

3 Modelo de Quatro Graus de Liberdade

3.1. Construção do modelo não linear

O primeiro passo corresponde a derivar as equações de movimento que descrevem a dinâmica lateral de um veículo *on road*. Para isso considera-se o veículo composto por três massas distintas: uma suspensa identificada como m_s , ou massa do chassi, e duas massas não-suspensas à frente e à ré do veículo, identificadas como m_{uf} e m_{ur} , massas dos pneus/rodas, respectivamente. A massa total deste veículo é representada pela soma das três massas, e representada por m_{tot} , Equação (3.1).

Considera-se o modelo do veículo inicialmente com 6 graus de liberdade, sendo três de translação e três de rotação no referencial local. Os movimentos de translação correspondem aos deslocamentos em x , y e z . Já os movimentos de rotação correspondem às rotações de *pitch*, *yaw* e *roll*, sendo identificados por suas medidas angulares ρ , θ e ϕ respectivamente. Assim sendo podem ser escritas as primeiras equações de equilíbrio de forças, iniciando o estudo de um modelo não-linear para a dinâmica lateral, Equações (3.2) e (3.4).

$$m_{tot} = m_s + m_{uf} + m_{ur} \quad (3.1)$$

$$F_x = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = m_{tot} a_x \quad (3.2)$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta} \quad (3.3)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = m_{tot} a_y + m_s h_s \ddot{\phi} \quad (3.4)$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta} \quad (3.5)$$

onde F_x representa o somatório das forças que atuam no eixo longitudinal, F_{xi} cada uma das forças presentes nas rodas e a_x a aceleração longitudinal que é

composta por duas parcelas: \ddot{x} e $\dot{y}\dot{\theta}$, conforme explicado adiante. Já F_y representa o somatório das forças laterais, sendo F_{yi} a força em cada uma das rodas. Assim como no eixo longitudinal, a_y representa a aceleração lateral que, por sua vez, é composta por duas parcelas: \ddot{y} e $\dot{x}\dot{\theta}$, a serem tratadas a seguir.

As Equações (3.3) e (3.5) são obtidas para pequenos ângulos, como descrito em [1], páginas 359-360. A dedução das acelerações em x e y aparece por prova geométrica, para pequenas variações angulares, ao longo de uma trajetória curvilínea.

Como pode ser observado na Figura 15, a variação em x pode ser descrita como

$$\Delta V_x = V_x \cos \Delta\theta + \Delta V_x \cos \Delta\theta - V_x - V_y \sin \Delta\theta - \Delta V_y \sin \Delta\theta \quad (3.6)$$

$$\frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \dot{V}_x + \frac{\Delta V_x}{\Delta t} - V_x - V_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (3.7)$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta} \quad (3.8)$$

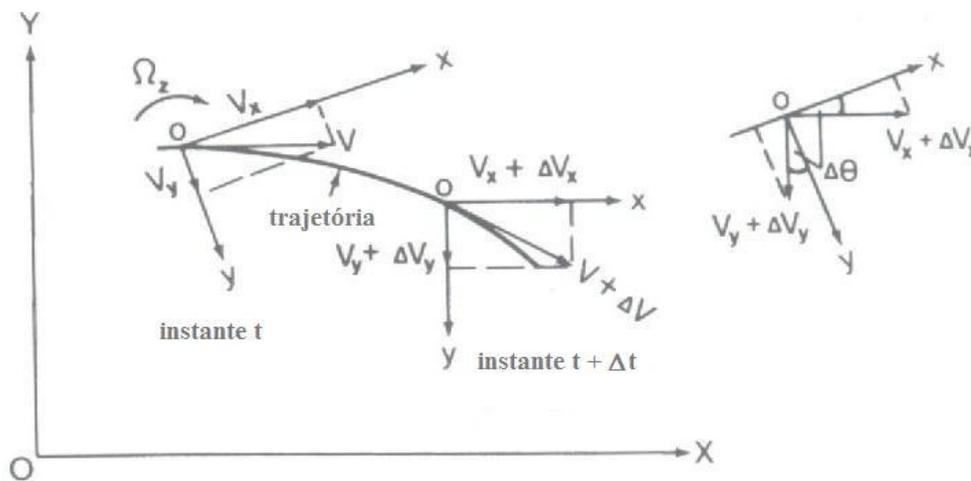


Figura 15 – Determinando as acelerações em x e y

Considerando-se a variação angular pequena e negligenciando-se o termo de variação de velocidade em y, obtém-se o resultado demonstrado pelas Equações (3.6) a (3.8). De maneira similar, deduz-se a aceleração em y.

$$\Delta V_y = V_y \cos \Delta\theta + \Delta V_y \cos \Delta\theta - V_y + V_x \sin \Delta\theta + \Delta V_x \sin \Delta\theta \quad (3.9)$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta t} = V_y + \frac{\Delta V_y}{\Delta t} - V_y + V_x \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (3.10)$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta} \quad (3.11)$$

Voltando ao equacionamento do movimento do carro, cabe agora escrever as equações de torque, tanto para o movimento de *yaw* (em torno do eixo vertical) quanto para o movimento de *roll* (em torno do eixo longitudinal). Para este modelo, além de serem considerados apenas movimentos com pequena variação angular, leva-se em conta que o veículo está a uma velocidade longitudinal constante. Sendo assim despreza-se qualquer variação para o movimento de *pitch* do carro (rotação em torno do eixo lateral).

Levando-se em consideração as forças atuantes nos pneus, em x e y, mais os braços de alavanca existentes, que descrevem as bitolas e as distâncias do CG aos eixos, é possível escrever uma relação para o somatório de momentos referentes ao movimento de *yaw* do veículo (θ), Equação (3.12).

$$\Gamma = aF_{y1} + \frac{t_f}{2} F_{x1} + aF_{y2} - \frac{t_f}{2} F_{x2} - bF_{y3} + \frac{t_r}{2} F_{x3} - bF_{y4} - \frac{t_r}{2} F_{x4} \quad (3.12)$$

$$\Gamma = I_z \ddot{\theta} \quad (3.13)$$

onde a representa a distância entre o CG e o eixo dianteiro, t_f representa a bitola do eixo dianteiro, b representa a distância entre o CG e o eixo traseiro, t_r representa a bitola do eixo traseiro e I_z representa o momento de inércia em torno do eixo Z . A Figura 16 representa o diagrama de corpo livre indicativo das forças laterais e longitudinais que, combinadas, resultam na Equação (3.12).

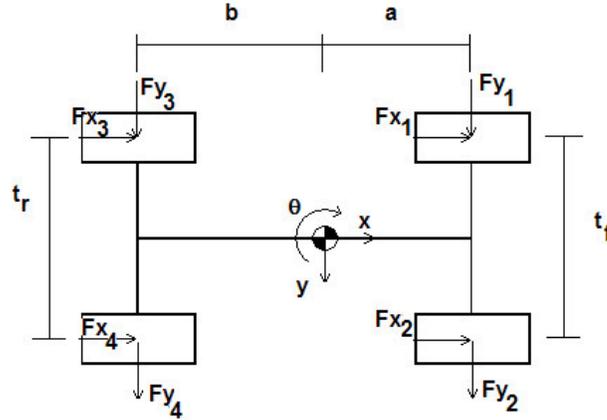


Figura 16 – Diagrama de corpo livre para equilíbrio de torques

Já para o equacionamento de momentos no movimento de rolagem, é preciso considerar o amortecimento e a rigidez de rolagem (β_{roll} , κ_{roll}), que dependem dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões (B_f , B_r , K_f , K_r) mais as bitolas traseira e dianteira, Equações (3.14) e (3.15).

$$\beta_{roll} = \frac{1}{2}(B_f t_f^2 + B_r t_r^2) \quad (3.14)$$

$$\kappa_{roll} = \frac{1}{2}(K_f t_f^2 + K_r t_r^2) \quad (3.15)$$

A equação que relaciona o momento para o movimento de rolagem é descrita como

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + \beta_{roll} \dot{\varphi} + \kappa_{roll} \varphi = m_s g h_s \sin \varphi - m_s (\ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}) h_s \cos \varphi \quad (3.16)$$

ou considerando $\varphi \rightarrow 0$,

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + \beta_{roll} \dot{\varphi} + \kappa_{roll} \varphi \approx m_s g h_s \varphi - m_s (\ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}) h_s \quad (3.17)$$

onde I_{roll} representa o momento de inércia de rolagem do veículo, h_s representa a altura entre o CG e o centro de rolagem, g a aceleração da gravidade, e φ o ângulo de rolagem (*roll*).

A passagem da Equação (3.16) para a (3.17) só pode ser feita se consideradas pequenas variações angulares de φ . Uma observação deve ser feita neste ponto no que diz respeito ao primeiro termo do lado direito da Equação

(3.16). Este termo corresponde à força peso proveniente da massa suspensa do veículo. Para a Equação (3.17) o peso gera um momento estabilizador do sistema pois a relação

$$h_s \operatorname{sen} \varphi > \frac{t_f}{2} \quad (3.18)$$

que relaciona o braço de alavanca do peso da massa suspensa, com metade da bitola dianteira, é obedecida. Quando φ for grande o suficiente, tal que (3.18) não seja mais garantida, passa a existir uma situação que favorece a capotagem do veículo ou o movimento de *rollover*, sendo o termo correspondente ao peso, instabilizador. A constante h_s corresponde à altura da massa suspensa ao eixo de rolagem.

Uma vez escritas as quatro equações de movimento do modelo não linear do veículo, Equações (3.2), (3.4), (3.13) e (3.17), é possível agrupá-las na forma de espaço-estado, sendo o vetor de estado composto pelas velocidades em x , y , de guinada (*yaw*) e de rolagem (*roll*) – $[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}]^T$, resultando nas Equações (3.19) a (3.22).

$$F_x + m_{tot} \dot{y} \dot{\theta} = m_{tot} \ddot{x} \quad (3.19)$$

$$F_y - m_{tot} \dot{x} \dot{\theta} = m_{tot} \ddot{y} + m_s h_s \ddot{\varphi} \quad (3.20)$$

$$\Gamma = I_z \ddot{\theta} \quad (3.21)$$

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + m_s h_s \dot{y} = m_s h_s g \varphi - m_s h_s \dot{x} \dot{\theta} - \beta_{roll} \dot{\varphi} - \kappa_{roll} \varphi \quad (3.22)$$

Escrevendo a equação de movimento

$$M\ddot{x} = F(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \varphi) + F_C \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} m_{tot} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{tot} & 0 & m_s h_s \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ 0 & m_s h_s & 0 & I_{roll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{tot} \dot{y} \dot{\theta} \\ -m_{tot} \dot{x} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\beta_{roll} \dot{\varphi} - \kappa_{roll} \varphi + m_s g h_s \varphi - m_s h_s \dot{x} \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Na Equação (3.23), o termo F_C corresponde às forças ou momentos de controle, que são fornecidas como funções de entrada do sistema e conhecidas

como ângulos de esterçamento dianteiro, traseiro e o deslocamento do pedal de freio - δ_f , δ_r e δ_b respectivamente.

Conhecidas as equações de movimento, em sua forma de espaço-estado, é preciso expandir as funções de entrada - F_x , F_y e Γ - para que se conheça quais as forças que realmente estão atuando no carro.

3.1.1. Modelagem do pneu

Para este trabalho será usado, inicialmente, um modelo não-linear para os pneus. Uma primeira etapa corresponde a descrever os ângulos de deriva. A seguir são escritas as forças laterais, seguido das forças normais e suas componentes (carga devido à rolagem, carga provocada pela massa suspensa, carga ocasionada pela massa não-suspensa, carga devido à ação de forças longitudinais e carga estática). Esse processo é realizado para cada pneu separadamente sendo que a composição de cargas irá gerar F_x , F_y e Γ , as funções de entrada passadas ao modelo dinâmico do veículo.

O ângulo de deriva corresponde à diferença entre a trajetória pretendida pelo motorista, que atua sobre o carro ao alterar os ângulos de esterçamento, e a trajetória realmente cumprida. De acordo com a referência [3], página 169, as equações para os ângulos de deriva em cada pneu correspondem às Equações (3.25) a (3.28) para os pneus, dianteiro esquerdo (DE), dianteiro direito (DD), traseiro esquerdo (TE) e traseiro direito (TD) respectivamente, conforme observado na Figura 17.

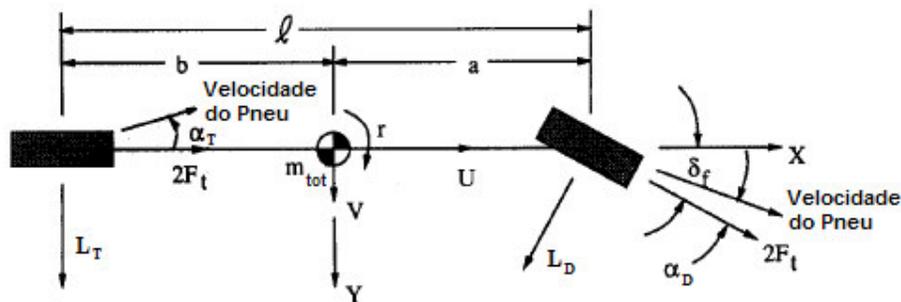


Figura 17 – Identificação dos ângulos de deriva

$$\alpha_{DE} = \delta_f - tg^{-1} \left(\frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (3.25)$$

$$\alpha_{DD} = \delta_f - tg^{-1} \left(\frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (3.26)$$

$$\alpha_{TE} = \delta_r + tg^{-1} \left(\frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (3.27)$$

$$\alpha_{TD} = \delta_r + tg^{-1} \left(\frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (3.28)$$

onde δ_f representa o ângulo de esterçamento dianteiro, aplicado às rodas dianteiras e δ_r o ângulo de esterçamento traseiro. Cada uma das variáveis α definidas nas Equações (3.25) a (3.28) representam o ângulo de deriva que aparece em cada um dos pneus, dianteiros e traseiros.

O passo a seguir é escrever a equação para as forças laterais (L_i), que dependem dos ângulos de deriva e da rigidez lateral em curvas dos pneus, Equação (3.29). Tais equações são melhor abordadas no Capítulo 2, quando é feito o desenvolvimento analítico para força lateral, atuantes em cada pneu.

$$L_i = \frac{C_a tg \alpha_i}{1 - \lambda_s} f(S) \quad \therefore \quad i = DE, DD, TE, TD \quad (3.29)$$

onde $f(S)$ é a relação de aderência característica do pneu, descrita por:

$$f(S) = \begin{cases} S(2-S) & \text{se } S \leq 1 \\ 1 & \text{se } S > 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$S = \frac{\mu F_{Ni} \left(1 - \varepsilon_r U \sqrt{\lambda_s^2 + tg^2 \alpha_i} \right)}{2 \sqrt{C_x^2 \lambda_s^2 + C_a^2 tg^2 \alpha_i}} (1 - \lambda_s) \quad (3.31)$$

onde as constantes das Equações (3.29), (3.30) e (3.31) são definidas em [2] e [3], como

- μ - Coeficiente de Aderência à Pista
- F_{Ni} - Força Normal do i -ésimo pneu
- ε_r - Fator de Redução da Aderência da Pista
- U - Velocidade Longitudinal
- λ_s - Deriva Longitudinal
- C_α - Rigidez Lateral
- α_i - Ângulo de Deriva do i -ésimo Pneu

Uma diferença da abordagem de pneus adotada aqui para aquela do capítulo anterior, corresponde à existência de um fator de redução da aderência do pneu à pista, ε_r , que pode ser entendido como um fator de rendimento do pneu. Este fator é aplicado à relação de aderência característica do pneu, que aparece explicitado na Equação (3.30). No Capítulo 2 esta relação de aderência, $f(S)$, faz parte do modelo analítico para as forças atuantes no pneu, embora seja necessária a condição definida na Equação (3.30), para que as curvas das forças sejam geradas de maneira correta. Tal restrição visa identificar o percentual da banda de rodagem do pneu que efetivamente está em aderência com o solo. Quando a condição expressa na Equação (3.30) alcança o valor máximo igual a 1 significa, que, a área de contato do pneu com o solo está em regime de total aderência.

O próximo passo é identificar quem são as forças normais de cada pneu. O modelo adotado neste estudo segue o que foi abordado em [4], [5] e [6]. As forças normais são compostas pelas transferências de cargas devidas aos movimentos laterais, identificadas como carga devida à rolagem do corpo do veículo (F_{rf} , F_{rr}), carga devida à altura do centro de rolagem (F_{hf} , F_{hr}), e carga devida à massa não-suspensa (F_{uf} , F_{ur}). Há ainda outras duas componentes sendo a primeira uma carga normal devida à ação de frenagem (F_{bf} , F_{br}), e uma segunda proveniente das cargas estáticas que agem sobre os pneus (F_{Nsf} , F_{Nsr}), Equações (3.32) a (3.41) respectivamente.

$$F_{rf} = \frac{\kappa_f h_s m_s a_y}{\kappa_{roll} t_f} \quad (3.32)$$

$$F_{rr} = \frac{\kappa_r h_s m_s a_y}{\kappa_{roll} t_r} \quad (3.33)$$

$$F_{hf} = \frac{m_s b h_f a_y}{t_f (a + b)} \quad (3.34)$$

$$F_{hr} = \frac{m_s a h_r a_y}{t_r (a + b)} \quad (3.35)$$

$$F_{uf} = m_{uf} a_y \frac{h_f}{t_f} \quad (3.36)$$

$$F_{ur} = m_{ur} a_y \frac{h_r}{t_r} \quad (3.37)$$

Estes três primeiros pares de equação equivalem às transferências de cargas laterais reunidas aos movimentos, sendo o primeiro da carga de rolagem do corpo; a segunda, da carga devido à altura do centro de rolagem; e a terceira devido à massa não-suspensa. Os próximos dois pares, Equações (3.38) e (3.39) e Equações (3.40) e (3.41), trazem as cargas devido à frenagem e estática.

$$F_{bf} = (m_{uf} h_f + m_s h_{cg} + m_{ur} h_r) \frac{a_x}{a + b} \quad (3.38)$$

$$F_{br} = -(m_{uf} h_f + m_s h_{cg} + m_{ur} h_r) \frac{a_x}{a + b} = -F_{bf} \quad (3.39)$$

$$F_{Nsf} = \frac{b m_{tot} g}{a + b} \quad (3.40)$$

$$F_{Nsr} = \frac{a m_{tot} g}{a + b} \quad (3.41)$$

onde h_f representa a altura da massa suspensa dianteira, h_{CG} representa a altura do CG e h_r representa a altura da massa suspensa traseira.

Nas equações (3.32) e (3.33), κ_{roll} representa a rigidez de rolagem do modelo e é descrita conforme indicado nas Equações (3.42) a (3.44) a seguir,

$$\kappa_{roll} = \kappa_f + \kappa_r \quad (3.42)$$

$$\kappa_f = \frac{1}{2} K_f t_f^2 \quad (3.43)$$

$$\kappa_r = \frac{1}{2} K_r t_r^2 \quad (3.44)$$

onde κ_f e κ_r representam os termos de rigidez de rolagem e os termos K_f e K_r representam a rigidez das suspensões, dianteira e traseira respectivamente.

Escrevendo as equações para as forças normais em cada pneu, baseado em suas componentes, encontram-se as seguintes relações,

$$F_{NDE} = F_{rf} + F_{hf} + F_{uf} - \frac{1}{2} F_{bf} + \frac{1}{2} F_{Nsf} \quad (3.45)$$

$$F_{NDD} = -F_{rf} - F_{hf} - F_{uf} - \frac{1}{2} F_{bf} + \frac{1}{2} F_{Nsf} \quad (3.46)$$

$$F_{NTE} = F_{rr} + F_{hr} + F_{ur} - \frac{1}{2} F_{br} + \frac{1}{2} F_{Nsr} \quad (3.47)$$

$$F_{NTD} = -F_{rr} - F_{hr} - F_{ur} - \frac{1}{2} F_{br} + \frac{1}{2} F_{Nsr} \quad (3.48)$$

Uma vez escritas todas as relações que formam as equações de forças nos pneus, passa a ser possível escrever as forças em x, y e o momento resultante. Ao observar a Figura 18, pode-se ver que resultantes irão formar cada uma das funções de entrada, ainda dependentes das variáveis de entrada do sistema (os ângulos de esterçamento dianteiro e traseiro e o deslocamento do pedal de freio). De acordo com a Figura 18, cada uma das componentes em x, y e do momento, de cada um dos pneus, é descrita conforme equacionamento a seguir, representado pelas Equações (3.49) a (3.52).

$$F_{xDE} = -C_{DE} \delta_b \cos \delta_f - L_{DE} \sin \delta_f \quad (3.49)$$

$$F_{xDD} = -C_{DD} \delta_b \cos \delta_f - L_{DD} \sin \delta_f \quad (3.50)$$

$$F_{xTE} = -C_{TE} \delta_b \cos \delta_r - L_{TE} \sin \delta_r \quad (3.51)$$

$$F_{xTD} = -C_{TD} \delta_b \cos \delta_r - L_{TD} \sin \delta_r \quad (3.52)$$

Ao longo das Equações (3.49) a (3.52) aparece uma nova constante, identificada por C_i , ($i = DE, DD, TE$ ou TD), que representa a rigidez de frenagem de cada um dos quatro pneus separadamente.

A força em x, representada pela Equação (3.53), corresponde ao somatório das relações descritas em (3.49) a (3.52).

$$F_x = -(C_{DE} + C_{DD})\delta_b \cos \delta_f - (C_{TE} + C_{TD})\delta_b \cos \delta_r - (L_{DE} + L_{DD}) \text{sen } \delta_f - (L_{TE} + L_{TD}) \text{sen } \delta_r \quad (3.53)$$

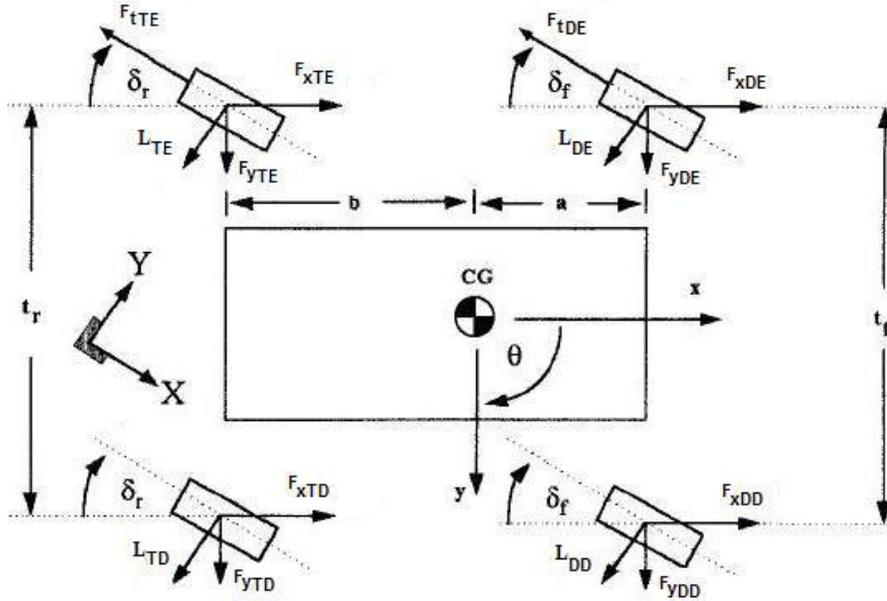


Figura 18 – Orientação de componentes das forças nos pneus

Em y cada parcela ficaria como indicado nas equações (3.54) a (3.57)

$$F_{yDE} = -C_{DE}\delta_b \text{sen } \delta_f - L_{DE} \cos \delta_f \quad (3.54)$$

$$F_{yDD} = -C_{DD}\delta_b \text{sen } \delta_f - L_{DD} \cos \delta_f \quad (3.55)$$

$$F_{xTE} = -C_{TE}\delta_b \text{sen } \delta_r - L_{TE} \cos \delta_r \quad (3.56)$$

$$F_{xTD} = -C_{TD}\delta_b \text{sen } \delta_r - L_{TD} \cos \delta_r \quad (3.57)$$

Sendo a força em y representada pela equação (3.58) a seguir.

$$F_y = -(C_{DE} + C_{DD})\delta_b \text{sen } \delta_f - (C_{TE} + C_{TD})\delta_b \text{sen } \delta_r - (L_{DE} + L_{DD}) \cos \delta_f - (L_{TE} + L_{TD}) \cos \delta_r \quad (3.58)$$

O momento aplicado por cada pneu em particular é descrito a seguir pelas equações (3.59) a (3.62).

$$\Gamma_{DE} = -\delta_b C_{DE} a \text{sen } \delta_f - \delta_b C_{DE} \frac{t_f}{2} \cos \delta_f + a L_{DE} \cos \delta_f - \frac{t_f}{2} L_{DE} \text{sen } \delta_f \quad (3.59)$$

$$\Gamma_{DD} = -\delta_b C_{DD} a \text{sen } \delta_f + \delta_b C_{DD} \frac{t_f}{2} \cos \delta_f + a L_{DD} \cos \delta_f - \frac{t_f}{2} L_{DD} \text{sen } \delta_f \quad (3.60)$$

$$\Gamma_{TE} = \delta_b C_{TE} b \sin \delta_r - \delta_b C_{TE} \frac{t_r}{2} \cos \delta_r - b L_{TE} \cos \delta_r - \frac{t_r}{2} L_{TE} \sin \delta_r \quad (3.61)$$

$$\Gamma_{TD} = \delta_b C_{TD} b \sin \delta_r + \delta_b C_{TD} \frac{t_r}{2} \cos \delta_r - b L_{TD} \cos \delta_r - \frac{t_r}{2} L_{TD} \sin \delta_r \quad (3.62)$$

O momento total em torno do CG, Equação (3.63), assim como as forças em x e y, corresponde à soma das quatro parcelas apresentadas pelas Equações (3.59) a (3.62).

$$\Gamma = \Gamma_{DE} + \Gamma_{DD} + \Gamma_{TE} + \Gamma_{TD} \quad (3.63)$$

Ao considerar-se pequenos deslocamentos angulares, e usando as aproximações para senos e cossenos, permite-se uma simplificação das equações (3.53), (3.58) e (3.63). Tal simplificação pode ser visualizada nas Equações (3.64) a (3.66) e servirá como sinais de entrada para as simulações realizadas adiante.

$$F_x = -(C_{DE} + C_{DD} + C_{TE} + C_{TD})\delta_b - (L_{DE} + L_{DD})\delta_f - (L_{TE} + L_{TD})\delta_r \quad (3.64)$$

$$F_y = -(C_{DE} + C_{DD})\delta_b \delta_f - (C_{TE} + C_{TD})\delta_b \delta_r + (L_{DE} + L_{DD} + L_{TE} + L_{TD}) \quad (3.65)$$

$$\Gamma = -\delta_b \left[C_{DE} \left(a\delta_f + \frac{t_f}{2} \right) + C_{DD} \left(a\delta_f - \frac{t_f}{2} \right) - C_{TE} \left(b\delta_r - \frac{t_r}{2} \right) - C_{TD} \left(b\delta_r + \frac{t_r}{2} \right) \right] \\ + a(L_{DE} + L_{DD}) - b(L_{TE} + L_{TD}) + \frac{t_f \delta_f}{2} (L_{DD} - L_{DE}) + \frac{t_r \delta_r}{2} (L_{TD} - L_{TE}) \quad (3.66)$$

Feita a modelagem dos pneus e a descrição das forças e momentos atuantes no veículo, os resultados podem ser incorporados ao modelo global da dinâmica lateral.

3.1.2.

Simplificando o modelo não linear para a dinâmica lateral

Conhecendo as componentes F_x , F_y e Γ torna-se possível continuar com o desenvolvimento do modelo não-linear, descritivo da dinâmica do veículo. Assim sendo, retorna-se à Equação (3.24). Invertendo a matriz de inércia desta equação tem-se

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{tot}} & 0 & 0 & 0 \\ m_{tot} & \frac{I_{roll}}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} & 0 & \frac{-m_s h_s}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} & 0 \\ 0 & \frac{-m_s h_s}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} & 0 & \frac{m_{tot}}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

e

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{y}\dot{\theta}}{m_s h_s \beta_{roll} \dot{\phi} + m_s h_s (\kappa_{roll} - m_s h_s g)\phi} \\ \frac{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2}{0} \\ \frac{m_{tot}(m_s h_s g \phi - \beta_{roll} \dot{\phi} - \kappa_{roll})}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{F_x}{m_{tot}} \\ \frac{F_y I_{roll}}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} \\ \frac{\Gamma}{I_z} \\ \frac{-F_y m_s h_s}{m_{tot}I_{roll} - (m_s h_s)^2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

A Equação (3.68) representa o modelo não-linear feito a partir de um referencial local, situado no próprio veículo e com os pneus incluídos. Isso não é interessante, sob ponto de vista de controle, pois o que se pretende é garantir que o sistema real possa sofrer ação de atuadores (elétricos, pneumáticos, hidráulicos ou outro qualquer) instalados no veículo, de maneira a seguir uma dada trajetória, fixa no espaço. Neste caso, a trajetória corresponde à pista onde o veículo se locomove e a função do controle será garantir que este percurso fixo seja cumprido. Para tanto é necessário transformar o modelo descrito pela Equação (3.68) para um referencial global, fixo no espaço. Esta transformação é feita ao considerar-se as velocidades longitudinal e lateral do referencial global, mostrada na Equação (3.69).

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{Y} = -\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta \end{cases} \quad (3.69)$$

A partir de então passa a ser possível escrever o modelo não-linear em forma de espaço estado. Expande-se o vetor de estados, renomeando-o, de maneira a comportar deslocamentos e velocidades, lineares e angulares, e os deslocamentos no referencial global. Também renomeia-se o vetor de entradas de maneira a facilitar a descrição do modelo, indicado na Equação (3.70).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ X \\ Y \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Ao juntar as Equações (3.64) a (3.66) e (3.68) a (3.70), tem-se o modelo não-linear completo, descritivo do comportamento da dinâmica lateral do veículo, como observado na Equação (3.71). Neste equacionamento não aparecem explícitas as funções de entrada δ_f , δ_r e δ_b , respectivamente os ângulos de esterçamento dianteiro e traseiro e o deslocamento do pedal do freio, que estão embutidas no equacionamento para as forças longitudinal (3.64), lateral (3.65) e para o momento total em torno do CG (3.66). A seguir esse modelo será simplificado, permitindo o projeto de um controlador a ser testado também no modelo não-linear.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 x_6 + \frac{F_x}{m_{tot}} \\ -x_2 x_6 + \frac{\left[m_s h_s \kappa_{roll} - (m_s h_s)^2 g \right] x_7 + m_s h_s \beta_{roll} x_8 + I_{roll} F_y}{m_{tot} I_{roll} - (m_s h_s)^2} \\ \frac{x_6}{\Gamma} \\ \frac{x_8}{I_z} \\ \frac{m_{tot} \left[(m_s h_s g - \kappa_{roll}) x_7 - \beta_{roll} x_8 \right] - m_s h_s F_y}{m_{tot} I_{roll} - (m_s h_s)^2} \\ x_2 \cos x_5 - x_4 \sin x_5 \\ -x_2 \sin x_5 - x_4 \cos x_5 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Com o objetivo de simplificar o modelo descrito em (3.71) e permitir uma melhor análise da situação, são feitas considerações sobre algumas constantes intrínsecas ao sistema. Tais considerações são tomadas levando-se em conta que o veículo se movimenta para frente a uma velocidade constante U, que as distâncias

das massas suspensas, h_s , e não-suspensas, h_f e h_r , são desprezíveis e que o ângulo de esterçamento das rodas traseiras, δ_r , é bastante pequeno, podendo ser descartado. Assim sendo, duas das três entradas do sistema, δ_r e δ_b , deixam de existir. Como a saída de interesse é o deslocamento global em Y , o sistema simplificado será SISO linear, pois também é mantida a suposição de deslocamentos angulares pequenos permitindo a aproximação por senos e cossenos, já usada anteriormente. As considerações usadas para simplificação do modelo são listadas a seguir:

$$h_s = h_r = h_f = 0 \text{ (altura das massas suspensa e não-suspensa);}$$

$\delta_b = u_3 = 0$ (deslocamento do pedal de freio a velocidade longitudinal constante);

$$\lambda_s = 0 \text{ (deriva longitudinal a velocidade longitudinal constante);}$$

$$\dot{x} = x_2 = U \text{ (velocidade longitudinal constante);}$$

$$\delta_r = u_2 = 0 \text{ (ângulo de esterçamento traseiro);}$$

Ao aplicar tais considerações às equações de forças, passadas como funções de entrada do sistema, consegue-se uma simplificação do modelo, com as equações das forças em x , y e do momento, reescritas como.

$$F_x = -(L_{DE} + L_{DD})\delta_f \quad (3.72)$$

$$F_y = L_{DE} + L_{DD} + L_{TE} + L_{TD} \quad (3.73)$$

$$\Gamma = a(L_{DE} + L_{DD}) + \frac{t_f \delta_f}{2} (L_{DD} - L_{DE}) - b(L_{TE} + L_{TD}) \quad (3.74)$$

Faz-se uma suposição adicional ao não se considerar a geometria de Ackermann [9], como aparece indicada na Figura 19, para a definição dos ângulos de esterçamento das rodas dianteira direita e esquerda. Para ambas, os valores dos ângulos são iguais, passando a haver somente dois ângulos de deriva, um frontal e outro traseiro, conforme indicam as Equações (3.75) e (3.76), caracterizando o modelo simplificado da bicicleta, bastante usado para ilustração do comportamento de veículos (vide [2] e [3] como exemplos).

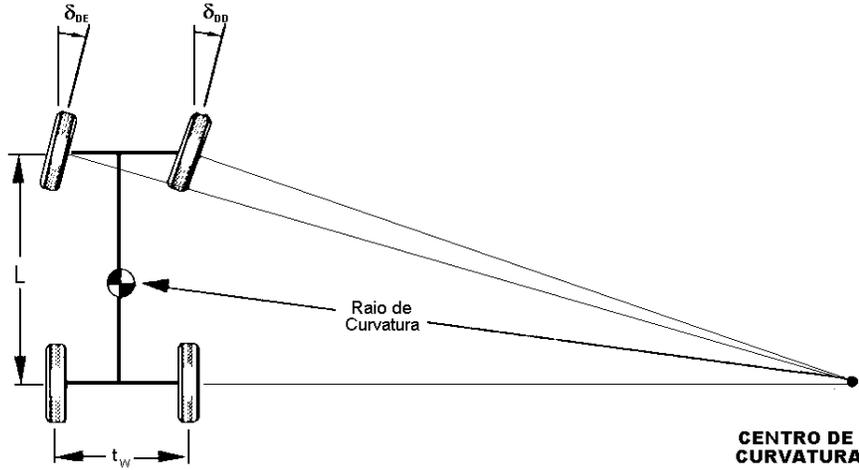


Figura 19 – Geometria de Ackermann

$$\alpha_f = u_1 - \frac{x_4 + ax_6}{U} \tag{3.75}$$

$$\alpha_r = u_1 - \frac{x_4 + ax_6}{U} \tag{3.76}$$

onde U corresponde à velocidade longitudinal, constante, do veículo.

A última simplificação é feita para as forças laterais L_i , onde se considera a aproximação para pequenos deslocamentos angulares. Como a deriva longitudinal é nula, as novas equações para forças laterais ficam escritas como

$$L_{DE} = L_{DD} = C_f \alpha_f \tag{3.77}$$

$$L_{TE} = L_{TD} = C_r \alpha_r \tag{3.78}$$

onde C_f e C_r correspondem aos antigos coeficientes de rigidez dos pneus, C_{DE} , C_{DD} e C_{TE} , C_{TD} respectivamente.

Ao juntar as Equações (3.72) a (3.78), tem-se a simplificação completa das forças de excitação do sistema, provenientes da modelagem dos pneus realizada nas Equações (3.79) a (3.81).

$$F_x = -u_1 2C_f \left(u_1 - \frac{x_4 + ax_6}{U} \right) \tag{3.79}$$

$$F_y = 2C_f \left(u_1 - \frac{x_4 + ax_6}{U} \right) + 2C_r \left(\frac{bx_6 - x_4}{U} \right) \tag{3.80}$$

$$\Gamma = 2aC_f \left(u_1 - \frac{x_4 + ax_6}{U} \right) - 2bC_r \left(\frac{bx_6 - x_4}{U} \right) \tag{3.81}$$

Ao olhar a Equação (3.71) novamente, agora com as considerações usadas para efetuar a simplificação do modelo, percebe-se que algumas relações do sistema de equações diferenciais perderam o sentido, levando a Equação (3.82).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ x_4 \\ -Ux_6 + \frac{F_y}{m_{tot}} \\ x_6 \\ \frac{\Gamma}{I_z} \\ x_8 \\ \frac{-\beta_{roll}x_8 - \kappa_{roll}x_7}{I_{roll}} \\ x_2 \cos x_5 - x_4 \sin x_5 \\ -x_2 \sin x_5 - x_4 \cos x_5 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

De acordo com o novo sistema de equações diferenciais, podem ser desconsideradas a 1ª e a 2ª linhas do sistema de Equações (3.82), por serem constantes; a 3ª por ter perdido o sentido realizar a integração da velocidade lateral local (x_4); a 7ª e a 8ª linhas, por constituírem um sistema interno, dependentes somente das variáveis x_7 e x_8 , variáveis de rolagem, sendo aqui considerado um movimento de pequena amplitude e, portanto, desprezível; e a 9ª linha da Equação (3.82) por representar o deslocamento longitudinal global, o que não interessa inicialmente pelo fato do carro estar em movimento com velocidade constante. Assim sendo o novo sistema de equações diferenciais, representativo do modelo simplificado, é escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ux_6 + \frac{F_y}{m_{tot}} \\ x_6 \\ \frac{\Gamma}{I_z} \\ -U \sin x_5 - x_4 \cos x_5 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Ao substituir (3.80) e (3.81) em (3.83) e considerar pequenos deslocamentos para o ângulo de *yaw*, representado pela variável x_5 , o novo sistema de equações diferenciais pode ser escrito em forma de espaço estado, como indicado na Equação (3.84).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(C_f + C_r)}{m_{tot}U} & 0 & \frac{-2(aC_f - bC_r) - m_{tot}U^2}{m_{tot}U} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2(aC_f - bC_r)}{I_z U} & 0 & \frac{-2(a^2C_f + b^2C_r)}{I_z U} & 0 \\ -1 & -U & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m_{tot}} \\ 0 \\ \frac{2aC_f}{I_z} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \quad (3.84)$$

As constantes usadas em [2] e [3], empregadas aqui para compor o modelo da dinâmica lateral de um veículo em particular, correspondem aos seguintes valores numéricos:

$$\begin{aligned} C_f &= C_r = 20000 \text{ N/rad}; \\ m_{tot} &= m_s + m_{uf} + m_{ur} = 1280 + 119 + 96 = 1495 \text{ kg}; \\ U &= 18,3 \text{ m/s} \approx 65,88 \text{ km/h}; \\ a &= 1,203 \text{ m}; \\ b &= 1,217 \text{ m}; \\ I_z &= 2500 \text{ kgm}^2; \end{aligned}$$

Ao substituir estes valores, o modelo apresentado em (3.84) passa a ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,9241 & 0 & -18,2795 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,0122 & 0 & -2,5603 & 0 \\ -1 & -18,3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 26,7559 \\ 0 \\ 19,2480 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \quad (3.85)$$

Passa a ser possível então, simular o sistema de equações diferenciais (3.85), dada uma entrada conhecida para o ângulo de esterçamento dianteiro, chamado aqui de u_1 . Até aqui foi possível reproduzir os resultados apresentados pelos autores de [2], tendo seguido todas as suposições por eles colocadas. A próxima etapa consiste em projetar o controlador do sistema, visando garantir que a trajetória desejada seja cumprida, ao ser dado um sinal de referência para o ângulo de esterçamento.

3.2. Simulação do modelo de quatro graus de liberdade

Para a simulação do modelo de quatro graus de liberdade, utilizou-se a Equação (3.85) como base para a construção do diagrama de blocos do *Simulink/Matlab*®, software de simulação, que é mostrado na Figura 20.

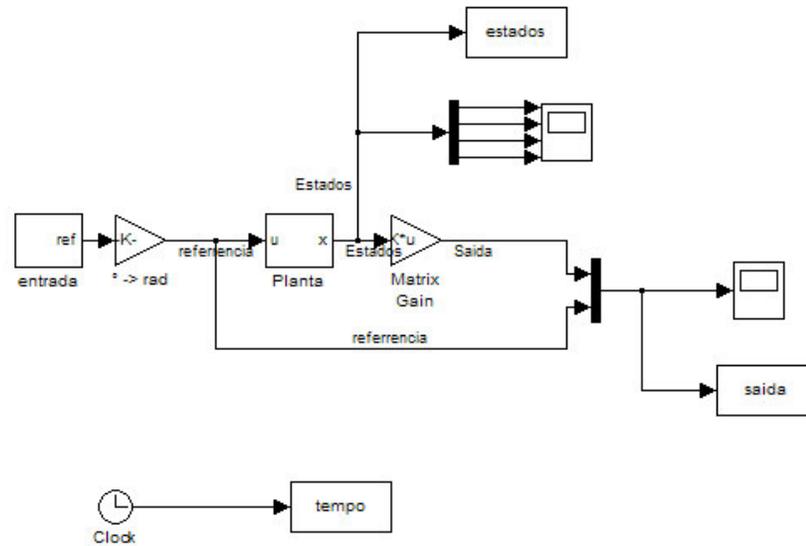


Figura 20 – Modelo de 4 graus de liberdade em ambiente de simulação

Para uma primeira análise escolheu-se como função de entrada a variação do ângulo de esterçamento na forma de duas funções do tipo degrau conhecidas e de amplitude igual ao ângulo desejado nas rodas, procurando reproduzir uma condição de mudança de faixa de rodagem, (Figura 21). Note que o primeiro degrau apresenta amplitude positiva, indicando um ângulo de esterçamento positivo que ocasionará um ângulo de guinada, também positivo (Figura 22).

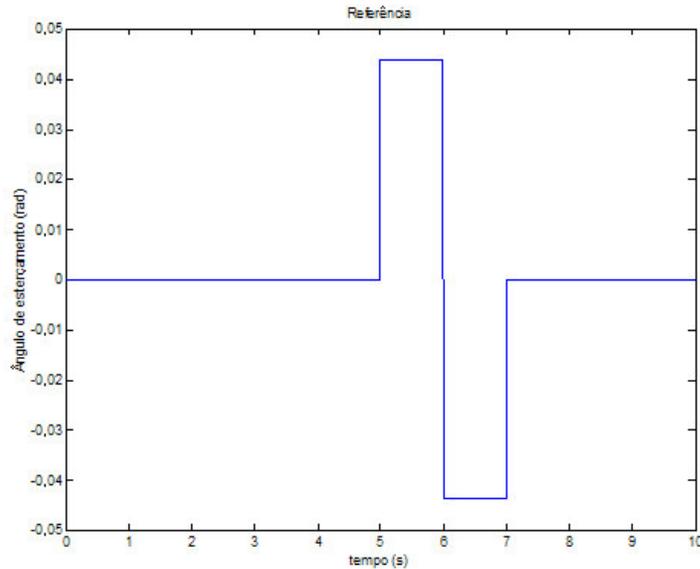


Figura 21 – Função de entrada degrau

Observando a Figura 22, é possível verificar que o modelo de quatro graus de liberdade se comporta de acordo com o que acontece na realidade pois, ao fornecer um ângulo de esterçamento inicialmente positivo ao sistema, provoca-se um deslocamento no sentido positivo do movimento de guinada do veículo, que corresponde à rotação em torno do próprio eixo Z. Como o referencial adotado é o estabelecido pelas normas da SAE, onde o eixo Z aponta o seu sentido positivo para baixo e, respeitando a regra da mão direita para vetores, chega-se à conclusão de que o veículo deveria girar para a direita o que pode ser observado tanto na Figura 22, como na Figura 24, que apresenta o deslocamento do veículo ao longo do tempo. Percebe-se, ainda na Figura 22, que ao fornecer um ângulo de esterçamento negativo ao sistema, representado pelo degrau negativo na Figura 21, o sistema passa a adotar uma postura restauradora, voltando à orientação original, com relação à rotação em torno do seu eixo central. No gráfico para deslocamento, isso corresponde a acertar a trajetória do veículo, colocando-o de volta na direção da pista, uma reta, e efetuando a mudança de faixa como era desejado. O gráfico da Figura 23 apresenta o perfil da variação da velocidade lateral ao longo do tempo e, assim como os demais gráficos, também indica o correto funcionamento do modelo proposto.

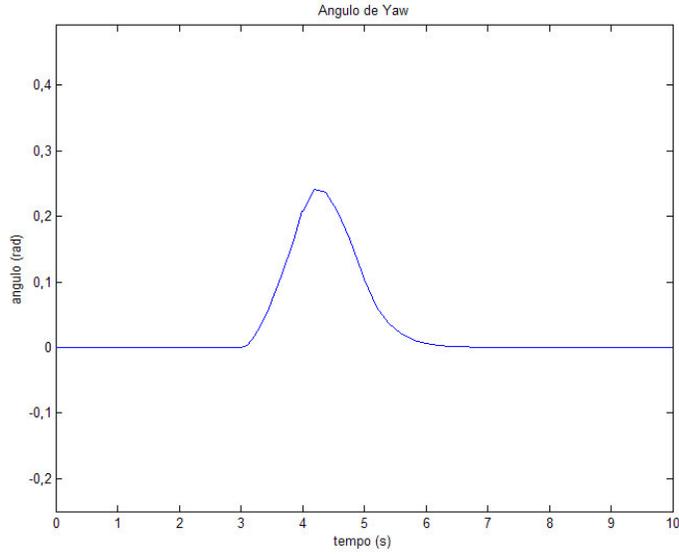


Figura 22 – Resposta ao degrau: ângulo de guinada

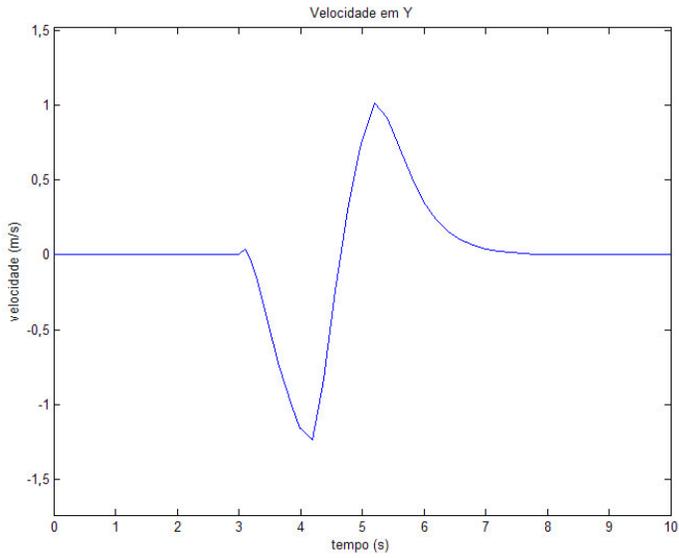


Figura 23 – Resposta da velocidade lateral ao degrau

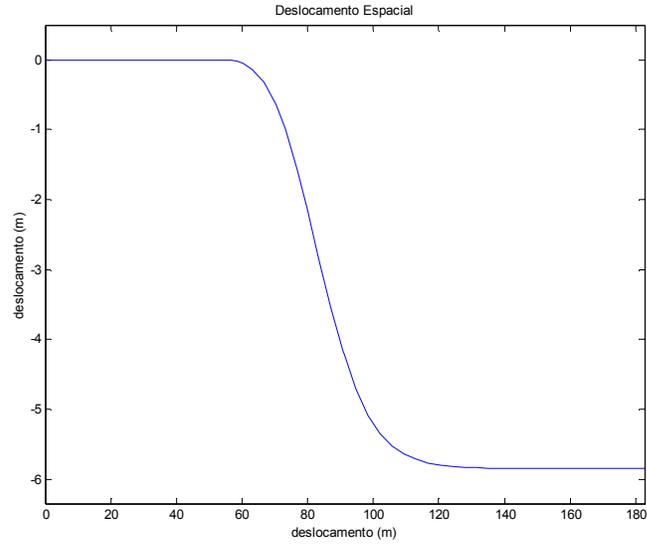


Figura 24 – Deslocamento no referencial global do modelo de 4 graus de liberdade

Em um segundo teste verifica-se a resposta do modelo de quatro graus de liberdade a uma entrada constante, como a indicada na Figura 25. O gráfico nesta figura corresponde a uma entrada com ângulo de esterçamento constante e igual a $2,5^\circ$, aproximadamente 0,04 radianos.

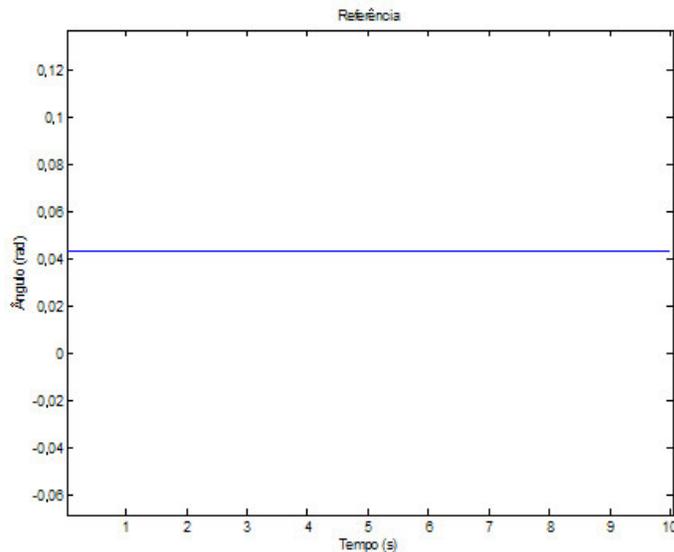


Figura 25 – Ângulo de esterçamento constante para movimento em curva

A resposta à entrada da Figura 25 é mostrada na Figura 26 e reflete funcionamento como esperado do modelo de quatro graus desenvolvido ao longo

deste capítulo, culminando na Equação (3.83). De acordo com a função de entrada passada ao sistema, um ângulo de esterçamento positivo e constante, o veículo deveria realizar uma curva para a direita, de raio constante. Na Figura 26 pode ser observada a variação do deslocamento lateral ao longo do tempo, enquanto que o deslocamento no plano XY pode ser observada no gráfico da Figura 27 além de obedecer os referenciais de coordenadas adotados para a modelagem, nos Capítulos 2 e 3.

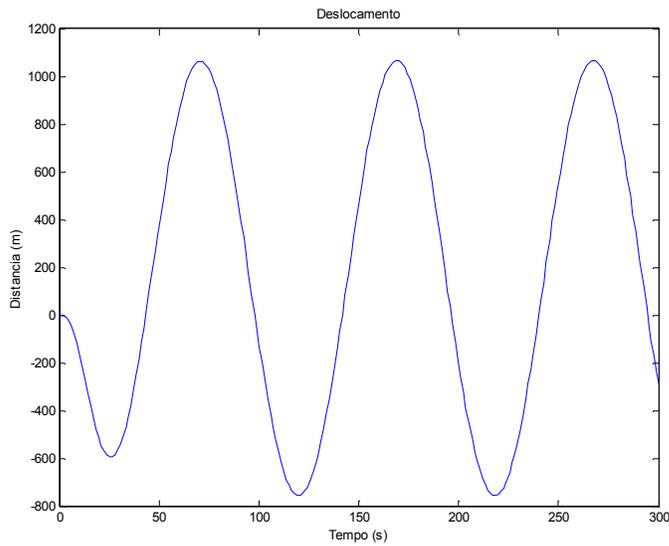


Figura 26 – Deslocamento lateral do modelo de 4 graus ao longo do tempo

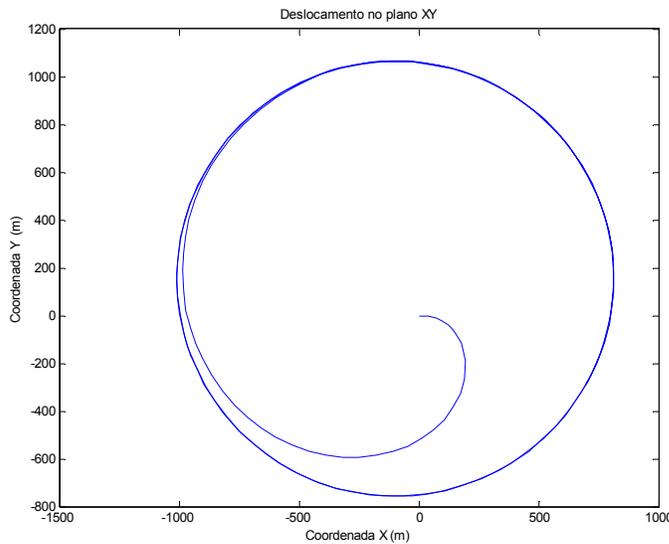


Figura 27 – Deslocamento do modelo no plano XY, a uma curvatura constante

Outra avaliação interessante de observar é a evolução do ângulo de guinada do veículo em relação a seu C.G. Como o carro está cada vez mais acentuando sua curva para a direita, e seguindo as orientações especificadas pelo referencial SAE, o ângulo de guinada deve aumentar no sentido positivo, conforme mostra a Figura 28.

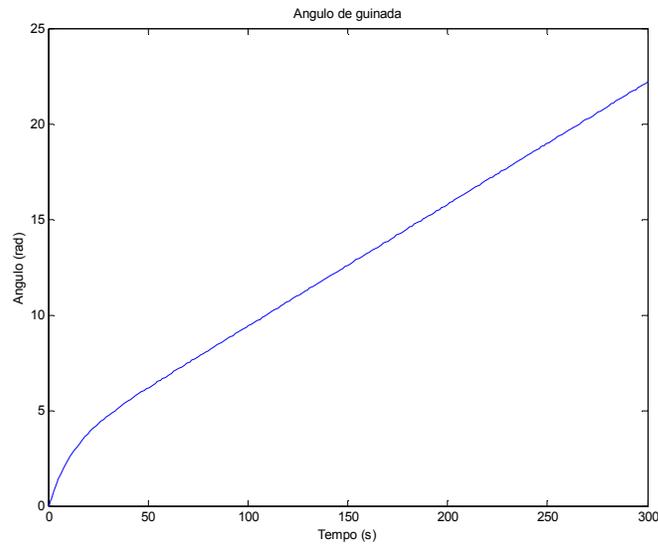


Figura 28 – Variação do ângulo de guinada ao longo do tempo

Apesar de funcionar como deveria, o modelo de quatro graus de liberdade aqui analisado, ainda não é suficiente para representar corretamente o comportamento de um veículo terrestre real, pois ainda conta com simplificações frequentemente usadas para interpretar movimentos de baixa velocidade, ou que apresentem um pequeno ângulo de esterçamento [2], [3]. Para estudar melhor esses efeitos e que tipo de estratégia deve ser tomada, para fins de controle, deve-se adotar o modelo não linear da Equação (3.68) ou uma representação mais completa que procure expandir o modelo obtido ao longo deste capítulo e faça a interligação com o modelo para pneus apresentado no Capítulo 2.