

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Gabriel Fischer Abati**

**Simulação e Validação Experimental de Controle PID e LQR  
em um Sistema Sub-Atuado com Pêndulo Invertido**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia  
Mecânica da PUC-RIO

**Orientador: Marco Antonio Meggiolaro**

Rio de Janeiro  
Novembro de 2020



## Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Cristina e Ismael, pelo amor, apoio e paciência que permitiram a realização dos meus sonhos.

Ao professor orientador e amigo, Marco Antonio Meggiolaro, pela confiança, ensinamentos e disponibilidade para a realização deste e de tantos outros trabalhos.

Ao meu mentor e amigo João Carlos Virgolino Soares, pelos ensinamentos que levarei para a vida toda.

A todos os membros da melhor equipe de robótica do mundo, RIOBOTZ, que me fizeram crescer e me apaixonar ainda mais pela engenharia.

Aos colegas do Laboratório de Robótica da PUC-RIO – LabRob, que me deram todo o suporte para realizar os necessários experimentos deste trabalho.

Aos meus professores da PUC-RIO que, no pleno exercício dessa nobre profissão, souberam tão bem transmitir seus conhecimentos e me cativar.

Aos amigos e amigas que fiz nesta incrível trajetória e aos nossos inesquecíveis momentos, dentro e fora de sala de aula que, para sempre, ficarão na minha história!

## Resumo

Abati, Gabriel Fischer, Meggiolaro, Marco Antonio. Simulação e Validação Experimental de Controle PID e LQR em um Sistema Sub-Atuado com Pêndulo Invertido. Rio de Janeiro, 2020 – Projeto de Graduação-Departamento de Engenharia Mecânica. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Há uma grande demanda hoje por sistemas robóticos autônomos para aplicação no âmbito da indústria aeroespacial, de saúde, lazer, militar, dentre outros setores. O pêndulo invertido, sistema instável por natureza é muito utilizado como *benchmark* para averiguação de métodos de controle, assim como para desenvolvimento de novas técnicas.

O escopo deste trabalho consiste em projetar um pêndulo com auxílio do *software* SOLIDWORKS, construir uma bancada experimental de acordo com os desenhos técnicos feitos no projeto, bem como desenvolver o *hardware* necessário para o seu funcionamento, com objetivo final de testar diferentes métodos de controle.

Para implementar os métodos de controle, é proposta a modelagem matemática do pêndulo utilizando a formulação de Lagrange. Ao final, são comparados três métodos de controle diferentes: um controle clássico proporcional integrativo derivativo (PID), um controle moderno linear quadrático (LQR) e um modelo e controlador não-linear de *Swing-up*.

São analisados o tempo de resposta, a robustez e os distúrbios de cada controle, sendo em seguida comparados entre si. Também é feita a comparação com os dados experimentais e dados gerados em simulações utilizando o software MATLAB/SIMULINK.

**Palavras-Chave:** Pêndulo Invertido; PID; LQR; *Swing-up*.

## Abstract

Abati, Gabriel Fischer, Meggiolaro Marco Antonio. Simulation and Experimental Validation of PID and LQR Controllers in a Subactuated Inverted Pendulum. Projeto de Graduação-Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

There is a great demand today for autonomous robotic systems for application in the scope of the aerospace, health, entertainment, military, among other sectors. The inverted pendulum, a system that is unstable by nature is widely used as a benchmark for investigating control methods, just as the development of new techniques.

The objective of this work consists of designing a pendulum with the aid of the SOLIDWORKS software and building an experimental bench according to the technical drawings made in the project, as well as developing the necessary hardware for its operation, in order to test different control algorithms.

A mathematical model of the system using Lagrange formulation is proposed in order to obtain the system dynamics equations. In the end, three different control methods were compared a classic derivative proportional integrative control (PID), a modern linear quadratic regulator (LQR) and a non-linear Swing-up controller.

The response time, robustness and disturbances of each control were analyzed and then compared with each other. There is also a comparison between the experimental data and results generated by simulation with the software MATLAB/SIMULINK.

**Keywords:** Inverted Pendulum; PID control; LQR control; Swing-up.

# Sumário

<b>Capítulo 1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>11</b>
	1.1. Revisão Bibliográfica .....	14
	1.2. Objetivos .....	15
	1.3. Organização do Trabalho .....	16
<b>Capítulo 2</b>	<b>Modelagem do Pêndulo Invertido .....</b>	<b>17</b>
	2.1 Equações da Dinâmica .....	17
	2.2 Parâmetros do Sistema .....	20
	2.3 Função de Transferência .....	20
	2.4 Análise em Malha Aberta .....	21
	2.5 Modelo de Espaço-Estado .....	22
	2.6 <i>Zero Order Hold</i> .....	24
	2.7 Modelagem Não-Linear .....	25
<b>Capítulo 3</b>	<b>Controle .....</b>	<b>29</b>
	3.1. Controlabilidade .....	29
	3.2. Observabilidade .....	30
	3.3. PID .....	31
	3.3.1 PID com <i>feedback</i> $\theta$ .....	32
	3.3.2 PID com <i>feedback</i> $\theta$ e $x$ .....	33
	3.3.3 Calibragem de Ganhos .....	33
	3.4. LQR .....	34
	3.4.1 Entrada de Referência .....	38
	3.4.2 Filtro de Kalman .....	39
	3.5. Controle Não-Linear de <i>Swing-up</i> .....	42
<b>Capítulo 4</b>	<b>Projeto do Pêndulo .....</b>	<b>45</b>
	4.1. Desenho Técnico .....	45
	4.2. <i>Hardware</i> Eletrônico .....	46
	4.2.1 Módulo de Alimentação .....	46
	4.2.2 Módulo de Sensores .....	47
	4.2.3 Módulo Controlador .....	47
	4.2.4 Módulo de Atuação .....	48
	4.3. Acoplamento Mecânico .....	49
<b>Capítulo 5</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>50</b>
	5.1 Resultados PID .....	50
	5.1.1 Resultados PID com <i>feedback</i> $\theta$ .....	50
	5.1.2 Resultados PID com <i>feedback</i> $\theta$ e $x$ .....	51
	5.2 Resultados LQR .....	52
	5.3 Resultados <i>Swing-up</i> .....	54
<b>Capítulo 6</b>	<b>Conclusão .....</b>	<b>57</b>
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>58</b>

## Lista de Figuras

Figura 1 – Aplicações para o pêndulo invertido em veículos equilibrantes .....	12
Figura 2 – <i>Space X Landings</i> .....	13
Figura 3 – Esquema do pêndulo invertido .....	17
Figura 4 – Resposta ao degrau em malha aberta .....	22
Figura 5 – Representação do modelo de espaço-estado para um sistema linear	23
Figura 6 – Diagrama de blocos controlador PID com feedback $\theta$ .....	33
Figura 7 – Diagrama de blocos controlador PID com feedback $\theta$ e $x$ .....	33
Figura 8 – Representação do modelo de espaço-estado em malha fechada .....	35
Figura 9 – Representação em diagramas de blocos do sistema em malha fechada com observador .....	39
Figura 10 – Representação gráfica do funcionamento do controlador não-linear .....	44
Figura 11 – Montagem da bancada em <i>SOLIDWORKS</i> .....	45
Figura 12 – Esquemático da eletrônica .....	46
Figura 13 – Sensor .....	47
Figura 14 – Módulo controlador .....	48
Figura 15 – Atuador .....	48
Figura 16 – Acoplamento mecânico .....	49
Figura 17 – Bancada experimental .....	49
Figura 18 – Simulação do controlador PID com feedback $\theta$ .....	51
Figura 19 – Resultados experimentais com controlador PID simples .....	51
Figura 20 – Resultados simulados com controlador PID duplo .....	52
Figura 21 – Resultados simulados com controlador LQR .....	53
Figura 22 – Resultados experimentais com controlador LQR .....	53
Figura 23 – Resultados simulados com controlador Swing-up .....	54
Figura 24 – Resultados experimentais com controlador Swing-up .....	55
Figura 25 - Pêndulo equilibrado pelo controlador Swing-up .....	55
Figura 26 - QRCode .....	56

## Lista de Abreviações e Símbolos

PID = *Proportional Integrative Derivative*

LQR = *Linear Quadratic Regulator*

CAD = *Computer Aid Design*

Eq. = Equação

EDO = Equação Diferencial Ordinária

ZOH = *Zero Order Hold*

M = massa da base

m = massa da haste

l = distância ao centro de massa da haste

g = aceleração da gravidade

I = momento de inércia

b = coeficiente viscoso de amortecimento translacional da base

x = posição da base

$\theta$  = ângulo da haste

$\dot{x}$  = velocidade da base

$\dot{\theta}$  = velocidade angular da haste

f = força aplicada na base

$\ddot{x}$  = aceleração da base

$\ddot{\theta}$  = aceleração angular da haste

u = resposta à lei de controle

U = vetor saída da lei de controle

X = vetor de variáveis de estados

A = matriz de estados do sistema contínuo

$B$  = matriz de entrada do sistema contínuo

$C$  = matriz de saída do sistema contínuo

$D$  = matriz de alimentação do sistema contínuo

$\Phi$  = matriz de estados do sistema discreto

$\Gamma$  = matriz de entrada do sistema discreto

$H$  = matriz de saída do sistema discreto

$J$  = matriz de alimentação do sistema discreto

$C_{contr}$  = matriz de controlabilidade do sistema

$Ob$  = matriz de observabilidade do sistema

$J_{LQR}$  = função de custo do controlador LQR

$K$  = ganhos ótimos da lei de controle

$K^*$  = ganhos de Ackermann

$X_d$  = vetor de estado desejado

$V$  = matriz de ruído dos sensores

$W$  = matriz de perturbações

$\bar{P}$  = matriz de estimativas preditas

$\hat{P}$  = matriz de estimativas corrigidas

$L_c$  = ganho ótimo do estimador de Kalman

$Id$  = matriz de identidade

$Y$  = vetor de saídas de estados

$\bar{X}$  = vetor de estados preditos

$\hat{X}$  = vetor de estados corrigidos

$E_k$  = energia cinética do sistema

$E_u$  = energia potencial do sistema

$T$  = período de amostragem

$\Psi$  = função genérica não-linear

$Y$  = função genérica não-linear

$F$  = matriz jacobiana de  $\Psi$  em função de  $X$

$G$  = matriz jacobiana de  $\Psi$  em função de  $U$

$H^*$  = matriz jacobiana de  $Y$  em função de  $X$

$J^*$  = matriz jacobiana de  $Y$  em função de  $U$

## Capítulo 1 Introdução

Na didática de engenharia de automação e robótica, um dos sistemas que se destaca é o pêndulo invertido sub-atuado em sua variante, montado em uma base controlada com deslocamento horizontal. Esse sistema experimental agrega conhecimentos de mecânica, elétrica e eletrônica, e se caracteriza como clássico exemplo para a teoria de controle e análise dinâmica. Este pêndulo invertido resulta em um sistema não-linear, instável e com dois graus de liberdade: referentes ao deslocamento horizontal da base e à rotação da haste, em um plano vertical que contém o eixo de deslocamento da base.

O desenvolvimento tecnológico em seguimentos da indústria aeroespacial, saúde, lazer, militar, nuclear, dentre outros, pode se beneficiar com a automação de processos de produção que exigem alto grau de precisão e repetitividade a fim de obter maior produtividade no processo, consumir menos recursos, e produzir em tempo reduzido, tem exigido dos engenheiros um constante aprimoramento nos sistemas de controle.

O pêndulo invertido abordado neste trabalho, mecanismo extremamente dinâmico e complexo, é um problema comum em pesquisas na área de sistemas de controle e automação. AMBA (2015), em sua tese, sugere que o controle de um pêndulo invertido é análogo ao equilíbrio de um cabo de vassoura no dedo indicador, “com o movimento de controle restrito a uma única dimensão do espaço, embora apresente certas propriedades e peculiaridades que dificultem seu controle” (ALVES, 2018).

De forma similar, no pêndulo invertido temos uma haste metálica e uma base que se desloca em uma direção, porém nos dois sentidos e que busca manter a haste na posição vertical. O acoplamento entre a haste e a base é sub-atuada, ou seja, somente a base possui um motor que atua no controle do sistema.

O sistema do pêndulo invertido tem sido uma das ferramentas clássicas utilizada no ensino e pesquisa da teoria de controle desde meados de 1950 (BOUBAKER, 2012). A primeira abordagem para esse sistema foi descrita por ROBERGE, em 1960, descrevendo em sua obra *The Mechanical Seal*, o desenvolvimento e modelagem de um servomecanismo para estabilizar um modelo de sistema físico de pêndulo invertido (LUNDBERG, 2010).

Vários autores abordaram esse sistema, desde suas versões mais simples à outras mais complexas, aplicando diferentes técnicas de controle para estabilizá-lo. Alguns autores com

objetivos didáticos, de representar em controle linear um sistema instável, outros para apresentar a viabilidade das técnicas aplicadas (ÅSTRÖM & FURUTA, 1996).

A importância teórica do sistema de pêndulo invertido vem do fato de o mesmo não ser um sistema linear e ser relativamente complexo. Seu comportamento pode ser descrito por equações diferenciais, sendo possível linearizá-lo em torno de um ponto de equilíbrio para possibilitar aplicação de técnicas de controle linear, a fim de estabilizá-lo. As variantes aplicadas em sua modelagem e simulação advêm do princípio de que o pêndulo invertido pode ser aplicado extensivamente a diversos outros sistemas do dia a dia, tornando-o um importante objeto de estudo e ensino na área de engenharia, dinâmica e controle de sistemas (KAFETZIS & MOYSIS, 2017).

Vários estudos sobre a modelagem matemática e o controle do pêndulo são observados em diversas áreas da ciência além da engenharia de controle, tais como na biomecânica e na construção civil (PRADO, 2011; SILVA, 2013).

Na área da biomecânica, por exemplo, pesquisas estudam o modelo do caminhar humano a partir do modelo do pêndulo invertido. Já na engenharia civil são estudados sistemas de proteção contra abalos sísmicos para pontes e prédios que se fundamentam no princípio de controle do pêndulo invertido.

Também, utilizando o princípio do pêndulo invertido, é notável o surgimento de novos tipos de veículos elétricos auto equilibrantes para transporte humano, como os *segways* e os *hoverboards* (RIBEIRO, 2007), mostrados na Figura 1.



**Figura 1** – Aplicações para o pêndulo invertido em veículos equilibrantes

Fonte: (a, b, c) Google imagens

Destacam-se, ainda, dentre as diversas aplicações da análise e simulação desse sistema, o controle de comportamento de navios sujeitos a oscilações forçadas provocadas pelo movimento de ondas (RAHMAN; NAYFEH, 2007), o controle da postura ereta natural de robôs bípedes (NAVES, 2006) e o controle de posição de veículos espaciais na fase de lançamento (OGATA, 2003). A partir do momento que o foguete é desacoplado ele tende a cair, a menos que se compense essa tendência, favorecendo o surgimento de empresas tais como a **SpaceX**, que tem como objetivo reduzir os custos para o transporte espacial e possibilitar a colonização de Marte até 2050. A companhia atingiu inovações importantes na indústria, como a manobra de partes de foguetes de volta à Terra com segurança, o que barateia os lançamentos. Na Figura 2 é ilustrada a aterrissagem vertical de dois foguetes desta empresa.



**Figura 2** – Space X Landings

Fonte: Google Imagens

A importância do controle para os projetos atuais é de tal magnitude que muitos sistemas, como por exemplo as grandes aeronaves, simplesmente não conseguem se tornar operacionais sem a participação de sistemas de controle automático realimentados (OGATA 1993).

O pêndulo invertido é um sistema amplamente utilizado como referência para testes e desenvolvimento de algoritmos de controle em malha fechada, tais como controladores PID, representações de espaço de estado, redes neurais, controle *fuzzy* e algoritmos genéticos.

O modelo do pêndulo invertido é estudado desde 1960 (LUNDBERG; BARTON, 2010), e inúmeras propostas de controle já foram publicadas, a maioria delas utilizando controladores clássicos como o mencionado PID. Esse controlador de malha fechada é muito conhecido por sua eficiência e confiabilidade e, de acordo com ASTROM (2006),

responde por mais de 95% das malhas de controle na indústria. O controlador recebe uma variável desejada pelo programador/usuário e compara este valor desejado com valores adquiridos por sensores. A diferença desses valores é chamada de erro, e o objetivo do controlador é levar esse erro a zero.

Porém, controladores PID independentes em cada grau de liberdade não são uma boa opção quando aplicados em sistemas com várias variáveis acopladas. Por sua vez, controladores LQR lidam muito melhor com esse tipo de sistema. O LQR é um controlador ótimo, largamente utilizado em diversos tipos de aplicações, com o objetivo de determinar uma lei de controle que faça com que o sistema atenda às especificações de desempenho com pesos escolhidos pelo usuário, minimizando um índice quadrático sujeito às restrições do sistema linear.

O projeto e desenvolvimento de um pêndulo invertido mecanicamente robusto, permitindo a visualização de seu comportamento e eficiência sob a influência de parâmetros e perturbações, pode ser uma ferramenta didática na formação e inserção de futuros profissionais no mercado de trabalho, abrangendo os conhecimentos e expectativas exigidos em diversas aplicações industriais e acadêmicas.

Dentre as motivações para o desenvolvimento deste trabalho, além das diversas alternativas de aplicações em pesquisas, inclui-se a possibilidade de que o mesmo possa se tornar uma ferramenta didática para uso acadêmico nos cursos de Controle da PUC-Rio, a fim de formar profissionais com uma base sólida de conhecimentos e com alguma experiência prática em projetar e implementar diversas técnicas de estabilização.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Esta Seção destaca o desenvolvimento histórico do pêndulo invertido a partir das principais teorias sobre sua dinâmica e controle. A presente revisão demonstra o auxílio do pêndulo nos principais conceitos físicos e como o seu modelo ainda impacta grandes avanços científicos.

Em 1638, no livro *The New Sciences*, Galileo-Galilei escreveu os primeiros estudos feitos com pêndulos invertidos, dando espaço para discussões e estudos que se alongaria por séculos. De fato, seu estudo do movimento do pêndulo suscitou importantes questões na área da mecânica, cujas respostas surgiram décadas depois, com a formulação das leis de movimento de Newton e de estudos de outros pesquisadores. Huygens, em 1656, desenvolveu as primeiras definições de um pêndulo com o intuito de medir com precisão o tempo, criando assim o relógio de pêndulo.

Contribuindo para a relevância do pêndulo, o trabalho de Stokes (1851) deduz uma série de equações que considera os fatores influentes no intercurso do movimento pendular.

Léon Foucault, em 1878, utilizando um pêndulo longo e pesado, conseguiu demonstrar a rotação da Terra em torno de seu próprio eixo. Outro avanço científico importante foi feito por *Westfall*, em 1990, que descreveu a relevância do pêndulo demonstrando a influência de um dos principais trabalhos escritos por Isaac Newton, intitulado *Principia Mathematica* - publicado em 5 de julho de 1687.

Ainda em 1990, Drake registra que várias leis da física não existiriam ou teriam levado muito mais tempo para serem descobertas, não fossem os estudos relativos ao pêndulo invertido.

A importância do pêndulo invertido, além de sua utilidade no estudo/pesquisa de seus diversos modelos, também é considerada em aplicações didáticas. O sistema é mencionado como exemplo clássico por diversos autores que tratam de sistemas dinâmicos e controle moderno, utilizando o pêndulo como exemplo não-linear e instável (OGATA, 2011; DORF e BISHOP, 2009), além do estudo de sistemas sub-atuados e, portanto, ideal para estudantes universitários de todos os níveis.

Ademais, o pêndulo invertido é utilizado para a modelagem de diversos sistemas práticos de engenharia, como descritos no presente Capítulo, seja para modelar o lançamento de um foguete, em aeronáutica, ou para modelar a marcha bípede, em biomecânica, ou ainda modelar veículos auto-balanciáveis, em robótica, dentre outras aplicações.

Em engenharia, existem exemplos de problemas de sistemas de controle onde a dinâmica do pêndulo fornece informações úteis e um estudo dos sistemas pendulares é uma excelente ferramenta para compreender as questões de dinâmica e controle não-linear.

## 1.2 Objetivos

Os objetivos deste trabalho de conclusão de curso são:

- Elaborar um projeto mecanicamente robusto de um pêndulo invertido com base controlada horizontalmente, para ser utilizado no estudo de sistemas de controle;
- Obter um modelo matemático do pêndulo invertido em questão;
- Construir um pêndulo invertido para aplicações de métodos de controle;
- Estudar a estabilidade e tempo de resposta entre três controladores: o controlador PID, o controlador LQR e o controlador não-linear *Swing-up*;
- Comparar dados simulados utilizando a ferramenta MATLAB/SIMULINK com dados experimentais providos pelo pêndulo real, em cada controlador.

### 1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. O próximo item, Capítulo 2, apresenta a modelagem matemática e suas derivações para obtenção das equações da dinâmica do sistema, bem como o modelo de espaço-estado, tanto contínuo como discreto. No Capítulo 3 são apresentadas as descrições matemáticas das técnicas de controle PID, LQR e do controlador não-linear de *Swing-up*. Na etapa do Projeto do Pêndulo, Capítulo 4, constam os componentes e as especificações dos materiais utilizados na bancada, seu desenho mecânico e a transmissão utilizada. Ainda nesse Capítulo, constam também todos os detalhes do *hardware* empregado e a demonstração da construção e montagem do pêndulo. Os resultados, tanto simulados quanto realizados na bancada experimental, são apresentados no Capítulo 5 e, no Capítulo 6, constam as conclusões sobre os resultados obtidos com os diferentes controladores experimentais e simulados.

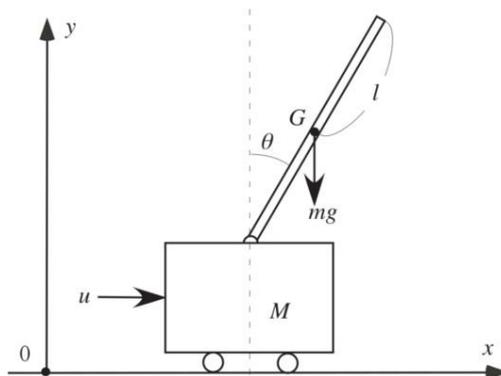
## Capítulo 2 Modelagem do Pêndulo Invertido

Um pêndulo invertido é intrinsecamente um sistema instável que requer um controlador para mantê-lo na posição vertical estável. O projeto consiste em uma base com uma haste/barra que pode se deslocar em uma direção, porém nos dois sentidos. Sob efeito da gravidade, a haste/barra tende, naturalmente, a cair, e para ser estabilizado deve ser aplicada uma força horizontal à base, de modo que a haste/barra permaneça na vertical (sentido norte). Matematicamente o objetivo é manter o ângulo da haste/barra bem próximo a zero, e este controle é feito através dos movimentos da base, que buscam equilibrá-la.

Uma forma de modelar um sistema é encontrar as equações físicas que o descrevem. No presente caso do pêndulo invertido foi necessário descobrir suas equações de movimento de modelação de velocidade, de controle de torque, de compensação de fricção e de energia. Neste Capítulo são apresentados o modelo matemático, o sistema de coordenadas de referência e a definição das variáveis e constantes necessárias para a construção do modelo.

### 2.1 Dinâmica do Sistema

Na Figura 3 observa-se um esquema simplificado do pêndulo invertido. Uma base de massa  $M$  atuado por uma força  $u$  desloca-se com atrito viscoso  $b\dot{x}$  no eixo  $x$ . Construído acima da base está um ponto de pivô, onde uma haste com massa  $m$ , centro de massa  $G$  e momento de inercia  $I$ , localizado no centro da haste, gira livremente. A descrição da modelagem linear será fundamental para o controle do pêndulo utilizando os controladores PID e LQR.



**Figura 3** - Esquema do pêndulo invertido

Fonte: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcTNAc02E7GWCX8bHqL-AErCfoecZ93L-rPTIA&usqp=CAU>

Para obter as equações de dinâmica do sistema utiliza-se o método de energia de Lagrange. O método de Lagrange possibilita a obtenção das equações de movimento de um sistema dinâmico utilizando os princípios de conservação de energia e momento, sem a necessidade de identificar as forças envolvidas, como na mecânica newtoniana. Definindo os vetores de posição para a base e para o pêndulo, temos:

$$P_{base} = [x, 0]^T \quad (1)$$

$$P_{pend} = [x + l \operatorname{sen}(\theta), l \cos(\theta)]^T \quad (2)$$

Derivando esses vetores obtém-se as velocidades do carro e do pêndulo:

$$v_{base} = [\dot{x}, 0]^T \quad (3)$$

$$v_{pend} = [\dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta), -l \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta)]^T \quad (4)$$

Calculando o módulo de  $v_{pend}$ :

$$|v_{pend}|^2 = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta)^2 + (-l \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta))^2 = \dot{x}^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} l \cos(\theta) + l^2 \dot{\theta}^2 \quad (5)$$

A energia cinética pode ser calculada por:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m |v_{pend}|^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (6)$$

A energia potencial é calculada por:

$$U_{pot} = m g l \cos(\theta) \quad (7)$$

E calculando o Lagrangeano por  $L = T - U_{pot}$ :

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m |v_{pend}|^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m g l \cos(\theta) \quad (8)$$

As equações de Euler-Lagrange para este sistema são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = f - b\dot{x} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (10)$$

Resolvendo as duas equações obtém-se as equações de dinâmica do sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m l \dot{\theta} \cos(\theta) \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} + m l [\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)] \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m l \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) + m g l \sin(\theta) \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (I + m l^2)\dot{\theta} + m l \dot{x} \cos(\theta) \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (I + m l^2)\ddot{\theta} + m l [\ddot{x} \cos(\theta) - \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta)] \quad (16)$$

Substituindo os valores na equação de Euler-Lagrange, resultam as seguintes equações de dinâmica do sistema:

$$(M + m)\ddot{x} + m l \ddot{x} \cos(\theta) - m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = f - b\dot{x} \quad (17)$$

$$(I + m l^2)\ddot{\theta} + m l \ddot{x} \cos(\theta) - m g l \sin(\theta) = 0 \quad (18)$$

Analisando o modelo para ângulos pequenos pode-se linearizar as equações de dinâmica a partir das seguintes simplificações:

$$\theta = 0 \quad (19)$$

$$\sin(\theta) = \theta \quad (20)$$

$$\cos(\theta) = 1 \quad (21)$$

Considerando as Eqs. 19 a 21, as equações linearizadas de movimento se tornam:

$$(M + m)\ddot{x} + m l \ddot{\theta} = f - b\dot{x} \quad (22)$$

$$(I + m l^2)\ddot{\theta} - m l \ddot{x} - mgl\theta = 0 \quad (23)$$

## 2.2 Parâmetros do Sistema

Para fins de modelagem e simulação específicas deste projeto, a partir da bancada experimental, a ser explicada no Capítulo 4, foram obtidos os seguintes parâmetros do sistema, apresentados na Tabela 1.

Uma vez obtidos os parâmetros, é possível proceder à modelagem dinâmica do sistema, conforme descrita neste Capítulo.

SÍMBOLO	PARÂMETRO	VALOR
M	Massa da base	0.618 Kg
m	Massa da haste	0.157 Kg
l	Distância ao centro de massa da haste	0.160 m
g	Aceleração da gravidade	9.810 $m/s^2$
I	Momento de inercia	3.496 $10^{-4}$ Kg $m^2$
b	Coefficiente viscoso de amortecimento translacional da base	0.100 $Ns/m$

**Tabela 1** – Parâmetros do sistema

## 2.3 Função de Transferência

Uma forma inteligente de lidar com EDOs de sistemas lineares é utilizar a transformada de *Laplace*. A ideia desta transformada é substituir o operador diferencial  $\frac{d}{dt}$  ou  $\frac{d}{dx}$  por uma variável no domínio da frequência ' $s$ '. Desta forma, equações diferenciais tornam-se equações algébricas. Define-se matematicamente a transformada de *Laplace* como:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{st} dt \quad (24)$$

Logo, aplicando-se a transformada de *Laplace* nas equações de movimento obtém-se:

$$(M + m)X(s) s^2 + b X(s) s + m l \Theta(s) s^2 = f = U(s) \quad (25)$$

$$(I + m l^2)\Theta(s) s^2 + m l X(s) s^2 - mgl\Theta(s) = 0 \quad (26)$$

Reorganizando as Eqs. 25 e 26 calcula-se as funções de transferência do sistema. Há duas funções de transferência para o sistema do pêndulo invertido, sendo elas: (i) o comportamento da base dado um *input* de força e (ii) o comportamento do ângulo da haste dado um *input* de força:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-m l s}{(M I + m l + M m l^2)s^3 + (I + m l^2)bs^2 - (M + m)mgl s - bmgl} \quad (27)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(I + m l^2)s^2 - mgl}{(M I + m l + M m l^2)s^3 + (I + m l^2)bs^2 - (M + m)mgl s - bmgl} \quad (28)$$

Aplicando os valores obtidos do pêndulo real da tabela 1 calcula-se as funções de transferência para o sistema:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-0.02507s}{0.00275s^3 + 0.0004361s^2 - 0.1905s - 0.0246} \quad (29)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{0.004361s^2 - 0.246}{0.00275s^4 + 0.0004361s^3 - 0.1905s^2 - 0.0246} \quad (30)$$

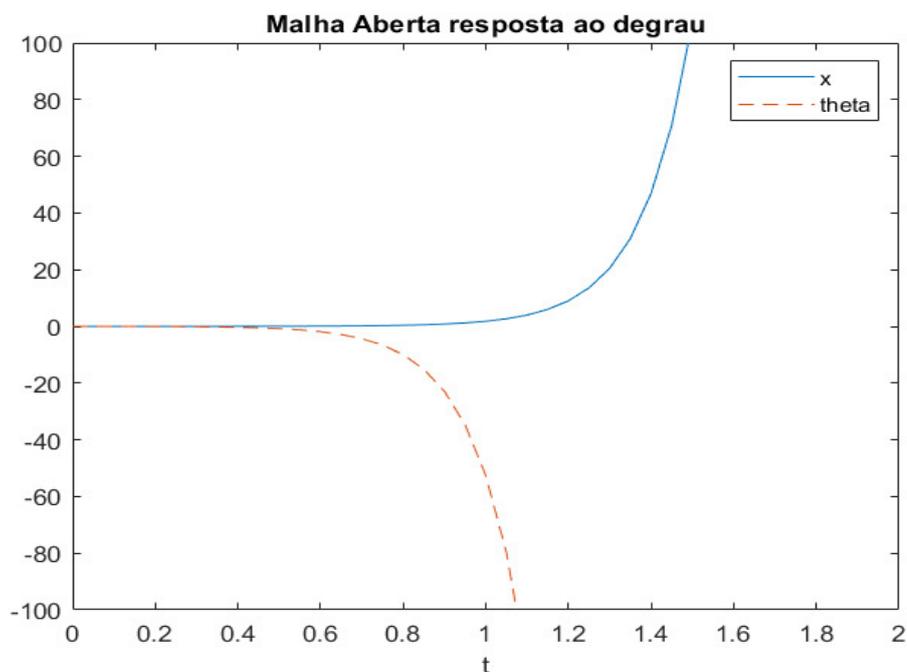
## 2.4 Análise do Sistema em Malha Aberta

A seguir é feita uma análise da estabilidade do sistema utilizando os polos associados a cada função de transferência. Os polos são raízes dos polinômios denominadores de cada função de transferência. É esperado para este sistema que pelo menos haja um polo positivo em cada polinômio. Polos positivos são uma indicação forte que o sistema é instável, visto que,  $e^{\lambda t}$  tende a infinito para valores de  $\lambda$  positivos.

$$P_{\theta} = \begin{bmatrix} 8.3095 \\ -8.339 \\ -0.12908 \end{bmatrix} \quad P_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.3095 \\ -8.339 \\ -0.12908 \end{bmatrix}$$

Observa-se que, de fato, existem polos positivos para ambas funções de transferência. Isto indica que o pêndulo invertido é instável, como esperado para tal sistema.

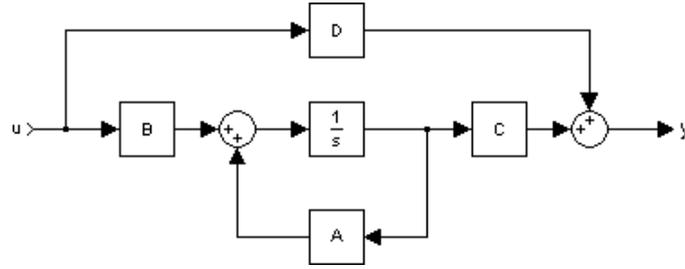
Analisando o comportamento do sistema ao aplicar uma entrada degrau, percebe-se que tanto o ângulo da haste quanto a posição da base tendem a  $\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente. Desta forma, conclui-se que o sistema do pêndulo invertido é instável com a haste direcionada para cima. Na Figura 4 é apresentada a simulação do pêndulo em malha aberta em resposta ao degrau.



**Figura 4** - Resposta ao degrau em malha aberta

## 2.5 Modelo de Espaço-Estado

A representação de espaço-estado é um modelo matemático de um sistema físico como um conjunto de variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado relacionadas a equações diferenciais. Para sistemas lineares é comum a representação em diagrama de blocos, como demonstrado na Figura 5.



**Figura 5** - Representação do modelo de espaço-estado para um sistema linear

O sistema é representado pelas Eqs. 31 e 32, onde  $A$  é a matrix de estado do sistema,  $B$  é a matrix de entrada do atuador,  $C$  é a matrix de saída e  $D$  é a matrix de alimentação, ou *feedforward*. Como o sistema é em tempo real, a matrix  $D$  é nula.  $X$  é o vetor de estados do sistema,  $Y$  é o vetor de saída do modelo e  $U$  é conhecido como vetor de controle, que irá alimentar o atuador.

$$\dot{X} = AX + BU \quad (31)$$

$$Y = CX + DU \quad (32)$$

Utilizando as Eqs. 22 e 23 de movimento linearizado e rearrumando-as para que fiquem com base de  $\ddot{x}$  e  $\ddot{\theta}$  tem-se:

$$\ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b\dot{x} - m^2l^2g\theta + (I + ml^2)f}{(MI + ml + Mml^2)} \quad (33)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mlb\dot{x} + (M + m)mgl\theta - mlf}{(MI + ml + Mml^2)} \quad (34)$$

Definindo o vetor de estados como  $X = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$  a representação de espaço-estado do sistema é escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{(MI+ml+Mml^2)} & \frac{-m^2l^2g}{(MI+ml+Mml^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{MI+ml+Mml^2} & \frac{(M+m)mgl}{(MI+ml+Mml^2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-(I+ml^2)}{(MI+ml+Mml^2)} \\ 0 \\ \frac{-ml}{MI+ml+Mml^2} \end{bmatrix} [f] \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f] \quad (36)$$

Aplicando-se os parâmetros do pêndulo real, as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  ficam:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1586 & -2.2425 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9117 & 69.2898 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5859 \\ 0 \\ -9.1173 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.6 Zero Order Hold

O equivalente *zero order hold* (ZOH) é um modelo matemático que converte sinais contínuos em sinais discretos. Isto é necessário visto que o controlador do sistema será efetuado por um computador ou microcontrolador que trabalham somente com amostras de informações vindos de sensores em um período de  $T$  segundos. O equivalente ZOH para o modelo de espaço-estado é calculado da mesma forma que no modelo contínuo. As matrizes  $C$  e  $D$  continuam com os mesmos valores, porém são renomeadas para  $H$  e  $J$ . As matrizes  $A$  e  $B$  são substituídas por  $\Phi$  e  $\Gamma$ , respectivamente. Para um  $T = 100\text{ms}$  tem-se:

$$\Phi = e^{AT} \quad (37)$$

$$\Gamma = \int_0^{\infty} e^{As} ds B \quad (38)$$

A partir das Eqs. 37 e 38 é possível calcular as matrizes discretizadas  $\Phi$  e  $\Gamma$ , tendo agora o modelo espaço-estado discreto representado pelas matrizes  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$  e  $J$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0.9984 & -0.0224 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 1.0035 & 0.01 \\ 0 & 0.0091 & 0.6936 & 1.0035 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0158 \\ -0.0005 \\ -0.0912 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações de espaço-estado foram modificadas obtendo-se a notação discreta com as novas matrizes calculadas por:

$$\dot{X}(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \quad (39)$$

$$Y(k) = HX(k) + JU(k) \quad (40)$$

## 2.7 Modelagem Não-Linear

Nesta Seção apresenta-se a descrição das equações da dinâmica desconsiderando as simplificações feitas pelas Eqs. 19 a 21. Esta modelagem será necessária para as simulações utilizando o controlador não-linear de *Swing-up*, apresentadas no Capítulo 3.

A partir das Eqs. de movimento 17 e 18, a seguir transcritas respectivamente, serão calculadas as matrizes do modelo não-linear do espaço-estado.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = f - b\dot{x}$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\dot{x}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta) = 0$$

Reescrevendo a Eq. 18 com  $\ddot{\theta}$  em evidência tem-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{ml(g\sin(\theta) - \dot{x}\cos(\theta))}{I + ml^2} \quad (41)$$

Substituindo a Eq. 41 na Eq. 17 e reformulando para obter-se  $\ddot{x}$  e substituindo  $\dot{x}$  da Eq. 42 na Eq. 18, tem-se as seguintes equações da dinâmica não-linear:

$$\ddot{x} = \frac{(I + ml^2)(f - b\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)) - m^2l^2g\sin(\theta)\cos(\theta)}{(I + ml^2)(M + m) - m^2l^2\cos^2(\theta)} \quad (42)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)mg\text{sen}(\theta) + bml\dot{x} \cos(\theta) - m^2l^2\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - fml\cos(\theta)}{(I + ml^2)(M + m) - m^2l^2 \cos^2(\theta)} \quad (43)$$

O sistema é escrito, de forma geral, por:

$$\dot{X} = \Psi(X, U) \quad (44)$$

$$Y = \Upsilon(X, U) \quad (45)$$

Onde  $\Psi$  e  $\Upsilon$  são funções genéricas não-lineares de  $X$  e  $U$ , logo:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(I + ml^2)(f - b\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta)) - m^2l^2g\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{(I + ml^2)(M + m) - m^2l^2 \cos^2(\theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(M + m)mg\text{sen}(\theta) + bml\dot{x} \cos(\theta) - m^2l^2\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - fml\cos(\theta)}{(I + ml^2)(M + m) - m^2l^2 \cos^2(\theta)} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \quad (47)$$

Para o cálculo das matrizes para o modelo de espaço-estado, as funções serão linearizadas localmente por  $X(k)$ , com aproximação de primeira ordem. As matrizes jacobianas,  $F$ ,  $G$ ,  $H^*$ ,  $J^*$  de  $\Psi$  e  $\Upsilon$  em relação a  $X$  e  $U$  são calculadas por:

$$F = \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (48)$$

$$G = \frac{\partial \Psi}{\partial U} \quad (49)$$

$$H^* = \frac{\partial \Upsilon}{\partial X} \quad (50)$$

$$J^* = \frac{\partial \Upsilon}{\partial U} \quad (51)$$

Como as matrizes demonstradas anteriormente dependem do estado  $X$  e da saída de

controle  $U$ , essas matrizes precisam ser recalculadas para cada interação do simulador. Resolvendo as funções não-lineares  $\Psi$  e  $Y$ , as matrizes do modelo de espaço-estado são obtidas por:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{\theta}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + ml) \\ \frac{(I + ml)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)}{0} \\ -ml \cos(\theta) \\ \frac{(I + ml)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)}{0} \end{bmatrix}$$

$$H^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$r = (I + ml)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{x}} = \frac{-(I + ml)b}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} = & \frac{((I + ml)ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - m^2 l^2 g \cos(2\theta))}{r} \\ & - \frac{(I + ml)(f - b\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)m^2 l^2 \sin(2\theta))}{r^2} \\ & + \frac{m^4 l^4 g \sin^2(2\theta)}{2r^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{\theta}} = \frac{2(I + ml)\dot{\theta} \text{sen}(\theta)}{r}$$

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{x}} = \frac{ml \cos(\theta)}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_4}{\partial \theta} &= \frac{[(M + m)mlg \cos(\theta) - bml\dot{x} \text{sen}(\theta) - m^2 l^2 \cos^2(2\theta) + fml \text{sen}(\theta)]}{r} \\ &\quad - \frac{[(M + m)mgl \text{sen}(\theta) + bml\dot{x} \cos(\theta) - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - fml \cos(\theta)]m^2 l^2 \text{sen}(2\theta)}{r^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{\theta}} = \frac{-m^2 l^2 \dot{\theta} \text{sen}(\theta)}{r}$$

As funções de  $\dot{X}$  e  $Y$  sofrem modificações devido a não linearidade do modelo, sendo descritas por:

$$\dot{X} \cong \dot{X}(k) + F(k)(X - X(k)) + G(k)(U - U(k)) \quad (52)$$

$$Y \cong Y(k) + H^*(k)(X - X(k)) + J^*(k)(U - U(k)) \quad (53)$$

Simulando o sistema para amostras entre  $k$  e  $k+1$  a saída do controlador permanece constante, logo  $(U - U(k)) = 0$ . O próximo estado  $X(k+1)$  pode ser calculado a partir de  $X(k)$ ,  $U(k)$ ,  $\Phi(k)$  e  $\Gamma_0(k)$  pela Eq. 56:

$$\dot{X} - \dot{X}(k) = F(k)(X - X(k)) \quad (54)$$

$$\dot{X} = F(k)X + [\Psi(X(k), U(k)) - F(k)X(k)] \quad (55)$$

$$X(k+1) = \Phi^* X(k) + \Gamma_0[\Psi(X(k), U(k))] \quad (56)$$

Onde :  $\Phi^* = e^{FT}$  e  $\Gamma_0 = \int_0^\infty e^{Fs} ds$

## Capítulo 3 Controle

Neste Capítulo são apresentados três controles distintos que foram simulados e aplicados na bancada experimental. Para verificar o funcionamento de qualquer um desses controles é necessário, previamente, analisar a controlabilidade e observabilidade do sistema. Desta forma, é demonstrado o equacionamento de cada controle para estabilizar o sistema com a haste para cima.

### 3.1 Controlabilidade

Controlabilidade é uma importante propriedade em engenharia de controle. A partir da verificação de controlabilidade do sistema é possível determinar se os estados tem a capacidade de serem controlados pelos atuadores. Um sistema é dito controlável quando for possível transferir o sistema de um estado arbitrário para um estado desejado. A importância dessa análise deve-se ao fato de que a solução para um problema de controle ótimo não existir para sistemas não controláveis. Para a derivação da matriz de controlabilidade considera-se, genericamente, um sistema de controle discreto por:

$$x((k + 1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT) \quad (57)$$

Onde:

- $x(kT)$  = vetor de estados na amostra k
- $u(kT)$  = sinal de controle na amostra k
- $\Phi$  = matriz de estado discreta
- $\Gamma$  = matriz de entrada discreta
- $T$  = período de amostra

A solução para a Eq. 57 do sistema de controle discreto é dado por:

$$x(nT) = \Phi x(0) + \sum[\Phi^{n-1} \Gamma u(n-1)T] \quad (58)$$

A partir desta solução obtém-se a Eq. 59

$$x(nT) - \Phi^n x(0) = [\Phi \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \Phi^3\Gamma] \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (59)$$

Onde  $[\Phi \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \Phi^3\Gamma]$  é chamada de matriz de controlabilidade. Se o *rank* desta matriz for igual ao número de colunas  $n$ , então para um estado arbitrário existe um sequência de sinais de controle  $u$  que satisfaz a Eq. 57. Para o sistema deste trabalho com as matrizes de estado  $\Phi$  e matriz de entrada  $\Gamma$  calcula-se a matriz de controlabilidade  $C_{contr}$  por:

$$C_{contr} = [\Phi \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \Phi^3\Gamma]$$

$$C_{contr} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0003 & 0.0004 & 0.0006 \\ 0.0158 & 0.0158 & 0.0158 & 0.0158 \\ -0.0005 & -0.0014 & -0.0023 & -0.0033 \\ -0.0912 & -0.0917 & -0.0929 & -0.0947 \end{bmatrix}$$

Nota-se que o valor ( $rank(C_{contr})$ ), isto é, o número de colunas linearmente independentes da matriz  $C_{contr}$ , possui o mesmo valor que o número de estados do sistema. Isto prova que o sistema é completamente controlável.

### 3.2 Observabilidade

A observabilidade também é, junto com a controlabilidade, uma propriedade importante para determinar características do sistema. Verificando a observabilidade do sistema é possível concluir se todas as variáveis de estado do sistema podem ser estimadas. Estimadores são interessantes pois mesmo havendo variáveis de estado que não podem ser medidas diretamente, ainda assim, é possível obter todas as variáveis de estado. Para derivar a matriz de observabilidade considera-se um sistema de controle discretizado definido, genericamente, por:

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) \quad (60)$$

$$y(kT) = H x(kT) \quad (61)$$

Um sistema é dito completamente observável se todo estado  $x(0)$  pode ser determinado pelas observações  $y(kT)$  com um número finito de amostras. A solução para a Eq. 60 é descrita por:

$$x((k+1)T) = \Phi^k x(kT) \quad (62)$$

A partir desta solução obtém-se:

$$y(kT) = H \Phi^k x(0) \quad (63)$$

Para determinar  $x_1(0), x_2(0), x_3(0), \dots, x_n(0)$  a partir das observações  $y(0), y(T), y(2T), \dots, y(nT)$  de forma única é necessário escrever  $n$  equações linearmente independentes tais que:

$$y(0) = H x(0)$$

$$y(T) = H \Phi x(0)$$

....

$$y((n-1)T) = H \Phi^{n-1} x(0)$$

A matriz  $O_b = [H \quad H\Phi \quad H\Phi^2 \quad H\Phi^3]^T$  é chamada de matriz de observabilidade e assim como a matriz de controlabilidade é analisado seu *rank* para determinar se o sistema é completamente observado. A matriz de observabilidade do sistema do pêndulo invertido é calculada a seguir:

$$O_b = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \\ H\Phi^3 \end{bmatrix}$$

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0.01 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0035 & 0.01 \\ 1 & 0.02 & -0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 1.0139 & 0.0201 \\ 1 & 0.0299 & -0.001 & 0 \\ 0 & 0.0004 & 1.0313 & 0.0303 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que  $rank(O_b)$  é igual ao número de variáveis de estado, logo todas as variáveis são observáveis. Isto é importante já que o pêndulo em questão não possui sensores para medir  $\dot{x}$  e  $\dot{\theta}$ . Sendo assim, é necessário estimar essas variáveis de estado para se obter o modelo completo.

### 3.3 PID

O controlador PID funciona a partir do erro  $e(t)$  entre os valores medidos pelos sensores e o valor de referência do sistema. Para cada grau de liberdade, até três constantes ( $K_p, K_d,$

$K_i$ ) são adotadas como ganhos, associadas às parcelas proporcional, derivativa e integral, respectivamente. Configurando essas constantes é possível controlar o sistema em questão. Abaixo é apresentada a função de controle do PID para um erro  $e(t)$ :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t') dt' + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (64)$$

A resposta proporcional é dependente somente da diferença entre a variável do processo e o valor de referência. O ganho proporcional  $K_p$  determina a taxa de saída para o sinal do erro.

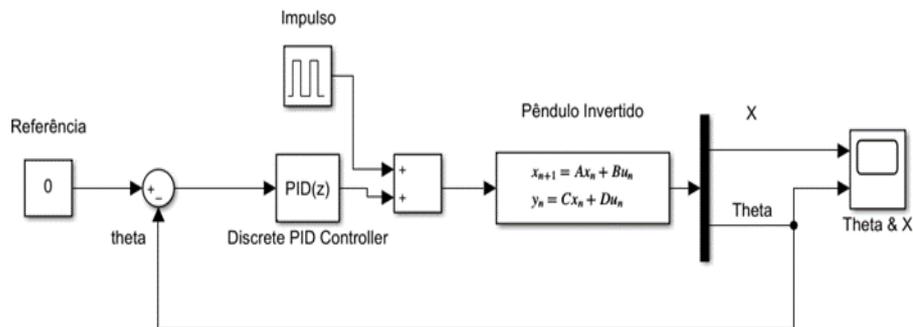
A componente derivativa tem como objetivo diminuir a resposta do controlador quando a variável de controle aumenta rapidamente, controlando a taxa de variação desta variável. Para altos valores de  $K_d$  o controlador reage mais fortemente à mudanças do erro  $e(t)$ , aumentando a velocidade de resposta do controlador.

A parcela integral soma os erros ao longo tempo. Ela é utilizada para conduzir o sistema do estado atual para o estado desejado em regime permanente ou "Steady-State". *Windup* é o nome do fenômeno quando a ação do ganho  $K_i$  satura a resposta do integrador, sendo assim, necessário utilizar um algoritmo de anti-*windup*.

Foram desenvolvidos dois *designs* diferentes envolvendo o controlador PID para o presente trabalho: (i) utilizando somente a variável do ângulo da haste como *feedback* para o sistema e (ii) utilizando uma combinação de dois controladores PID com duas variáveis de estado para realimentação, a posição da base e o ângulo da haste.

### 3.3.1 PID com *feedback* $\theta$

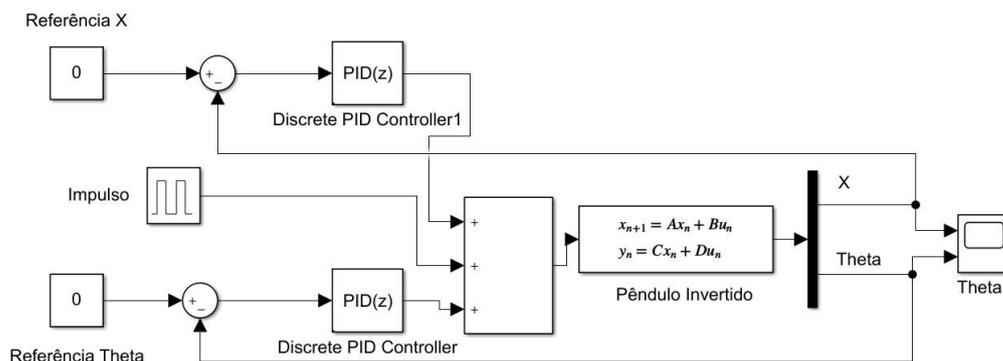
O primeiro controlador proposto para controlar a haste do pêndulo invertido utiliza somente um controlador PID, que controla o erro entre uma referência desejada do ângulo da haste com a medição do ângulo provida pelos sensores. Adicionado ao resultado do controle, um impulso é aplicado para desestabilizar o sistema e para que o controlador atue em recuperar a estabilidade. Essa força do atuador é enviada para o modelo discreto de espaço-estado calculado com as matrizes  $\Phi, \Gamma, H, J$ , descritas na Seção 2.6. Na Figura 6 é apresentado o diagrama de blocos do controlador PID com  $\theta$  sendo a única variável de estado realimentada ao sistema.



**Figura 6** - Diagrama de blocos controlador PID com *feedback*  $\theta$

### 3.3.2 PID com *feedback* $\theta$ e $x$

O segundo *design* utiliza dois controladores PID independentes. Um controlador para o ângulo  $\theta$  e outro para a posição  $x$ . O resultado desses dois controladores são somados, junto a um impulso para simular um distúrbio no sistema, para que o mesmo saia de uma posição estável. Essa força é enviada para o mesmo modelo de espaço-estado mencionado anteriormente, na Seção 2.6. A Figura 7 mostra o diagrama de blocos do controlador descrito.



**Figura 7** - Diagrama de blocos controlador PID com *feedback*  $\theta$  e  $x$

### 3.3.3 Calibragem de Ganhos

Para a calibragem dos ganhos  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$  dos controladores PID, foi utilizado o método de *Pole Placement* que consiste em modificar os polos do sistema para polos desejados arbitrariamente.

Para o ajuste dos ganhos do primeiro *design* foi aplicado o método iterativo Ziegler-Nichols (ZN). O procedimento tem, basicamente, quatro etapas. O primeiro passo consiste

em inicializar os ganhos  $K_i = K_d = 0$  e  $K_p$  sendo um valor pequeno. A seguir,  $K_p$  é incrementado gradativamente até que o sistema apresente comportamento oscilatório puro. Na sequência, define-se  $K_u = K_p$  e mede-se o período oscilatório  $T_u$ . Por último, consulta-se a Tabela 2 para obtenção dos parâmetros do controlador PID, contida na primeira linha.

CONTROLE	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$K_i$	$K_d$
PID	$0.6 K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$	$1.2 K_u/T_u$	$0.075 K_u T_u$
P	$0.5 K_u$	-	-	-	-
PI	$0.45 K_u$	$T_u/1.2$	-	$0.54 K_u/T_u$	-
PD	$0.8 K_u$	-	$T_u/8$	-	$0.1 K_u T_u$

**Tabela 2** – Parâmetros ZN

A formulação de Ackermann, apresentada na Eq. 65, foi utilizada no segundo *design*, para posicionar os polos de malha fechada nos eventuais polos desejados. Isto é, que os polos do sistema contenham os autovalores  $(\Phi - \Gamma K^*)$ .

$$K^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] C_{contr}^{-1} \alpha_c(\Phi) \quad (65)$$

Onde o termo  $\alpha_c(z)$  é o polinômio cujas raízes são os polos desejados sendo  $\alpha_c(\Phi)$  é o valor de  $\alpha_c(z)$  quando  $z = \Phi$ . Além disso, a resposta de  $K^*$  é interpretada por  $[K_p^x \quad K_d^x \quad K_p^\theta \quad K_d^\theta]$  e  $K_i^x = K_i^\theta = 0$ .

### 3.4 LQR

Nesta Seção, é realizado o projeto do controlador LQR para estabilizar a posição da base e da haste do sistema. O controlador LQR é um método de controle ótimo baseado na teoria de controle moderno capaz de controlar todas as variáveis de estado do sistema e permitir maior robustez e confiabilidade ao controle.

Para se obter a solução para um problema de otimização deseja-se encontrar um vetor de controle  $u$  que possa guiar o estado atual do sistema para um estado desejado, de tal forma que minimize função de custo quadrática linear na sua forma discreta, mostrada na Eq. 66.

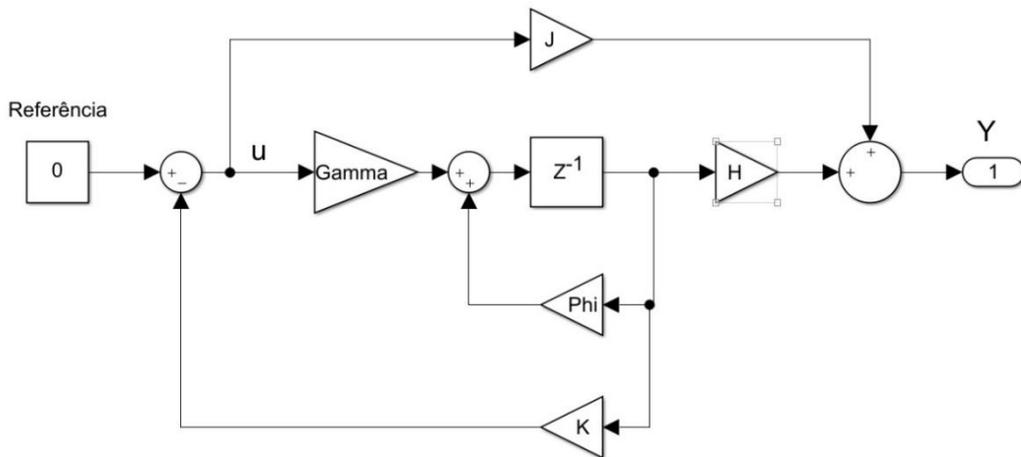
$$J_{LQR} = \frac{1}{2} \sum [X(k)^T Q_1 X(k) + U(k)^T Q_2 U(k)] \quad (66)$$

Onde  $Q_1$  e  $Q_2$  são matrizes de peso simétricas, positivas e semi-definidas. Por meio do

índice de performance  $J$ , Eq. 66, pode-se demonstrar uma lei de controle ótima para um controlador linear com *feedback* como:

$$U(k) = -K X(k) \quad (67)$$

Onde  $K$ , para esta aplicação com somente um atuador, é um vetor de ganhos desconhecido a ser definido. A Figura 8 ilustra o diagrama de blocos do modelo de espaço-estado com realimentação de estados.



**Figura 8** - Representação do modelo de espaço-estado em malha fechada

Para obter o ganho ótimo do controlador  $K$  foram realizados os seguintes procedimentos. Primeiramente, o problema exige que se minimize a Eq. 66, dada a restrição do modelo linear de espaço-estado:

$$\dot{X}(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \quad (68)$$

Assumindo  $\lambda(k+1)$  sendo um vetor multiplicador de Lagrange e substituindo a função de custo na Eq. 66, obtém-se:

$$J_{LQR}(X, U, \lambda) = \frac{1}{2} \sum [X(k)^T Q_1 X(k) + U(k)^T Q_2 U(k) + \lambda(k+1)^T (-X(k+1) + \Phi X(k) + \Gamma U(k))] \quad (69)$$

Derivando parcialmente a função de custo na Eq. 69, em relação ao multiplicador  $\lambda(k+1)$ ,  $X(k)$  e  $U(k)$  resulta:

$$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial X(k)} = X(k)^T Q_1 - \lambda(k)^T + \lambda(k+1)^T \Phi = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial U(k)} = U(k)^T Q_2 + \lambda(k+1)^T \Gamma = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial \lambda(k+1)} = \frac{1}{2} [-X(k+1)^T + \Phi X(k) + \Gamma U(k)]^T = 0 \quad (72)$$

Onde Eq. 70 é chamada de equação adjunta, a Eq. 71 é a equação de controle e a Eq. 72 é a de equação de estado.

Definindo  $S(k)$  como  $\lambda(k) = S(k) X(k)$  a equação de controle  $\frac{\partial J_{LQR}}{\partial U(k)}$  resulta:

$$U(k)^T Q_2 = -\lambda(k+1)^T \Gamma \quad (73)$$

$$Q_2 U(k) = -\Gamma^T S(k+1) X(k+1) \quad (74)$$

$$Q_2 U(k) = -\Gamma^T S(k+1) [\Phi X(k) + \Gamma U(k)] \quad (75)$$

$$U(k) = [Q_2 + \Gamma S(k+1) \Gamma]^{-1} \Gamma S(k+1) \Phi X(k) = -K(k) X(k) \quad (76)$$

Como a matriz  $Q_2$  é simétrica, e utilizando-se a propriedade  $Q_2^T = Q_2$ , a equação adjunta

$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial X(k)}$  resulta na Eq.79:

$$\lambda(k) = Q_1 X(k) + \Phi^T \lambda(k+1) \quad (77)$$

$$S(k) X(k) = Q_1 X(k) + \Phi^T S(k+1) X(k+1) \quad (78)$$

$$S(k) X(k) = Q_1 X(k) + \Phi^T S(k+1) [\Phi X(k) + \Gamma U(k)] \quad (79)$$

Substituindo a lei de controle, Eq. 67, na equação adjunta  $\frac{\partial J_{LQR}}{\partial X(k)}$ , Eq. 79, e isolando  $X(k)$

tem-se:

$$S(k)X(k) = Q_1X(k) + \Phi^T S(k+1)\Phi X(k) - \Phi^T S(k+1)\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1)\Phi X(k) \quad (80)$$

$$S(k) - Q_1 - \Phi^T S(k+1)\Phi + \Phi^T S(k+1)\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1)\Phi X(k) = 0 \quad (81)$$

O coeficiente precisa ser nulo para validar Eq. 81 para qualquer  $X(k)$  gerando assim, a equação de recorrência reversa:

$$S(k) = Q_1 + \Phi^T S(k+1) - S(k+1)\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1)\Phi \quad (82)$$

Como o problema é um caso regulador, o somatório de 0 a  $\infty$  para um horizonte de tempo finito,  $J$  é minimizado para  $U(N) = 0$ , pois  $U(N)$  influencia somente  $X(k < N)$  não afetando o resultado do índice de performance. Portanto, a equação de controle, Eq. 71, resulta em:

$$\lambda(N+1) = 0 \quad (83)$$

$$\lambda(N) = Q_1X(N) = S(N)X(N) \quad (84)$$

$$S(N) = Q_1 \quad (85)$$

$S(N)$  é calculado recursivamente desde  $k=(N-1)$  até  $k=0$  utilizando a Eq. 82. Assim, a lei de controle ótimo fica com ganho variável:

$$K(k) = [Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1)\Phi \quad (86)$$

Para o problema regulador, onde  $N$  tende a infinito,  $S(k)$  tende a matriz constante  $S$ .

$$S = Q_1 + \Phi^T S - S\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S\Gamma]^{-1}\Gamma^T S\Phi \quad (87)$$

Onde  $S$  é a solução da equação discreta de Riccati e o ganho ótimo do controle passa a ser contante também, conforme Eq. 88.

$$K = [Q_2 + \Gamma^T S\Gamma]^{-1}\Gamma^T S\Phi \quad (88)$$

Aplicando as matrizes de espaço-estado  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$  e  $J$  com as seguintes matrizes arbitrárias  $Q1$  e  $Q2$ . O critério de escolha para otimização dos ganhos considera somente o controlador de posição, desconsiderando, portanto, os erros provenientes de  $\dot{x}$  e  $\dot{\theta}$ , que só seriam

relevantes para um controle de velocidade. Como deseja-se minimizar os erros de estado, a matrix  $Q_1$ , que penaliza esses erros deve ser maior que o termo  $Q_2$ , que por sua vez, penaliza os atuadores. Os ganhos de  $Q_1$  e  $Q_2$  foram obtidos empiricamente, analisando a convergência da resposta do sistema.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = 1$$

$$K = [-4.0443 \quad -3.5444 \quad -21.9837 \quad -2.7165]$$

### 3.4.1 Entrada de Referência

Para posicionar a base em uma posição diferente de zero é necessário calcular a referência de entrada  $U_{ref}$ , onde define-se:

$$U = U_{ref} - KX \quad (89)$$

$$X(k+1) = (\Phi - \Gamma K)X(k) + \Gamma U_{ref}(k) \quad (90)$$

Para um estado desejado  $X_d$ , em regime permanente:

$$X(k+1) \cong X(k) \cong X_d \quad (91)$$

$$X_d \cong (\Phi - \Gamma K)X_d + \Gamma U_{ref}(k) \quad (92)$$

$$\Gamma U_{ref} \cong (I_D - \Phi + \Gamma K)X_d \quad (93)$$

$$U_{ref} \cong (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T (I_D - \Phi)X_d + KX_d \quad (94)$$

$U_{ref}$  pode ser incorporado à nova lei de controle, Eq. 89, contanto que o primeiro termo seja nulo para garantir que o estado  $X$  do sistema se direcione para  $X_d$  e não para outro



$$P = \begin{bmatrix} E[(A_1 - \mu_1)^2] & E[(A_1 - \mu_1)(A_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(A_1 - \mu_1)(A_n - \mu_n)] \\ E[(A_2 - \mu_2)(A_1 - \mu_1)] & E[(A_2 - \mu_2)^2] & \cdots & E[(A_2 - \mu_2)(A_n - \mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(A_n - \mu_n)(A_1 - \mu_1)] & E[(A_n - \mu_n)(A_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(A_n - \mu_n)^2] \end{bmatrix}$$

Conhecendo a estatística dos erros dos sensores e de eventuais perturbações do sistema, é possível calcular matrizes  $Lp$  otimizadas por Kalman. O filtro atualiza a estimativa das variáveis de estado  $\bar{X}(k)$  predita no último *loop* computacional, obtendo um estado corrigido  $\hat{X}(k)$  a partir da leitura dos sensores  $Y(k)$ . A lei de controle  $U(k)$ , Eq. 96, é calculada a partir da estimativa corrigida  $\hat{X}(k)$ . Por fim,  $\hat{X}(k)$  e  $U(k)$  calculam a próxima estimativa  $\bar{X}(k)$ . O filtro é baseado em um algoritmo recursivo. Este pode ser executado em tempo real utilizando somente as medições de entrada atuais, o último estado calculado e a matriz de covariância  $P$ .

Como existem erros e perturbações dos sensores, o filtro de Kalman precisa também atualizar a matriz de covariância  $P$  do estado, que mede a precisão da estimativa. Assim, o filtro de Kalman assume:

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) + \Gamma_w w \quad (97)$$

$$Y(k) = HX(k) + v \quad (98)$$

Onde:

- $w$  vetor de  $nx1$  de perturbações aleatórias com matriz de covariância  $W$
- $v$  vetor de  $mx1$  de ruídos dos sensores com matriz de covariância  $V$

Assume-se que não há perturbações nos sensores encoders, logo a parcela  $\Gamma_w w$  pode ser desconsiderada. Além disso, a matriz  $\Gamma_w$  possui os mesmo valores que  $\Gamma$ .

Pode-se calcular a matriz de ruído  $V$  de um sensor com resolução de  $q=13$  bits com probabilidade uniforme entre  $\frac{-q}{2}$  e  $\frac{q}{2}$  por:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{x^2}{q} dx = \frac{q^2}{12} \quad (99)$$

$$V = \frac{13^2}{12} = 14.08 \quad (100)$$

$$V = \begin{bmatrix} 14.08 & 0 \\ 0 & 14.08 \end{bmatrix}$$

Com matrizes  $V$  e  $W$  calculadas, pode-se definir estimativas preditas  $\bar{P}$  e corrigidas  $\hat{P}$  da matriz de covariância  $P$  que serão atualizadas a cada iteração computacional do filtro por:

$$\bar{P} = E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] \quad (101)$$

$$\hat{P} = E[(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T] \quad (102)$$

Conhecendo  $\bar{P}$  previsto na amostra anterior, utilizando a covariância da resposta dos sensores como a matriz de ruído  $V$  e pode-se definir a equação do estado corrigido por:

$$\hat{X} := (I_D - L_c H) \bar{X}(k) + L_c Y(k) \quad (103)$$

Temos a equação da estimativa corrigida da matriz de covariância  $P$ :

$$\hat{P} = (I_D - L_c H) \bar{P}(k) (I_D - L_c H)^T + L_c V L_c^T \quad (104)$$

Assumindo que não há ruídos no atuador, é possível obter a expressão para próxima estimativa predita  $\bar{P}(k+1)$  a partir da estimativa atual corrigida  $\hat{P}(k)$ :

$$\bar{P} = \Phi \hat{P}(k) \Phi^T + \Gamma_w W \Gamma_w^T \quad (105)$$

O objetivo do filtro de Kalman é encontrar  $L_c$  para minimizar o erro médio quadrático:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{X} - X_i)^2 = E \left[ (\hat{X} - X)^T (\hat{X} - X) \right] = \text{traço}(\hat{P}) \quad (106)$$

Expande-se a equação de  $\hat{P}(k)$  obtendo assim:

$$\hat{P} := \bar{P}(k) - L_c H \bar{P}(k) - \bar{P}(k) H^T L_c^T + L_c H \bar{P}(k) H^T L_c^T + L_c V L_c^T \quad (107)$$

O ganho ideal  $L_c$  para minimizar o erro é apresentado na Eq. 109:

$$\frac{\partial \text{traço}(\hat{P}(k))}{\partial L_c} = 0 \rightarrow -2\bar{P}(k)H^T + 2L_c(H\bar{P}(k)H^T + V) = 0 \quad (108)$$

$$L_c := \bar{P}(k)H^T(H\bar{P}(k)H^T + V)^{-1} \quad (109)$$

Para este ganho,  $\hat{P}(k)$  simplifica para:

$$\hat{P}(k) := (I_D - L_c H) \bar{P}(k) \quad (110)$$

O controlador LQR com filtro de Kalman pode-se resumir, portanto, pelas seguintes etapas:

- Medições dos sensores, Eq. 98:

$$Y(k) = H X(k) + v$$

- Cálculo do ganho ótimo do estimador de Kalman, Eq.109:

$$L_c := \bar{P}(k) H^T (H \bar{P}(k) H^T + V)^{-1}$$

- Correção do último estado predito Eq. 103 e sua estimativa predita, Eq. 110, respectivamente:

$$\hat{X}(k) := \bar{X}(k) + L_c (Y(k) - H X(k))$$

$$\hat{P} := (I_D - L_c H) \bar{P}(k)$$

- Cálculo da resposta do controlador  $U(k)$ , a partir da estimativa corrigida, Eq. 89:

$$U(k) := U_{ref} - K \hat{X}(k)$$

- Cálculo do novo estado predito, estimativa predito e simulação do próximo estado são calculados respectivamente por:

$$\bar{X}(k+1) := \Phi \hat{X}(k) + \Gamma U(k) \quad (111)$$

$$\hat{P}(k+1) := \Phi \hat{P}(k) \Phi^T + \Gamma_w W \Gamma_w^T \quad (112)$$

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) + \Gamma_w w \quad (113)$$

### 3.5 Controle Não-Linear de *Swing-up*

Nesta Seção é descrita o controlador não-linear para controle da haste do pêndulo invertido. Nesta configuração, o pêndulo começa com sua posição inicial com a haste voltada para baixo e tem como objetivo estabilizar-se com a haste para cima. Para isto, é necessário modificar as equações linearizadas da dinâmica do sistema, descritas nas Eqs. 22 e 23, pois

para ângulos da haste fora da região linear as simplificações descritas nas Eqs. 19 a 21 não são mais válidas e os controladores descritos anteriormente não são capazes de controlar o sistema.

A técnica proposta para o controle não-linear se chama *energy shaping* (SINGH). Esse método consiste em modelar e controlar a energia total do sistema  $E$ . A energia total é calculada pela soma da energia cinética  $E_k$  com a energia potencial gravitacional  $E_u$ .

$$E_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M + m & m l \cos(\theta) \\ m l \cos(\theta) & I + m l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$E_u = m g l \cos(\theta) \quad (115)$$

Para obter o equilíbrio o pêndulo em  $\theta = 0$  com velocidades nulas, isto é,  $E_k = 0$ , a energia desejada  $E_d$  total precisa ser:

$$E_d = m g l \cos(0) = m g l \quad (116)$$

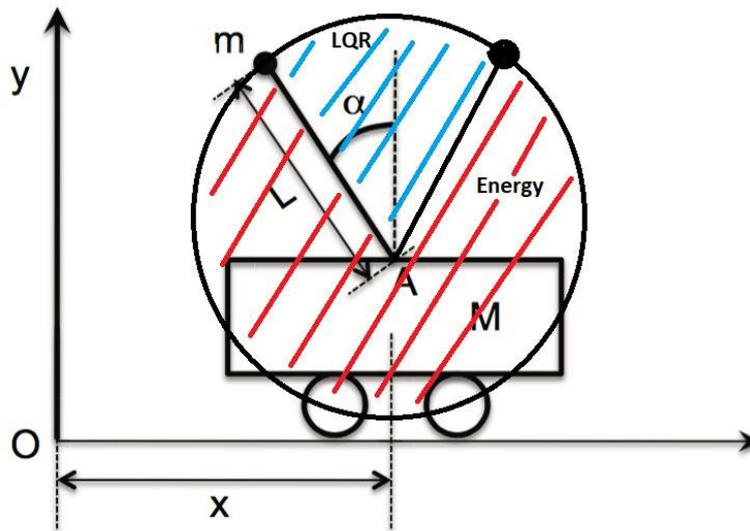
Uma condição para o controlador é igualar a energia total do sistema à energia desejada  $E = E_d$ , isto é, o controlador precisa minimizar o erro de  $(E_d - E)$ , onde  $E$  é descrito pela Eq. 117.

$$E = \frac{1}{2} \left[ (M + m) \dot{x}^2 + (I + m l^2) \dot{\theta}^2 + 2 m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) \right] + m g l \cos(\theta) \quad (117)$$

Para estimular o pêndulo, aumentando a energia do sistema, é adotada uma estratégia empírica para forçar a base no sentido contrário da velocidade relativa entre base e haste. É proposto uma lei de controle não-linear para aumentar a energia do pêndulo se  $E < E_d$ . A lei de controle é apresentada na Eq. 118.

$$U(k) := -K_E [E_d - \hat{E}(k)] \text{sign} \left( \hat{\theta}(k) \cos(\hat{\theta}(k)) \right) - K_B \hat{x}(k)^{11} \quad (118)$$

Onde  $K_E$  é um ganho proporcional ajustável, *sign* é uma função que retorna o sinal de  $\hat{\theta} \cos(\hat{\theta})$ . O termo não-linear  $-K_B \hat{x}(k)^{11}$  é adicionado na equação para evitar que a base saia de sua faixa de trabalho. O alto expoente é utilizado para que o termo seja desprezível em sua faixa de trabalho, exceto quando a base estiver muito próxima das bordas. O controlador não-linear proposto é suficiente para erguer o pendulo de sua posição inicial com a haste para baixo, porém não é suficiente para garantir estabilidade ao atingir ( $\theta=0$ ). Desta forma, troca-se a lei de controle para um controlador LQR, apresentado na Seção 3.4, quando o pêndulo estiver próximo de ( $\theta = 0$ ). A Figura 10 a seguir ilustra a área de atuação de cada controlador.



**Figura 10** - Representação gráfica do funcionamento do controlador não-linear

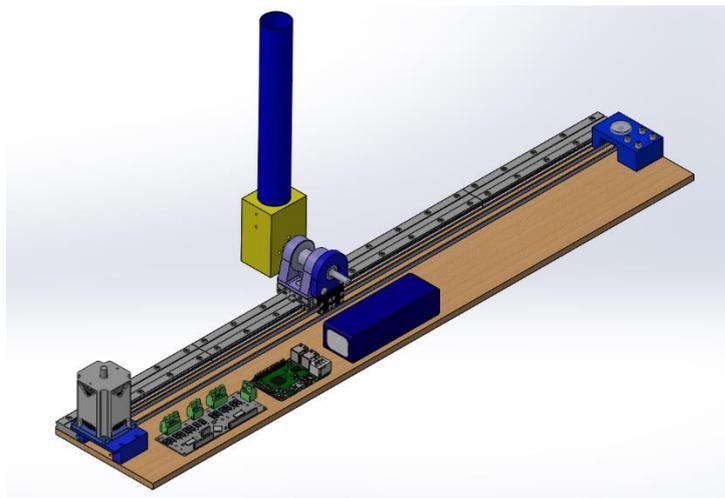
Outro detalhe importante para o funcionamento deste controlador é a conversão do ângulo da haste  $\theta$  para permanecer na faixa  $-\pi < \theta < \pi$ , permitindo assim, a estabilidade do sistema mesmo se a haste der uma volta completa.

## Capítulo 4 Projeto do Pêndulo

Neste Capítulo são apresentados os subsistemas que, em conjunto, permitem que o pêndulo invertido seja controlado. O dispositivo físico foi projetado com componentes modelados especificamente para a construção da bancada, visando maior robustez mecânica contra os efeitos inerciais do sistema.

### 4.1 Desenho Técnico

A bancada foi projetada com o auxílio do *software* de CAD, *SOLIDWORKS*, que consiste em um ambiente virtual para a modelagem de peças e montagens, a partir das especificações do usuário. Desta forma, na Figura 11 é ilustrada a montagem final do pêndulo e bancada. Foram utilizados diversos materiais no projeto, tais como: madeira, plástico, alumínio e aço.



**Figura 11** – Montagem da bancada em *SOLIDWORKS*

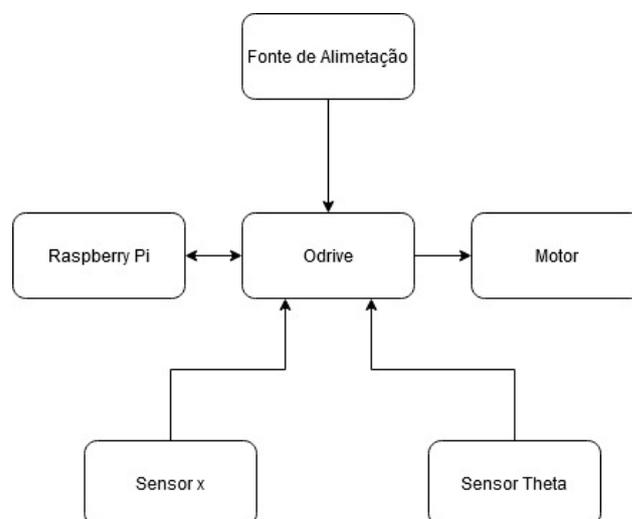
Para cada material empregado foram utilizados processos distintos de fabricação tais como:

- Para a fundação da estrutura, a madeira foi cortada por impressora laser, concedendo alta precisão nas medidas;
- As peças em plástico foram fabricadas por impressora 3D, que permitiu a criação de modelos complexos e de forma rápida;

- O eixo de acoplamento, entre a base e a haste, foi fabricado em alumínio usinado por torno mecânico, e
- A guia linear da base foi adquirida online, no site da *McMaster-CARR*.

## 4.2 Hardware Eletrônico

O aparato eletrônico para este projeto consiste em 4 módulos. O módulo de alimentação para energizar todos os componentes, o módulo de sensores que faz a leitura do deslocamento da base e da posição angular da haste, o módulo do controlador, que é uma combinação entre um *Raspberry Pi 3B+* e um driver de motor da marca Odrive, onde se faz o processamento de dados dos sensores para a malha fechada de controle e obtém-se o sinal de saída para o último módulo, que é o atuador do sistema. Na Figura 12 é observado o esquema simplificado do módulo eletrônico.



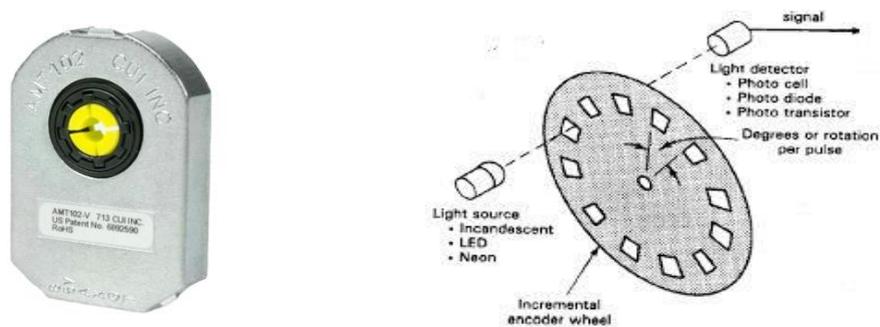
**Figura 12** – Esquemático da eletrônica

### 4.2.1 Módulo de Alimentação

Para a alimentação dos componentes do sistema é utilizado um conversor AC-DC com valor variável de saída, configurado para 48V e uma corrente elétrica de no máximo 6A. O sistema também admite como fonte de alimentação baterias que tenham essas especificações de tensão e corrente elétrica. Este conversor alimenta o driver de motor Odrive que, por sua vez, também converte essa tensão elétrica para alimentar os sensores. Junto ao conversor tem-se uma fonte separada para o *Raspberry Pi 3B+*. Essa separação entre fontes é necessária para evitar que picos de tensão e corrente elétrica danifiquem o circuito lógico do sistema.

### 4.2.2 Módulo de Sensores

Para medir a posição da base e o ângulo da haste, utilizou-se sensores *encoders* incrementais com resolução de 13 bits, modelo CUI AMT102-V, como demonstrado na Figura 13a. Esse sensor funciona com um emissor e receptor infravermelho e um disco com 8192 furos. Cada fresta que os sensores infravermelhos capturam simboliza uma rotação de 0.0439 graus. A Figura 13b mostra com mais detalhes o funcionamento do sensor.



(a) Sensor *encoder* CUI AMT102-V,

(b) Funcionamento de um *encoder*

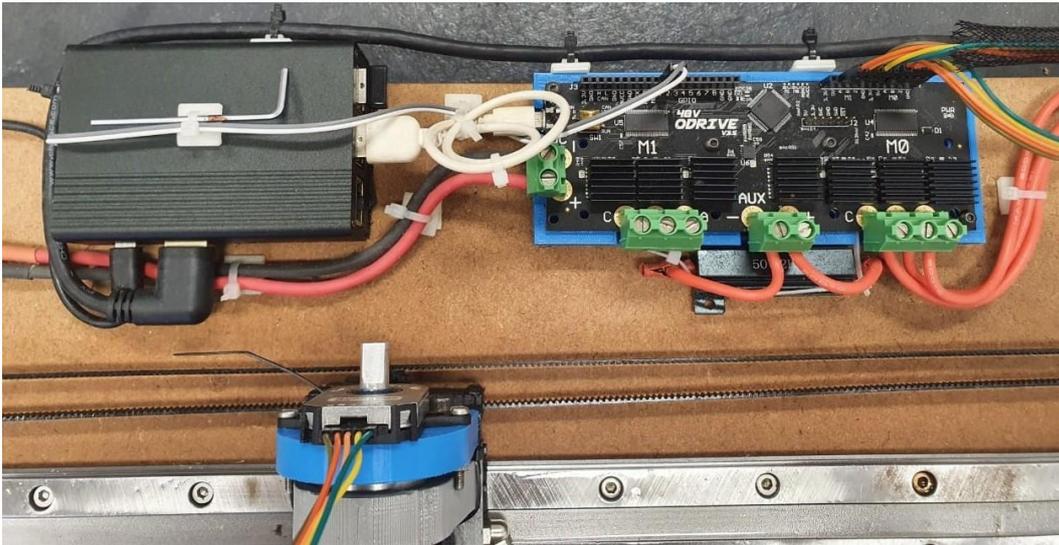
**Figura 13** – Sensor

Os sensores foram posicionados no eixo do motor de atuação do sistema para medir a posição da base e outro sensor de mesmo modelo foi posicionado no eixo rotativo do pêndulo invertido para a medição do ângulo associado.

### 4.2.3 Módulo Controlador

Para controlar o sistema, o módulo controlador é baseado em uma placa de desenvolvimento *RaspberryPi 3B+*, um poderoso microprocessador com sistema operacional *Debian Linux*. O código para o controle do pêndulo real foi feito utilizando-se a linguagem de programação *Python*. Conectado ao *Raspberry Pi* está um driver de motor da marca Odrive. Esse drive proporciona algumas vantagens para o sistema, como a leitura dos sensores com filtro de *Kalman* e estimadores, que foram discutidos no Capítulo 3. Além disso, a placa acompanha parâmetros de segurança para não danificar o motor por alta tensão ou corrente elétrica. O driver Odrive recebe a informação dos dois sensores e se comunica com o *Raspberry Pi* por meio de uma comunicação serial. O microprocessador, ao receber os dados, alimenta a malha de controle e calcula o resultado. Esse resultado é então enviado novamente para o Odrive, que converte o sinal em uma tensão elétrica fazendo girar o motor e, com isso, gerar uma força que move a base pelo seu curso e, então, o ciclo se repete com os novos estados do sistema. Na Figura 14 observa-se o módulo

controlador completo, que utiliza o driver Odrive e a placa *Raspberry Pi*, montados na bancada experimental.



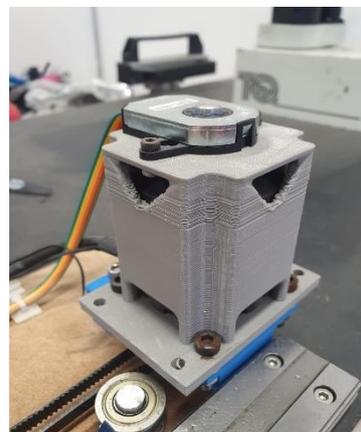
**Figura 14** – Módulo controlador

#### 4.2.4 Módulo de Atuação

Para a atuação do pêndulo invertido foi utilizado um motor DC, sem escovas, da marca Odrive modelo D6374 150kv, como mostrado na Figura 15a. O motor possui uma polia que acoplada a uma correia faz a transmissão do torque do atuador para a movimentação da base pelo seu trilho. A Figura 15b mostra o motor montado na bancada experimental com detalhes da devida transmissão e sensoriamento do sistema.



**(a)** Motor modelo D6374 150kv

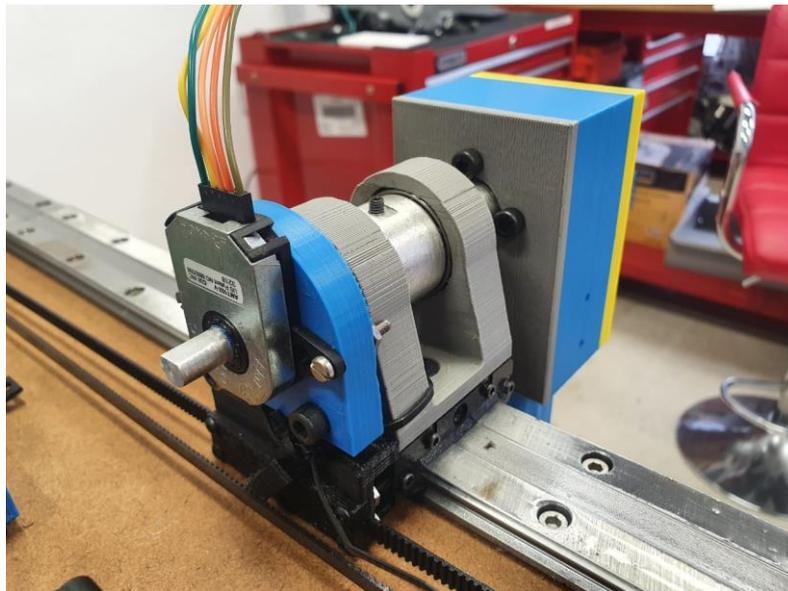


**(b)** Atuador na Bancada Experimental

**Figura 15** – Atuador

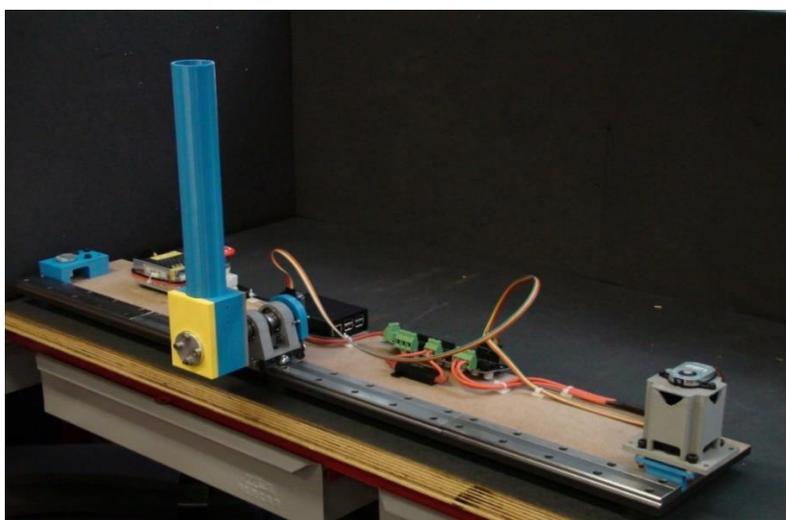
### 4.3 Acoplamento Mecânico

O projeto proposto é um pêndulo sub-atuado, não possuindo, portanto, um atuador na junta entre base e haste. Desta forma, o acoplamento foi projetado com um eixo biapoiado por rolamentos que conectam a base com a haste de forma passiva, permitindo, assim, a modelagem do pêndulo com dois graus de liberdade. A Figura 16 ilustra o acoplamento descrito, bem como a localização do sensor que mede o ângulo da haste, a transmissão por correias e a haste voltada para baixo.



**Figura 16** - Acoplamento mecânico

Reunindo todas as especificações do projeto, a bancada experimental completa pode ser vista na Figura 17.



**Figura 17** – Bancada experimental

## Capítulo 5 Resultados

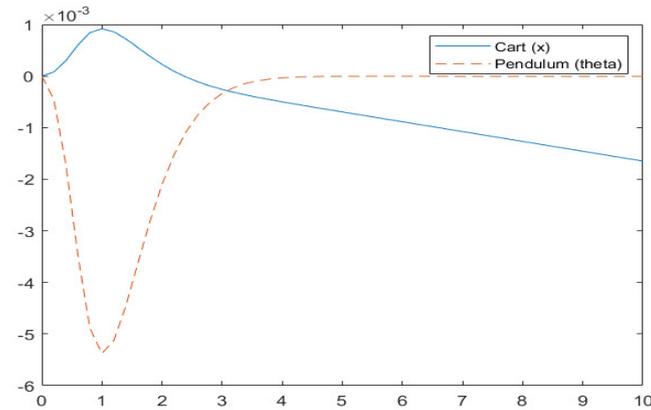
Neste Capítulo são apresentados os resultados simulados, utilizando a modelagem matemática apresentada no Capítulo 2 e as técnicas de controle descritas no Capítulo 3. Além disso, são mostrados os resultados experimentais, comparativamente às simulações de cada controlador. Os dados obtidos foram analisados com enfoque nas características de robustez e tempo de estabilidade.

### 5.1 Resultados PID

Como apresentado na Seção 3.3, serão comentados a seguir, e respectivamente, os resultados obtidos para as simulações e bancada experimental para os dois *designs* propostos. Vale ressaltar que não foi utilizado o filtro de Kalman para os controladores PID.

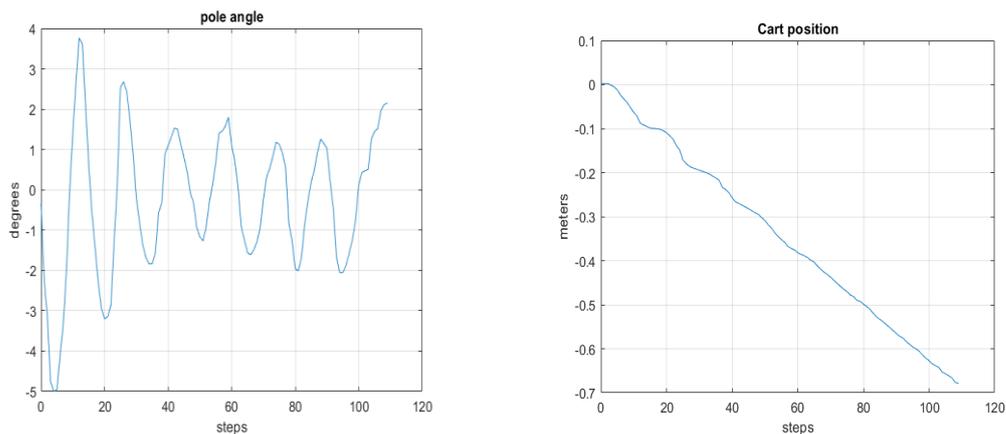
#### 5.1.1 Resultados PID com *feedback* $\theta$

Simulando o sistema na plataforma SIMULINK/MATLAB e analisando as variáveis de estado em questão,  $\theta$  e  $x$ , obtém-se os resultados apresentados a seguir. Para um impulso, nota-se que o sistema é capaz de controlar o ângulo  $\theta$  da haste, porém não consegue estabilizar a posição da base. A base se mantém em velocidade constante para estabilizar a haste. No sistema real, isso resultaria na base colidir com uma das extremidades. Com auxílio do método de Ziegler-Nichols, apresentado na seção 3.3.3, foram estimados os ganhos  $K_p = -85$ ,  $K_d = -88$  e  $K_i = 0$ . Na figura 18 são apresentados os resultados simulados do controlador PID com *feedback*  $\theta$ .



**Figura 18** - Simulação do controlador PID com *feedback*  $\theta$

Para o experimento com o pêndulo real, foi iniciado ensaio com a haste direcionada para cima e a base localizada em uma das extremidades. Então, foi dado impulso na ponta da haste e os dados de  $\theta$  e  $x$  foram coletados até a base colidir com a outra extremidade. Percebeu-se que o controlador conseguiu estabilizar a haste com uma tolerância de 1.5 graus, enquanto a base se comportou conforme esperado pela simulação. Nas Figuras 19a e 19b são apresentados os resultados obtidos com a bancada experimental, utilizando os mesmos ganhos  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$ .



(a) Resultado de  $\theta$  com controlador PID (b) Resultado de  $x$  com controlador PID com *feedback* de  $\theta$

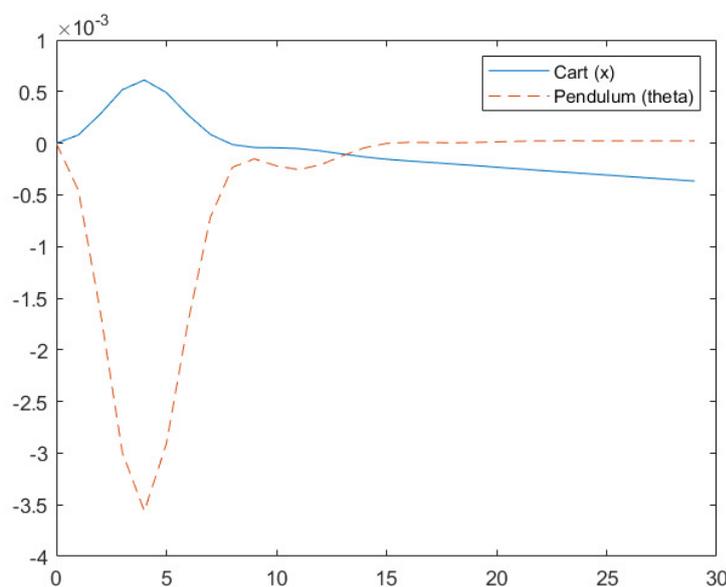
**Figura 19** - Resultados experimentais com controlador PID simples

### 5.1.2 Resultados PID com *feedback* $\theta$ e $x$

Analisando os resultados do segundo controlador nota-se uma semelhança com a resposta do primeiro. O sistema ainda é capaz de estabilizar a haste para cima, porém a base se

mantém em uma velocidade constante, ocorrendo a mesma colisão como no primeiro controlador PID. Outro problema com esse *design* é a independência de cada controlador PID, levando os controles a competirem para adquirir a estabilidade de  $x$  e  $\theta$ . Logo, o método clássico de controle para um sistema como o pêndulo invertido não tem a capacidade de estabilizar as variáveis de estado  $\theta$  e  $x$  ao mesmo tempo. Visto que os resultados foram semelhantes aos do primeiro controlador, novos dados experimentais não foram coletados para este controlador.

Empiricamente, analisando a convergência e o desempenho desejado, e seguindo o critério dos polos estarem contidos dentro do círculo unitário no plano Z, portanto estáveis, e ainda, próximos ao limite do círculo, visando uma resposta rápida ao sistema, optou-se pelos polos  $[0.81 \ 0.81 \ 0.91 \ 0.91]$ . Aplicando-se tais polos na formulação de Ackermann, apresentada na seção 3.3.3, resulta nos ganhos  $K_d^x = -178$ ,  $K_p^\theta = -102$ ,  $K_d^\theta = -327$  e  $K_i^x = K_i^\theta = 0$ . Na Figura 20 é apresentada a simulação do controlador PID com *feedback* de  $x$  e  $\theta$ .

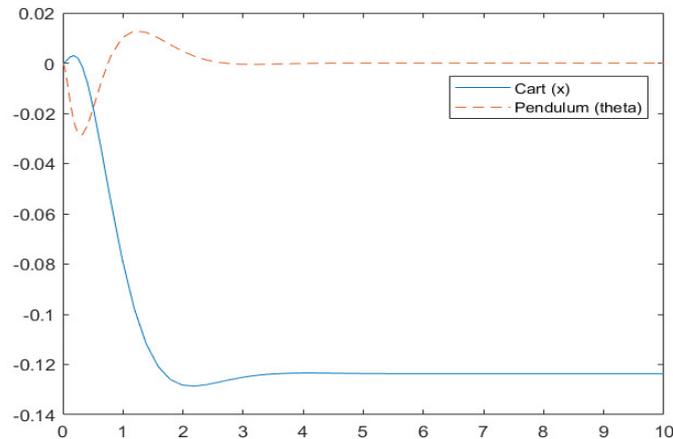


**Figura 20** - Resultados simulados com controlador PID duplo

## 5.2 Resultados LQR

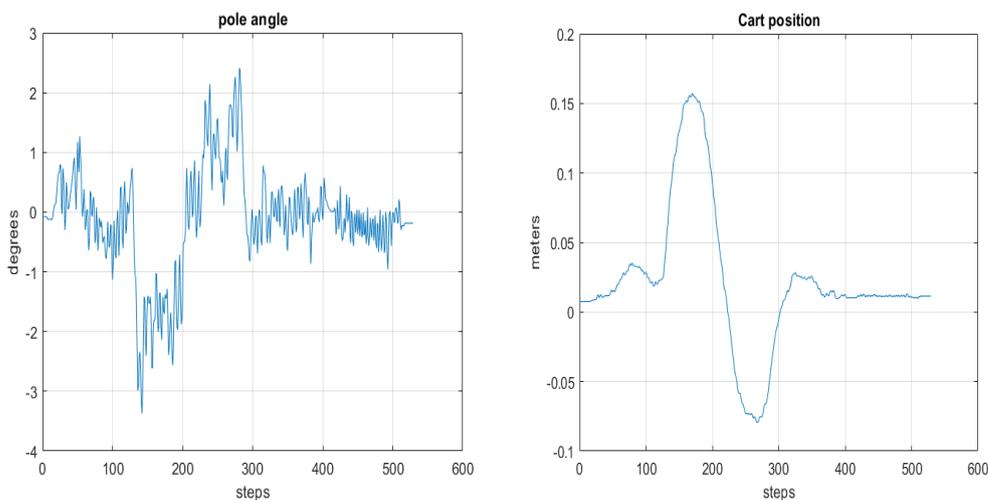
Simulando no ambiente MATLAB/SIMULINK o controlador LQR, nota-se a estabilidade das variáveis de estado em questão. Verifica-se que a base não estabiliza na sua origem, devido ao controlador LQR não ter uma componente integrativa para diminuir o erro em regime permanente. A Figura 21 demonstra a trajetória do ângulo da haste e a trajetória da

base para os pesos  $Q_1$  e  $Q_2$  definidos arbitrariamente e os ganhos do controlador  $K$ , calculados conforme na seção 3.4.



**Figura 21** - Resultados simulados com controlador LQR

Para a bancada experimental, novamente a haste do pêndulo foi iniciada com direção voltada para cima e a base localizada no centro de seu percurso. Aplicou-se um impulso na extremidade da haste e coletou-se os dados até a estabilização do pêndulo. É possível observar que ambos os dados simulados e medidos se assemelham, há bastante distúrbios no controle da haste, porém o controlador é capaz de controlá-la perto de  $\theta=0$  e  $x=0$ . O pêndulo reconquistou a estabilidade depois de 4 segundos. Nas Figuras 22a e 22b são apresentados os comportamentos de  $\theta$  e  $x$  ao longo do tempo. Vale ressaltar que para este controlador foi utilizado o filtro de Kalman proveniente da placa Odrive, que possui as matrizes  $V$  e  $W$  já configuradas.



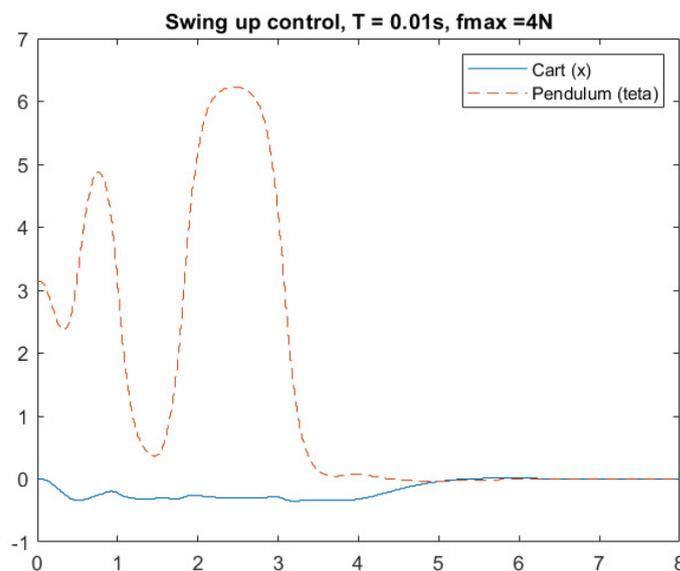
(a) Ângulo da haste

(b) Posição da base

**Figura 22** - Resultados experimentais com controlador LQR

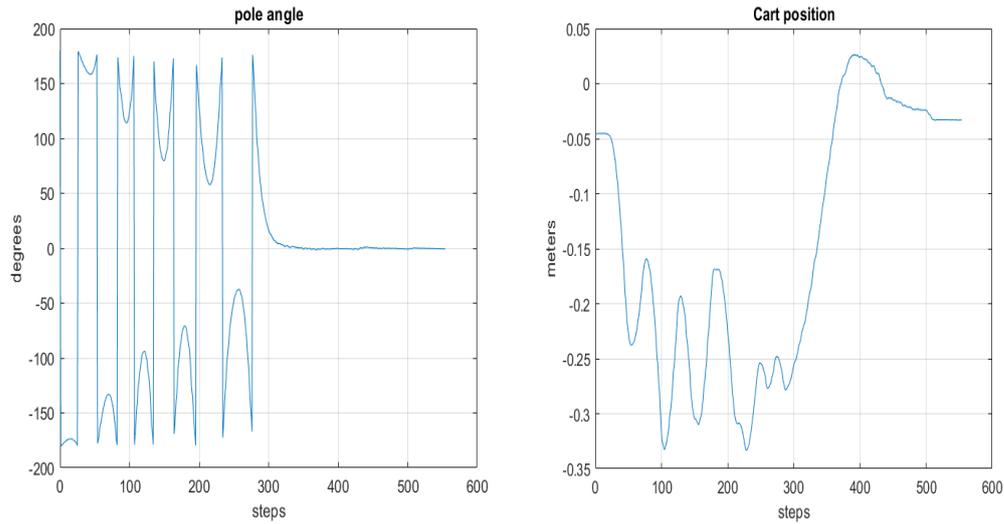
### 5.3 Resultados *Swing-up*

Por último, são apresentados os resultados do controlador não-linear de *Swing-up*. Utilizando novamente a ferramenta MATLAB/SIMULINK para simular o controle do sistema e iniciando agora o pêndulo com a haste direcionada para baixo nota-se que o controlador de *energy shaping* fornece energia ao sistema até que a haste se aproxime de  $\theta=0$ . Próximo deste ponto, troca-se o controlador pelo LQR para manter a haste estabilizada. Constam da Figura 23 os resultados simulados do controlador não-linear.



**Figura 23** - Resultados simulados com controlador *Swing-up*

Nas Figuras 24a e 24b são apresentados os comportamentos do ângulo da haste e a posição da base, respectivamente. Percebe-se que o sistema real possui uma estabilidade melhor que os outros controladores previamente apresentados. O controlador conseguiu adquirir estabilidade depois de sete segundos. Além disso, existe uma diferença considerável entre os resultados simulados e experimentais devido à não linearidade do sistema.

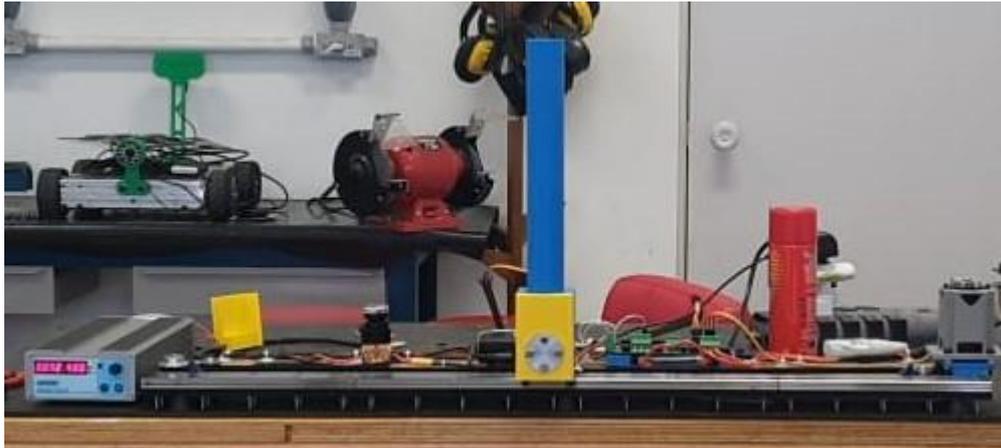


(a) Ângulo da haste

(b) Posição da base

**Figura 24** - Resultados experimentais com controlador *Swing-up*

Na Figura 25 é ilustrado o pêndulo equilibrado pelo controlador *Swing-up*. Para uma melhor visualização de todo o sistema em funcionamento, o QRCode na Figura 26 direciona o leitor para o vídeo do pêndulo invertido sendo equilibrado.

**Figura 25** – Pêndulo equilibrado pelo controlador *Swing-up*

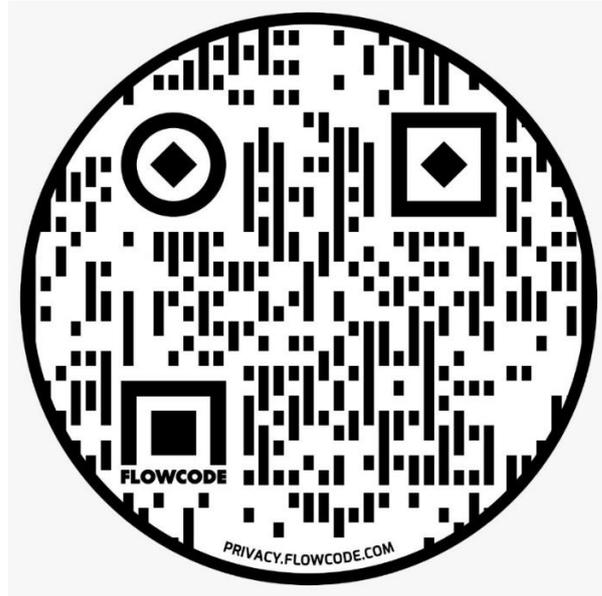


Figura 26 – QRCode

## Capítulo 6 Conclusões

Este trabalho apresentou o projeto e construção de um pêndulo invertido, juntamente com a demonstração matemática da modelagem do sistema e estudo de três técnicas de controle distintas, PID, LQR e *Swing up*.

Foi projetada e construída uma bancada experimental, mecanicamente robusta para futuros experimentos e trabalhos na área de engenharia de controle, tais como: controle de pêndulo duplo invertido e controle por *reinforcement learning*.

O controlador PID foi capaz de manter o pêndulo com haste para cima até colidir com a extremidade do curso da base. Tal controlador, mesmo sendo largamente utilizado na indústria, não é aconselhável para sistemas com muitas variáveis de estado. Porém, sua performance pode ser incrementada com uma melhor escolha de ganhos.

O controlador ótimo LQR, juntamente com filtro de Kalman, foi capaz de controlar o pêndulo em  $x$  e  $\theta$  ao mesmo tempo.

O controlador não-linear *Swing-up* teve sucesso em equilibrar o pêndulo, a partir de uma posição inicial da haste orientada para baixo, para uma posição final com a haste do pêndulo para cima.

## Referências Bibliográficas

ALVES, Rafael Gustavo. **Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação**, 2018.

AMBA, A. J. *Feedback linearization, sliding mode and swing up control for the inverted pendulum on a cart*, 2015.

ÅSTRÖM, K. J.; FURUTA, K. *Swinging Up a Pendulum by Energy Control*. **Anais: 13th IFAC World Congress**. San Francisco: CA, 1996.

ASTROM, K. J.; HAGGLUND, T. (2006). *Advanced PID Control*, *Instrument Society of America*. Durham, NC, EUA.

BOUBAKER, O. *The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory*. *Education and e-Learning Innovations (ICEELI)*, 2012 *International Conference on AMC*, NY, EUA, julho 2012.

BURNS, R. S. *Advanced Control Engineering*. 1st Ed. 2001.

CAO, Y.; REN, W. *Optimal Linear-consensus Algorithms: an LQR Perspective*. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2010.

DORF, R.; BISHOP, R. H. (2009). **Sistemas de Controle Moderno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 752 p.

KAFETZIS, I; MOYSIS, L. *Inverted Pendulum: A system with innurable applications*. *Anais: 9th Intenational Week Dedicated to Math's*. Thessaloniki: Greece, 2017.

KANIESKI, J. **Modelagem e Controle LQR Aplicado a um Condicionador de Energia**. Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2010.

LIIM, Y.; Hoo, C.; Wong, Y. *Stabilising an Inverted Pendulum with PID Controller*. *MATEC Web of Conferences*, 2018.

LUNDBERG, K. H.; BARTON, T. W. (2010). *History of Inverted-Pendulum Systems*. *Ifac Proceedings Volumes*, [s.l.], v. 42, n. 24, p.131-135.

HASAN, M. *Balancing of an Inverted Pendulum Using PD Controller*.

NAVES, E. L. M. (2006). **Modelagem e Simulação do Controle da Postura Ereta Humana Quasi-estática com Reflexos Neuromusculares**. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia.

OGATA, K. (1993). **Engenharia de Controle Moderno**, 2ª Edição, Prentice-Hall do Brasil.

OGATA, K. (2003). **Engenharia de Controle Moderno**. 4ª Edição, Prentice-Hall.

OGATA, K. (2011). **Engenharia de Controle Moderno**. 5ª Edição. São Paulo: Prentice – Hall.

OSTAOVARI, S. N. MOROZOVSKY, T. BEWLEY. *The Dynamics of a Mobile Inverted Pendulum*.

RAHMAN, E.; NAYFEH, A. H. (2007). *Two-dimensional Control for Ship-mounted Cranes: a feasibility study*. *Journal of Vibration and Control*, Virginia, EUA, v. 1, p. 657–685, May, 2007.

RAHMAN, E.; NAYFEH, A. H. *Two-dimensional control for ship-mounted cranes: a feasibility study*. *Journal of Vibration and Control*, Virginia, EUA, May, 2007.

RIBEIRO, R. (2007). **Implementação de um Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido**. Tese de Mestrado - Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Itajubá.

ROBERGE J. K.; *The Mechanical Seal; Bachelor Thesis; Massachusetts Institute of Technology*; Cambridge, MA – USA; May, 1960.

SINGH, J.; *Energy Based Collocated Partial Feedback Linearization Control for Swing-up & LQR control for Balance*.

SULTAN, K.; MIRZA, A. *Inverted Pendulum: Analysis, Design and Implementation*. July, 2003.



---

Assinatura Orientador