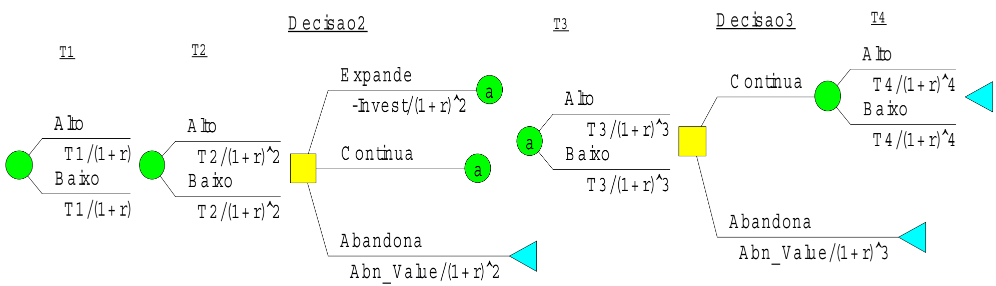

Figura 15 – Modelo do Projeto com Opção de Abandono e Expansão

Mesmo para um modelo simples como o apresentado aqui, podemos ver que a árvore de decisão se torna complexa com rapidez. Para problemas reais, a complexidade da árvore de decisão será tal que a sua visualização será impossível, e adotaremos apenas a sua estrutura de modelagem para representar a visualização do projeto.

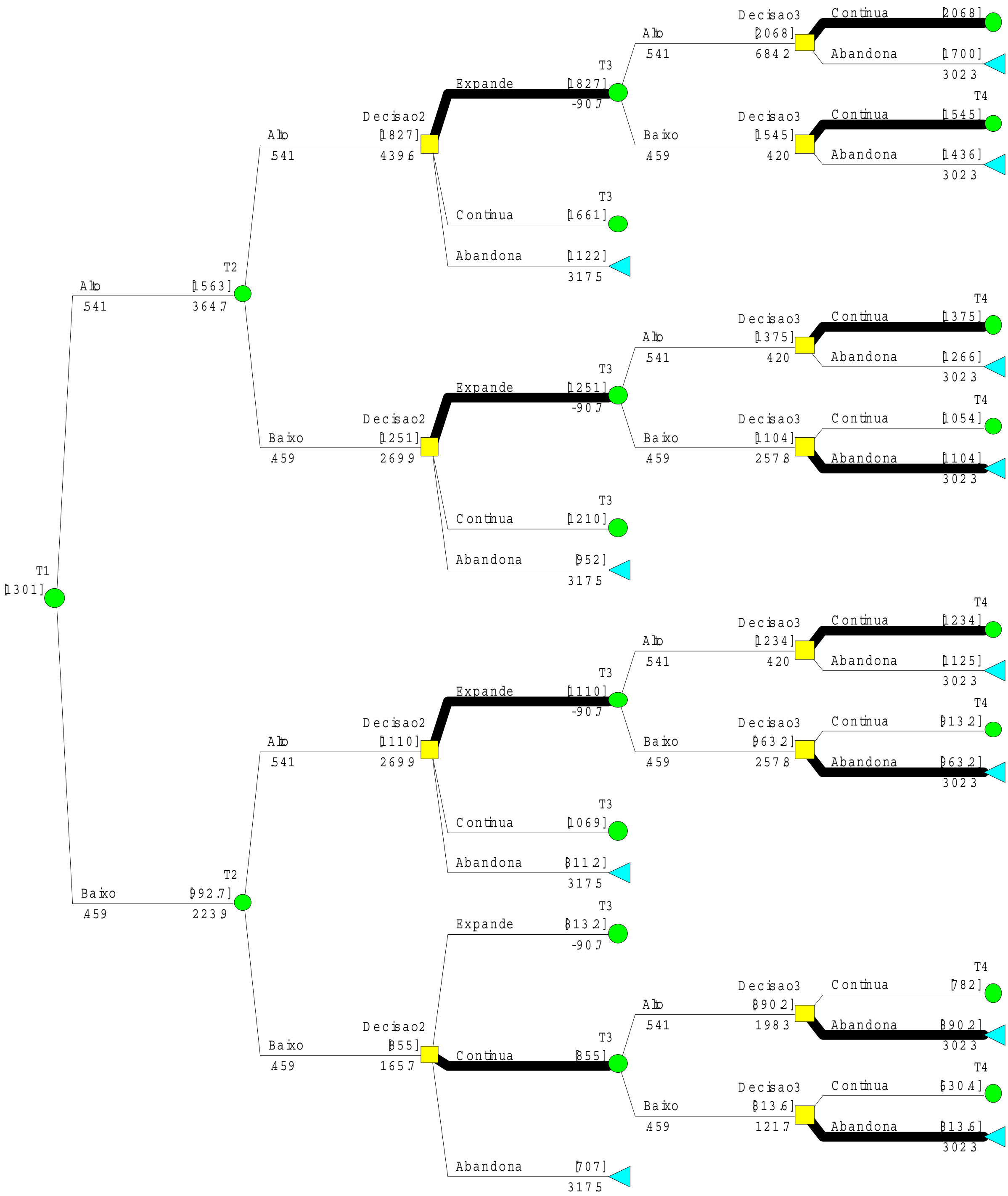

Figura 16 – Projeto com Opção de Abandono e Expansão