

## 2 Modelagem do Pneu

### 2.1. Introdução

As principais forças e momentos que afetam o movimento de um veículo terrestre, além de forças aerodinâmicas e gravitacionais, são aplicadas através do contato pneu-solo. Um entendimento das características básicas da interação entre o elemento rolante e o solo, é essencial ao estudo do desempenho de um veículo e de suas características básicas, tais como dirigibilidade e manobrabilidade. Dessa maneira tem-se o modelo do pneu como elemento central para a elaboração de um modelo representativo de uma dinâmica veicular. É no pneu que será feito o acoplamento entre os diversos subsistemas componentes de um veículo terrestre, ou seja, aqueles que definem a dinâmica vertical, a dinâmica longitudinal e a dinâmica lateral. A Figura 1 traz um diagrama explicativo que apresenta os acoplamentos realizados e os seus resultados, suas ações e reações, identificando as forças e torques presentes no modelo da dinâmica de um veículo terrestre.

A dinâmica veicular pode ser subdividida em subsistemas, compostos por sistemas de atuação e de suspensão (quando se adota uma suspensão passiva), dinâmicas principais e influências externas. Entendem-se como sistemas de atuação os sistemas de propulsão, de direção, e de frenagem. O sistema de propulsão é composto pelo motor mais o sistema de transmissão e é o responsável pela geração do torque propulsor e sua distribuição entre as rodas. Ele recebe como entradas as variações do pedal acelerador, da alavanca de mudanças, que define a marcha que o veículo se move, e do pedal de embreagem. Já o sistema de direção é composto pelo volante e, a princípio, deve obedecer a geometria de Ackermann que regula a variação do ângulo de esterçamento passado às rodas, quando é feita uma variação de direção pelo motorista. O sistema de frenagem recebe uma atuação do pedal de freio, acionado pelo motorista, e gera um torque de frenagem que irá trabalhar no sentido de diminuir a velocidade do veículo. O

último sistema aqui abordado corresponde às suspensões, que, quando passivas, apenas transferem as forças geradas pelos pneus para o corpo do veículo.

As saídas desses sistemas agem diretamente nos pneus, influenciando a geração de forças laterais, longitudinais e verticais que serão passadas às dinâmicas principais, compostas pela dinâmica lateral, dinâmica longitudinal e dinâmica vertical.

A dinâmica lateral é responsável por representar o comportamento do veículo no seu movimento curvilíneo. Ela recebe como excitação as componentes das forças laterais das quatro rodas que irão determinar deslocamentos, velocidades e acelerações laterais, ao longo do eixo  $y$  (Figura 2) e em torno de seu eixo vertical. Estes movimentos, conhecidos como *Yaw* e *Sideslip*, irão afetar diretamente a trajetória que o veículo desempenhar sendo o alvo principal do controle a ser proposto neste trabalho. Uma terceira resultante da dinâmica lateral corresponde ao ângulo de deriva, que determina o deslizamento do pneu durante um movimento curvilíneo. Este ângulo irá atuar diretamente no pneu, afetando as forças por ele geradas.

A próxima dinâmica principal corresponde à dinâmica longitudinal. Ela recebe como excitações, as forças de tração ou frenagem que irão influenciar diretamente na geração de velocidade para que o veículo se movimente. A velocidade gerada irá, junto com os movimentos da dinâmica lateral, influenciar na trajetória a ser cumprida pelo veículo. A dinâmica longitudinal está sujeita às influências externas, mais especificamente das forças aerodinâmicas, que oferecem resistência ao movimento do veículo. Essas forças aerodinâmicas irão influenciar também a dinâmica vertical.

A última dinâmica principal apresentada na Figura 1, trata dos movimentos desempenhados pelo veículo no sentido vertical, recebendo excitação do sistema de suspensão, mais especificamente como as forças normais, e gera os movimentos de *bounce*, *pitch* e *roll*. O movimento de *bounce* corresponde ao movimento vertical puro, determinado somente pela dinâmica vertical. O movimento de *pitch* corresponde ao movimento gerado do acoplamento das dinâmicas longitudinal e vertical, enquanto que o movimento de *roll* corresponde ao acoplamento das dinâmicas vertical e lateral. A dinâmica vertical também sofre influência das forças gravitacionais que atuam sobre o veículo e das forças aerodinâmicas.

A combinação dos resultados das dinâmicas lateral e longitudinal gera a trajetória que o veículo deve cumprir, que por sua vez exercerá influências indiretas sobre as forças aerodinâmicas, ao variar a posição do veículo. A trajetória ainda é responsável indireta pela alteração do perfil do terreno sobre o qual o carro se movimenta, variando as excitações de base que irão agir sobre os pneus. Fecha-se então a descrição dos subsistemas que compõem a dinâmica veicular a ser abordada ao longo deste trabalho, e que é representada pelo diagrama de blocos apresentado na Figura 1.

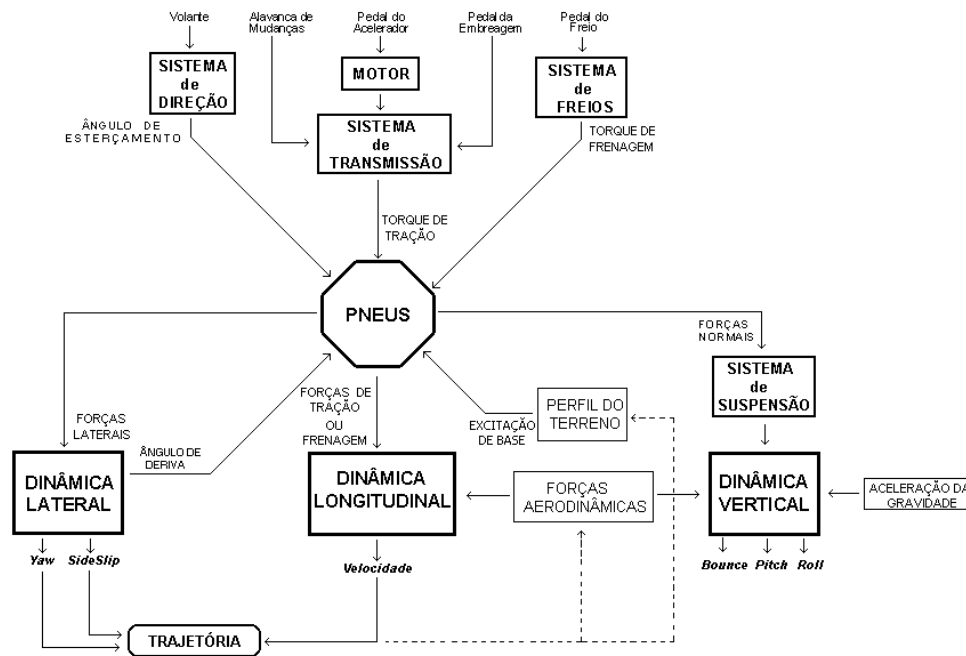


Figura 1 – Representação de um modelo de dinâmica veicular

## 2.2. Forças e momentos dos pneus

Para descrever as características de um pneu e as forças e momentos que agem sobre ele, é necessário estabelecer um sistema de eixos que sirva como referência para a definição de vários parâmetros. Um dos sistemas mais comumente usados corresponde ao sugerido pela Society of Automotive Engineers (SAE), mostrado na Figura 2. A origem do sistema de eixos é o centro de contato do pneu com o solo. O eixo X corresponde à interseção do plano da

roda com o plano do solo, com sentido positivo apontando para frente do veículo. O eixo Z é perpendicular ao plano do solo, com sentido positivo apontando para baixo. O eixo Y está no plano do solo e sua direção e sentido sendo escolhidos de tal forma a respeitar a ortogonalidade entre os eixos e também a regra da mão direita.

Existem três forças e três momentos agindo sobre o pneu a partir do solo. Força Longitudinal  $F_x$  (de tração ou frenagem) é a componente na direção X da força resultante exercida sobre o pneu pelo solo. Força Lateral  $F_y$  é a componente na direção Y, e a Força Normal  $F_z$  é a componente na direção Z. Momento de “*Overturning*”  $M_x$  é o momento em torno do eixo X exercido pelo solo sobre o pneu. Momento de Resistência ao Rolamento (*Rolling resistance*)  $M_y$  é o momento em torno do eixo Y, e Momento de Alinhamento  $M_z$  é o momento em torno do eixo Z.

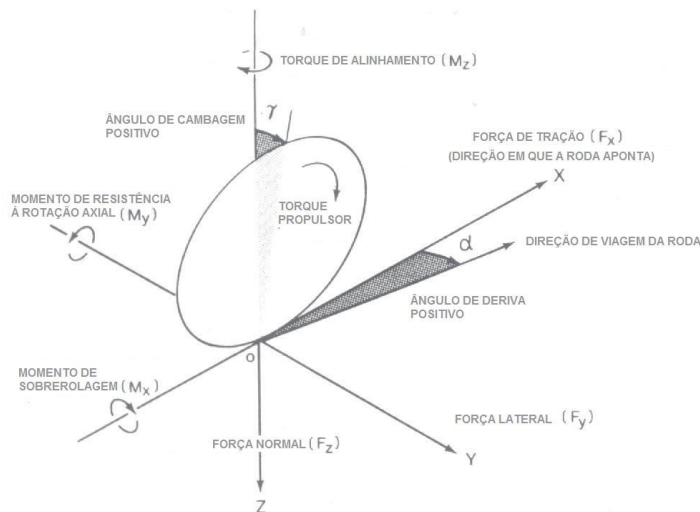


Figura 2 – Sistema de eixos do pneu

Com este sistema de coordenadas, muitos parâmetros do pneu podem ser convenientemente definidos. Apenas para constar, a variação longitudinal do centro de pressão normal é definida pela razão entre o momento de resistência ao rolamento ( $M_y$ ) e a carga normal. A variação lateral do centro de pressão normal é definida pela razão entre o momento de “*overturning*” ( $M_x$ ) e a carga normal. A integração das tensões de compressão longitudinais sobre toda a área de contato representa a força de tração ou a força de frenagem, dependendo do tipo de movimento a que o veículo estiver submetido. Um torque propulsor em torno do

eixo de rotação do pneu, produz uma força para acelerar o veículo, e outro torque, de frenagem, produz uma força para freá-lo.

Existem dois importantes ângulos associados ao movimento de rotação do pneu: o ângulo de deriva e o ângulo de cambagem. Ângulo de deriva  $\alpha$  é o ângulo formado entre a direção que a roda se desloca e a linha de interseção do seu próprio plano, localizado em sua superfície. Ângulo de cambagem  $\gamma$  é o ângulo formado entre o plano XZ e o plano da roda. A força lateral na área de contato pneu-solo é função de ambos os ângulos de deriva e de cambagem. Para efeitos de entendimento da modelagem da dinâmica nos pneus, não será adotado o ângulo de cambagem, considerando que o plano XZ está no mesmo plano da roda.

### 2.3.

#### **Resistência ao rolamento**

A resistência ao rolamento de pneus em superfícies duras é causada principalmente pela histerese nos materiais componentes do pneu, devido à deformação da carcaça durante o movimento.

O atrito entre o pneu e a estrada é provocado pelo deslizamento. As resistências provocadas pela circulação de ar dentro do pneu e pelo efeito “ventilador” proveniente da rotação do pneu no ar que o cerca, também contribuem para a resistência ao rolamento do pneu, mas são de importância secundária.

Quando um pneu está girando, sua carcaça é defletida em sua área de contato com o solo. Como resultado da distorção do pneu, a pressão normal na metade dominante da área de contato é maior do que na metade que se arrasta. O centro da pressão normal é alterado no sentido da rotação. Esta mudança produz um momento em torno do eixo de rotação do pneu, conhecido como momento de resistência ao rolamento. Em um pneu que se encontre em giro livre, o torque aplicado à roda é nulo; então quando em contato com o solo, uma força horizontal, na área de contato entre pneu e solo, precisa existir para manter o equilíbrio. Esta resultante horizontal é normalmente conhecida como resistência à rolagem. A razão entre resistência à rolagem e carga normal no pneu é definida como o coeficiente de resistência à rolagem.

Um número de fatores afeta a resistência à rolagem de um pneu. Eles incluem a estrutura do pneu (construção e materiais) e sua condição de operação (condições de superfície, pressão nos pneus, velocidade, temperatura, etc.). Condições de superfície afetam a resistência à rolagem, pois em superfícies duras, porém suaves, a resistência à rolagem é consideravelmente menor do que em estradas irregulares. Em superfícies molhadas observa-se uma resistência à rolagem maior do que em superfícies secas.

A pressão nos pneus afeta sua flexibilidade. Dependendo da capacidade de deformação do solo, a pressão nos pneus afeta a resistência à rolagem de diferentes maneiras. Em superfícies duras, a resistência diminui à medida que se aumenta a pressão. Isto se explica, pois com uma maior pressão, a deflexão diminui, com conseqüentes perdas para baixa histerese.

Em superfícies deformáveis, como areia, uma alta pressão nos pneus resulta em um trabalho de penetração no solo maior e dessa forma, maior resistência à rolagem. De maneira contrária, uma menor pressão nos pneus, enquanto diminui a penetração no solo, aumenta a deflexão do pneu e por conseqüência, perdas por histerese interna. Assim sendo, uma pressão ótima passa a existir para um pneu em particular, em uma dada superfície deformável que minimiza a soma do trabalho de penetração no solo com as perdas internas dos pneus. A pressão nos pneus não afeta somente a resistência à rolagem, mas também a banda rolante do pneu.

A resistência à rolagem também é afetada pela velocidade em que o veículo se locomove, pois aumenta o trabalho para deformar o pneu, além de aumentar as vibrações na estrutura do pneu. Para um dado pneu sob condições de operação particulares, existe uma velocidade limite acima da qual pode ser observado o fenômeno conhecido como “ondas estacionárias”, conforme ilustrado na Figura 3. As ondas estacionárias são formadas, pois, devido à alta velocidade. A banda de rodagem do pneu não se recupera imediatamente de sua distorção originada a partir da deflexão do pneu após abandonar a área de contato. A deformação residual é que origina o fenômeno. A amplitude da onda é maior imediatamente após o pneu deixar o solo, sendo amortecida de forma exponencial ao redor da circunferência do pneu. A formação de ondas estacionárias aumenta em muito a perda de energia, provocando geração de calor que pode levar a uma falha do pneu.

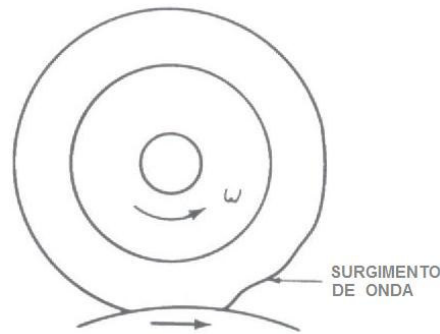


Figura 3 – Efeito de onda estacionária

A temperatura de trabalho, o diâmetro do pneu e as forças de tração são também fontes que afetam a resistência à rolagem de um pneu. A temperatura afeta de duas maneiras: a primeira é alterando a temperatura interna do pneu e conseqüentemente alterando a sua pressão; e a segunda corresponde a alterar a rigidez e a histerese dos compostos de borracha.

As complexas relações entre projeto e parâmetros operacionais de um pneu com sua resistência de rotação axial tornam extremamente difícil, senão impossível, desenvolver um modelo analítico que consiga reproduzir corretamente as características da resistência de rodagem. Esta é feita, na maioria dos casos, a partir de experimentos práticos e forma a base de dados para projeto de pneus.

Baseado em resultados experimentais, várias fórmulas empíricas foram propostas para calcular a resistência à rolagem de pneus sobre superfícies duras. Com base nos dados experimentais observados na Figura 4, para pneus de carros de passeio com camadas tipo radial, sob cargas e pressões de pneu conhecidas para uma pista suave, a relação entre coeficiente de resistência à rolagem,  $f_r$ , e velocidade,  $U$  (até 150 km/h), pode ser expressa conforme a Equação (2.1),

$$f_r = 0,0136 + 0,40 \times 10^{-7} U^2 \quad (2.1)$$

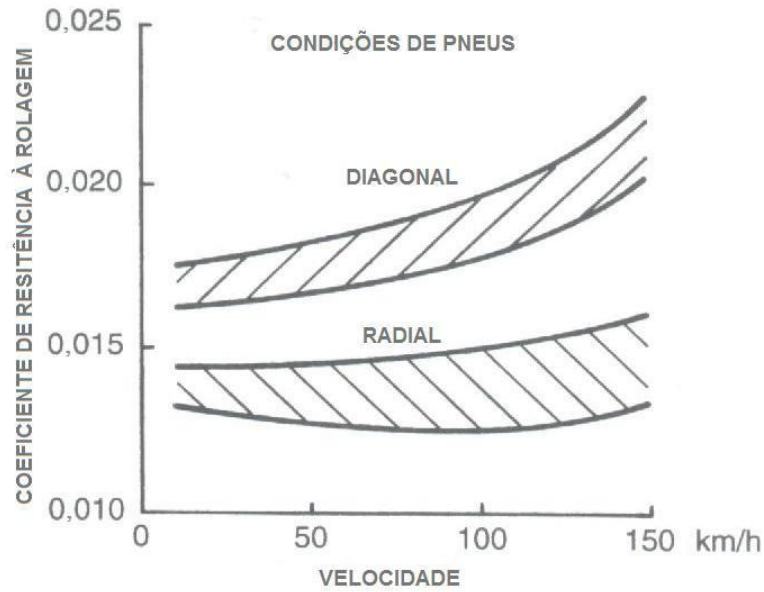


Figura 4 – Características de pneus

enquanto para pneus com camadas tipo diagonal, a relação entre o coeficiente de resistência à rolagem e a velocidade pode ser expressa conforme a Equação (2.2).

$$f_r = 0,0169 + 0,19 \times 10^{-6} U^2 \quad (2.2)$$

onde U está em km/h.

## 2.4.

### Força de tração ou frenagem e deriva longitudinal (slip e skid)

Quando um torque propulsor é aplicado a um pneu, uma força de tração é desenvolvida na área de contato entre pneu e solo, como mostrado na Figura 5. No mesmo instante, a banda de rodagem à frente e na região de contato está sujeita à compressão. Uma deformação correspondente da parede lateral do pneu também passa a ser desenvolvida.

Como os elementos da banda de rodagem são comprimidos antes de entrar na região de contato, a distância que o pneu se desloca quando sujeito a um torque propulsor será menor do que em rolamento livre. Este fenômeno é usualmente referido como deriva ou deslizamento longitudinal (*slip* em tração e *skid* em frenagem), e definido pela Equação (2.3).



$$i = \left(1 - \frac{V}{r\omega}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{r_e}{r}\right) \times 100\% \quad (2.3)$$

onde  $V$  é a velocidade linear do centro do pneu,  $\omega$  é a velocidade angular do pneu,  $r$  é o raio do pneu em movimento de giro livre, e  $r_e$  é o raio de rodagem efetivo do pneu, que é a razão entre a velocidade linear do centro do pneu e sua velocidade angular.

Quando um torque propulsor é aplicado, o pneu roda sem que haja uma progressão de translação equivalente; assim sendo,  $r\omega > V$  e um valor positivo para a deriva é encontrado. Se um pneu está girando a uma certa velocidade angular, mas a velocidade linear do centro do pneu é nula, então, de acordo com a Equação (2.3), a deriva longitudinal do pneu será de 100%. Isso é muito comumente observado em uma superfície congelada, onde o pneu que recebe o torque permanece girando a uma alta velocidade angular, enquanto o veículo não se move para frente.

A definição de deriva longitudinal varia em algumas publicações. Em SAE Handbook Supplement, Vehicle Dynamics Terminology J670e, a deriva longitudinal é definida como “a razão entre a velocidade de deriva longitudinal e a velocidade de rotação do pneu em rotação livre e direta, expressa em percentagem”. A velocidade longitudinal de deriva é tomada como “a diferença entre a velocidade de giro do pneu atuado (sob aceleração ou frenagem) e a velocidade de giro do pneu em rotação livre e direta”. Ambas as velocidades de rotação são medidas na mesma velocidade linear, no centro da roda e na direção X (Figura 5). Um valor positivo resulta de um torque propulsor. Em essência, a definição de deriva longitudinal  $i'$ , sugerida pela SAE, pode ser expressa pela Equação (2.4)

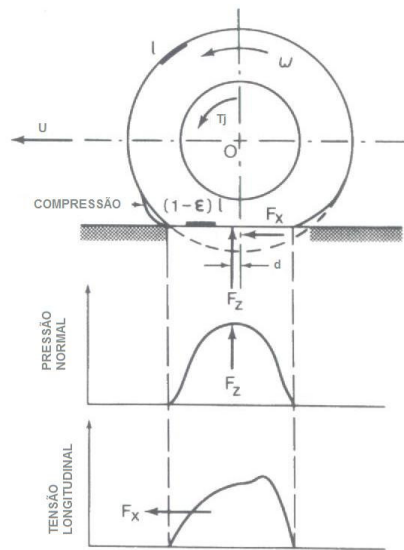


Figura 5 – Comportamento do pneu durante a tração (aceleração positiva)

$$i' = \left( \frac{r\omega}{V} - 1 \right) \times 100\% = \left( \frac{r}{r_e} - 1 \right) \times 100\% \quad (2.4)$$

onde  $V$ ,  $\omega$ ,  $r$  e  $r_e$  são definidos da mesma forma que para a equação (2.3).

Deve ser notado que, de acordo com a definição sugerida pela SAE, quando um pneu gira a uma certa velocidade angular mas a velocidade linear do centro do pneu é nula, a deriva longitudinal  $i'$  do pneu será definida como infinita.

Como a força de tração desenvolvida pelo pneu é proporcional ao torque aplicado na roda sob condições de estado estacionário, a deriva é uma função do esforço de tração. Falando genericamente, o torque da roda e a força de tração inicialmente aumentam linearmente com a deriva pois ela é devida principalmente em função de deformações elásticas da banda de rodagem. Isto corresponde à seção AO da curva mostrada na Figura 6. Um aumento posterior do torque na roda e da força de tração resulta em parte da banda de rodagem deslizando no solo. Sob estas circunstâncias, a relação entre a deriva e a força de tração passa a ser não linear. Isto corresponde à seção AB da curva exibida na Figura 6. Baseado em dados experimentais, a máxima força de tração de um pneu sobre superfícies rígidas é alcançada normalmente entre 15 e 20% de deriva. Qualquer aumento de deriva além destes limites acaba por resultar em condições de instabilidade, com o

esforço de tração caindo rapidamente do valor de pico  $\mu_p W$  para o valor de deslizamento puro  $\mu_s W$ , como mostrado na Figura 6, onde  $W$  é a carga normal no pneu e  $\mu_p$  e  $\mu_s$  são os valores de pico e de deslizamento total do coeficiente de aderência à pista, respectivamente.

Uma teoria geral que possa descrever a relação entre a força de tração e a deriva longitudinal de pneus sobre superfícies rígidas ainda está para ser desenvolvida. Todavia, algumas teorias vêm sendo propostas e poderiam prover um entendimento básico da natureza física dos processos envolvidos. Um dos tratados teóricos mais antigos foi apresentado por Julien [1].

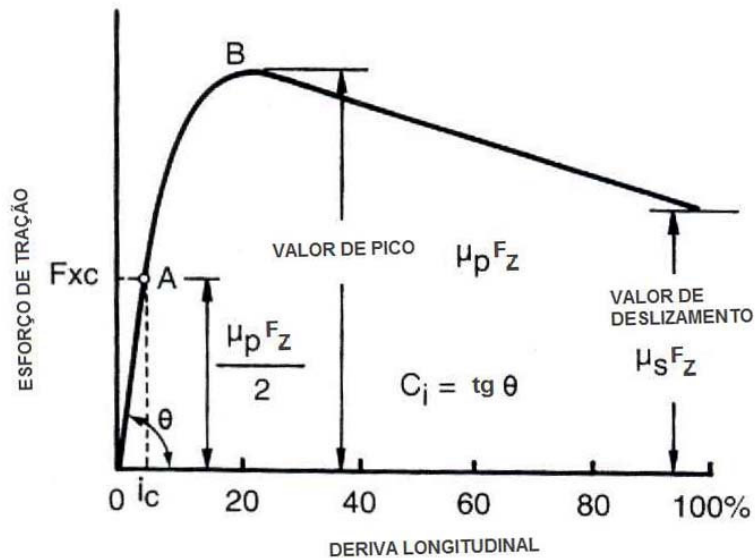


Figura 6 – Variação do esforço de tração com a deriva longitudinal

Na teoria de Julien, é assumido que a banda de rodagem pode ser encarada como um elemento elástico, que a área de contato é retangular e a pressão normal distribuída uniformemente. Também se assume que a área de contato pode ser dividida em uma região de aderência e outra de escorregamento. Na região de aderência as forças que interagem dependem das características elásticas do pneu, enquanto que na região de escorregamento as forças que interagem dependem das características de aderência da região de interface entre pneu e solo. Quando um torque propulsor é aplicado ao pneu, na região em frente à área de contato, este torque provoca uma tensão longitudinal  $\epsilon$  (em compressão) na banda de rodagem, que permanece constante na região de aderência da área de contato, onde nenhum

escorregamento entre a banda de rodagem e o solo acontece. Seja  $e_0$  a deformação longitudinal da banda de rodagem à frente da área de contato, e  $e$  a deformação longitudinal da banda de rodagem a uma distância  $x$ , atrás do ponto de contato frontal. Assim, estabelece-se uma relação entre as deformações, como descrito na Equação (2.5).

$$e = e_0 + x\varepsilon \quad (2.5)$$

Supondo que  $e_0$  é proporcional a  $\varepsilon$ , e que  $e_0 = \lambda\varepsilon$ , então

$$e = (\lambda + x)\varepsilon \quad (2.6)$$

e considera-se que, dentro da região de aderência, onde nenhum deslizamento entre o pneu e sua área de contato com o solo ocorre, a força de tração por unidade de comprimento da área de contato será proporcional à deformação da banda de rodagem. Sendo assim, escreve-se a Equação (2.7).

$$\frac{dF_x}{dx} = k_t e = k_t (\lambda + x)\varepsilon \quad (2.7)$$

onde  $k_t$  é a rigidez tangencial da banda de rodagem e  $F_x$  corresponde à força de tração longitudinal aplicada ao pneu. Equacionando para obter a relação explícita para a força de tração, encontra-se o disposto na Equação (2.8).

$$F_x = \int_0^x k_t (\lambda + x)\varepsilon dx = k_t \lambda x \varepsilon \left( 1 + \frac{x}{2\lambda} \right) \quad (2.8)$$

Seja  $p$  a pressão normal aplicada ao pneu,  $b$  a largura da área de contato da banda rolante, e  $\mu_p$  o valor de pico para o coeficiente de aderência à pista, então nenhum deslizamento entre a banda de rodagem e o solo irá ocorrer enquanto a condição descrita pela Equação (2.9) for satisfeita.

$$\frac{dF_x}{dx} = k_t(\lambda + x)\varepsilon \leq \mu_p pb \quad (2.9)$$

Isto implica que, se um ponto a uma distância  $x$  atrás do ponto frontal de contato estiver na região de aderência, então  $x$  precisa ser menor que um comprimento característico conhecido como  $l_c$  e que define o comprimento da região onde nenhum deslizamento ocorrerá, conforme indicado na Equação (2.10).

$$x \leq l_c = \frac{\mu_p pb}{k_t \varepsilon} - \lambda = \frac{\mu_p W}{l_t k_t \varepsilon} - \lambda \quad (2.10)$$

onde  $W$  corresponde à carga normal aplicada ao pneu e  $l_t$  é o comprimento da região de contato do pneu com o solo.

Se  $l_t \leq l_c$ , então a área de contato inteira corresponde à região de aderência. Deixando  $x = l_t$  na Equação (2.8), a força de tração se torna

$$F_x = k_t \lambda l_t \varepsilon \left( 1 + \frac{l_t}{2\lambda} \right) = K_t \varepsilon \quad (2.11)$$

onde  $K_t = k_t \lambda l_t [1 + l_t/2\lambda]$ .

Como a tensão longitudinal  $\varepsilon$  é medida da deriva longitudinal  $i$  do pneu, pode-se concluir que se a área de contato com o solo, inteira, for uma região de aderência, a relação entre a força de tração  $F_x$  e a deriva  $i$  é linear. Isso corresponde à região entre os pontos  $O$  e  $A$  da curva exibida na Figura 6.

A condição para deslizamento na parte traseira da área de contato com o solo é descrita pela Equação (2.12).

$$l_t = l_c = \frac{\mu_p W}{l_t k_t i} - \lambda \quad (2.12)$$

Isto significa que, se a deriva ou força de tração alcançarem o valor crítico  $i_c$  ou  $F_{xc}$  descritos abaixo pelas Equações (2.13) e (2.14) respectivamente, algum escorregamento da parte posterior da área de contato com o solo irá acontecer.

$$i_c = \frac{\mu_p W}{l_t k_t (l_t + \lambda)} \quad (2.13)$$

$$F_{xc} = \frac{\mu_p W \left[ 1 + \left( \frac{l_t}{2\lambda} \right) \right]}{1 + \left( \frac{l_t}{\lambda} \right)} \quad (2.14)$$

Um aumento contínuo da deriva ou da força de tração além destes limites críticos irá resultar no alargamento da região de escorregamento, a partir da parte posterior até a parte frontal da área de contato do pneu com o solo. A força de tração  $F_{xs}$  desenvolvida na região de escorregamento é dada pela Equação (2.15)

$$F_{xs} = \mu_p W \left( 1 - \frac{l_c}{l_t} \right) \quad (2.15)$$

e a força de tração desenvolvida na região onde ainda existe algum contato entre o pneu e o solo passa a ser descrita pela Equação (2.16).

$$F_{xa} = k_t \lambda i l_c \left( 1 + \frac{l_c}{2\lambda} \right) \quad (2.16)$$

onde  $l_c$  é determinado pela Equação (2.10).

Sendo assim, a relação entre a força de tração total e a deriva quando parte da banda de rodagem escorrega pelo solo pode ser expressa conforme descrito na Equação (2.17).

$$F_x = F_{xs} + F_{xa} = \mu_p W - \frac{\lambda (\mu_p W - K' i)^2}{2 l_t K' i} \quad (2.17)$$

onde  $K' = l_t k_t \lambda$ .

Esta Equação indica claramente o comportamento não linear da relação força de tração-deriva longitudinal quando ocorre escorregamento em parte da

área de contato. Isso corresponde à região além do ponto A no gráfico representado na Figura 6.

Quando o deslizamento se estende sobre a área de contato por completo, o pneu deixa de tracionar passando somente a deslizar. A força  $F_x$  passa a ser igual a  $\mu_p W$ , que representa a força de atrito para o deslizamento do pneu. Este caso pode ser alcançado se for considerado  $l_c$  nulo na Equação (2.11). O valor da deriva  $i_m$  quando ocorre a força de tração máxima é igual a  $\frac{\mu_p W}{l_t k_t \lambda}$  e corresponde ao ponto

B na curva da Figura 6. Um maior aumento na deriva do pneu resulta em uma situação instável, com o coeficiente de aderência à pista caindo rapidamente do valor de pico  $\mu_p$  para o valor de puro deslizamento  $\mu_s$ .

Na prática a distribuição da pressão normal sobre a área de contato pneu-solo não é uniforme, podendo haver uma queda gradual de pressão próximo às bordas. É esperado, no entanto, que uma pequena região de deslizamento seja desenvolvida na parte posterior da área de contato, mesmo a baixos escorregamentos.

Usando a teoria de Julien para definir a relação entre força de tração e deriva longitudinal, em adição aos parâmetros  $\mu_p$ ,  $W$  e  $l_t$ , o valor de  $\lambda$ , que determina a deformação longitudinal da banda rolante antes da área de contato com o solo, precisa ser conhecido. Para determinar este valor de  $\lambda$  para um dado pneu, seriam necessários esforços consideráveis bem como experimentos bastante elaborados. Em vista disso uma teoria simplificada foi desenvolvida e que não leva em consideração os efeitos de  $\lambda$ . A partir da Equação (2.17), ao desprezar  $\lambda$ , a força de tração por unidade de comprimento da área de contato na região de aderência e a uma distância  $x$  da parte frontal do ponto de contato é descrita pela Equação (2.18).

$$\frac{dF_x}{dx} = k_t x \varepsilon = k_t x i \quad (2.18)$$

Se não existir deslizamento entre a banda de rodagem do pneu e o solo para a área de contato inteira, a relação entre a força de tração e a deriva longitudinal pode ser escrita pela Equação (2.19).

$$F_x = \int_0^{l_i} k_t i x dx = \left( \frac{k_t l_i^2}{2} \right) i \quad (2.19)$$

O termo  $k_t l_i^2/2$  na Equação (2.20) pode ser entendido como a inclinação  $C_i$  da curva de esforço de tração-deriva longitudinal na origem, como apresentado na Figura 6, dado por

$$\frac{k_t l_i^2}{2} = C_i = \operatorname{tg} \theta = \left. \frac{\partial F_x}{\partial i} \right|_{i=0} \quad (2.20)$$

onde  $C_i$  é referenciada usualmente como a rigidez longitudinal do pneu.

Se não há deslizamento na área de contato, a relação entre a força de tração e a deriva longitudinal do pneu será linear, conforme indicado na Equação (2.21)

$$F_x = C_i i \quad (2.21)$$

e que se aplica à seção OA da curva da Figura 6.

Com o aumento da deriva além do ponto A, a força de tração por unidade de área de contato no limite da região posterior da banda rolante alcança seu limite de aderência, dando lugar a um deslizamento entre a banda e o solo, conforme indicado pela Equação (2.22).

$$\frac{dF_x}{dx} = k_t l_i i = \mu_p p b = \frac{\mu_p W}{2C_i} \quad (2.22)$$

Isto indica que quando se alcança o limite da deriva longitudinal ou da força de tração, como indicado nas Equações (2.23) e (2.24) respectivamente, o escorregamento da parte posterior da área de contato, na banda rolante, começa a acontecer, abandonando a relação linear anteriormente observada.



$$i_c = \frac{\mu_p W}{k_t l_t^2} = \frac{\mu_p W}{2C_i} \quad (2.23)$$

$$F_{xc} = C_i i_c = \frac{\mu_p W}{2} \quad (2.24)$$

Um aumento da deriva ou força de tração além dos valores críticos respectivos resulta em um espalhamento da região de deslizamento na banda rolante, diminuindo a aderência do pneu ao solo. Desenvolve-se então, a Equação (2.25) que descreve a relação entre força de tração e deriva longitudinal do pneu, na situação onde ocorra o escorregamento.

$$F_{xs} = \mu_p W \left( 1 - \frac{l_c}{l_t} \right) = \mu_p W \left( 1 - \frac{\mu_p W}{2C_i i} \right) \quad (2.25)$$

Porém ainda existe uma força de tração que atua na banda rolante, na região onde ainda há aderência entre o pneu e o solo, mesmo que o pneu se encontre na região onde ocorre deslizamento,. Esta força de tração é retratada na Equação (2.26).

$$F_{xa} = \frac{1}{2} \frac{\mu_p W l_c}{l_t} = \frac{\mu_p^2 W^2}{4C_i i} \quad (2.26)$$

A relação entre a força de tração total e a deriva longitudinal no pneu é dada pela soma de (2.25) com (2.26), e descrita na Equação (2.27).

$$F_x = F_{xs} + F_{xa} = \mu_p W \left( 1 - \frac{\mu_p W}{4C_i i} \right) \quad (2.27)$$

A equação acima indica a natureza não linear da relação entre a força de tração e a deriva longitudinal quando há ocorrência de deslizamento de parte da banda rolante. Ela também é aplicável para descrever a mesma relação quando a força de tração for menor que seu valor máximo  $\mu_p W$ .

Em comparação com a teoria de Julien [1], a teoria simplificada descrita acima requer somente três parâmetros para que seja possível estabelecer a relação entre deriva e esforço de tração, que são:  $\mu_p$ ,  $W$  e  $C_i$ . Como indicado anteriormente,  $C_i$  pode ser facilmente encontrado como a inclinação da parte linear da curva de força de tração por deriva longitudinal.

Porém, o equacionamento anterior foi feito para uma situação de aceleração do veículo. Há ainda a situação onde um torque de frenagem é aplicado ao pneu e que ocasiona o fenômeno contrário, indicado pelo alargamento da área de contato da banda rolante, na sua região anterior ou seja, no início do contato do pneu com o solo conforme mostrado na Figura 7. A distância que o pneu percorre quando em movimento de frenagem será maior do que se em movimento de giro livre. A severidade da frenagem é medida pelo deslizamento do pneu  $i_s$ , também conhecido como *skid* (deslizamento em frenagem), e que é definido pela Equação (2.28).

$$i_s = \left(1 - \frac{r\omega}{V}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{r}{r_e}\right) \times 100\% \quad (2.28)$$

Para o caso de haver o travamento da roda, a velocidade angular  $\omega$  é nula e, como a velocidade linear do veículo é não nula, a deriva longitudinal é entendida como sendo total, ou 100%. Deve ser mencionado, no entanto, que se for adotada a definição da SAE, dada pela Equação (2.4), a deriva seria equivalente a  $-100\%$  para o caso de um pneu travado com o carro em movimento.

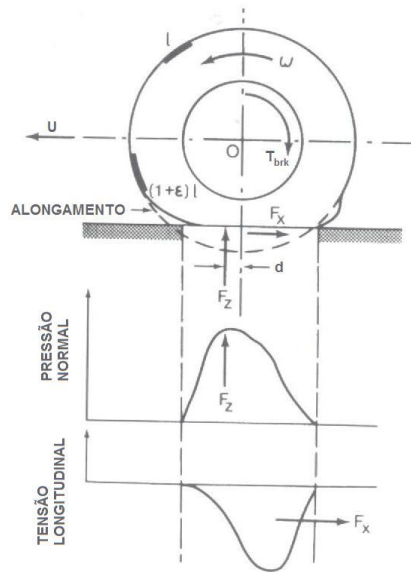


Figura 7 – Comportamento do pneu sob frenagem (desaceleração)

Assim como o que foi desenvolvido para o caso em que há aceleração, para a situação de frenagem também se propõe uma teoria simplificada para a relação entre esforços de frenagem e deriva longitudinal do pneu. Como existem dois tipos de deriva distintos, um para o movimento de aceleração, e outro para o movimento de frenagem, pode ser escrita uma única relação, de maneira a facilitar a obtenção das equações para o caso de frenagem do veículo. Assim, a relação entre as derivas de aceleração (*slip*) e frenagem (*skid*) é dada pela Equação (2.29).

$$|i| = \left| \frac{i_s}{(1-i_s)} \right| \tag{2.29}$$

Se não há deslizamento na área de contato, a relação entre esforço de frenagem e deriva de frenagem (*skid*) pode ser obtida pela simples substituição de  $C_i$  e  $i$  na Equação (2.22), por  $C_s$  e  $i_s/(1-i_s)$  respectivamente, obtendo a Equação (2.30).

$$F_x = \frac{C_s i_s}{(1-i_s)} \tag{2.30}$$

onde  $F_x$  representa a força de frenagem agindo no sentido oposto ao do movimento do centro do pneu, e  $C_s$  representa a inclinação da parte linear inicial da curva de esforço de tração por deriva de frenagem, como indicado pela Equação (2.31).

$$C_s = \left. \frac{\partial F_x}{\partial i_s} \right|_{i_s=0} \quad (2.31)$$

onde  $C_s$  é interpretada como a rigidez longitudinal do pneu durante o movimento de frenagem e pode ser obtida de maneira similar a  $C_i$ , inclinação inicial da curva de esforço de tração por deriva.

É interessante notar, ao observar a Equação (2.30) e a partir da Equação (2.28), que a relação entre esforço de frenagem e deriva é não linear, mesmo para pequenos valores de deriva, onde não há deslizamento.

O valor de deriva crítica  $i_{sc}$ , para o qual começa a haver deslizamento, pode ser obtido se forem substituídos os valores para  $C_s$  e  $i_s/(1-i_s)$  na Equação (2.32).

$$i_{sc} = \frac{\mu_p W}{2C_s + \mu_p W} \quad (2.32)$$

Para a força de frenagem crítica  $F_{xc}$  se adota o mesmo procedimento, substituindo na Equação (2.24) os valores para  $C_s$  e  $i_s/(1-i_s)$ , levando à Equação (2.33).

$$F_{xc} = \frac{C_s i_{sc}}{1 - i_{sc}} = \frac{\mu_p W}{2} \quad (2.33)$$

Quando há deslizamento na área de contato, i.e.  $i_s > i_{sc}$ , a relação entre esforço de frenagem e deriva pode ser obtida ao substituir os valores de  $C_s$  e  $i_s/(1-i_s)$  diretamente na Equação (2.27), obtendo assim a força de tração total para o movimento de frenagem, dada pela Equação (2.34).

$$F_x = \mu_p W \left( 1 - \frac{\mu_p W (1 - i_s)}{4 C_s i_s} \right) \quad (2.34)$$

## 2.5. Força lateral e ângulo de deriva

Quando um pneu não está sujeito a nenhum tipo de força perpendicular ao plano da roda, i.e. força lateral, ele se moverá ao longo deste plano. No entanto, se existir uma carga lateral  $F_s$ , aplicada ao pneu, uma força lateral  $F_y$  se desenvolverá na área de contato do pneu com o solo fazendo com que o pneu se mova sobre uma trajetória com um ângulo  $\alpha$ , em relação ao plano da roda, como ilustrado na Figura 8 pelo segmento OA. O ângulo  $\alpha$  é referido como ângulo de deriva e o fenômeno de deslizamento lateral, conhecido como elasticidade lateral do pneu.

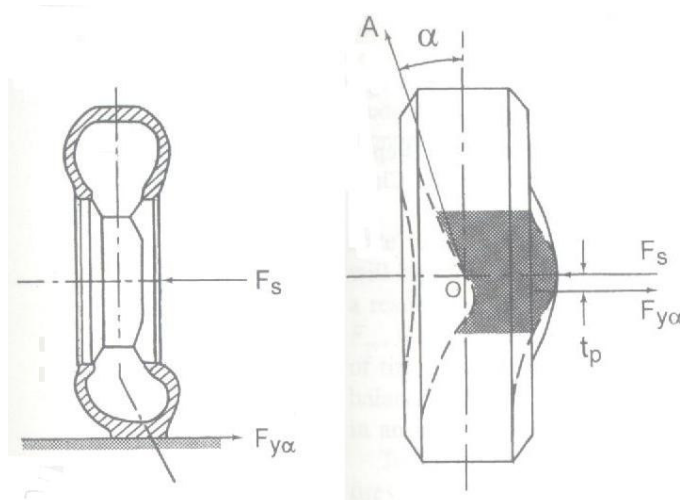


Figura 8 – Comportamento do pneu sujeito a uma força lateral

A força lateral desenvolvida no contato entre o pneu e o solo é usualmente chamada de força de aderência  $F_{y\alpha}$ , quando o ângulo de cambagem da roda é nulo. A relação entre a força de aderência e o ângulo de deriva é de fundamental importância para o controle direcional e estabilidade de veículos automotores.

Quando o pneu está se movendo a uma velocidade constante na direção de OA, a carga lateral  $F_s$  aplicada no centro da roda e a força de aderência  $F_{y\alpha}$  desenvolvida no plano do solo são não colineares, como mostrado na Figura 8. Para pequenos ângulos de deriva, a força de aderência no plano do solo está

normalmente atrás da carga lateral aplicada, dando origem a um momento que tem por objetivo alinhar o plano da roda com a direção do movimento. Este momento é chamado de momento de alinhamento ou auto-alinhamento e corresponde a um dos principais momentos restauradores que atuam na roda, e auxiliam o pneu sob esterçamento a retornar à sua posição original após terminar a realização de uma curva. A distância  $t_p$  entre a carga lateral e a força de aderência é chamada de trilho pneumático, e o produto da força de aderência por esse trilho pneumático resulta no momento de auto-alinhamento. Na Figura 9 pode ser visualizado um gráfico que descreve o comportamento da força lateral aplicada ao pneu, à medida que aumenta-se o ângulo de deriva. Note a presença do limite de aderência da pista e como cada tipo de pneu, radial e diagonal, varia com o ângulo de deriva.

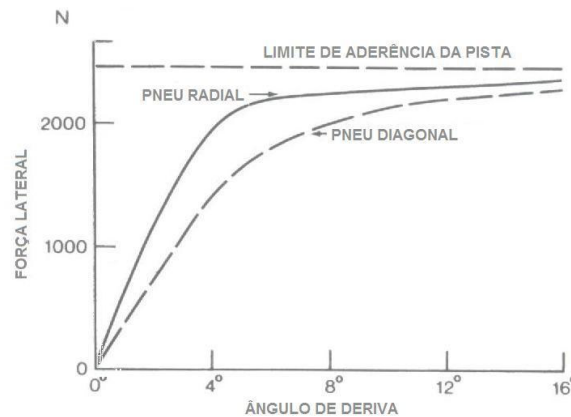


Figura 9 – Curva de força lateral para os dois tipos de pneu

## 2.6.

### Caracterização do comportamento de pneus em curvas

Uma teoria simplificada é proposta para descrever o comportamento de pneus sujeitos à realização de curvas e seus efeitos sobre as forças longitudinais que atuam no veículo. Neste modelo assume-se que, se não há deslizamento longitudinal, a deflexão lateral  $y$  de um elemento da banda de rodagem, no solo e a uma distância longitudinal  $x$ , a partir da parte frontal da área de contato com o solo (ao longo do plano da roda) é proporcional à  $\text{tg}\alpha$  e é descrito pela Equação (2.35).

$$y = x \text{tg}\alpha \quad (2.35)$$

onde a deflexão lateral  $y$  é medida a partir do ponto frontal de contato e perpendicular ao plano da roda, e  $\alpha$  corresponde ao ângulo de deriva.

Se  $k_y$  equivale à rigidez lateral do pneu, então quando não há deslizamento lateral entre a banda de rodagem e o solo, a força lateral por unidade de comprimento de contato é dada pela Equação (2.36).

$$\frac{dF_{y\alpha}}{dx} = k_y \cdot x \operatorname{tg} \alpha \quad (2.36)$$

e a força lateral desenvolvida na área de contato total pode ser expressa ao integrar (2.36), conforme indicado na Equação (2.37).

$$F_{y\alpha} = \int_0^{l_t} k_y \cdot x \operatorname{tg} \alpha dx = \left( \frac{k_y l_t^2}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha \quad (2.37)$$

onde  $l_t$  é o comprimento da região de contato do pneu.

O termo  $(k_y l_t^2 / 2)$  pode ser interpretado como um coeficiente de aderência lateral  $C_\alpha$ , definido pela equação (2.38) e tido como a inclinação da curva entre a força lateral e o ângulo de deriva lateral, conforme indicado na Figura 9.

$$\frac{k_y l_t^2}{2} = C_\alpha = \left. \frac{\partial F_{y\alpha}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (2.38)$$

Sendo assim, quando não há deslizamento lateral na área de contato do pneu com o solo, a relação entre a força lateral e o ângulo de deriva é dado, conforme escrito na Equação (2.39).

$$F_{y\alpha} = C_\alpha \operatorname{tg} \alpha \quad (2.39)$$

Para o caso do ângulo de deriva ser pequeno, pode-se fazer uma aproximação para linearizar a Equação (2.39), que consiste em substituir a

expressão para a tangente, simplesmente pelo valor do ângulo, conforme a Equação (2.40).

$$F_{y\alpha} = C_{\alpha} \alpha \quad (2.40)$$

Seguindo uma aproximação similar à que foi adotada para análise da relação entre os esforços de tração e deriva longitudinal, os valores críticos para ângulo de deriva lateral,  $\alpha_c$ , e para força de aderência,  $F_{y\alpha c}$ , a partir da qual começam a aparecer deslizamentos laterais na parte posterior da banda de rodagem em contato com o solo, podem ser determinados, como pode ser visualizado nas equações (2.41) e (2.42) respectivamente.

$$\alpha_c = \frac{\mu_p W}{2C_{\alpha}} \quad (2.41)$$

$$F_{y\alpha c} = \frac{\mu_p W}{2} \quad (2.42)$$

Similar à relação entre força de tração e deriva longitudinal, a Equação (2.42) indica que a relação entre a força de aderência e o ângulo de deriva será linear quando não houver deslizamento, ou seja, quando a força de aderência ficar abaixo do valor estipulado pela Equação (2.42).

Quando o deslizamento lateral entre a banda de rodagem e o solo ocorrer, i.e.  $\alpha > \alpha_c$  ou  $F_{y\alpha} > F_{y\alpha c}$ , a relação entre força de aderência e ângulo de deriva passa a ser representada pela Equação (2.43) a seguir.

$$F_{y\alpha} = \mu_p W \left( 1 - \frac{\mu_p W}{4C_{\alpha} \operatorname{tg} \alpha} \right) \cong \mu_p W \left( 1 - \frac{\mu_p W}{4C_{\alpha} \alpha} \right) \quad (2.43)$$

A Equação (2.43) indica a natureza não linear da relação entre força de aderência e ângulo de deriva lateral.

Na discussão sobre comportamento de pneus em curva, abordados anteriormente, não foram levados em consideração os efeitos dos esforços de tração e de deriva longitudinal e quais as conseqüências de sua existência sobre o



movimento para realização de curvas. No entanto esses efeitos se misturam com bastante frequência, havendo interação entre carga lateral e força longitudinal, bem como também ocorrem efeitos provenientes de esforços de frenagem. De uma maneira geral, esforços de tração e/ou frenagem atuam no sentido de diminuir os efeitos das forças e/ou cargas laterais que aparecem e atuam sobre os pneus durante uma curva, a um dado ângulo de deriva. A força de aderência lateral diminui gradativamente à medida que a força de tração ou frenagem aumenta. Para baixos valores dos esforços de tração ou frenagem o decréscimo na força de aderência lateral é causado, em grande parte, pela redução da rigidez de aderência lateral do pneu. Um aumento da força de tração (ou de frenagem) resulta em uma diminuição acentuada na força de aderência lateral para um dado ângulo de deriva lateral. Isto se deve em função da mobilização da banda de rodagem pela força longitudinal (tração ou frenagem), o que reduz o percentual de faixa de aderência disponível para a direção lateral.

Tendo observado este fenômeno, propõe-se o uso de um conceito baseado na aderência do pneu, conhecido como elipse de aderência, e que se baseia na consideração de que o pneu desliza no solo, em qualquer direção, quando as resultantes das forças lateral e longitudinal atingem seus valores máximos permissíveis definidos pelo coeficiente de aderência da pista sobre a qual o pneu estiver se deslocando e pela carga normal aplicada ao mesmo. No entanto, nenhuma das duas componentes, força lateral,  $F_{y\max}$ , ou força longitudinal,  $F_{x\max}$ , poderá ultrapassar este valor máximo, como ilustrado na Figura 10.

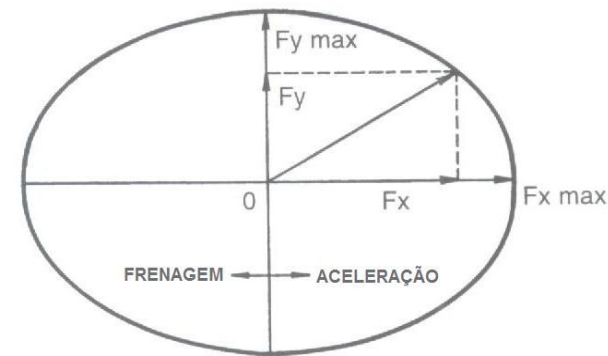


Figura 10 – Conceito de elipse de aderência

## 2.7. Teoria da elipse de aderência

Uma das mais simples teorias para predição de forças laterais disponíveis a um ângulo de deriva específico, na presença de força de tração ou de frenagem e um deslizamento conhecido, é baseada no conceito de elipse de aderência. É um fato conhecido de que um pneu pode deslizar no solo, em qualquer direção conhecida, se a resultante de suas forças longitudinais (de tração ou frenagem) e laterais alcançarem seus valores máximos, definidos pelo coeficiente de aderência à pista e pela força normal aplicada. No entanto, as componentes longitudinal e lateral da força atuante no pneu, não podem ultrapassar seus valores máximos  $F_{x\text{máx}}$  e  $F_{y\text{máx}}$ , como observado na Figura 10. As duas componentes são obtidas a partir de dados experimentais e acabam por formar os eixos de uma elipse, limitando a região de atuação das forças dos pneus.

Baseadas em dados experimentais foram feitas tentativas para formular um modelo analítico de predição das forças longitudinal e lateral, como função combinada da deriva longitudinal (slip no caso de aceleração e skid no de frenagem) e ângulo de deriva lateral. O procedimento necessário à determinação da disponibilidade de força em um pneu é descrito a seguir.

- a) A partir de dados experimentais, a relação entre força lateral e ângulo de deriva sob condições de rotação livre (i.e., na ausência de força de tração ou frenagem) é disposta em gráfico, como observado na Figura 11a.
- b) A força lateral para diversos ângulos de deriva sob rotação livre são então marcados no eixo vertical da Figura 11b. Como exemplo, a força lateral desenvolvida a  $4^\circ$  de ângulo de deriva aparece identificada como  $F_{y4}$ , no eixo vertical, que constitui o menor eixo da elipse.
- c) A partir de dados experimentais, a máxima força de tração,  $F_{x\text{máx}}$ , na ausência de força lateral, é marcada no eixo horizontal, como observado na Figura 11b, que constitui o maior eixo da elipse.
- d) A disponibilidade da força lateral  $F_y$  a um dado ângulo de esterçamento, como o ângulo de  $4^\circ$  mostrado na Figura 11b, para qualquer força de tração ou frenagem  $F_x$  dada é determinada então, a partir da Equação (2.44).

$$\left(\frac{F_y}{F_{y4}}\right)^2 + \left(\frac{F_x}{F_{x\max}}\right)^2 = 1 \quad (2.44)$$

Note que a Equação (2.44) descreve o caso particular para ângulo de esterçamento de  $4^\circ$ , onde os valores medidos para  $F_{y4}$  e  $F_{x\max}$  representam o menor e o maior eixo da elipse respectivamente.

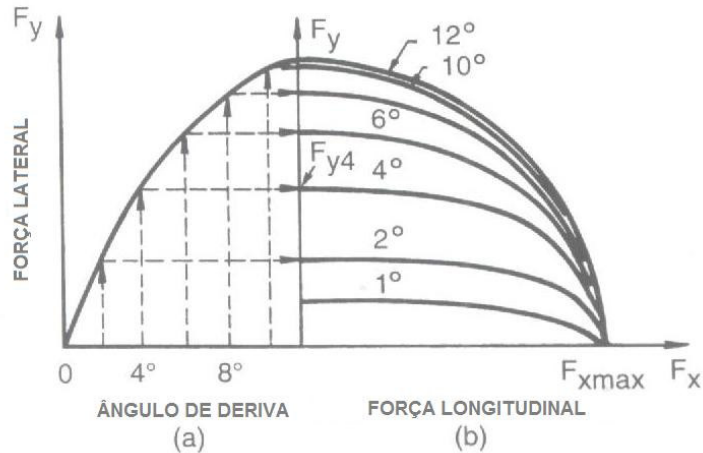


Figura 11 – Construção da elipse de aderência

Baseado na teoria simplificada desenvolvida para a relação entre força e deriva longitudinal e também para a relação entre forças laterais e ângulo de deriva, outro método semi-empírico para predição das forças de tração e frenagem e de aderência lateral, na presença de deriva longitudinal e de ângulo de deriva lateral, é proposta e será usada no desenvolvimento da modelagem de pneus ao longo deste trabalho.

Neste método, assume-se que, quando não há deslizamentos laterais, a força de frenagem ou tração, por unidade de comprimento de contato a uma distância  $x$  a partir do ponto frontal de contato é descrita pela Equação (2.45).

$$\frac{dF_x}{dx} = \frac{k_t x i_s}{(1 - i_s)} \quad (2.45)$$

onde  $i_s$  representa a deriva longitudinal, como definido pela Equação (2.28).

Se, ao mesmo tempo, o pneu desenvolve um ângulo de deriva  $\alpha$ , então por causa da deriva longitudinal, a região de contato com o solo sofrerá um alongamento a uma taxa igual a  $l/(1-i_s)$ . Como resultado a deflexão lateral  $y$  do ponto na banda de rodagem, em contato com o solo, é dado pela Equação (2.46).

$$y = \frac{x t g \alpha}{(1 - i_s)} \quad (2.46)$$

A força lateral correspondente por unidade de comprimento de contato é, então, escrita na Equação (2.47).

$$\frac{dF_{y\alpha}}{dx} = \frac{k_y x t g \alpha}{(1 - i_s)} \quad (2.47)$$

Seja  $p$  a pressão normal uniforme, aplicada na área de contato do pneu com o solo,  $b$  a largura dessa área de contato, e  $\mu$  o coeficiente de aderência da pista. Baseado no conceito de elipse de aderência, nenhum deslizamento ocorrerá no ponto localizado a uma distância  $x$  a partir do ponto inicial de contato com o solo, se a resultante da força longitudinal (tração ou frenagem) com a força lateral for menor que um valor mínimo, definido pelo coeficiente de aderência da pista  $\mu$  e pela pressão normal  $p$  exercida na banda de rodagem e indicada pela Equação (2.48).

$$\sqrt{\left[ \frac{k_t x i_s}{(1 - i_s)} \right]^2 + \left[ \frac{k_y x t g \alpha}{(1 - i_s)} \right]^2} = \mu p b = \frac{\mu W}{l_t} \quad (2.48)$$

onde  $W$  é a carga normal e  $l_t$  é o comprimento de contato do pneu.

Isto implica que, se um ponto localizado a uma distância  $x$  a partir do ponto de contato frontal estiver na região de aderência, então  $x$  precisa ser menor que o comprimento característico  $l_c$ , que define o comprimento da região de aderência onde nenhum deslizamento entre a banda de rodagem e o solo ocorre. O valor para  $l_c$  com relação ao comprimento da área de contato  $l_t$ , pode ser obtido a partir da Equação (2.48) e é escrito a seguir como a Equação (2.49).

$$\frac{l_c}{l_t} = \frac{\mu W(1-i_s)}{2\sqrt{\left(\frac{k_t l_t^2 i_s}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_y l_t^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)^2}} = \frac{\mu W(1-i_s)}{2\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \operatorname{tg} \alpha)^2}} \quad (2.49)$$

onde  $k_t l_t^2/2 = C_s$  e  $k_y l_t^2/2 = C_\alpha$  correspondem à rigidez longitudinal e à rigidez de aderência lateral, definidas pelas equações (2.31) e (2.38), respectivamente.

Se  $l_c/l_t \geq 1$ , a área de contato inteira corresponde a uma região de aderência ao solo. Para este caso, a força longitudinal é dada pela Equação (2.50).

$$F_x = \int_0^{l_t} \left[ \frac{k_t x i_s}{(1-i_s)} \right] dx = \frac{k_t l_t^2 i_s}{2(1-i_s)} = \frac{C_s i_s}{(1-i_s)} \quad (2.50)$$

e a força de aderência lateral  $F_{y\alpha}$  como uma função do ângulo de deriva lateral  $\alpha$  e deriva longitudinal  $i_s$  passa a ser expressa pela Equação (2.51).

$$F_{y\alpha} = \int_0^{l_t} \left[ \frac{k_y x \operatorname{tg} \alpha}{(1-i_s)} \right] dx = \frac{k_y l_t^2 \operatorname{tg} \alpha}{2(1-i_s)} = \frac{C_\alpha \operatorname{tg} \alpha}{(1-i_s)} \quad (2.51)$$

Caso  $l_c/l_t < 1$ , então ocorrerá deslizamento entre a banda de rodagem e o solo. A força longitudinal passa a ser dividida em duas partes, a primeira representativa do que acontece na região da área de contato onde há aderência,  $F_{xa}$ , e a segunda representativa do que acontece na região onde ocorre o deslizamento,  $F_{xs}$ . A força longitudinal de aderência passa a ser escrita conforme indicado na Equação (2.52), enquanto a força longitudinal de deslizamento aparece escrita na Equação (2.53).

$$F_{xa} = \int_0^{l_c} \left[ \frac{k_t x i_s}{(1-i_s)} \right] dx = \frac{\mu^2 W^2 C_s i_s (1-i_s)}{4[(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \operatorname{tg} \alpha)^2]} \quad (2.52)$$

$$F_{xs} = \frac{\mu W C_s i_s}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \operatorname{tg} \alpha)^2}} \left[ 1 - \frac{\mu W(1-i_s)}{2\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \operatorname{tg} \alpha)^2}} \right] \quad (2.53)$$

O somatório das duas forças representadas por (2.52) e (2.53), respectivamente as forças longitudinais para a região de aderência e para a região de deslizamento, retorna a força longitudinal total aplicada ao pneu quando houver deslizamento em parte da banda de rodagem. Este somatório é descrito na Equação (2.54) e corresponde à força longitudinal aplicada ao pneu, quando em movimento.

$$F_x = F_{xa} + F_{xs} = \frac{\mu W C_s i_s}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \text{tg} \alpha)^2}} \left[ 1 - \frac{\mu W (1 - i_s)}{4 \sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \text{tg} \alpha)^2}} \right] \quad (2.54)$$

De forma similar, o mesmo raciocínio deve ser aplicado para o equacionamento de forças laterais, presentes durante os movimentos para realização de curvas, desempenhados pelos pneus. Assim como para a força longitudinal, para o caso da força lateral também se deve levar em conta a existência de dois tipos distintos de força, para a região da banda de rodagem onde não há nenhum tipo de deslizamento, conhecido como região de aderência e representada pela força de aderência na região de aderência,  $F_{yaa}$ , e para a região da banda rolante onde há algum escorregamento do pneu, representado pela força de aderência da região com deslizamento,  $F_{yas}$ . A força na região de aderência,  $F_{yaa}$ , é indicada pela Equação (2.55).

$$F_{yaa} = \int_0^{l_c} \left[ \frac{k_y x \text{tg} \alpha}{(1 - i_s)} \right] dx = \frac{\mu^2 W^2 C_\alpha \text{tg} \alpha (1 - i_s)}{4 [(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \text{tg} \alpha)^2]} \quad (2.55)$$

Da mesma forma, é necessário escrever o equacionamento para a força de aderência lateral na parte da área de contato onde ocorre o escorregamento, conforme indica a Equação (2.56).

$$F_{yas} = \frac{\mu W C_\alpha \text{tg} \alpha}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \text{tg} \alpha)^2}} \left[ 1 - \frac{\mu W (1 - i_s)}{2 \sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \text{tg} \alpha)^2}} \right] \quad (2.56)$$

Como desenvolvido para a força longitudinal, a força lateral total aplicada a um pneu em movimento de curva corresponde ao somatório das duas forças de aderência,  $F_{y\alpha a}$  e  $F_{y\alpha s}$ . Este somatório aparece representado pela Equação (2.57).

$$F_{y\alpha} = F_{y\alpha a} + F_{y\alpha s} = \frac{\mu W C_{\alpha} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_{\alpha} \operatorname{tg} \alpha)^2}} \left[ 1 - \frac{\mu W (1 - i_s)}{4 \sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_{\alpha} \operatorname{tg} \alpha)^2}} \right] \quad (2.57)$$

As equações (2.54) e (2.57) representam as forças longitudinal e lateral, respectivamente, que serão empregadas ao longo deste trabalho para as demais análises de modelos de dinâmica veicular, seja em malha aberta, somente para verificar a resposta a uma dada entrada para o sistema, seja em malha fechada, com algum tipo de controlador implementado e funcional.

Ao longo do desenvolvimento do modelo de dinâmica veicular é feita menção a uma *Fórmula Mágica* [1], que é representada aqui pela relação entre o comprimento característico,  $l_c$ , e o comprimento da área de contato do pneu com o solo,  $l_t$ . Esta *Fórmula Mágica* explicita o percentual de área da banda de rodagem que realmente está solidária ao solo, com alguma aderência, garantindo a base necessária para que o veículo possa se deslocar e possa ser manobrável com algum tipo de controle, seja ele o homem ou algum controlador automático desenvolvido para este fim.

Deve ser notado que os parâmetros  $\mu$ ,  $W$ ,  $C_s$  e  $C_{\alpha}$  podem variar com as condições de operação do sistema. Por enquanto estabeleceu-se que em uma dada superfície, os valores de  $\mu$ ,  $C_s$  e  $C_{\alpha}$  são funções da força normal  $W$  e velocidade do pneu durante seu movimento. Em uma manobra dinâmica envolvendo esterçamento e frenagem ou tração, a força normal e a velocidade irão variar conforme a manobra prossegue. Para se alcançar resultados mais acurados, os efeitos da força normal e da velocidade deveriam ter suas influências sobre  $\mu$ ,  $C_s$  e  $C_{\alpha}$  levadas em consideração assim como outros parâmetros do pneu deveriam ser considerados [1].

## 2.8. Simulação do modelo do pneu

Terminado o desenvolvimento analítico do modelo de forças longitudinais (Equação 2.54) e laterais (Equação 2.57), deve-se testá-lo por intermédio de simulações computacionais. Os testes têm por objetivo validar o modelo e comparar com resultados da literatura de referência [1][9][10][11].

Os testes irão variar o valor da força normal aplicada ao pneu, o ângulo de deriva lateral e a deriva longitudinal, gerando gráficos de força longitudinal ( $F_x$ ) por deriva longitudinal; força lateral ( $F_y$ ) por ângulo de deriva lateral; e o gráfico da elipse de aderência, que retrata força longitudinal ( $F_x$ ) por força lateral ( $F_y$ ). Os gráficos contendo as forças longitudinal por deriva longitudinal e força lateral por ângulo de deriva podem ser observados na Figura 12 e na Figura 13, respectivamente. Ambos os gráficos, são comparados com os contidos na Figura 6, para forças longitudinais, e na Figura 9 para forças laterais, e demonstram a validade do modelo desenvolvido neste Capítulo.

Uma vez validados os modelos para a força lateral, descrita pela Equação (2.57) e apresentada na Figura 9 e na Figura 12, e para a força longitudinal, descrita pela Equação (2.54) e apresentada na Figura 6 e na Figura 13, é possível gerar um gráfico que retrate o conceito de elipse de aderência exposto na Seção 2.7, apresentado na Figura 14, e que reflete aquele apresentado na Figura 11.

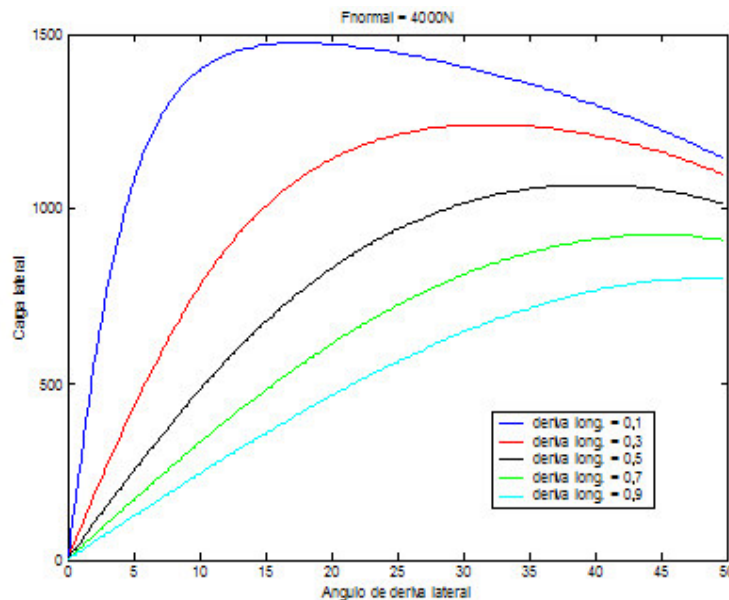


Figura 12 – Curvas de forças laterais sob ação de força normal de 4000N



Fecha-se assim a validação do modelo de pneu que será adotado para a modelagem de dinâmica veicular nos Capítulos subseqüentes. A partir do Capítulo 3 as Equações (2.54) e (2.57), definidas para o tratamento das forças que atuam em cada um dos quatro pneus, serão empregadas e comporão os modelos de veículo a serem analisados.

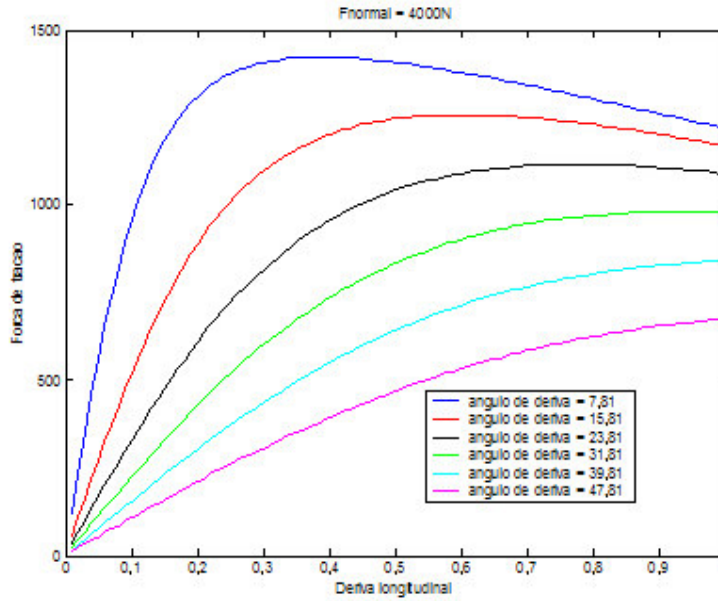


Figura 13 – Curvas de forças longitudinais sob ação de força normal de 4000N

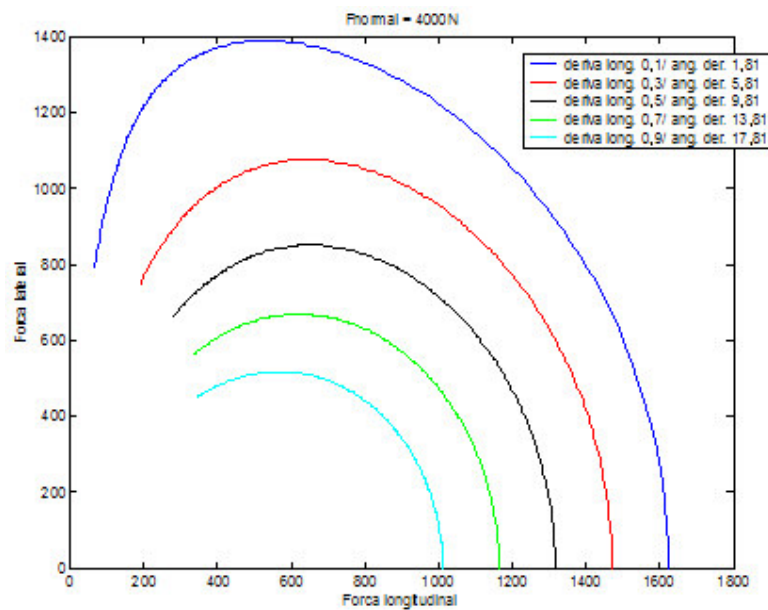


Figura 14 – Elipse de aderência de um pneu a 4000N de força normal