

4 Modelo de Oito Graus de Liberdade

4.1. Construção do modelo não linear

Em uma segunda abordagem de modelagem da dinâmica de um veículo terrestre de passeio, são consideradas as não linearidades inerentes ao problema, anteriormente descartadas, bem como propõe-se uma expansão do modelo abordado no Capítulo 3, de maneira a representar a rotação axial que ocorre em cada uma das rodas do automóvel.

Como se deseja analisar o movimento sobre o plano xy , que contenha uma trajetória conhecida, foca-se a atenção sobre as dinâmicas lateral e longitudinal. A dinâmica vertical é representada somente para evidenciar os efeitos de distribuição de carga entre eixos e os efeitos ocasionados por aceleração, frenagem e realização de curvas, com seus efeitos sendo analisados somente nas rodas. Na dinâmica longitudinal, o movimento relevante corresponde ao próprio deslocamento ao longo do eixo x_{local} . Já na dinâmica lateral os movimentos pertinentes correspondem ao deslocamento no eixo y_{local} e ao angular, em torno de z_{local} , também conhecido como movimento de *yaw*. Resta ainda determinar a contribuição da dinâmica vertical, representada pelo movimento de *roll* ou rolagem do veículo, correspondente ao movimento angular em torno do eixo x_{local} . Os dois últimos movimentos, que não serão contemplados, correspondem ao movimento vertical ao longo do eixo z_{local} , conhecido como *bounce*, e ao movimento angular em torno do eixo y_{local} , também conhecido como *pitch*.

Como se pretende trabalhar com trajetórias sobre o plano xy , para estudar o problema de dirigibilidade do veículo e propor um controlador de trajetória, o movimento de *pitch* será desprezado neste modelo, uma vez que não serão efetuadas alterações bruscas em sua aceleração. Já o movimento vertical apresenta como única influência, a distribuição estática de cargas e pesos sobre o modelo.

Assim sendo, são identificados quatro movimentos que serão chamados de graus de liberdade e que permitem analisar o comportamento do veículo,

relacionando as ações que ocorrem no corpo do mesmo somente. Em adição a estes graus de liberdade iniciais, propõe-se a inclusão de mais quatro graus de liberdade, ou seja, a rotação axial em cada uma das rodas. Chega-se assim ao total de oito graus de liberdade para composição do modelo dinâmico não-linear, representativo do comportamento físico de um veículo terrestre de passeio, cujos parâmetros constitutivos são conhecidos. Os oito graus de liberdade são listados a seguir:

- Movimento de **Yaw** (ou Guinada);
- Movimento Lateral;
- Movimento Longitudinal;
- Movimento de **Roll** (ou Rolagem);
- Rotação do pneu dianteiro esquerdo;
- Rotação do pneu dianteiro direito;
- Rotação do pneu traseiro esquerdo;
- Rotação do pneu traseiro direito;

A partir da Figura 29 é possível começar a escrever as equações do modelo não-linear. O primeiro passo corresponde a realizar o equilíbrio das forças que atuam no sentido do eixo \mathbf{x}_{local} , representando a dinâmica longitudinal. Encontra-se assim a relação apresentada na Equação (4.1).

$$m_{tot}\dot{U} = m_{tot}Vr + F_{xDE} + F_{xDD} + F_{xTE} + F_{xTD} - \frac{1}{2}C_d A_f \rho_a U^2 \quad (4.1)$$

O termo à direita na Equação (4.1) é composto por uma parcela proveniente do movimento lateral do veículo, pelas quatro forças longitudinais geradas em cada um dos pneus e pela parcela de arrasto aerodinâmico, respectivamente. O termo à esquerda da Equação (4.1) corresponde à resultante do equilíbrio dinâmico. A constante m_{tot} corresponde ao somatório das massas suspensas e não-suspensas. Já na parcela de arrasto, última parcela a direita da Equação (4.1), C_d corresponde ao coeficiente de arrasto aerodinâmico, A_f à área frontal do veículo e ρ_a à densidade do ar. As variáveis de estado são identificadas como \mathbf{r} , velocidade angular de *yaw*, \mathbf{V} como a velocidade lateral e \mathbf{U} como a velocidade longitudinal.

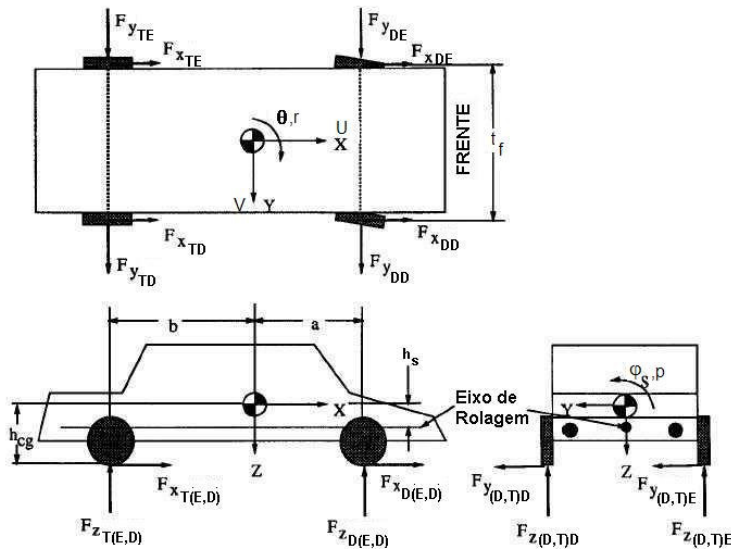


Figura 29 – Equilíbrio de forças

Ainda baseado na Figura 29, faz-se o equilíbrio das forças laterais do veículo e obtém-se a relação descrita na Equação (4.2).

$$m_{tot} \dot{V} = -m_u h_s \dot{p} - m_{tot} U r + F_{y_{DE}} + F_{y_{DD}} + F_{y_{TE}} + F_{y_{TD}} \quad (4.2)$$

Assim como em (4.1), cabe identificar cada termo de (4.2), equação representativa do movimento lateral do veículo. Dos termos à direita de (4.2), podem ser identificadas a contribuição da rolagem do veículo ao deslocamento lateral, a contribuição do deslocamento longitudinal e as quatro forças laterais que são geradas em cada um dos quatro pneus, respectivamente. Aqui não se considera o arrasto aerodinâmico por ser muito pequeno e desprezível se comparado às outras parcelas da Equação (4.2). Identificando cada uma das constantes, tem-se h_s como a distância entre o eixo de rolagem e o CG da massa suspensa e m_u como a totalidade das massas suspensas. Ao verificar as variáveis de estado aqui presentes, encontra-se uma nova que deve ser acrescida ao conjunto já conhecido: p que representa a velocidade angular de *roll*.

Realiza-se então o equilíbrio dos momentos que atuam em cada uma das duas dinâmicas. Baseado na Figura 29, escreve-se o equilíbrio para o movimento de *yaw* do veículo, descrito na Equação (4.3).

$$I_z \dot{r} = I_{xz} \dot{p} + a(F_{yDE} + F_{yDD}) - b(F_{yTE} + F_{yTD}) + \frac{t_f}{2}(F_{xDE} + F_{xTE}) - \frac{t_r}{2}(F_{xDD} + F_{xTD}) \quad (4.3)$$

Assim como no equacionamento anterior, na Equação (4.3) tem-se a influência do movimento de *roll* e o momento proveniente de cada uma das forças que surgem nos pneus. As novas constantes que aparecem correspondem a \mathbf{I}_{zz} , o momento de inércia do veículo em torno do eixo de guinada (*yaw*); \mathbf{I}_{xzs} , produto de inércia da massa suspensa; \mathbf{a} , distância do CG ao eixo dianteiro; \mathbf{b} , distância do CG ao eixo traseiro; e t_f , a bitola dos eixos dianteiro e traseiro (supostas iguais neste modelo).

O último equacionamento corresponde ao equilíbrio de momentos para o movimento de rolagem e que aparece descrito na Equação (4.4).

$$I_{roll} \dot{p} = -m_u h_s \dot{V} + I_{xz_s} r - m_u h_s U + m_u h_s g \sin \varphi - k_{roll} \varphi - \beta_{roll} p \quad (4.4)$$

Observando a Equação (4.4) pode-se perceber a presença de parcelas do movimento lateral, o movimento de *yaw* e do movimento longitudinal, gerando momentos para o movimento de rolagem, além de duas outras parcelas que representam uma rigidez e um amortecimento à rolagem do veículo, aqui identificado respectivamente nas duas últimas parcelas da Equação (4.4). Tal característica faz entender o movimento de rolagem como se fosse um sistema massa-mola-amortecedor fazendo com que o carro apresente algum efeito de suspensão, mesmo que não esteja sendo incluído o modelo desse sistema propriamente dito. As novas constantes que surgem na Equação (4.4) são identificadas como \mathbf{I}_{roll} , momento de inércia da massa suspensa em torno do eixo x de rolagem; \mathbf{g} , a aceleração da gravidade; \mathbf{k}_{roll} , a rigidez torcional no eixo de rolagem; e β_{roll} , o amortecimento torcional no eixo de rolagem. Aparece ainda uma nova variável de estado, identificada por φ , que representa o ângulo de *roll*.

Ao juntar as Equações (4.1) a (4.4), compõe-se a base para um modelo não linear que representa a dinâmica veicular, com suas características conhecidas. O resultado é expresso na Equação (4.5).

$$\begin{aligned}
 m_{tot}\dot{U} &= m_{tot}Vr + F_{xDE} + F_{xDD} + F_{xTE} + F_{xTD} - \frac{1}{2}C_dA_f\rho_aU^2 \\
 m_{tot}\dot{V} &= -m_uh_s\dot{p} - m_{tot}Ur + F_{yDE} + F_{yDD} + F_{yTE} + F_{yTD} \\
 I_{zz}\dot{r} &= I_{xzs}\dot{p} + a(F_{yDE} + F_{yDD}) - b(F_{yTE} + F_{yTD}) + \frac{t_f}{2}(F_{xDE} + F_{xTE}) - \frac{t_f}{2}(F_{xDD} + F_{xTD}) \\
 I_{roll}\dot{p} &= -m_uh_s\dot{V} + I_{xzs}\dot{r} - m_uh_sUr + m_u gh_s \text{sen } \varphi - \kappa_{roll}\varphi - \beta_{roll}p
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Porém percebe-se a necessidade de melhor organizar a Equação (4.5) de maneira a isolar as variáveis de estado corretamente e possibilitar a representação do modelo na forma convencional $\dot{x} = f(x, u)$. O primeiro passo para melhorar a representação da Equação (4.5) corresponde a escrever sua matriz de inércia, M, conforme indicado na Equação (4.6).

$$\begin{bmatrix} m_{tot} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{tot} & 0 & m_u h_s \\ 0 & 0 & I_{zz} & -I_{xzs} \\ 0 & m_u h_s & -I_{xzs} & I_{roll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{tot}Vr - \frac{1}{2}C_dA_f\rho_aU^2 + \sum F_x \\ -m_{tot}Ur + \sum F_y \\ \Gamma \\ -m_u h_s Ur + m_u h_s g \text{sen}(\varphi) - \kappa_{roll}\varphi - \beta_{roll}p \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

O passo seguinte corresponde a obter a inversa de M e dessa forma, escrever a Equação (4.6) na forma de estado $\dot{x} = f(x, u)$. Após algum desenvolvimento algébrico encontra-se a matriz de inércia inversa, conforme apresentada na Equação (4.7).

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{tot}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}I_{roll} - I_{xzs}^2}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} & \frac{-m_uh_sI_{xzs}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} & \frac{-m_uh_sI_{zz}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} \\ 0 & \frac{-m_uh_sI_{xzs}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} & \frac{m_{tot}I_{roll} - m_u^2h_s^2}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} & \frac{m_{tot}I_{xzs}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} \\ 0 & \frac{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} & \frac{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} & \frac{m_{tot}I_{zz}}{m_{tot}I_{zz}I_{roll} - m_{tot}I_{xzs}^2 - m_u^2h_s^2I_{zz}} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} m_{tot}Vr - \frac{1}{2}C_dA_f\rho_aU^2 + \sum F_x \\ -m_{tot}Ur + \sum F_y \\ \Gamma \\ -m_u h_s Ur + m_u h_s g \text{sen}(\varphi) - \kappa_{roll}\varphi - \beta_{roll}p \end{bmatrix}$$

O termo correspondente ao somatório dos momentos ao longo do eixo vertical do veículo passando pelo CG, provocados pelas forças que atuam nas rodas, forças longitudinais e laterais, é apresentado como Γ . Cabe aqui lembrar que não são considerados os momentos em relação ao eixo Z, uma vez que não

estão sendo analisados os movimento de *pitch* e *bounce* do veículo. Assim sendo, a expressão que descreve esse momento equivalente é descrita na Equação (4.8).

$$\Gamma = a(F_{yDE} + F_{yDD}) - b(F_{yTE} + F_{yTD}) + \frac{t_f}{2}(F_{xDE} + F_{xTE}) - \frac{t_f}{2}(F_{xDD} + F_{xTD}) \quad (4.8)$$

Completa-se assim a primeira parte do equacionamento do modelo dinâmico. A próxima etapa consiste em equacionar o movimento de rotação que ocorre em cada uma das rodas do veículo. Ao observar a Figura 30 é possível caracterizar o equilíbrio de torques que atuam sobre cada roda, aqui representado pela Equação (4.9).

$$\dot{\omega}_j = \frac{1}{I_{w_j}} \left[T_j - RF_{t_j} - dF_{z_j} - \frac{1}{2}T_{brk_j} \right] \quad \therefore \quad j = DE, DD, TE, TD \quad (4.9)$$

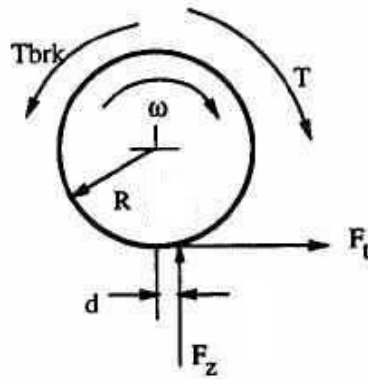


Figura 30 – Diagrama de forças nas rodas

De acordo com a Equação (4.9), o equilíbrio dos torques aplicados à roda corresponde ao somatório do torque propulsor, proveniente do motor e do sistema de transmissão (T_j), com os torques provocados pela força de tração (RF_{t_j}) e pela força normal (dF_{z_j}) mais o torque de frenagem (T_{brk_j}), que aparece quando o motorista aciona o pedal de freio. Para completar o entendimento da Equação (4.9) resta identificar as constantes: \mathbf{R} é o raio da roda, \mathbf{d} é a distância a partir do eixo vertical da roda até o ponto de aplicação da força normal e \mathbf{I}_{w_j} é a inércia equivalente na roda.

A próxima etapa corresponde a explicitar cada uma das forças componentes do modelo, ou seja, as forças longitudinais (F_x) e laterais (F_y) em cada pneu, forças de tração (F_t), cargas laterais (F_s) e forças normais (F_z). Também é preciso explicitar o torque propulsor (T_j) e o torque de frenagem (T_{brkj}), que deve ser diferente para rodas dianteiras e traseiras. O torque propulsor leva em consideração um modelo simplificado de motor e transmissão, acoplados, com representação de um câmbio de marchas, inicialmente pensado para ser um câmbio automático, baseado no valor nominal da velocidade para efetuar a mudança das reduções de marcha. Faixas de velocidade foram pré-determinadas, com base em observações de dados contidos em manuais de veículos automotivos reais. Cada faixa de velocidade é associada a uma relação de transmissão, igualmente conhecida. A Equação (4.10) retrata o modelo de torque propulsor empregado.

$$T_i = \frac{1}{2} WOT \zeta_j \eta_j \left[c_1 \left(\frac{\omega_e}{100} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\omega_e}{100} \right) + c_3 \right] \quad (4.10)$$

$$\omega_e = \zeta_j \omega_i \quad \therefore \quad j = 1, \dots, 5 \quad e \quad i = DE, DD, TE, TD$$

Observando a Equação (4.10) percebe-se o aparecimento de novos termos que, por serem importantes para a compreensão deste modelo de torque, serão abordadas a seguir.

O termo chamado **WOT**, que significa *Wide Open Throttle*, é uma variável percentual que representa a abertura do pedal de aceleração e que é considerada uma das três entradas (\mathbf{u}_1) do sistema de equações diferenciais final. Esta variável pode ser substituída por um controlador de tração, que acaba por isolar o problema de controlar a velocidade do modelo, ao invés de considerá-lo como parte do controlador não-linear a ser desenvolvido e que irá controlar o posicionamento do modelo por sobre uma trajetória conhecida. Com essa abordagem, a função de entrada passa a ser mais simples, pois se alterna a entrada do sistema para apenas uma velocidade desejada. Dessa forma dá-se liberdade ao modelo para alterar sua velocidade de acordo com as reações que serão provocadas em função das alterações de percurso que o veículo estiver seguindo.

Continuando a identificação dos termos constitutivos da Equação (4.10) tem-se a constante ζ , que representa a redução de cada uma das cinco marchas do

sistema de transmissão do veículo. Outra constante, η , representa a eficiência de cada uma das marchas. Os parâmetros c_1 a c_3 correspondem aos coeficientes do polinômio de terceira ordem, que representa a curva do motor adotado para o modelo. Conhecendo os coeficientes do polinômio característico que representa a curva do motor é possível, baseado na Equação (4.10) e na variação do percentual de aceleração (**WOT**), obter o gráfico de potência do motor empregado ao longo deste trabalho, apresentado na Figura 31.

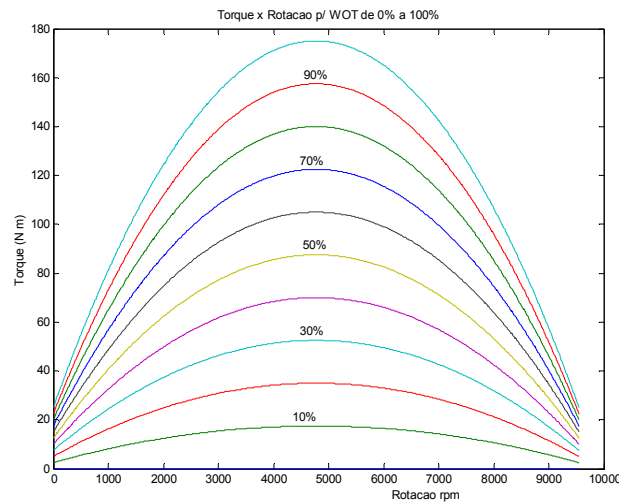


Figura 31 – Curvas de torque do motor

Tais coeficientes podem ser modificados para testar diferentes tipos de motor em simulações de percursos diversos. Já ω_e representa uma velocidade angular equivalente do motor, diferente para cada faixa de velocidade ou cada marcha. Termina assim a definição do modelo de torque propulsor, proveniente do sistema propulsor do veículo, modelado e composto por um motor e um sistema de transmissão, que apresentam como entrada uma velocidade a ser alcançada e como saída um torque propulsor que fará com que o automóvel se movimente.

O próximo passo é continuar descrevendo as incógnitas que aparecem nas equações diferenciais do modelo na forma de estado descrita nas Equações (4.6) e (4.9). Observando a descrição das constantes que aparecem na Equação (4.9), referentes ao movimento de rotação das rodas do veículo, cabe descrever quem é a inércia equivalente em cada uma das rodas. Essa inércia, representada na Equação (4.9) por I_{w_j} ($j = DE, DD, TE, TD$), corresponde ao somatório da inércia do pneu,

devido à sua massa, com as inércias associadas ao movimento dos elementos no sistema de transmissão. A Equação (4.11) descreve tal relação.

$$I_w = I_t + \frac{1}{2} \zeta_j^2 \eta_j I_e \quad \therefore \quad j = 1, \dots, 5 \quad (\text{marchas}) \quad (4.11)$$

onde, I_t representa a inércia de rotação axial do pneu, igual para os quatro pneus. I_e por sua vez, representa a inércia do motor quando em movimento de aceleração. Quando o carro se encontrar em situação de frenagem ou não estiver acelerando, o valor para redução de marcha passa a ser nulo e a inércia equivalente I_w passa a ser representada somente por I_t . Tal procedimento pode não estar sendo corretamente adotado uma vez que é possível manter o veículo engrenado durante o movimento de frenagem. Tal situação pode ser conhecida por freio motor e auxilia a parada mais rápida do veículo, quando acionado junto com o próprio freio.

A próxima parcela a ser abordada, corresponde ao torque de frenagem. Este torque será considerado uma constante ou uma função conhecida, aplicada em momentos pré-determinados e como uma variável de entrada do sistema (u_2). Ele representa a atuação do motorista sobre o pedal e sobre o sistema de freio. Seu equacionamento é escrito na Equação (4.12).

$$\begin{aligned} T_{brk_f} &= k_{bf} T_{brk} \\ T_{brk_r} &= (1 - k_{bf}) T_{brk} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como pode ser visto na Equação (4.12), há uma diferença entre o torque aplicado às rodas dianteiras e traseiras, indicando uma clara distribuição de esforço frenante entre os eixos. Tal diferença está associada aos efeitos provocados pela transferência de peso durante a frenagem e deverá ser sentido quando do monitoramento das forças normais, tendo o veículo sido colocado sob frenagem.

A terceira e última variável de entrada considerada para o modelo geral corresponde ao ângulo de esterçamento, δ_f , das rodas do automóvel, considerado diretamente sobre os pneus. Não é empregado nenhum modelo de transformação da ação direta do motorista sobre o volante para a roda, o que poderia ser entendido como somente um amplificador de sinais. Considera-se que a ação é realizada diretamente sobre os pneus. O ângulo de esterçamento para as rodas

dianteiras e traseiras considera o efeito provocado pelo movimento de rolagem do veículo, aumentando o ângulo inicial para o que passa a se chamar de ângulo de esterçamento total (δ_{wf} e δ_{wr}), descrito a seguir na Equação (4.13).

$$\begin{aligned}\delta_{wf} &= \delta_f + k_{rsf}\varphi \\ \delta_{wr} &= k_{rsp}\varphi\end{aligned}\quad (4.13)$$

Definidas as entradas do modelo e os torques e inércias do sistema de propulsão do veículo, cabe agora identificar as forças atuantes nos pneus, identificadas por forças normais (\mathbf{F}_z), forças de tração (\mathbf{F}_t) e cargas laterais (\mathbf{F}_s). A força longitudinal (\mathbf{F}_x) e a força lateral (\mathbf{F}_y) correspondem a um somatório de projeções, parcelas das forças aplicadas aos pneus. A Figura 29 pode melhor explicitar a origem das forças longitudinal (\mathbf{F}_x) e lateral (\mathbf{F}_y), indicando suas composições vetoriais.

Começando pela força normal (\mathbf{F}_z), retoma-se a descrição de cada uma das forças que atuam nos pneus e que são importantes para a compreensão do modelo. As forças normais (\mathbf{F}_z) relacionam a transferência de carga entre os quatro pneus, durante o movimento do veículo. Consideram-se duas transferências de carga diferentes. A primeira, transferência longitudinal, é provocada pelos movimentos de aceleração e frenagem do veículo. A segunda, transferência lateral, é provocada pelos movimentos em curva que o veículo venha a desempenhar. Tais efeitos podem ser encarados como uma representação bastante simples do sistema de suspensões de um carro, modelo de transferência este considerado quasi-estático uma vez que não são representados os movimentos de *pitch* e de *bounce* de um veículo real. O equacionamento empregado para as forças normais é apresentado na Equação (4.14).

$$\begin{aligned}
F_{zDE} &= \frac{m_{tot} \mathbf{g}}{2} \left[\frac{b}{l} - \frac{(\dot{U} - Vr)h_{cg}}{gl} + K_{rsf} \left(\frac{h_{cg} A_y}{t_f \mathbf{g}} - \frac{m_u h_s}{m_{tot} t_f} \text{sen } \varphi \right) \right] \\
F_{zDD} &= \frac{m_{tot} \mathbf{g}}{2} \left[\frac{b}{l} - \frac{(\dot{U} - Vr)h_{cg}}{gl} - K_{rsf} \left(\frac{h_{cg} A_y}{t_f \mathbf{g}} - \frac{m_u h_s}{m_{tot} t_f} \text{sen } \varphi \right) \right] \\
F_{zTE} &= \frac{m_{tot} \mathbf{g}}{2} \left[\frac{a}{l} + \frac{(\dot{U} - Vr)h_{cg}}{gl} + (1 - K_{rsf}) \left(\frac{h_{cg} A_y}{t_r \mathbf{g}} - \frac{m_u h_s}{m_{tot} t_r} \text{sen } \varphi \right) \right] \\
F_{zTD} &= \frac{m_{tot} \mathbf{g}}{2} \left[\frac{a}{l} + \frac{(\dot{U} - Vr)h_{cg}}{gl} - (1 - K_{rsf}) \left(\frac{h_{cg} A_y}{t_r \mathbf{g}} - \frac{m_u h_s}{m_{tot} t_r} \text{sen } \varphi \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$A_y = \dot{V} + Ur + \frac{m_u}{m_{tot}} h_s \dot{p}$$

onde \mathbf{m}_{tot} é a massa total do veículo, \mathbf{g} a aceleração da gravidade, \mathbf{b} a distância do CG ao eixo traseiro, \mathbf{a} a distância do CG ao eixo dianteiro, \mathbf{l} a distância entre eixos, \mathbf{h}_{cg} a altura do CG, \mathbf{m}_u a massa suspensa, \mathbf{e} corresponde à distância entre o CG e o eixo de rolagem, \mathbf{K}_{rsf} razão entre a rigidez de rolagem dianteira para a rigidez de rolagem total e \mathbf{t}_f a bitola.

No equacionamento descrito em (4.14), as parcelas que respondem pela transferência de carga longitudinal correspondem a

$$\frac{b}{l} - \frac{(\dot{U} - Vr)h_{cg}}{gl} \tag{4.15}$$

onde \mathbf{V} é velocidade lateral, \mathbf{r} é velocidade de yaw e \mathbf{U} é velocidade longitudinal do veículo.

Já para a transferência de carga lateral, a parcela restante corresponde ao equacionamento na Equação (4.16)

$$K_{rsf} \left(\frac{h_{cg} A_y}{t_f \mathbf{g}} - \frac{m_u h_s}{m_{tot} t_f} \text{sen } \varphi \right) \tag{4.16}$$

onde \mathbf{K}_{rsf} representa a razão de rigidez de rolagem frontal para a rigidez de rolagem total do veículo. Nas Equações (4.15) e (4.16) encontram-se parcelas semelhantes nas quatro relações de forças normais. A quinta equação que aparece na Equação (4.14) representa a aceleração lateral do veículo, com parcelas relacionadas ao movimento longitudinal e ao movimento de rolagem. Ao longo da modelagem das forças normais dos pneus (\mathbf{F}_z) são incluídos apenas os efeitos do movimento de rolagem. Não são considerados os atrasos ocasionados pela inércia

do movimento de *pitch*, uma vez que se pretende avaliar situações de movimento com alta aceleração lateral.

A relação final de forças a considerar, para efeitos de análise, corresponde às forças longitudinal e lateral, F_x e F_y , aplicadas em cada um dos pneus, sendo componentes vetoriais de outras duas forças conhecidas, a carga lateral (F_s) e a força de tração (F_t). Porém é importante explicitar a relação algébrica para tais forças, conforme descrito na Equação (4.17). Vale ressaltar que as forças F_t e F_s correspondem às definidas no Capítulo 2, pelas Equações (2.54) e (2.57), respectivamente.

$$\begin{aligned} F_{xi} &= F_{ti} \cos \delta_{wi} - F_{si} \sin \delta_{wi} \\ F_{yi} &= F_{ti} \sin \delta_{wi} + F_{si} \cos \delta_{wi} \end{aligned} \quad \therefore \quad i = DE, DD, TE, TD \quad (4.17)$$

Juntando as Equações (4.6) e (4.9) tem-se o sistema de equações diferenciais não-linear que representa o comportamento de um veículo terrestre de passeio, com seus principais movimentos. Porém, o modelo tem significado apenas no referencial local do carro, e para efeito de controle de trajetória, tal fato é prejudicial, pois se trata de um referencial relativo que não proporciona uma boa indicação de posicionamento real do veículo. É necessário transformar o modelo ou pelo menos as variáveis de interesse, para um referencial global fixo no espaço. Como o que se pretende é o controle de posicionamento ao longo do plano XY global, realiza-se a transformação do referencial local para o global, utilizando o par de equações diferenciais, representado na Equação (4.18).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= U \cos \theta - V \sin \theta \\ \dot{Y} &= -U \sin \theta - V \cos \theta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente ao juntar as Equações (4.6), (4.9), escritas para cada uma das rodas de maneira distinta, e (4.18), compõe-se o modelo com todos os oito graus de liberdade e doze variáveis de estado, descrito na Equação (4.19). Note que para completar o modelo é necessário escrever mais duas equações diferenciais que irão fornecer os ângulos de *yaw* (θ) e de *roll* (φ).

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} m_{tot} V r - \frac{1}{2} C_d A_f \rho_d U^2 + (F_{xDE} + F_{xDD} + F_{xTE} + F_{xTD}) \\ -m_{tot} U r + (F_{yDE} + F_{yDD} + F_{yTE} + F_{yTD}) \\ \Gamma \\ -m_u h_u U r + m_u h_s g \sin(\phi) - \kappa_{roll} \phi - \beta_{roll} P \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= r \\
 \dot{\phi} &= p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{DE} &= \frac{1}{I_{wDE}} \left[T_{DE} - R F_{tDE} - d F_{zDE} - \frac{1}{2} T_{brkDE} \right] \\
 \dot{\omega}_{DD} &= \frac{1}{I_{wDD}} \left[T_{DD} - R F_{tDD} - d F_{zDD} - \frac{1}{2} T_{brkDD} \right] \\
 \dot{\omega}_{TE} &= \frac{1}{I_{wTE}} \left[T_{TE} - R F_{tTE} - d F_{zTE} - \frac{1}{2} T_{brkTE} \right] \\
 \dot{\omega}_{TD} &= \frac{1}{I_{wTD}} \left[T_{TD} - R F_{tTD} - d F_{zTD} - \frac{1}{2} T_{brkTD} \right]
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= U \cos \theta - V \sin \theta \\
 \dot{Y} &= -U \sin \theta - V \cos \theta
 \end{aligned}$$

onde M^{-1} corresponde à matriz de inércia inversa, apresentada na Equação (4.7).

Finalizando a descrição do modelo de oito graus de liberdade, é preciso especificar a força de tração (F_t) que aparece na Equação (4.19). Esta força está de acordo com o desenvolvimento analítico feito para o modelo de pneu, e que foi apresentado no Capítulo 2, baseado em [1].

4.2. Simulação do modelo de oito graus de liberdade

A simulação do modelo de oito graus de liberdade fez uso da Equação (4.19). Os dados empregados como características do veículo são mostrados no Anexo 2 deste trabalho. De posse do modelo analítico que representa a dinâmica com oito graus de liberdade, foi possível elaborar um diagrama de blocos dentro do ambiente *Simulink/Matlab*®, apresentado na Figura 32.

Em um primeiro teste também foi definida uma função de entrada conhecida que representou o ângulo de esterçamento das rodas dianteiras. Porém, diferente do modelo de quatro graus de liberdade, para o modelo de oito graus propôs-se uma função composta por degraus. A forma da função de entrada é vista na Figura 33.

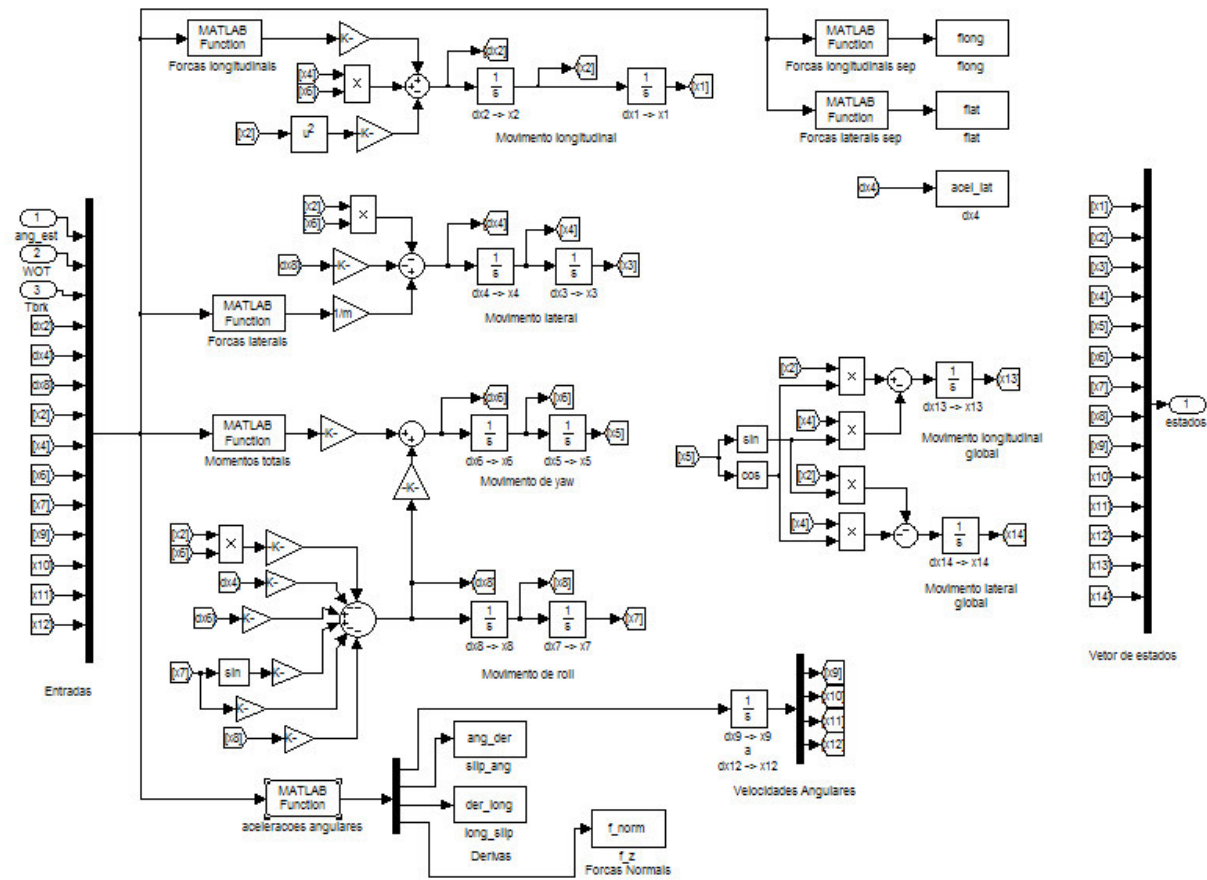


Figura 32 – Modelo de 8 graus de liberdade em ambiente de simulação

O teste proposto corresponde a uma mudança de faixa de rodagem com deslocamento do veículo. O gráfico da referência de entrada indicado na Figura 33 apresenta um ângulo de esterçamento inicialmente positivo, indicando uma variação positiva no movimento de guinada e um conseqüente ângulo de guinada positivo, como pode ser observado na Figura 34.

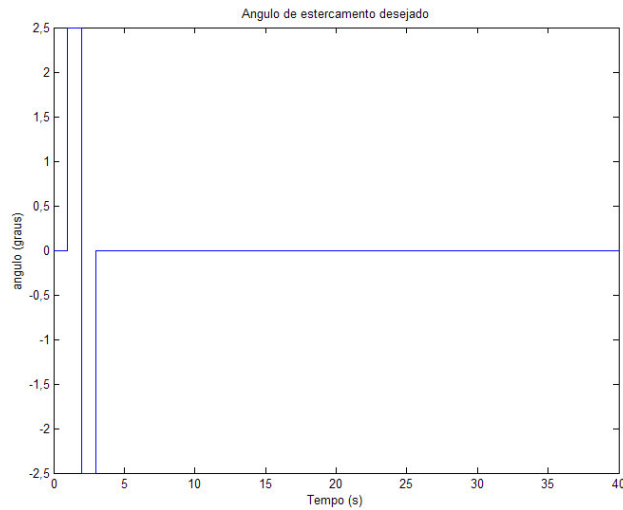


Figura 33 – Função de entrada para o modelo de 8 graus de liberdade

Nesta simulação percebe-se a existência de um resíduo de ângulo de guinada, caracterizando um retorno do veículo ao seu movimento inicial, podendo passar da posição de faixa de rodagem original, com uma eventual saída da pista e passagem para um movimento curvilíneo uniforme, conforme observado na Figura 34. A caracterização deste tipo de comportamento indica uma certa estabilidade do modelo de oito graus de liberdade pois, apesar de o veículo não manter a sua posição após a mudança de faixa, ele segue a trajetória determinada, entre outras variáveis, pelo ângulo de *yaw* que apresenta um valor residual.

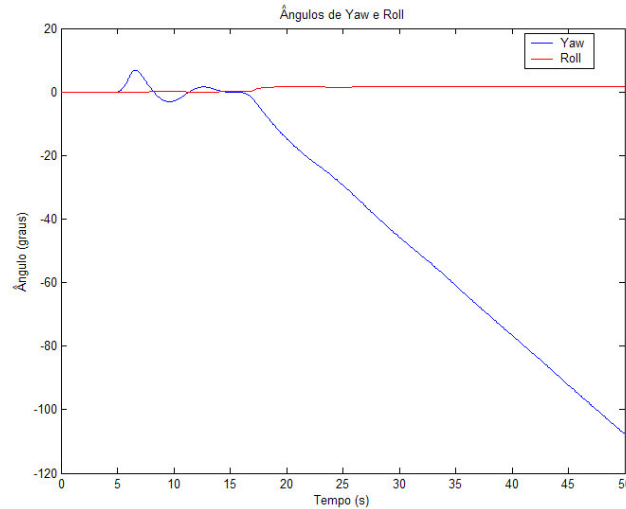


Figura 34 – Ângulo de guinada para mudança de pista

O deslocamento do veículo, representado pelo modelo de oito graus, indica a influência do ângulo de *yaw* residual, que é caracterizada pelo retorno do veículo à sua posição original e, posteriormente, ao continuar a deslocar-se para a esquerda, ultrapassando sua posição inicial, como pode ser observado na Figura 35.

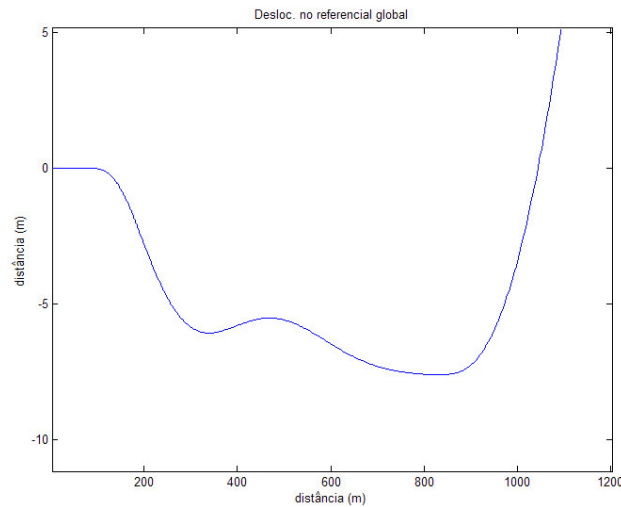


Figura 35 – Deslocamento do modelo de 8 graus de liberdade para a mudança de pista

Ao observar o deslocamento em outra escala, percebe-se a perda de estabilidade e a conseqüente saída da trajetória desejada inicialmente. O veículo passa a desempenhar um movimento curvo para a esquerda, com ângulo de *yaw* negativo, conforme indicado pela Figura 34.

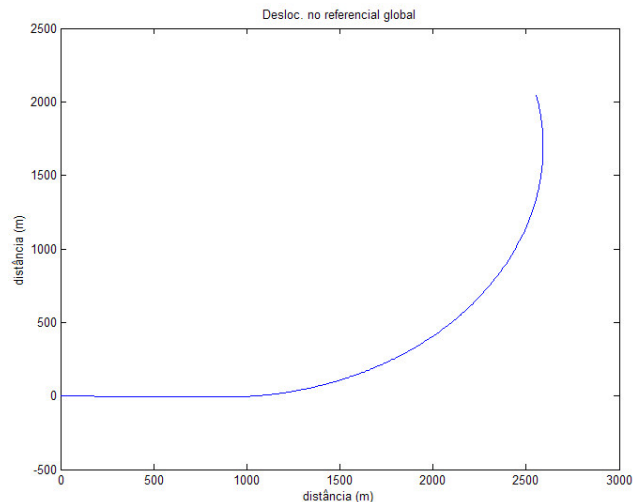


Figura 36 – Visão geral do deslocamento no referencial global

É interessante então, entender o porquê da existência desse resíduo de ângulo de guinada e de velocidade. Ao efetuar o movimento de mudança de faixa, um motorista não fornece quantidades iguais de ângulo de esterçamento para sair de uma pista e entrar em outra. Acaba acontecendo uma compensação gradual para ajustar a posição do veículo de volta à pista. Sendo assim, o ângulo de volta deveria ser menor que o ângulo inicial para sair da pista. A função de entrada deveria se comportar então como uma função amortecida no tempo, que na verdade corresponde à atitude do motorista, desempenhando o papel do controlador. Um segundo fator que pode estar influenciando no desempenho do movimento corresponde à aceleração fornecida o modelo, partindo do repouso. Ao fornecer torque para as rodas estas deslizam com uma deriva longitudinal próxima da totalidade, como pode ser observado na Figura 38. Porém este deslizamento não é igual para todas as rodas, fazendo com que a distribuição de forças que atuam nos pneus seja diferente. Isso explicaria a existência de valores residuais para o ângulo de *yaw*, por exemplo, além da passagem do movimento de mudança de faixa para um movimento para realização de curva de raio constante.

Para melhor avaliar o modelo de oito graus de liberdade em movimentos de mudança de pista e a velocidades longitudinais constantes, são apresentados alguns gráficos de forças e derivas, dispostos na Figura 37, na Figura 38 e na Figura 39. Pode ser observado na Figura 39, o correto jogo compensatório das forças normais, mostrando a variação de cargas durante o movimento de rolagem do veículo, que representa o efeito de uma suspensão passiva, considerada dentro

da modelagem da dinâmica do veículo. O efeito de suspensão corresponde à dinâmica vertical considerada ao longo da modelagem, tanto do modelo com 4 graus de liberdade, quanto do com 8 graus.

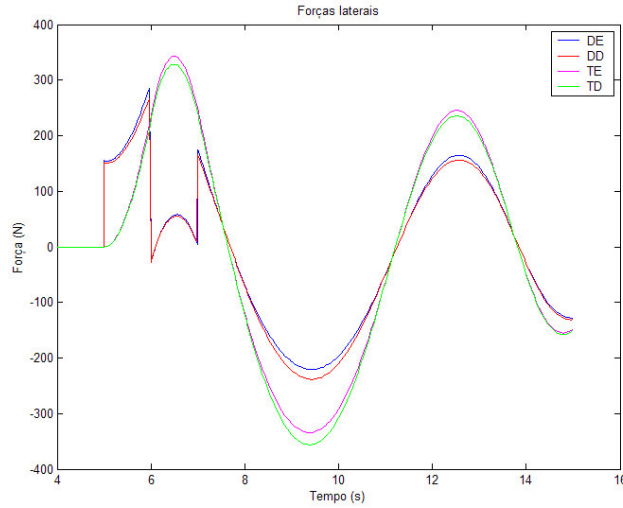


Figura 37 – Forças laterais durante o movimento de mudança de faixa

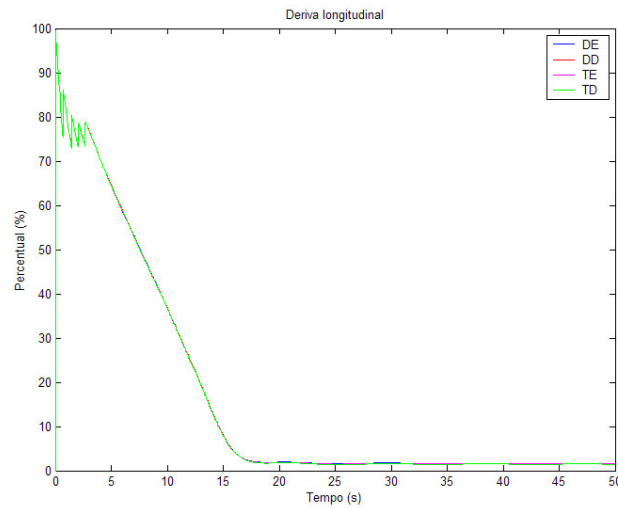


Figura 38 – Deriva longitudinal durante o movimento de mudança de faixa

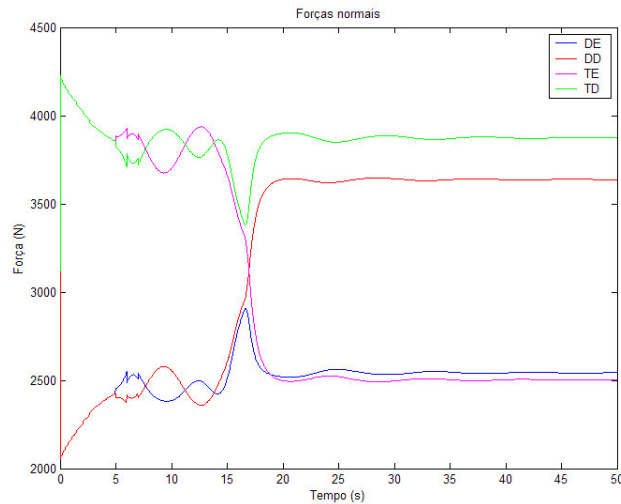


Figura 39 – Forças normais na mudança de faixa

Da mesma forma pode ser percebida na Figura 40 a compensação nas velocidades das rodas, de maneira a reproduzir o comportamento que ocorre no sistema físico real. Em função da geometria de Ackermann e da direção que a curva é feita, para a direita, as velocidades do lado esquerdo do veículo aumentam para compensar a curva e garantir que o veículo cumpra a trajetória, como pode ser observado na Figura 40. As velocidades nas rodas da direita sofrem uma redução proporcional, para auxiliar no movimento.

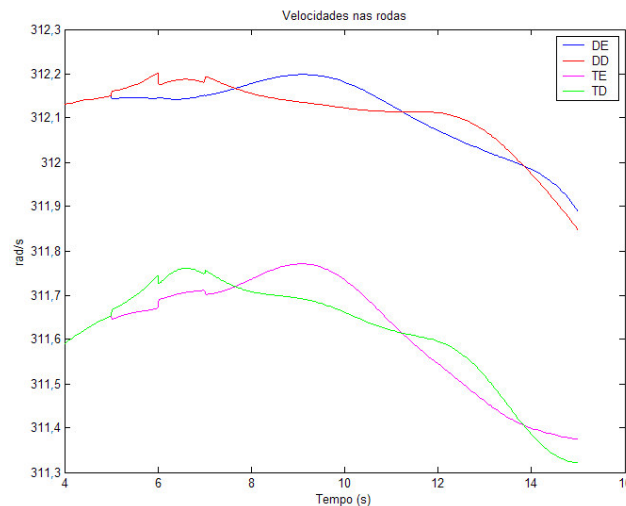


Figura 40 – Compensação de velocidades nas rodas durante a mudança de faixa

Um segundo teste procurou determinar o grau de estabilidade do veículo, no que diz respeito a ele ser sobresterçante ou substerçante. Foram feitos testes

com velocidades constantes, diferentes e de valores crescentes, para um movimento de curva a ângulo de esterçamento constante e igual a 20° . Dessa maneira pretende-se determinar se o modelo de veículo de oito graus de liberdade possui tendência a sair de frente (veículo subesterçante ou “*understeer*”), o que caracterizaria um comportamento estável, ou se possui tendência de sair de traseira (veículo sobresterçante ou “*oversteer*”), caracterizando um comportamento que pode se tornar dinamicamente instável. De acordo com os resultados dispostos na Figura 41 o modelo de oito graus de liberdade usado para o estudo deste trabalho, pode ser classificado como subesterçante pois, à medida que se aumenta a velocidade do carro, aumenta o raio de curvatura de seu movimento.

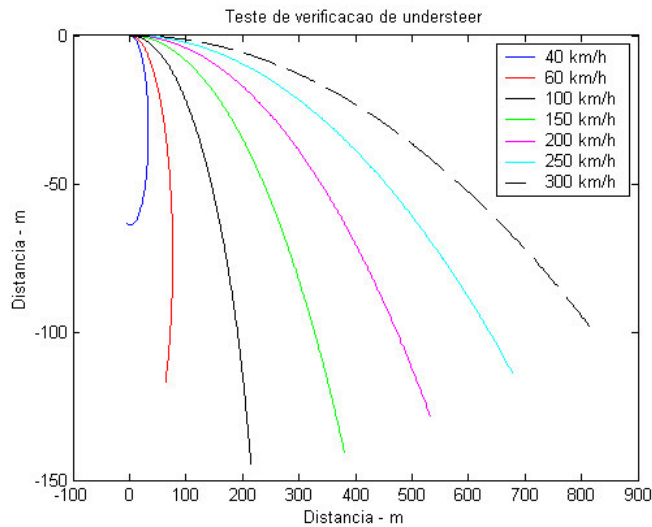


Figura 41 – Teste de estabilidade do modelo de oito graus de liberdade em curva

O modelo de oito graus de liberdade ser subesterçante pode ser encarado como um bom indício, pois pode facilitar o trabalho do controle a ser projetado em um trabalho futuro. No Anexo 1 é apresentada uma tentativa inicial de projeto de controlador para o modelo de oito graus de liberdade, que mostra serem necessárias algumas alterações na modelagem. Todavia, a característica de estabilidade do veículo irá depender da localização do seu centro de massa. Um C.G. localizado mais próximo da dianteira do veículo ocasionará o subesterçamento. Já um C.G. mais próximo da traseira irá propiciar o

sobresterçamento, dificultando o trabalho de qualquer controlador em casos próximos ao limite de estabilidade do veículo.

Um terceiro teste foi efetuado sobre o modelo de oito graus de liberdade, procurando reproduzir a situação de curva de raio constante, também imposta ao modelo de quatro graus de liberdade. Usou-se como parâmetro para a realização do teste um ângulo de esterçamento igual a -2° , sendo indicada no gráfico da Figura 42 a resposta referente ao deslocamento no referencial global fixo.

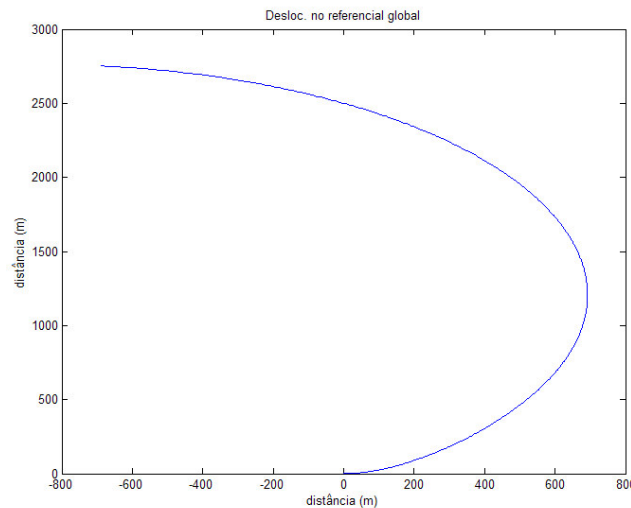


Figura 42 – Deslocamento do modelo 8GL em curva de raio constante

Como era esperado, o modelo apresentou movimento coerente com a entrada que lhe foi passada, um ângulo de esterçamento negativo, impondo um movimento para a esquerda do veículo. Ao acompanhar o desenvolvimento do ângulo de guinada ao longo do tempo, mais uma vez percebe-se o correto funcionamento do modelo que deveria apresentar um gráfico crescente, no sentido negativo já que girou para a esquerda. A Figura 43 apresenta o gráfico dos ângulos de guinada e rolagem. Percebe-se que, em função do movimento que o veículo passa a desempenhar durante a realização da curva, bastante suave, há uma pequena presença do ângulo de rolagem que surge como reação ao tipo de manobra que o carro desempenha.

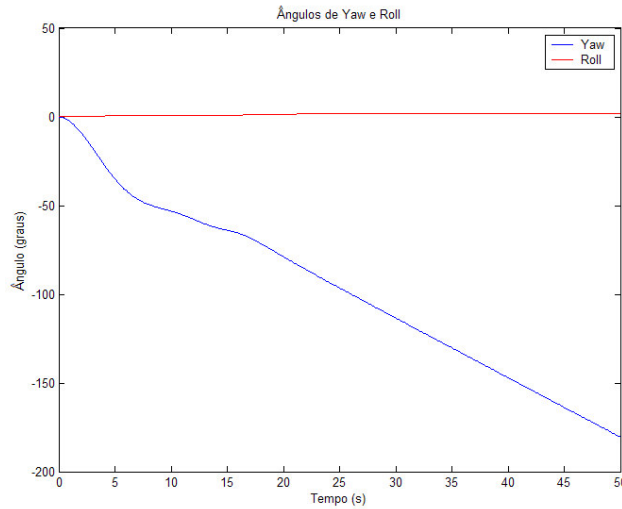


Figura 43 – Ângulos de guinada e rolagem do modelo de 8 graus de liberdade

Em função de haver um pequeno ângulo de rolagem que faz com que o carro gire em torno do seu eixo de rolagem no sentido positivo, como indica o gráfico da Figura 42, deve-se verificar o equilíbrio das forças normais em cada uma das rodas de maneira a constatar essa passagem de carga para as rodas do lado direito. A Figura 44 mostra o gráfico das forças normais para a situação do movimento em curvatura de raio constante.

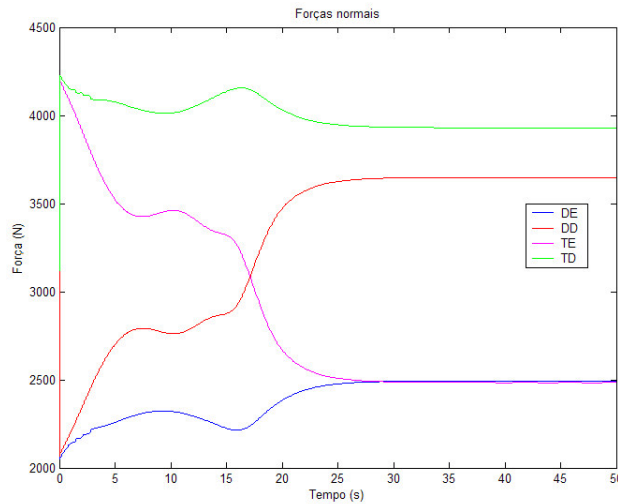


Figura 44 – Forças normais durante o movimento de curva de raio constante

Como era esperado, durante a realização da curva, há uma compensação entre as forças normais do veículo passando maior quantidade de carga para o

lado direito do veículo, conforme pode ser visualizado nas curvas DD e TD do gráfico da Figura 44.

Encerra-se assim a primeira parte deste trabalho que preparou dois modelos, um mais simples (Capítulo 3) com quatro graus de liberdade, e outro mais complexo (Capítulo 4) com oito graus de liberdade e suas não linearidades mantidas. A próxima etapa corresponde a efetuar a análise teórica do controlador não linear que se pretende aplicar sobre os dois modelos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4.