5
Controle por Linearização da Realimentação de Estados

5.1.
Teoria de controle

5.1.1.
Linearização no sentido entrada-saída

A partir deste capítulo propõe-se um tipo de controle para sistemas não-lineares, condizente com a teoria de controlabilidade e observabilidade de sistemas lineares. Considera-se um sistema não-linear do tipo descrito pela Equação (5.1).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ao propor linearização por entrada-saída o que se pretende é encontrar uma relação diferencial linear entre a saída **y** do sistema e uma nova entrada **ν**, que cancele as parcelas não-lineares encontradas durante o processo de determinação de **y**. A aproximação usada consiste em diferenciar a saída do sistema (*h(x)*), tantas vezes quantas forem necessárias, até que a entrada ***u*** apareça explicitamente na nova expressão. Usa-se como ferramenta matemática, a derivada direcional ou derivada de Lie.

Ao efetuar as derivações, uma vez que apareça a entrada, possibilitando o estabelecimento de uma relação algébrica, projeta-se a entrada ***u*** de modo a cancelar as componentes não-lineares de *f(x)* e *g(x)* que aparecem na Equação (5.1). Vale lembrar que este procedimento pode não ter êxito quando não se conhecer o grau relativo do sistema que se está analisando, sendo grau relativo o número de derivações efetuadas até que se obtenha uma equação que apresente a entrada do sistema (u) explicitamente. Este mesmo grau relativo corresponde ao número de estados observáveis do sistema, descrito pela Equação (5.1), podendo vir a serem controlados. Caso o grau relativo (r) seja menor que o grau do próprio sistema (n), há uma dinâmica interna, não observável, que precisará ser analisada separadamente. Já para o caso do grau relativo (r) ser igual ao grau do sistema (n), diz-se que há uma linearização por entrada-estado, onde todos os estados são observáveis, podendo ser controlados [8] [20].

Para iniciar a análise de linearização por entrada-saída de um caso com grau relativo bem definido, posiciona-se o sistema em uma região Ω_x, aberta no espaço de estados. Usando então a notação de geometria diferencial, o processo para encontrar uma relação linear de entrada-saída começa ao derivar a saída da Equação (5.1).

$$\dot{y} = \nabla h(f + gu) = L_f h(x) + L_g h(x)u \tag{5.2}$$

Caso $L_g h(x) \neq 0$ para algum $x = x_0$ em Ω_x então, por continuidade a relação também é verificada em uma vizinhança Ω, finita, de x_0. Em Ω a transformação de entrada passa a ser escrita como na Equação (5.3)

$$u = \frac{1}{L_g h(x)}\left(-L_f h(x) + \nu\right) \tag{5.3}$$

que resultará em uma relação linear entre $\dot{y}$ e ν, como descrito pela Equação (5.4).

$$\dot{y} = \nu \tag{5.4}$$

Caso $L_g h(x) = 0$ para todo e qualquer x em Ω_x, diferencia-se (5.2) na tentativa de obter uma relação explícita entre saída (y) e entrada do sistema (u).

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \tag{5.5}$$

Assim como para a Equação (5.2), se $L_g L_f h(x) = 0$ para todo x pertencente a Ω_x, diferencia-se novamente, conforme indicado na Equação (5.6),

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \tag{5.6}$$

até alcançar um inteiro $\boldsymbol{r}$, tal que $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ para algum $x = x_0$, em Ω_x. Então por continuidade, a relação linear é verificada em uma vizinhança finita, Ω, de x_0. E assim a lei de controle em Ω será igual ao exposto na Equação (5.7).

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left(- L_f^r h(x) + \nu \right) \tag{5.7}$$

Ao aplicar a Equação (5.7) de volta na Equação (5.6), escreve-se a relação entre a entrada e a saída do sistema, descrita pela Equação (5.1), sendo ***r*** o seu grau relativo.

$$y^{(r)} = \nu \tag{5.8}$$

Vale aqui ressaltar que o grau relativo deve ser menor ou igual à ordem do sistema. Quando este for igual à ordem ou grau do sistema, há uma linearização de entrada-estado em Ω (o espaço de estados). Desenvolvido o raciocínio de linearização por realimentação de estados, no sentido de entrada-saída, é possível escrevê-lo em uma única definição que poderá ser mais facilmente referenciada adiante.

Definição 1: O sistema SISO possui grau relativo ***r*** em uma região Ω se, ∀ x ∈ Ω

$$\begin{aligned} & L_g L_f^i h(x) = 0 \qquad 0 \le i < r-1 \\ & L_g L_f^{r-1} h(x) \ne 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

5.1.2. Formas normais

Uma vez determinada a existência de uma dinâmica interna, da qual pouco se conhece, é preciso explicitá-la para facilitar sua análise de estabilidade. Somente se ela for estável será possível implantar a lei de controle proposta pela Equação (5.7), de maneira a garantir que o sistema se comporte conforme o desejado. Uma alternativa para realizar tal verificação é calcular uma transformação de coordenadas para o sistema, também conhecida como forma normal. Essa transformação irá simplificar a descrição do modelo, tornando mais direta a análise de estabilidade da dinâmica interna do sistema. Tal simplificação consiste em identificar os autovalores do sistema associados à dinâmica que ainda deve ser mais bem estudada, ou seja, os autovalores cuja parte real é nula e que nada se pode afirmar quanto à sua estabilidade [20], ou autovalores com parte real positiva, que geram instabilidade ao sistema.

Quando o grau relativo ***r*** for tal que ***r*** < ***n***, onde ***n*** representa a ordem do sistema identificado na Equação (5.1), o sistema não-linear pode ser transformado usando as derivadas direcionais da função de saída (y, $\dot{y}$ até $y^{(r)}$) como partes componentes do novo vetor de estados. O primeiro passo corresponde a reescrever o sistema não-linear usando estes novos estados, como na Equação (5.10).

$$\mu = \begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_r\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}y & \dot{y} & \cdots & y^{(r-1)}\end{bmatrix}^T \tag{5.10}$$

Em uma vizinhança Ω de um ponto x_0, a forma normal do sistema descrito pela Equação (5.1) pode ser escrita conforme as Equações (5.11) e (5.12).

$$\dot{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \mu_r \\ a(\mu,\psi) + b(\mu,\psi)u\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$\dot{\psi} = w(\mu,\psi) \tag{5.12}$$

com a saída definida como

$$y = \mu_1 \tag{5.13}$$

onde μ_i e ψ_j são chamados de coordenadas normais ou estados normais em Ω (ou em x_0).

A forma companheira descrita por (5.11) é apenas uma outra maneira de escrever a relação (5.6), enquanto que o subsistema (5.12) não contém a entrada ***u*** do sistema. Para mostrar que o sistema não-linear apresentado em (5.1) pode ser realmente transformado na forma normal descrita por (5.11) e (5.12), é preciso não só que esta coordenada exista, mas que seja uma transformação de estado verdadeira. É preciso provar que a transformação de estado adotada corresponde a um difeomorfismo.

<u>Definição 2:</u> Uma função $\phi : \Re^n \rightarrow \Re^n$, definida em uma região Ω, é chamada um difeomorfismo se ela é suave, e sua inversa ϕ^{-1} existe e também é suave.

<u>Lema 1:</u> Seja ϕ(x) uma função suave definida em uma região Ω em $\Re_n$. Se a matriz Jacobiana ∇ϕ for não-singular em um ponto x = x_0 de Ω, então ϕ(x) define um difeomorfismo local em uma sub-região de Ω.

Mostrar que o sistema não-linear descrito por (5.1) pode ser transformado na forma normal (5.11) e (5.12) pede a construção de um difeomorfismo local ϕ(x): $\Re_4 \rightarrow \Re_4$ que garanta as afirmações da Definição 2 e do Lema 1.

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_r & \psi_1 & \cdots & \psi_{n-r} \end{bmatrix}^T \tag{5.14}$$

Para provar que (5.14) é realmente um difeomorfismo local, é preciso verificar se seu Jacobiano é inversível ou similarmente, se os gradientes ∇μi e ∇ψj são linearmente independentes. Em uma primeira etapa mostra-se que os gradientes da forma companheira descrita por (5.11) são linearmente independentes, seguindo a Definição 1 para μ_i. Tem-se então, pela Equação (5.15), que

$$\begin{aligned} &\nabla\mu_i g = 0 \qquad 1 \le i < r \\ &\nabla\mu_r g \neq 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Sendo a Equação (5.15) obedecida, resta então provar que os gradientes restantes, $\nabla\psi_j$, também são linearmente independentes (j = 1, 2, ... , n – r). Por definição estes gradientes devem satisfazer a equação (5.16)

$$\nabla\psi_j g = 0 \quad 1 \le j \le n - r \tag{5.16}$$

O proposto pela Equação (5.16) também deve satisfazer o que se conhece por "*curl conditions*", sendo os vetores ψ_j restantes encontrados via método de gradiente variável. Este método consiste em uma aproximação formal para obtenção de funções de Lyapunov, adotando uma forma específica para o gradiente ∇V ao invés de assumir uma forma específica para a função V.

Efetuando a análise mais explicitamente, considere a função escalar V(x), relacionada a seu gradiente pela expressão de integração explicitada na Equação (5.17).

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx \quad \therefore \quad \nabla V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\}^T \tag{5.17}$$

Para que seja possível recuperar uma função escalar V(x) única, a função do gradiente deve satisfazer o proposto pela Equação (5.18)

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1,2,\ldots,n) \tag{5.18}$$

também conhecida como "*curl condition*".

Assume-se então, que o gradiente é escrito como o disposto na Equação (5.19)

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{5.19}$$

onde a_{ij} são os coeficientes a serem determinados.

Dito isto, pode ser calculada uma função de Lyapunov V seguindo um conjunto de regras básicas. Em primeiro lugar deve-se assumir o gradiente na forma especificada pela Equação (5.17). A seguir resolve-se essa equação para que sejam obtidos os coeficientes desconhecidos. Restringem-se os coeficientes de maneira a tornar $\dot{V}$ negativa semi-definida, pelo menos localmente. Integra-se o gradiente ∇V para que se obtenha a função propriamente dita, devendo checá-la para verificar a condição de positiva definida. Uma vez atendidos todos os passos, encontrou-se uma função de Lyapunov para o sistema não-linear proposto na Equação (5.1).

Como para satisfazer a "*curl condition*" implica que o resultado da integração independe do caminho de integração, é usualmente conveniente obter V a partir da integração ao longo do caminho paralelo a cada eixo individualmente, i.e.

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1,0,\ldots,0)dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1,x_2,\ldots,0)dx_2 + \ldots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1,\ldots,x_n)dx_n \tag{5.20}$$

Voltando ao problema de dinâmica veicular, será preciso obter *n-r* vetores ψ_j (j = 1, ... , n-r) linearmente independentes, de maneira a compor o difeomorfismo ϕ que leva de $\Re^n x \Re^n \rightarrow \Re^n x \Re^n$. Isto simplifica o sistema de equações descrito e permite uma melhor análise da dinâmica interna e sua conseqüente verificação de estabilidade. Para tanto é preciso encontrar o conjunto de vetores ψ_j seguindo a definição apresentada na Equação (5.21).

$$\nabla \psi_j g = 0 \quad \therefore \quad 1 \leq j \leq n-r \tag{5.21}$$

Uma vez satisfeitas as condições de independência para cada um dos vetores de coordenadas normais, μ_i e ψ_j, obtém-se o difeomorfismo ϕ, conforme a Equação (5.14), responsável por explicitar os estados não observáveis, permitindo a análise da dinâmica interna ao sistema e a validação do controle por linearização da realimentação de estados.

5.1.3. Análise dos estados não observáveis

Uma vez calculado o difeomorfismo ϕ, conforme a Equação (5.14), tem-se uma transformação do sistema original em outro sistema, cuja dinâmica pode ser decomposta em duas partes distintas. A primeira parte compreende os modos observáveis do sistema e que podem ser controlados via linearização da realimentação de estados, representada pelas primeiras μ_i equações diferenciais, como indicado na Equação (5.11). Tais modos podem apresentar autovalores com parte real negativa ou até mesmo positiva, cabendo ao controlador a tarefa de garantir a estabilidade assintótica destes modos. Porém existe a segunda parte do sistema transformado, que apresenta os modos não observáveis e sobre os quais nada pode ser inferido quanto à estabilidade. Tais modos são representados pelas últimas ψ_j equações diferenciais, conforme indicado na Equação (5.12), e devem ser estudados separadamente no que se costuma chamar de análise de estabilidade dos estados não observáveis, ou análise de estabilidade da dinâmica interna. Esta análise corresponde a verificar o comportamento dos modos não observáveis, determinando serem eles estáveis ou não.

Para efetuar essa análise faz-se uso de uma propriedade da teoria da Variedade Central, como apresentada em [20]. Essa propriedade afirma que pode ser definida uma superfície M_0, assintoticamente estável, sobre a qual é possível posicionar os modos não observáveis do sistema dinâmico, os quais se deseja verificar a estabilidade, após uma transformação de coordenadas. Pode-se então, excitar esses modos e verificar seus comportamentos ao longo do tempo. Caso as trajetórias desempenhadas, com origem sobre a superfície M_0, se mantenham sobre esta mesma superfície, então se diz que os modos não observáveis do sistema dinâmico são também, assintoticamente estáveis, sendo possível projetar um controlador para os modos observáveis do sistema dinâmico.

Voltando aos cálculos já efetuados nas seções anteriores, pode-se reconhecer a transformada de coordenadas como sendo o difeomorfismo ϕ, apresentado na Equação (5.14). Já a superfície M_0 pode ser representada pelas ψ_j últimas equações do difeomorfismo ϕ, satisfazendo as "*curl conditions*" da Equação (5.18), com condição da saída y idêntica a zero. Isso implica que todas as suas derivadas temporais também o serão. Assim sendo, a dinâmica interna correspondente descreve um movimento restrito à superfície M_0 de dimensão n-r, definido por $\mu = 0$. Para que o sistema seja considerado assintoticamente estável, os estados iniciais do sistema, $x(0)$, devem estar nesta superfície. Se isso não ocorrer não será possível efetuar nenhuma análise sobre a dinâmica interna do sistema, no que diz respeito à limitação dos estados (sua estabilidade). Em adição à necessidade de estar na superfície, a entrada $\boldsymbol{u}$ deve ser tal que a saída y do sistema descrito pelos modos não observáveis do sistema dinâmico original, permaneçam em zero, i. e., $y^{(r)}(t) = 0$ para todo instante de tempo t. A entrada deverá ser representada pela Equação (5.22).

$$u_0(x) = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \tag{5.22}$$

De acordo com a Equação (5.22) e assumindo que o estado inicial realmente se encontra sobre a superfície de origem, i. e., $\mu(0) = 0$, a dinâmica do sistema pode ser simplificada e escrita na forma normal, apresentada pela Equação (5.23).

$$\begin{cases} \dot{\mu} = 0 \\ \dot{\psi} = w(0,\psi) \end{cases} \tag{5.23}$$

A Relação (5.23) representa a dinâmica interna do sistema não-linear. Note que em coordenadas normais a entrada de controle u_0 pode ser escrita como uma função dos estados internos ψ, como na Equação (5.24)

$$u_0(\psi) = \frac{-a(0,\psi)}{b(0,\psi)} \tag{5.24}$$

5.1.4. Estabilidade assintótica local

Considerando o sistema não-linear dado pela Equação (5.1) é natural imaginar que, ao escolher uma entrada artificial ν, em $y^{(r)} = \nu$, como um controlador linear de posicionamento de pólos, ter-se-á uma garantia para estabilidade do sistema como um todo. Resumindo, assume-se que a nova entrada projetada, necessária para garantir a estabilidade do modelo, será equivalente ao exposto na Equação (5.25):

$$\nu = -k_{r-1}y^{(r-1)} - \ldots - k_1\dot{y} - k_0 y \tag{5.25}$$

onde os coeficientes k_i são escolhidos tal que o polinômio característico, igual ao descrito pela Equação (5.26),

$$K(s) = s^r + k_{r-1}s^{r-1} + \ldots + k_1 s + k_0 \tag{5.26}$$

tenha todas as suas raízes estritamente no semiplano esquerdo do plano dos complexos, garantindo a estabilidade do sistema como um todo. Assim sendo, a entrada de controle $u(x)$ pode ser escrita como na Equação (5.27)

$$u(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} y}\left[-L_f^r y - k_{r-1}y^{(r-1)} - \ldots - k_1\dot{y} - k_0 y\right] \tag{5.27}$$

Este resultado indica que a dinâmica zero é assintoticamente estável e que a lei de controle, descrita por (5.27), realmente estabiliza o sistema localmente.