

### 3

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE ESTRUTURAS VIA ANSYS

Geralmente o MEF é o método numérico de análise utilizado para se obter os valores das funções objetivo e das restrições, no que diz respeito à maioria dos problemas estruturais abordados pelos processos de otimização. Através do MEF, faz-se a análise de sensibilidade no caso de algoritmos de otimização nos quais se faz necessária a avaliação de gradientes. O problema de análise requer a solução de equações algébricas (resposta estática), problemas de autovalores (vibrações, por exemplo) ou equações diferenciais ordinárias (resposta ao longo do tempo). O cálculo da sensibilidade é equivalente ao problema matemático de se obter as derivadas das soluções dessas equações em relação a seus coeficientes.

O cálculo da sensibilidade de uma resposta da estrutura para alterar as variáveis de projeto é geralmente o maior custo computacional no processo de otimização. Então, é importante se ter algoritmos eficientes para se avaliar a sensibilidade. Além disso, a sensibilidade da resposta da estrutura para problemas de parâmetros também tem outras aplicações. Por exemplo, é geralmente impossível se conhecer todos os parâmetros de um modelo da estrutura, como propriedades do material, cargas e dimensões exatas. A sensibilidade para pequenas variações nesses parâmetros é essencial para calcular a variação estatística na resposta da estrutura.

O ANSYS utiliza a técnica mais simples para a obtenção da sensibilidade com respeito às variáveis de projeto, que é a aproximação por diferenças finitas. Esta técnica é geralmente cara computacionalmente, mas de fácil implementação e muito utilizada. Aqui descreve-se sucintamente o método citado e os métodos analítico e semi-analítico.

### 3.1

#### Método das diferenças finitas (ANSYS)

Sabe-se que a análise de sensibilidade é na verdade a determinação da variação das funções em decorrência de alterações nas variáveis de projeto. O cálculo da sensibilidade resulta em parâmetros relevantes nas estimativas de mudanças no projeto. Na plataforma ANSYS o cálculo se dá por derivadas parciais, isto é, faz-se uso do método das diferenças finitas, representado pela equação (3.1) no cálculo do gradiente de uma função qualquer ( $f_q$ ):

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta f_q}{\Delta x_i} = \frac{f_q(x + \Delta x_i) - f_q}{\Delta x_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

sendo

$$\Delta x_i = \Delta D * (x_i - x_{\min}) \quad (3.2)$$

onde:  $\Delta x_i$  = tamanho da perturbação total da variável de projeto definida no ANSYS pela forma exposta na equação (3.2), na qual  $x_i$  é a variável de projeto e  $x_{\min}$  é o limite inferior da variável de projeto;

$\Delta D$  = perturbação relativa da variável que geralmente no ANSYS está na faixa de intervalo de  $10^{-4}$  a  $10^{-6}$

$n$  = número de variáveis de projeto; e

Em Haftka, R. T. e Gürdal, Z. [32] (1993), comenta-se que a mais simples aproximação por diferenças finitas é a de primeira ordem, chamada de diferença a frente. Na qual, sendo, por exemplo, a função  $u(x)$  onde  $x$  é a variável de projeto, a aproximação de primeira ordem  $\Delta u / \Delta x$  para a derivada  $du/dx$  é dada por

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x_i) - u(x)}{\Delta x_i} \quad (3.3)$$

Caso deseje-se obter as derivadas da resposta da estrutura em relação a  $n$  variáveis de projeto a diferença a frente requer  $n$  análises adicionais. Ordens mais altas de aproximação são sempre mais custosas.

A chave para a escolha da aproximação é o tamanho do passo  $\Delta x_i$ , que é uma estimativa e depende da precisão exigida.

### 3.1.1

#### Precisão e escolha do tamanho do passo

Sempre que o método das diferenças finitas é usado para aproximar as derivadas, existem duas fontes de erro : truncamento e condição. O erro de truncamento  $e_t(\Delta x_i)$  é o resultado da omissão dos termos da série de Taylor na expansão da função perturbada. Por exemplo, a série de Taylor para  $u(x + \Delta x_i)$  pode ser escrita como

$$u(x + \Delta x_i) = u(x) + \Delta x_i \frac{du}{dx}(x) + \frac{(\Delta x_i)^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x + \zeta \Delta x_i), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (3.4)$$

Da equação. (3.4) segue que o erro de truncamento para a aproximação por diferença a frente é:

$$e_t(\Delta x_i) = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x + \zeta \Delta x_i), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (3.5)$$

O erro de condição é a diferença entre a avaliação numérica da função e o seu valor exato. Uma contribuição para o erro de condição é o erro por arredondamento (*round-off*) no cálculo  $du/dx$  a partir do valor original e do perturbado da função  $u$ . Esta contribuição é comparativamente pequena para a maioria dos computadores a menos que  $\Delta x_i$  seja extremamente pequeno. Porém se  $u(x)$  é computada por um prolongado ou mal condicionado processo numérico, a contribuição do erro de arredondamento pode ser significativa.

Condições de erro adicionais podem ocorrer se  $u(x)$  é calculado por um processo iterativo que é terminado cedo. Caso tenha-se um limite  $e_u$  sobre o erro absoluto computado na função  $u$ , pode-se estimar o erro de condição. Por exemplo, para a aproximação por diferença a frente o erro de condição  $e_c(\Delta x_i)$  é estimado conservadoramente através da equação. (3.6) como:

$$e_c(\Delta x_i) = \frac{2}{\Delta x_i} e_u \quad (3.6)$$

As equações. (3.5) e (3.6) apresentam o chamado “dilema do tamanho do passo”. Quando seleciona-se o tamanho de passo para ser pequeno, a fim de reduzir o erro de truncamento, pode-se ter um excessivo erro de condição. Em

alguns casos pode não haver qualquer tamanho de passo que apresente um erro aceitável.

### 3.2

#### Métodos analítico e semi-analítico

Para o método analítico, uma restrição típica, envolvendo um limite sobre deslocamento ou um componente de tensão, pode ser escrita como :

$$g(u, x) \geq 0 \quad (3.7)$$

onde, em uma notação simplificada, é assumida que ‘g’ depende somente de uma única variável de projeto ‘x’. Usando a regra da cadeia para a diferenciação, obtém-se.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + z^T \frac{du}{dx} \quad (3.8)$$

onde ‘z’ é um vetor com as derivadas das restrições em relação aos componentes de deslocamento. É fácil verificar que obtém-se

$$z = \frac{\partial g}{\partial u} \quad (3.9)$$

Nota-se que é usada a notação  $dg/dx$  para mostrar a derivada total de ‘g’ em relação a ‘x’. Esta derivada total inclui a parte explícita  $\partial g/\partial x$  mais a parte implícita através de sua dependência de ‘u’.

No método semi-analítico, quando a derivada explícita é de difícil cálculo, usa-se o método das diferenças finitas. Porém, mesmo em sendo o método semi-analítico quase tão eficiente quanto os métodos analíticos, ele é baseado em aproximações por diferenças finitas, e pode apresentar problemas de precisão. Tais problemas de precisão podem ser particularmente importantes para as derivadas da resposta estrutural de vigas e placas com respeito a parâmetros de geometria.

### 3.3

#### Sensibilidade dos deslocamentos, deformações e tensões na análise estática

De forma resumida, a sensibilidade de deslocamentos, deformações e tensões, para o caso estático, considerando-se a primeira derivada analítica e tendo as equações de equilíbrio em termos de deslocamento nodal  $\underline{\mathbf{u}}$ , são geradas no modelo de E.F na forma:

$$\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}} \quad (3.10)$$

Disto, obtém-se,

$$\frac{\partial(\underline{\mathbf{K}})}{\partial \mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{K}} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.11)$$

Assim, para os deslocamentos

$$\underline{\mathbf{K}} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial(\underline{\mathbf{K}})}{\partial \mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}} \quad (3.12)$$

onde  $\frac{\partial \underline{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}}{\partial \mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}}$  corresponde a pseudo-carga ( $\underline{\mathbf{p}}$ );

para as deformações ( $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{u}}$ )

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{B}} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.13)$$

e para as tensões ( $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{D}} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ )

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{D}} \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.14)$$

### 3.4

#### Sensibilidade de freqüências naturais fundamentais

Tem-se problemas de autovalores, geralmente de estabilidade estrutural e análise de vibração, quando as forças são conservativas e nenhum amortecimento é considerado, estes problemas conduzem a autovalores reais que representam, por exemplo, freqüências de vibração. No caso mais geral os autovalores são complexos. O caso mais simples de autovalores é:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mu\mathbf{M}\mathbf{u} = 0 \quad (3.15)$$

Onde:  $\mathbf{K}$  = matriz de rigidez;

$\mathbf{M}$  = matriz de massa (para caso de vibrações);

$\mathbf{u}$  = modo de vibração; e

$\mu$  = média da freqüência de vibração.

Ambas as matrizes ( $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ ) são simétricas, e  $\mathbf{K}$  é positiva e semidefinida. O modo de vibração é freqüentemente normalizado com uma matriz positiva e definida  $\mathbf{W}$ , tal que

$$\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = 1 \quad (3.16)$$

onde, em problemas de vibração,  $\mathbf{W}$  é usualmente a matriz de massa  $\mathbf{M}$ . Sendo as equações (3.15) e (3.16) válidas para todos os “autopares” ( $\mu_k, \mathbf{u}^k$ ). Então diferenciando-se a equação (3.15) com respeito a variável de projeto  $x$ , obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}) \frac{d\mathbf{u}}{dx} - \frac{d\mu}{dx} \mathbf{M}\mathbf{u} = -\left(\frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx}\right)\mathbf{u} \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dx} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{u} \quad (3.18)$$

porém, onde se usa da simetria de  $\mathbf{W}$ . As equações (3.17) e (3.18) só são válidas para o caso de autovalores distintos (autovalores repetidos são, em geral, não diferenciáveis, e apenas as derivadas direcionais podem ser obtidas). Na maioria das aplicações o que interessa são apenas os autovalores. Estas derivadas podem ser obtidas através de pré-multiplicação da equação. (3.16) por  $\mathbf{u}^T$ , desconsiderando-se as equações (3.15), (3.16) e (3.17) obtendo-se:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mathbf{u}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (3.19)$$

Em alguns casos são requeridas as derivadas dos autovetores, como por exemplo para obter-se o modo de vibração crítico para baixas amplitudes. Para isto precisa-se das derivadas dos modos de vibração que podem ser obtidas através do uso de aproximação direta, combinando as equações (3.17) e (3.18), ficando:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mu \mathbf{M} & -\mathbf{M} \mathbf{u} \\ -\mathbf{u}^T \mathbf{W} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \\ \frac{d\mu}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left( \frac{d\mathbf{K}}{dx} - \mu \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right) \mathbf{u} \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{M}}{dx} \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Este sistema pode ser resolvido para derivadas de autovalores e autovetores. Por outro lado, deve-se tomar precauções no processo de solução, pois  $\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}$  é secundária principal singular.