

8 Referências Bibliográficas

- [1]. J. Y. Wong, Theory of Ground Vehicles. New York: J. Wiley & Sons, second ed., 1993.
- [2]. A. B. Will & S. H. Zak, Modeling and Control of an Automated Vehicle. Vehicle System Dynamics, vol. 27, pp 131-155, 1997.
- [3]. D. E. Smith & J. M. Starkey, Effects of Model Complexity on the Performance of Automated Vehicle Steering Controllers: Model Development, Validation and Comparison, Vehicle System Dynamics, vol. 24, pp. 163-181, March 1995.
- [4]. A. G. Nalecz & A. C. Bindemann, Investigation into the stability of four wheel steering vehicles, International Journal of Vehicle Design, vol. 9, no. 2, pp. 159-178, 1988.
- [5]. A. G. Nalecz & A. C. Bindemann, Analysis of the dynamic response of four wheel steering vehicles at high speed, International Journal of Vehicle Design, vol. 9, no. 2, pp. 179-202, 1988.
- [6]. A. G. Nalecz, Sensitivity analysis of vehicle design attributes in frequency domain, Vehicle System Dynamics, vol. 17, pp. 141-163, 1988.
- [7]. K. Ogata, Modern Control Engineering, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, second ed., 1990.
- [8]. Slotine, J. -J. & Li, W., Applied Nonlinear Control. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [9]. T. D. Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics, Warrendale: SAE, 1992.
- [10]. G. Genta, Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation, Singapore: World Scientific Publishing, 1997.
- [11]. A. Y. Maalej, D. A. Guenther & J. R. Ellis, Experimental Development of Tire Force and Moment Models, International Journal of Vehicle Design, vol. 10, no. 1, pp. 34-51, 1989.

- [12]. M. El-Gindy & L. Ilosvai, Computer Simulation Study on a Vehicle's Directional Response in Some Severe Maneuvers. Part 1: Rapid Lane-change Maneuvers, *International Journal of Vehicle Design*, vol. 4, no. 4, pp. 386-401, 1983.
- [13]. D. E. Smith & J. M. Starkey, Effects of Model Complexity on the Performance of Automated Vehicle Steering Controllers: Controller Development and Evaluation, *Vehicle System Dynamics*, vol. 23, pp. 627-645, March 1994.
- [14]. Heydinger, G. J., Garrot, W. R., Chrstos, J. P., The Importance of Tire Lag on Simulated Transient Vehicle Response, 1991. SAE Paper no. 910235.
- [15]. Fu, J. -H., Abed, E. H., Families of Lyapunov Functions for Nonlinear Systems in Critical Cases, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 1, pp. 3-16, January 1993.
- [16]. Ackermann, J. Sienel, W., Robust Yaw Damping of Cars with Front and Rear Wheel Steering, *IEEE Transactions on Control and Systems Technology*, vol. 1, pp. 15-20, March 1993.
- [17]. Lindorff, D. P., Control of Nonlinear Multivariable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-12, pp. 506-515, October 1967.
- [18]. Hatwal, H., Mikulcik, E. C., An Optimal Control Approach to the Path Tracking Problem for an Automobile, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 10(4), 233-241, 1986.
- [19]. Koepele, B., Starkey, J., Closed-loop Vehicle and Driver Models for High Speed Trajectory Following, *Transportation Systems – 1990*, pp. 59-68. ASME, 1990. AMD - vol. 108.
- [20]. Isidori, A., *Nonlinear Control Systems: an introduction*, Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [21]. Karnopp, D. C., Margolis, D. L. e Rosenberg, R. C., *System Dynamics: A unified approach*, 2ª edição, John Wiley & Sons, 1990.
- [22]. Vidyasagar, M.; *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1978.

- [23]. Margolis, D., Shim, T., A Bond Graph Model Incorporating Sensors, Actuators, and Vehicle Dynamics for Developing Controllers for Vehicle Safety, *Journal of the Franklin Institute*, no. 338, pp. 21-34, 2001.
- [24]. Hill, D. J., Moylan, P. J., Dissipative Dynamical Systems: Basic Input-Output and State Properties, *Journal of the Franklin Institute*, no. 309, pp. 327-357, 1980.
- [25]. Qu, Z., Dawson, D. M., Robust Control of Cascaded and Individually Feedback Linearizable Nonlinear Systems, *Automatica*, Vol. 30, no. 6, pp. 1057-1064, 1994.

Anexo 1

Tentativa de Controle do Modelo de Oito Graus de Liberdade

Fez-se uma tentativa de aplicação de controle ao modelo de oito graus de liberdade, descrito no Capítulo 4, que é apresentada neste Anexo.

Para o projeto de controlador do modelo de oito graus de liberdade, propõe-se a adoção de um pequeno artifício que prevê linearizar a entrada do sistema em torno de um ponto da função de entrada, projetar o controle por linearização da realimentação de estados e aplicá-lo ao modelo de dinâmica veicular da Equação (4.19). Em seguida incrementa-se a função de entrada com uma variação conhecida e repete-se a análise para o novo ponto de entrada. Isso deve ser feito pois a técnica de linearização da realimentação de estados prevê que as variáveis de entrada sejam funções lineares, o que não acontece no modelo desenvolvido no Capítulo 4.

A1.1

Linearização da função de entrada

Para possibilitar a adoção da técnica de controle baseada na linearização da realimentação de estados, também para o modelo com oito graus de liberdade, foi necessário linearizar a função de entrada não linear, utilizando aproximação por série de Taylor, de 1ª ordem. A Equação (A1.1) indica como é feita a linearização.

$$f(x)|_{x=x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (\text{A1.1})$$

Aplicando a Equação (A1.1) às funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$, obtém-se as Equações (A1.2) e (A1.3), que indicam suas linearizações em torno de um ponto conhecido, x_0 .

$$f(x)|_{x=x_0} = \text{sen}(x)|_{x=x_0} = \sum_{n=0}^1 \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (\text{A1.2})$$

$$\text{sen}(x)|_{x=x_0} = \text{sen}(x_0) + \cos(x_0)\Delta x$$

$$f(x)|_{x=x_0} = \cos(x)|_{x=x_0} = \sum_{n=0}^1 \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (\text{A1.3})$$

$$\cos(x)|_{x=x_0} = \cos(x_0) - \text{sen}(x_0)\Delta x$$

Conhecendo a linearização das funções $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$, é possível iniciar o projeto do controlador conforme ilustra a teoria abordada na Seção 5.1. Porém, antes que o projeto tenha início, é preciso escrever as novas equações para as forças longitudinal e lateral, até então descritas pelas Equações (4.17), apresentando as relações não lineares da função de entrada. Substituindo as Equações (A1.2) e (A1.3) na Equação (4.17), chega-se à Equação (A1.4) que descreve a nova relação entre as forças longitudinal e lateral no referencial da roda e longitudinal e lateral no referencial do veículo. O ponto em torno do qual é feita a linearização corresponde ao ângulo de esterçamento passado ao veículo como função de entrada.

$$\begin{aligned} F_x &= F_t \cos(\delta_0) - F_s \text{sen}(\delta_0) - [F_t \text{sen}(\delta_0) + F_s \cos(\delta_0)]\Delta\delta \\ F_y &= -F_t \text{sen}(\delta_0) + F_s \cos(\delta_0) + [F_t \cos(\delta_0) - F_s \text{sen}(\delta_0)]\Delta\delta \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

onde F_x e F_y correspondem às forças longitudinal e lateral respectivamente, aplicadas a cada uma das rodas do veículo. Como pode ser observado na Equação (4.19), é preciso obter o somatório das forças em x e das forças em y para que seja possível obter um modelo que apresente uma função de entrada linear, possibilitando o projeto do controlador. Assim sendo, escreve-se na Equação (A1.5) a relação para os somatórios das forças longitudinais.

$$\sum F_x = (F_{iDE} + F_{iDD})[\cos(\delta_{wf}) + \cos(\delta_{wr})] - (F_{sDE} + F_{sDD})[\text{sen}(\delta_{wf}) + \text{sen}(\delta_{wr})] + [(F_{iDE} + F_{iDD})\text{sen}(\delta_{wf}) + (F_{sDE} + F_{sDD})\cos(\delta_{wf})]\Delta\delta_f \quad (\text{A1.5})$$

e na Equação (A1.6), o somatório das forças laterais.

$$\sum F_y = (F_{iDE} + F_{iDD})[\text{sen}(\delta_{wf}) + \text{sen}(\delta_{wr})] + (F_{sDE} + F_{sDD})[\cos(\delta_{wf}) + \cos(\delta_{wr})] + \left[(F_{iDE} + F_{iDD})\cos(\delta_{wf}) - (F_{sDE} + F_{sDD})\text{sen}(\delta_{wf}) \right] \Delta\delta_f \quad (\text{A1.6})$$

Assim como feito para o somatório das forças laterais e longitudinais, é preciso reescrever a equação de momentos provenientes dessas forças e que aparece no modelo da Equação (4.19) como Γ . A Equação (A1.7) apresenta a nova relação a ser substituída no modelo de oito graus de liberdade.

$$\Gamma = a[(F_{iDE} + F_{iDD})\text{sen}(\delta_{wf}) + (F_{sDE} + F_{sDD})\cos(\delta_{wf})] - b[(F_{iDE} + F_{iDD})\text{sen}(\delta_{wr}) + (F_{sDE} + F_{sDD})\cos(\delta_{wr})] + \frac{t_f}{2} [(F_{iDE} - F_{iDD})\cos(\delta_{wf}) - (F_{sDE} - F_{sDD})\text{sen}(\delta_{wf}) + (F_{iDE} - F_{iDD})\cos(\delta_{wr}) - (F_{sDE} - F_{sDD})\text{sen}(\delta_{wr})] + \left\{ a[(F_{iDE} + F_{iDD})\cos(\delta_{wf}) - (F_{sDE} + F_{sDD})\cos(\delta_{wf})] - \frac{t_f}{2} [(F_{iDE} - F_{iDD})\text{sen}(\delta_{wf}) + (F_{sDE} - F_{sDD})\cos(\delta_{wf})] \right\} \Delta\delta_f \quad (\text{A1.7})$$

Para simplificar as Equações (5.73) a (A1.7) em cálculos futuros do controlador, adota-se a forma mais compacta dos somatórios de forças laterais e longitudinais e dos momentos, tal qual descrita na Equação (A1.8).

$$\begin{aligned} \sum F_x &= A_1 + A_2 \Delta\delta_f \\ \sum F_y &= B_1 + B_2 \Delta\delta_f \\ \Gamma &= C_1 + C_2 \Delta\delta_f \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

A1.2 Controle aplicado ao modelo de oito graus de liberdade

Tomando por base o sistema descrito na Equação (5.1) e aplicando à Equação (4.19) que descreve o modelo de oito graus de liberdade, é possível identificar o campo de vetores de estado $f(x)$, o vetor $g(x)$ que relaciona estados e entrada, e a função $h(x)$ que fornece a saída do sistema, sendo identificados corretamente nas Equações (A1.9), (A1.10) e (A1.11) respectivamente.

$$f(x) = \begin{bmatrix} Vr - \frac{1}{2} \frac{C_d A_f \rho_a U^2}{m_{tot}} + \frac{A_1}{m_{tot}} \\ -Ur - \frac{m_u^2 h_s^2 g I_{zz} \sin \varphi}{\det} + \frac{m_u h_s I_{zz} (k_{roll} \varphi + \beta_{roll} p)}{\det} + \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{\det} \right) B_1 - \frac{m_u h_s I_{zz} C_1}{\det} \\ \frac{m_u m_{tot} h_s g I_{xzs} \sin \varphi}{\det} - \frac{m_{tot} I_{xzs} (k_{roll} \varphi + \beta_{roll} p)}{\det} - \frac{m_u h_s I_{xzs} B_1}{\det} + \left(\frac{m_{tot} I_{xzs}^2 + 1}{\det} \right) C_1 \\ \frac{m_u m_{tot} h_s g I_{zz} \sin \varphi}{\det} - \frac{m_{tot} I_{zz} (k_{roll} \varphi + \beta_{roll} p)}{\det} - \frac{m_u h_s I_{zz} B_1}{\det} - \frac{m_{tot} I_{xzs} C_1}{\det} \\ \frac{1}{I_{wDE}} \left(T_{DE} - RF_{DE} - dF_{zDE} - \frac{1}{2} T_{brkDE} \right) \\ \frac{1}{I_{wDD}} \left(T_{DD} - RF_{DD} - dF_{zDD} - \frac{1}{2} T_{brkDD} \right) \\ \frac{1}{I_{wTE}} \left(T_{TE} - RF_{TE} - dF_{zTE} - \frac{1}{2} T_{brkTE} \right) \\ \frac{1}{I_{wTD}} \left(T_{TD} - RF_{TD} - dF_{zTD} - \frac{1}{2} T_{brkTD} \right) \\ U \cos \theta - V \sin \theta \\ -U \sin \theta - V \cos \theta \end{bmatrix} \quad (A1.9)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{A_2}{m_{tot}} \\ \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{m_{tot} \det} \right) B_2 - \frac{m_u h_s I_{xzs} C_2}{\det} \\ 0 \\ -\frac{m_u h_s I_{xzs} B_2}{\det} + \left(\frac{m_{tot} I_{xzs}^2 + 1}{\det} \right) C_2 \\ 0 \\ -\frac{m_u h_s I_{zz} B_2}{\det} + \frac{m_{tot} I_{xzs} C_2}{\det} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A1.10)$$

$$h(x) = Y \quad (A1.11)$$

onde *det* corresponde ao determinante da matriz de inércia do modelo de oito graus de liberdade, descrito na Equação (4.6), e que é novamente apresentado na Equação (A1.12).

$$\det = m_{tot} I_{zz} I_{roll} - m_{tot} I_{xzs}^2 - m_u^2 h_s^2 I_{zz} \quad (A1.12)$$

Aplicando a Definição 1, apresentada na Equação (5.9), ao modelo de oito graus de liberdade, descrito pelas Equações (A1.9) a (A1.11), desenvolve-se o mesmo raciocínio algébrico que foi desenvolvido para o modelo de quatro graus de liberdade e que aqui aparece indicado nas equações (A1.13) a (A1.17).

$$h(x) = Y \quad (A1.13)$$

$$\nabla h(x) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (A1.14)$$

$$\dot{y} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ -U \sin \theta - V \cos \theta \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{y} = -U \sin \theta - V \cos \theta = L_f h(x) \quad (A1.15)$$

$$\nabla L_f h(x) = [-\sin \theta \ -\cos \theta \ -U \cos \theta + V \sin \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (A1.16)$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \quad (A1.17)$$

$$\ddot{y} = \left(\frac{1}{2} \frac{C_d A_f \rho_a U^2}{m_{tot}} - \frac{A_1}{m_{tot}} \right) \sin \theta + \left(\frac{m_u^2 h_s^2 g I_{zz}}{\det} \sin \varphi + \frac{m_u h_s I_{zz} (k_{roll} \varphi + \beta_{roll} \rho)}{\det} + \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{m_{tot} \det} \right) B_1 \right) \cos \theta + \left[\frac{A_2}{m_{tot}} \sin \theta - \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{m_{tot} \det} \right) B_2 \cos \theta \right] u$$

Assim como no projeto de controle para o modelo de quatro graus de liberdade, os cálculos do controlador para o modelo de oito graus de liberdade apresentaram grau relativo igual a 2. Porém isso só será verdade se B_2 e A_2 forem diferentes de zero. Esses dois termos correspondem a parcelas do somatório das forças longitudinais e laterais, descritas nas Equações (A1.7) e (A1.8), comportando a interação das forças de tração F_t e das forças laterais no pneu, F_s . Sabendo que se considera o modelo de veículo em estudo se movimentando com velocidade constante e em linha reta, originalmente, é razoável supor que existe alguma força presente nos pneus. Sendo assim o vetor $g(x)$ é não nulo e pode ser

efetuado o procedimento de cálculo de um controlador por realimentação de estado. Caso essa suposição seja falsa, então o vetor $g(x)$ é nulo para toda e qualquer derivação da função de saída, indicando que todos os estados são não observáveis e que, conseqüentemente, o modelo é não controlável. Caso isso ocorra será preciso reformular o modelo de maneira a possibilitar seu controle.

Tendo encontrado uma relação explícita entre a saída do sistema e sua entrada, descrita pela Equação (A1.17), é possível propor uma lei de controle que garanta uma relação linear de entrada-saída, conforme prevê a Equação (5.8). Essa lei de controle, descrita na Equação (A1.18), deve garantir a estabilização assintótica do modelo de oito graus de liberdade, caso sua dinâmica interna seja estável.

$$u = \frac{1}{L_g L_f h(x)} (-L_f^2 h(x) + v) \quad (\text{A1.18})$$

onde v corresponde à nova relação linear para estabilização assintótica do veículo. Escolhe-se v de maneira a compor um controlador linear por imposição de pólos, conforme descreve a Equação (5.25), também utilizada para o modelo de quatro graus de liberdade.

A1.3 Formas normais

É preciso, antes de estabelecer a lei de controle para o sistema realimentado, efetuar uma análise de sua dinâmica interna, por intermédio de suas formas normais. Propõe-se uma transformação de coordenadas, conforme especificado na Seção 5.1.2.

Em uma vizinhança Ω de um ponto inicial x_0 , a forma normal do sistema descrito pelas Equações (A1.9) a (A1.11) corresponde à forma apresentada nas Equações (A1.19) e (A1.20).

$$\dot{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.19})$$

$$\dot{\psi} = w(\mu, \psi) \quad (\text{A1.20})$$

Constrói-se então um difeomorfismo local $\phi(x): \mathfrak{R}_8 \rightarrow \mathfrak{R}_8$, que garanta as afirmações da Definição 2 e do Lema 1, da Seção 5.1.2, descrito na Equação (A1.21).

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ -U \text{ sen } \theta - V \text{ cos } \theta \\ X \\ U \\ \theta \\ r \\ \varphi \\ p \\ \omega_{DE} \\ \omega_{DD} \\ \omega_{TE} \\ \omega_{TD} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.21})$$

Para comprovar que a Equação (A1.21) representa um difeomorfismo local, é preciso calcular sua Jacobiana e verificar se é inversível. Assim, escreve-se a matriz Jacobiana na Equação (A1.22).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen } \theta & -\text{cos } \theta & -U \text{ cos } \theta + V \text{ sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.22})$$

Ao verificar a Equação (A1.22) no ponto $x_0 = 0$, percebe-se que a matriz é inversível e que $\phi(x)$ é um difeomorfismo local. É possível então, escrever o

sistema descrito na Equação (5.1), na sua forma normal, apresentada na Equação (A1.23).

$$\begin{aligned}
 \dot{\mu}_1 &= \mu_2 \\
 \dot{\mu}_2 &= \left(\frac{1}{2} \frac{C_d A_f \rho_a}{m_{tot}} \psi_2^2 - \frac{A_1}{m_{tot}} \right) \text{sen } \psi_3 + \left(\frac{m_u^2 h_s^2 g I_{zz}}{\det} \text{sen } \psi_5 + \frac{m_u h_s I_{zz} (k_{roll} \psi_5 + \beta_{roll} \psi_6)}{\det} + \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{m_{tot} \det} \right) B_1 \right) \cos \psi_3 \\
 &+ \left[\frac{A_2}{m_{tot}} \text{sen } \psi_3 - \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{m_{tot} \det} \right) B_2 \cos \psi_3 \right] u \\
 \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \cos \psi_3 - \left(\frac{-\mu_2 - \psi_2 \text{sen } \psi_3}{\cos \psi_3} \right) \text{sen } \psi_3 \\
 \dot{\psi}_2 &= -\psi_2 \psi_4 - \frac{m_u^2 h_s^2 g I_{zz} \text{sen } \psi_5}{\det} + \frac{m_u h_s I_{zz} (k_{roll} \psi_5 + \beta_{roll} \psi_6)}{\det} + \left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{\det} \right) B_1 - \frac{m_u h_s I_{zz} C_1}{\det} + \left[\left(\frac{m_u^2 h_s^2 I_{zz} + 1}{m_{tot} \det} \right) B_2 - \frac{m_u h_s I_{zz} C_2}{\det} \right] u \\
 \dot{\psi}_3 &= \psi_4 \\
 \dot{\psi}_4 &= \frac{m_u m_{tot} h_s g I_{zz} \text{sen } \psi_5}{\det} - \frac{m_{tot} I_{zz} (k_{roll} \psi_5 + \beta_{roll} \psi_6)}{\det} - \frac{m_u h_s I_{zz} B_1}{\det} + \left(\frac{m_{tot} I_{zz}^2 + 1}{\det} \right) C_1 + \left[-\frac{m_u h_s I_{zz} B_2}{\det} + \left(\frac{m_{tot} I_{zz}^2 + 1}{\det} \right) C_2 \right] u \\
 \dot{\psi}_5 &= \psi_6 \\
 \dot{\psi}_6 &= \frac{m_u m_{tot} h_s g I_{zz} \text{sen } \psi_5}{\det} - \frac{m_{tot} I_{zz} (k_{roll} \psi_5 + \beta_{roll} \psi_6)}{\det} - \frac{m_u h_s I_{zz} B_1}{\det} - \frac{m_{tot} I_{zz} C_1}{\det} + \left[-\frac{m_u h_s I_{zz} B_2}{\det} + \frac{m_{tot} I_{zz} C_2}{\det} \right] u \\
 \dot{\psi}_7 &= \frac{1}{I_{wDE}} \left(T_{DE} - R F_{tDE} - d F_{zDE} - \frac{1}{2} T_{brkDE} \right) \\
 \dot{\psi}_8 &= \frac{1}{I_{wDD}} \left(T_{DD} - R F_{tDD} - d F_{zDD} - \frac{1}{2} T_{brkDD} \right) \\
 \dot{\psi}_9 &= \frac{1}{I_{wTE}} \left(T_{TE} - R F_{tTE} - d F_{zTE} - \frac{1}{2} T_{brkTE} \right) \\
 \dot{\psi}_{10} &= \frac{1}{I_{wTD}} \left(T_{TD} - R F_{tTD} - d F_{zTD} - \frac{1}{2} T_{brkTD} \right)
 \end{aligned} \tag{A1.23}$$

Tendo encontrado a descrição do modelo de oito graus em sua forma normal, é possível proceder com a análise de estabilidade da dinâmica interna do sistema, de acordo com o apresentado na seção 5.1.3.

A1.4 Análise de estabilidade em regime estacionário

É possível observar na forma normal da Equação (A1.23) que existem dois grupos de equações, de acordo com a separação em modos observáveis e não observáveis. As dez últimas Equações de (A1.23) indicam a dinâmica interna do sistema, a qual se deseja verificar a estabilidade.

A análise se faz então, colocando todos os estados observáveis, representados por μ_1 e μ_2 na Equação (A1.23), nulos. Ao fazer isso está se colocando o sistema em uma superfície onde quem controla o movimento do sistema são os modos da dinâmica interna, representada pelas dez variáveis de estado normais, ψ_1 a ψ_{10} . Ao forçar todas as variáveis de estado a terem condição inicial nula, espera-se que a dinâmica interna permaneça sobre a superfície em que foi colocada, representada pela origem. Dessa maneira todos os estados começam

em zero e nesta condição devem permanecer. Porém, como pode ser observado no gráfico da Figura 55, alguns modos claramente deixam seu estado de regime estacionário. Tais modos são os últimos quatro, correspondendo às velocidades angulares em cada uma das rodas. Tal fato caracteriza a dinâmica interna do modelo de oito graus de liberdade como uma dinâmica instável.

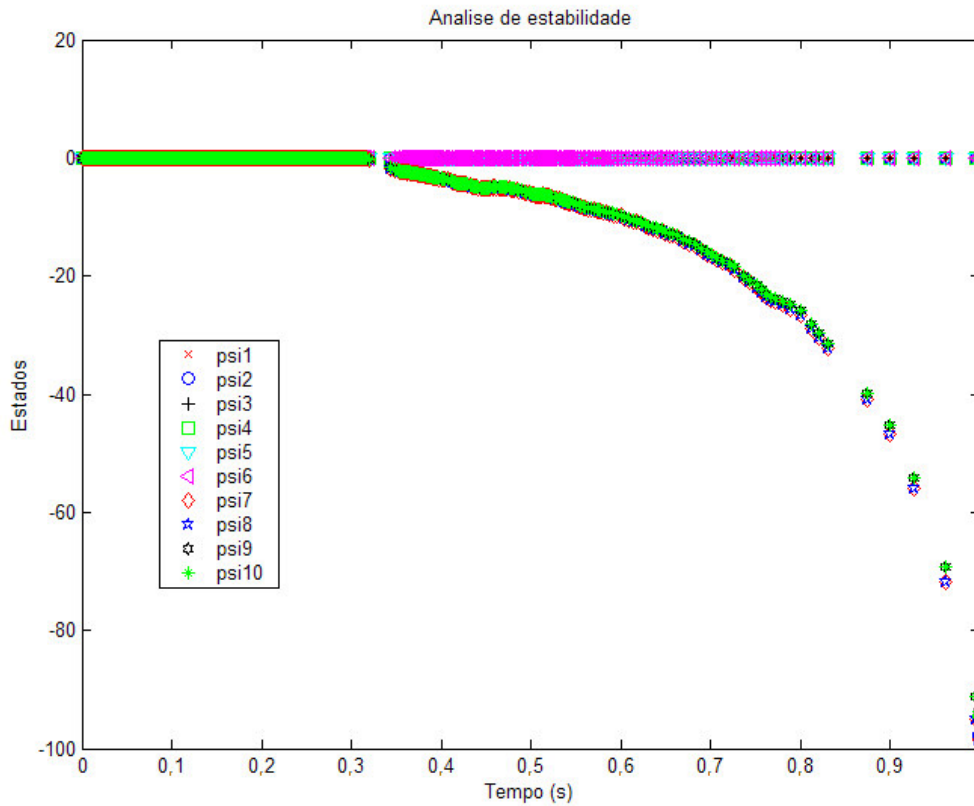


Figura 55 – Quebra da estabilidade da dinâmica interna

Ainda para confirmar o resultado da análise de estabilidade representada no gráfico da Figura 55, fez-se uma análise dos pólos do modelo de oito graus de liberdade, a partir de uma linearização em torno do ponto de origem $x_0 = 0$, conforme indicado na Equação (A1.24).

$$F(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (A1.24)$$

Após substituir as constantes características do veículo, apresentadas no Anexo 2, obtém-se a matriz jacobiana $F(x)$, quando x é colocado na origem, e apresentada na Equação (A1.25).

$$F(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6657 & 0 & 10,9382 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,6726 & 0 & -60,3491 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4179 & 363,2283 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4179 & 0 & 363,2283 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5233 & 0 & 0 & 363,2283 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5233 & 0 & 0 & 0 & 363,2283 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A1.25)$$

O resultado obtido na Equação (A1.25) demonstrou a existência de quatro (04) pólos iguais, com parte real positiva em $(+363,23)$, caracterizando a instabilidade inerente à dinâmica interna do sistema. Tais pólos são motivados pela ação da dinâmica das rodas sobre o sistema global e causam a instabilidade, como visualizado no gráfico da Figura 55.

Tendo identificado a instabilidade inerente à dinâmica interna do modelo de oito graus de liberdade, é impossível projetar um controlador por linearização da realimentação de estados que garanta um correto rastreamento de uma trajetória desejada. É preciso então, reavaliar o modelo de oito graus de liberdade, principalmente a etapa que compreende a modelagem da dinâmica das rodas, para tentar encontrar uma solução representativa e que possibilite a tentativa de anular as não linearidades internas do sistema e, dessa maneira, a aplicação do controle por linearização da realimentação de estados. Ou, caso não seja possível, mudar a estratégia de controle adotada até aqui. Mas, mesmo tendo encontrado uma instabilidade interna, a técnica de linearização por realimentação de estados provou-se válida e passível de ser aplicada a sistemas complexos.

Anexo 2 Lista de Variáveis e Dados Numéricos

A seguir apresenta-se a lista de variáveis e constantes empregadas neste trabalho, baseada nos dados encontrados em [2] e [3].

Descrição	Símbolo	Valor
Coefficiente de arrasto aerodinâmico	C_d	0,32
Área frontal do veículo	A_f	2,1 m ²
Densidade do ar	ρ_a	0,12497 kg/m ³
Massa suspensa	m_u	1160 kg
Massa total	m_{tot}	1280 kg
Distância entre o C.G. e o eixo de rolagem	h_s	0,2 m
Produto de inércia da massa suspensa	I_{xzs}	0 kgm ²
Momento de inércia em torno do eixo de rolagem	I_{roll}	750 kgm ²
Momento de inércia de guinada	I_{zz}	2500 kgm ²
Distância do C.G. ao eixo dianteiro	a	1,203 m
Distância do C.G. ao eixo traseiro	b	1,217 m
Bitola do veículo	$t_f (t_r)$	1,33 m
Rigidez a torção no eixo de rolagem	k_{roll}	45000 Nm/rad
Amortecimento a torção no eixo de rolagem	β_{roll}	2600 Nm/rad/s
Raio da roda	R	0,3 m

Descrição	Símbolo	Valor
Distância do centro da roda até o ponto de aplicação da força normal	d	0,014 m
Coefficiente de esterçamento de rolagem dianteiro	k_{rsf}	-0,05
Coefficiente de esterçamento de rolagem traseiro	k_{rsr}	0,1
Altura do C.G.	h_{cg}	0,5 m
Distância entre eixos	l	2,42 m
Razão entre rigidez de rolagem frontal e total	K_{rsf}	0,444
Constante de frenagem frontal	k_{bf}	0,55
Inércia de rotação do pneu	I_t	2,1 kgm^2
Inércia de rotação do motor	I_e	0,136 kgm^2
Redução de 1ª marcha	ζ_1	13,56
Redução de 2ª marcha	ζ_2	7,50
Redução de 3ª marcha	ζ_3	5,37
Redução de 4ª marcha	ζ_4	4,22
Redução de 5ª marcha	ζ_5	3,28
Eficiência da marcha	η	0,85
Coefficiente de ordem 2 do polinômio característico do motor	c_1	-6
Coefficiente de ordem 1 do polinômio característico do motor	c_2	59,16

Descrição	Símbolo	Valor
Coefficiente de ordem 0 do polinômio característico do motor	c_3	25
Coefficiente de atrito nominal entre a pista e o pneu	μ	0,85
Fator de redução da aderência do pneu	ϵ_r	0,015 s/m
Rigidez longitudinal do pneu DE	C_{DE}	20000 N/%
Rigidez longitudinal do pneu DD	C_{DD}	20000 N/%
Rigidez longitudinal do pneu TE	C_{TE}	20000 N/%
Rigidez longitudinal do pneu TD	C_{TD}	20000 N/%
Rigidez lateral do pneu	C_α	20000 N/rad