



Filipe De Castro Pessoa

**Análise torcional de colunas de perfuração
com stick-slip**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Roberta De Queiroz Lima

Rio de Janeiro
Junho de 2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe Maysa e meu padrasto Ivar (in memoriam) que sempre me apoiaram em todas as minhas escolhas, nunca me deixando faltar nada ao longo da minha trajetória. Também agradeço aos meus amigos brasileiros e franceses que, ao longo destes últimos anos, pudemos vivenciar experiências incríveis juntos.

Deixo um agradecimento especial aos professores Sérgio Lifschitz e Fred Palmeira que tiveram um papel crucial na minha dupla formação mostrando que a relação aluno-professor não se resume a sala de aula.

Agradeço à PUC-Rio e a todo seu corpo docente que contribuiu direta e indiretamente para a conclusão deste trabalho.

Por fim, agradeço à confiança depositada pela minha orientadora Roberta Lima que aceitou o desafio de orientar meu projeto de graduação dedicando inúmeras horas de seu tempo transmitindo ensinamentos extremamente valiosos.

Resumo

Análise torcional de colunas de perfuração com stick-slip

Durante as operações de perfuração de um poço de petróleo, colunas de perfuração são submetidas a ações dinâmicas, sofrendo assim vibrações. Tais vibrações quando não controladas podem ocasionar desde uma fadiga precoce do material, danos em brocas ou mesmo a quebra das colunas. Fenômenos como *Bit Bounce*, *Stick-Slip* e *Forward/Backward Whirl*, que advêm das vibrações axiais, torcionais e laterais respectivamente, são motivos de vários estudos. Neste trabalho será feita uma análise da dinâmica de torção de uma coluna de perfuração vertical considerando atrito seco entre a broca e solo. Será considerado que o topo da coluna tem velocidade constante imposta por um motor e base está sujeita a um torque devido a presença do atrito-seco. Por causa desse atrito, o movimento resultante da coluna pode ser caracterizado por dois modos qualitativamente diferentes, os modos stick e slip, com uma transição abrupta. A dinâmica da coluna será modelada matematicamente usando a teoria de eixos para então ser discretizada por elementos finitos e programas Matlab serão desenvolvidos para simulações numéricas.

Palavras-chave

Colunas de Perfuração ; Vibrações Torcionais ; Stick-slip ; Elementos Finitos ; Eixo Circular

Abstract

Torsional analysis of drill-strings with stick-slip

During the drilling operations of an oil well, drilling columns are subjected to dynamic actions, thus suffering vibrations. Such vibrations when uncontrolled can cause early fatigue of the material, damage to drills or even the breaking of the column. Phenomena such as *Bit Bounce*, *Stick-Slip* and *Forward / Backward Whirl*, which arise from axial, torsional and lateral vibrations respectively, are the subject of several studies. This work analyzes the torsional dynamics of a vertical drilling column considering dry friction between the drill and the soil. It is considered that the top of the column has a constant speed imposed by an engine and the base is subject to torque due to the presence of dry friction. Because of this friction, the resulting movement of the column can be characterized by two qualitatively different modes, the stick mode and the slip mode, with an abrupt transition. The dynamics of the column is modeled using the axis theory to then be discretized by finite elements. Matlab programs were developed for numerical simulations.

Keywords

Drilling ; Torsional Vibrations ; Stick-Slip ; Finite Elements ; Circular Shaft

Sumário

1	Introdução	8
2	Vibração torsional de eixos	10
2.1	Equação da Dinâmica	10
2.2	Equação do Movimento em Eixos Uniformes	11
3	Elementos Finitos	13
3.1	Funções de Interpolação	13
3.2	Formulação Fraca	14
4	Dinâmica da Coluna na Fase Slip	19
4.1	Espaço de estados	19
4.2	Indução de Vibrações Torsionais na Coluna	20
5	O Fenômeno Stick-Slip	26
5.1	Modelo Massa-Mola-Esteira	27
5.2	O Fenômeno Stick-Slip na Dinâmica de Colunas de Perfuração	28
6	Aplicação Numérica - Stick-Slip	30
6.1	Resultados	30
7	Conclusão	36
A	Código MATLAB	39

Lista de figuras

2.1	Elemento de um eixo circular.	10
2.2	Torsão em um eixo uniforme.	11
3.1	Exemplo de discretização unidimensional	13
3.2	Primeiro Elemento de uma malha	16
3.3	Coluna discretizada em n elementos.	18
4.1	Fase slip (deslizamento).	20
4.2	Velocidade angular no primeiro nó (esq.) e no último nó (dir.).	21
4.3	Deslocamento angular no primeiro nó (esq.) e no último nó (dir.).	22
4.4	Velocidade (esq.) e deslocamento angular (dir.) no primeiro nó.	22
4.5	Velocidade angular em função do tempo no último nó.	23
4.6	Velocidade angular em diferentes nós.	24
4.7	Deslocamento angular em função do tempo no último nó.	24
4.8	Comparação deslocamento angular no primeiro e último nó.	25
5.1	Fenômeno stick-slip.	26
5.2	Modelos de atrito de Coulomb.	27
5.3	Sistema massa-mola-esteira.	27
5.4	Stick-slip em um sistema massa-mola-esteira.	28
6.1	Velocidade (esq.) e deslocamento angular (dir.) no primeiro nó.	30
6.2	Fenômeno stick-slip com $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$.	31
6.3	Fenômeno stick-slip com $\omega = 5 \text{ rad.s}^{-1}$.	32
6.4	Velocidade angular no último nó com $\omega = 3 \text{ rad.s}^{-1}$.	33
6.5	Deslocamento angular no último nó com $\omega = 3 \text{ rad.s}^{-1}$.	34
6.6	Deslocamento angular no primeiro e último nó.	35

Lista de tabelas

4.1	Parâmetros aplicados na simulação slip	21
6.1	Parâmetros aplicados na primeira simulação stick-slip.	31
6.2	Parâmetros aplicados na segunda simulação stick-slip.	33

1

Introdução

A exploração de petróleo envolve inúmeras fases e processos e um destes é a perfuração de poços. Um dos principais problemas durante a perfuração de um poço de petróleo são as vibrações na coluna de perfuração as quais podem causar danos severos nas colunas e na broca aumentando os custos da operação.

Este trabalho de conclusão de curso analisa vibrações torcionais em colunas de perfuração verticais. A coluna é uma estrutura esbelta na qual no topo é imposta uma velocidade de rotação constante. Na base, a coluna está conectada a uma broca que interage com o solo.

Quando estudamos vibrações torcionais em colunas de perfuração, tais vibrações estão principalmente relacionadas com o atrito seco entre a broca e o poço, onde ocorre o fenômeno de stick-slip [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8], tópico principal à ser estudado neste trabalho de conclusão de curso. A ocorrência deste fenômeno causa uma grande variação na velocidade de rotação na broca e pode ocasionar a completa parada da operação. Devido ao stick-slip, o movimento resultante da coluna pode ser caracterizado por dois modos alternados e qualitativamente diferentes, os modos stick e slip, com uma transição abrupta.

O fenômeno stick-slip em sistemas mecânicos está, geralmente, associado a existência de uma força que satura, como por exemplo uma força de atrito que existe devido ao contato entre superfícies. A passagem do modo stick para o slip está relacionado à saturação desta força, assunto que será desenvolvido ao longo deste projeto de graduação.

No capítulo 2 encontra-se a descrição do problema de vibrações torcionais em um meio contínuo, a discussão da física do problema e hipóteses simplificadoras são apresentadas, bem como as equações diferenciais que regem a dinâmica de eixos e as respectivas condições de contorno e iniciais para o problema apresentado.

No capítulo 3 é feita uma introdução à discretização por elementos finitos e em seguida é definida uma forma alternativa de representar o problema através da formulação fraca. São abordados tópicos como funções de interpolação, matrizes elementares para assim poder obter uma aproximação da solução do problema através dos métodos de Galerkin.

Após a discretização pelo método de elementos finitos da equação da dinâmica torcional da coluna de perfuração, simulações numéricas foram desenvolvidas através do software Matlab. Nessas simulações considera-se que

uma velocidade de rotação constante é imposta no topo da coluna e o fundo esta livre, ou seja, não há atrito seco entre a broca e o solo. Dessa forma, a resposta da coluna corresponde apenas ao modo slip. Os resultados e análises são apresentados no capítulo 4. Utiliza-se o método de Runge-Kutta de 4^a e 5^a ordem para integração numérica das equações da dinâmica escritas no espaço de fase.

O capítulo 5 discute a dinâmica de sistemas com atrito-seco, e o fenômeno de stick-slip, ou seja, dinâmica de sistemas não lineares. É apresentado um exemplo muito comum na literatura, o sistema massa-esteira, para depois ser apresentada a modelização realizada para a dinâmica da coluna.

No capítulo 6 é feita a aplicação numérica da modelização discutida no capítulo anterior apresentando, analisando e discutindo os resultados obtidos. As simulações são divididas em dois diferentes conjuntos que se diferenciam pelos valores dos parâmetros estimados e pela variação das condições iniciais.

As conclusões do trabalho encontram-se no capítulo 7 e, por fim, encontra-se a referência bibliográfica.

2

Vibração torsional de eixos

Este capítulo abordará métodos analíticos de análise de vibração de eixos sistemas estruturais contínuos [9]. Elementos e sistemas estruturais contínuos são encontrados em muitos ramos da engenharia e, no caso de colunas de perfuração, são encontrados principalmente nos ramos de engenharia mecânica/petróleo.

2.1

Equação da Dinâmica

Considere um elemento de um eixo circular entre duas seções transversais x e $x + dx$, conforme mostrado na Figura 2.1. O deslocamento angular da seção transversal em x é denotado $\theta(x, t)$ logo o deslocamento angular em $x + dx$ é $\theta(x, t) + d\theta(x, t)$ [3].

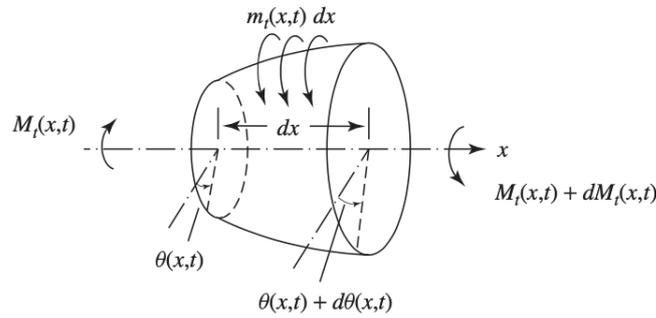


Figura 2.1: Elemento de um eixo circular.

$M_t(x, t)$ representa o torque induzido no eixo em x no tempo t , $M_t(x, t) + dM_t(x, t)$ o torque induzido no eixo em $x + dx$ no mesmo tempo t e, por fim, $m_t(x, t)$ é o torque externo que atua no eixo por unidade de comprimento.

O produto entre momento de inércia que atua no elemento do eixo e a aceleração é dado por $I_0 dx (\partial^2 \theta / \partial t^2)$, onde $I_0 dx$ é o momento de inércia polar do eixo por unidade de comprimento.

Ao aplicar a equação do movimento de Euler neste elemento do eixo é obtida a seguinte equação da dinâmica:

$$\left(M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx \right) - M_t + I_0 dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = m_t dx, \quad (2-1)$$

onde $dM_t = (\partial M_t / \partial x) dx$ e $d\theta = (\partial \theta / \partial x) dx$.

Pelos axiomas da resistência dos materiais, a relação entre o torque no eixo e o deslocamento angular é dada por

$$M_t = -G J \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2-2)$$

onde G é o módulo de cisalhamento e J é o momento de inércia polar da seção transversal do eixo.

Substituindo a Eq. (2-2) na equação do movimento Eq. (2-1), tem-se

$$I_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(G J \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) = m_t(x, t). \quad (2-3)$$

2.2 Equação do Movimento em Eixos Uniformes

Para um eixo uniforme Fig. 2.2, sabe-se que $I_0 = \rho J$, logo é possível reescrever a Eq. 2-3 como

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - G J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = m_t(x, t). \quad (2-4)$$

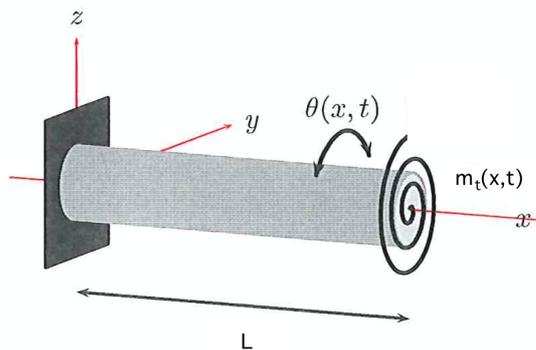


Figura 2.2: Torsão em um eixo uniforme.

2.2.1 Vibrações livres em eixos uniformes

No caso de vibrações livres, considera-se que a força externa aplicada é nula $f(x, t) = 0$, ou seja, no caso de torsões, o torque externo que atua no eixo será nulo $m_t = 0$.

Nesta seção o objetivo é encontrar a solução homogênea da equação diferencial Eq. 2-4. Por separação de variáveis pode-se assumir que a solução será da forma

$$\theta(x, t) = \phi(x) q(t). \quad (2-5)$$

Logo, substituindo a solução (Eq. 2-5) na Equação 2.2 tem-se :

$$\rho J \ddot{q}(t) \phi(x) = G J q(t) \phi''(x), \quad (2-6)$$

onde " " representa a derivada no tempo t e " ' " a derivada em relação ao eixo x .

Pode-se então isolar igualdade Eq. 2-6 com um lado representando o deslocamento no tempo e o outro o deslocamento no espaço. Logo,

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{G}{\rho} \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}. \quad (2-7)$$

Para que a Eq. 2-7 seja verdade, sua solução deve ser, obrigatoriamente, uma constante. Definindo a resposta não forçada do sistema como

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\omega^2, \quad (2-8)$$

chega-se à **Equação Característica** para eixos em torsão:

$$\phi''(x) + \lambda^2 \phi(x) = 0, \quad (2-9)$$

onde $\lambda^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}$.

Tem-se então duas equações diferenciais com soluções exatas. Uma é a equação característica e a outra a resposta não forçada do sistema, respectivamente,

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda^2 \phi(x) = 0 \\ \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \end{cases}. \quad (2-10)$$

2.2.2

Vibrações forçadas em eixos uniformes

Para o caso de vibrações forçadas não podemos considerar que a força externa aplicada seja nula, em outras palavras, o torque externo que atua no eixo será diferente de zero, $m_t(x, t) \neq 0$.

Precisa-se então resolver uma equação diferencial não homogênea. Dependendo do tipo de força aplicada, soluções analíticas começam a ser difíceis de serem calculadas. Afim de resolver estes tipos de problemas utilizaremos métodos numéricos.

3

Elementos Finitos

A dinâmica de sistemas que dependem de espaço e tempo são geralmente expressas em termos de equações diferenciais parciais (EDPs), como por exemplo a equação diferencial parcial [2-4] definida na seção anterior.

Para a grande maioria das geometrias e problemas, essas EDPs não podem ser resolvidas com métodos analíticos. Uma opção para contornar o problema é discretizar as EDPs através de métodos de discretização, como por exemplo, o método dos elementos finitos. Após a discretização, gera-se um sistema de equações diferenciais ordinárias, que podem ser integradas temporalmente por métodos numéricos, como por exemplo, o método de Runge-Kutta.

A solução para as equações do modelo numérico é, por sua vez, uma aproximação da solução real às EDPs. O método dos elementos finitos (MEF) é usado para calcular essas aproximações.

3.1

Funções de Interpolação

As funções usadas para representar o comportamento de uma variável de campo dentro de um elemento são chamadas de funções de interpolação ou de funções de aproximação [10]. Diferentes tipos de funções podem ser usadas como funções de interpolação, tais como funções polinomiais e funções trigonométricas. Em análises de vibrações, funções de interpolação polinomiais são, normalmente, mais utilizadas por serem mais fáceis de manipular e por consequência serão também tratados neste trabalho.

Funções testes são funções de interpolação [11] definidas em termo das variáveis de campo em nós especificados. Tais nós geralmente ficam nos limites do elemento conforme Fig. 3.1.

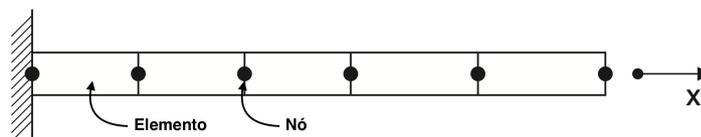


Figura 3.1: Exemplo de discretização unidimensional

Percebe-se então que os nós da variável de campo tornam-se as novas incógnitas. Uma vez obtidas estas incógnitas nodais, ou seja, uma vez definida as condições aos limites, as funções de interpolação definirão as variáveis de

campo ao longo da montagem dos elementos do problema. Estaremos então representado o problema de uma forma alternativa comumente chamada de **formulação fraca**.

Assim, as soluções serão formuladas para elementos individuais os quais serão reunidos para representar todo o problema. A natureza da solução e o grau de precisão dependem do tamanho e número de elementos e do tipo de função de interpolação usada. Quanto mais discretizado o problema, mais próximo do contínuo estamos e mais precisa é a solução, porém maior o custo computacional. As funções de interpolação são escolhidas de modo que a variável de campo ou suas derivadas sejam contínuas através dos limites dos elementos adjacentes podendo ter n graus de liberdade.

3.2

Formulação Fraca

A EDP descrita na Eq. [2-4](#) é também conhecida como **formulação forte**. Para encontrar a solução de um problema através da formulação forte é necessário integrar a equação diferencial em cada ponto do seu domínio, que inclui a ordem de derivação mais alta o que muitas vezes pode ser muito difícil ou somente calculável numericamente [\[12\]](#).

A **formulação fraca** é uma forma alternativa de representar o problema e consta de equações diferenciais, de um espaço de funções admissíveis e de condições aos limites.

Para equacionar a formulação fraca do problema, faz-se o produto da equação diferencial (Eq. [2-4](#)) por uma função teste e depois integra-se no domínio do problema Ω . Trabalharemos com a hipótese de um eixo livre nas duas extremidades.

$$\int_{\Omega} \underbrace{\left[\rho J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \varphi_j(x) \right]}_{\text{Inércia}} dx - \int_{\Omega} \underbrace{\left[G J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \varphi_j(x) \right]}_{\text{Rigidez}} dx = \int_{\Omega} \left[m_t(x, t) \varphi_j(x) \right] dx . \quad (3-1)$$

O termo de rigidez pode ser integrado por partes, logo

$$\int_{\Omega} \left[G J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \varphi_j(x) \right] dx = \underbrace{\left[G J \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \varphi_j(x) \right]}_{C=0} - \int_{\Omega} \left[G J \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} \right] dx . \quad (3-2)$$

Na equação [3-2](#), o termo C é igual a zero devido às condições de contorno de um eixo livre-livre. Por exemplo, suponhamos $\Omega = [0, L]$, como o problema trata de um eixo livre-livre, $\theta'(0, t) = \theta'(L, t) = 0$, então:

$$\int_{\Omega} \rho J \ddot{\theta} \varphi_j dx + \int_{\Omega} G J \theta' \varphi_j' dx = \int_{\Omega} m_t \varphi_j dx. \quad (3-3)$$

3.2.1

Método de Galerkin

Deseja-se obter uma aproximação para a solução do problema. O método de aproximação a ser estudado será o Método de Galerkin [13]. Tal método consiste na busca de uma aproximação para a equação 3-3 que pertença ao subespaço de dimensão finita Adm^n de forma que Adm^n pertença ao subespaço de dimensão infinita Adm .

Sabe-se que $\theta(x, t)$ tem soluções independentes conforme (Eq. 2-5). Se considerarmos a existência de um numero finito n de elementos, logo existem $n + 1$ nós. Então a aproximação desejada será da forma :

$$\theta^{n+1}(x, t) = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(x) q_i(t). \quad (3-4)$$

De forma análoga:

$$\ddot{\theta}^{n+1}(x, t) = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t). \quad (3-5)$$

Neste método a base de projeção é a mesma base usada para aproximar θ , isto é, $\phi_i = \varphi_i$.

Então, para o domínio Ω tem-se:

$$\rho J \ddot{q}_i \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + G J q_i \int_{\Omega} \varphi_i' \varphi_j' dx = \int_{\Omega} m_t \varphi_j dx. \quad (3-6)$$

3.2.2

Matrizes Elementares

Uma vez definida a aproximação para o problema, a formulação fraca deverá ser reescrita para cada um dos elementos "e" aplicando as funções de aproximação correspondentes, logo

$$\rho J \ddot{q}_i \int_e \varphi_i \varphi_j dx + G J q_i \int_e \varphi_i' \varphi_j' dx = \int_e m_t \varphi_j dx. \quad (3-7)$$

Para o primeiro elemento de uma malha unidimensional (Fig. 3.2) tem-se a combinação de $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, onde i são as linhas da matriz e j as colunas, então,

$$\rho J \int_{x_1}^{x_2} \varphi_i \varphi_j dx \ddot{q}_i + G J \int_{x_1}^{x_2} \varphi_i' \varphi_j' dx q_i = \int_{x_1}^{x_2} m_t \varphi_i dx. \quad (3-8)$$

Em forma matricial, para o elemento 1 tem-se:



Figura 3.2: Primeiro Elemento de uma malha

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}}_{[J^1]} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{[K^1]} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{T^1}. \quad (3-9)$$

Para o segundo elemento da malha unidimensional tem-se $i = 2, 3$ e $j = 2, 3$ então,

$$\rho J \int_{x_2}^{x_3} \varphi_i \varphi_j dx \ddot{q}_i + GJ \int_{x_2}^{x_3} \varphi'_i \varphi'_j dx q_i = \int_{x_2}^{x_3} m_t \varphi_i dx \quad (3-10)$$

Em forma matricial, para o elemento 2 tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}}_{[J^2]} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}}_{[K^2]} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}}_{T^2}. \quad (3-11)$$

O mesmo procedimento deve ser feito para os outros n elementos do domínio. Então, para o elemento n da malha tem-se $i = n, n + 1$ e $j = n, n + 1$ logo,

$$\rho J \int_n^{n+1} \varphi_i \varphi_j dx \ddot{q}_i + GJ \int_n^{n+1} \varphi'_i \varphi'_j dx q_i = \int_n^{n+1} m_t \varphi_i dx. \quad (3-12)$$

Em forma matricial, para o elemento $n - 1$ tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{nn} & J_{nn+1} \\ J_{n+1n} & J_{n+1n+1} \end{bmatrix}}_{[J^n]} \begin{bmatrix} \ddot{q}_n \\ \ddot{q}_{n+1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nn+1} \\ K_{n+1n} & K_{n+1n+1} \end{bmatrix}}_{[K^n]} \begin{bmatrix} q_n \\ q_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_n \\ T_{n+1} \end{bmatrix}}_{T^n}. \quad (3-13)$$

Percebe-se que pode ser feita uma assemblagem de cada elemento, criando assim as matrizes e vetores do no domínio discretizado (Eq. 3-14).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 + J_{22}^2 & J_{23}^2 & 0 \\ 0 & J_{32}^2 & J_{33}^2 + J_{nn}^n & J_{nn+1}^n \\ 0 & 0 & J_{n+1n}^n & J_{n+1n+1}^n \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1^1 \\ \ddot{q}_2^1 + \ddot{q}_2^2 \\ \ddot{q}_3^2 + \ddot{q}_n^n \\ \ddot{q}_{n+1}^n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{nn}^n & K_{nn+1}^n \\ 0 & 0 & K_{n+1n}^n & K_{n+1n+1}^n \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 + q_2^2 \\ q_3^2 + q_n^n \\ q_{n+1}^n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 + T_2^2 \\ T_3^2 + T_n^n \\ T_{n+1}^n \end{bmatrix}}_T \quad \ddots$$

$$[J] \ddot{q} + [K] q = T. \quad (3-14)$$

Em resumo, cada elemento da equação (Eq. 3-7) pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$[J^e] \ddot{q}^e + [K^e] q^e = T^e, \quad (3-15)$$

onde, $[J^e]$ é a matriz de inércia do elemento, $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elementos, T^e é o vetor de torque externo, q é o vetor de deslocamento angular e \ddot{q} é o vetor de aceleração angular. Então:

- Matriz de inércia do elemento

$$[J_{ij}^e] = \rho J \int_e \varphi_i \varphi_j dx, \quad (3-16)$$

- Matriz de rigidez do elemento

$$[K_{ij}^e] = G J \int_e \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx, \quad (3-17)$$

- Vetor de torque

$$T_i^e = \int_e m_i \varphi_i dx, \quad (3-18)$$

A figura 3.3 ilustra a coluna discretizada em n elementos, onde os discos são os momentos de inércia J , as molas representam a rigidez K , ω representa a velocidade de rotação arbitrária imposta à coluna e T_L representa o torque no último elemento da coluna.

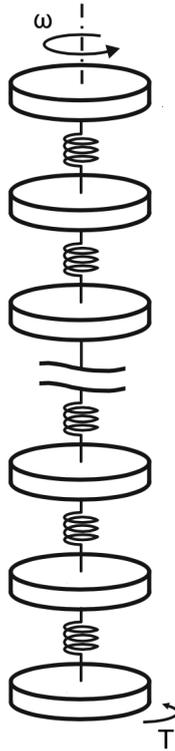


Figura 3.3: Coluna discretizada em n elementos.

3.2.3 Escolha Função de Teste

Considere o elemento de linha do tipo linear mostrado na Fig. 3.2. Assuma que a variável de campo φ seja uma função de x e que l_e seja o comprimento do elemento.

Necessita-se de uma função de testes para cada nó que satisfaça $x_2 - x_1 = l_e$. Uma boa opção do tipo linear, em valor unitário é:

– Primeiro Nó
$$\varphi_1(x) = \frac{l_e - x}{l_e}, \quad (3-19)$$

– Segundo Nó
$$\varphi_2(x) = \frac{x}{l_e}. \quad (3-20)$$

Dada a formulação fraca definida, feita a escolha do método de aproximação e das funções testes, podemos fazer a aplicação numérica.

Para as funções testes definidas anteriormente, a matriz de inércia do elemento (J^e) e matriz de rigidez do elemento (K^e) serão:

$$[J^e] = \begin{bmatrix} \frac{\rho J l_e}{3} & \frac{\rho J l_e}{6} \\ \frac{\rho J l_e}{6} & \frac{\rho J l_e}{3} \end{bmatrix}, \quad [K^e] = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l_e} & -\frac{GJ}{l_e} \\ -\frac{GJ}{l_e} & \frac{GJ}{l_e} \end{bmatrix}. \quad (3-21)$$

4

Dinâmica da Coluna na Fase Slip

Para poder fazer uma análise numérica da dinâmica do movimento é preciso passar do sistema contínuo ao discreto, possibilitando assim, o uso de métodos de integrações numéricas como o método de Runge-Kutta que será utilizado neste trabalho através da função de integração `ode45` do MATLAB. Esse método estima uma aproximação para solução das equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem por previsões. Ou seja, dada as equações que regem a dinâmica do sistema, as condições iniciais, tal método prevê o estado do sistema no tempo $t_i + \delta t$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Como o método de Runge-Kutta pode somente ser aplicado para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e como visto na seção anterior, temos um problema de segunda ordem, transformaremos este problema de segunda ordem em um sistema de EDOs de primeira ordem. Faremos a transformação através da representação de espaço de estados que é uma representação da dinâmica através das variáveis de estado. Tais variáveis são expressas em vetores e as equações diferenciais algébricas são escritas na forma matricial.

4.1

Espaço de estados

Suponha a matriz de inércia $[J]$ como uma matriz invertível. É possível reescrever a equação [3-14](#) como

$$\{\ddot{q}\} = -[J]^{-1}[K]\{q\} + [J]^{-1}\{T\}. \quad (4-1)$$

Considere o vetor de estado s como

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}. \quad (4-2)$$

Por consequência,

$$\{\dot{s}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}. \quad (4-3)$$

Aplicando a mudança de variáveis (Eq. [4-1](#)) em [4-3](#) tem-se a EDO reduzida à primeira ordem

$$\{\dot{s}\} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -[J]^{-1}[K] & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}}_s + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ [J]^{-1}T \end{Bmatrix}}_B, \quad (4-4)$$

onde as matrizes zeros (0) e identidade (I) tem o mesmo tamanho das matrizes de inercia e rigidez.

Nesta seção, começaremos a estudar a fase slip do fenômeno de stick-slip. Para tal, será realizada a aplicação numérica para o caso de vibrações livres, ou seja, o vetor de torques T (vide Eq. 3-14) será um vetor de zeros.

Por ora, consideremos o conceito de fase slip como sendo a fase onde a velocidade de deslizamento entre as duas superfícies é não nula. Por exemplo, quando uma massa que está sendo empurrada está em movimento (Fig. 4.1).



Figura 4.1: Fase slip (deslizamento).

4.2

Indução de Vibrações Torsionais na Coluna

A equação da dinâmica da coluna de perfuração obtida através da teoria linear de eixos de Euler-Bernoulli foi discretizada em elementos finitos conforme visto no capítulo 3.

Para simular a rotação da coluna de perfuração será imposto uma velocidade de rotação ω , diferente de zero, no primeiro elemento da coluna. Ou seja, em analogia a um caso real, é como se houvesse um motor dando energia ao sistema. As condições iniciais de posição e velocidade serão consideradas nulas em toda coluna com exceção do topo que tem velocidade imposta constante ω . Ao impor uma velocidade constante em um elemento, estamos indiretamente dizendo que a aceleração deste elemento é zero, logo

$$\{\dot{s}_1\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4-5)$$

Como dito anteriormente, o vetor T será nulo, logo o termo B da Eq. 4-4 desaparece. A equação se resume então à

$$\dot{s} = A * s, \quad (4-6)$$

onde A é uma matriz $2n \times 2n$.

Chega-se então a um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem definida no espaço e no tempo. Para encontrar a solução do problema para cada instante de t , ou seja o vetor s , devemos integrar numericamente a equação 4-6. O método empregado, conforme citado anteriormente,

será o método de Range-Kutta através da função de integração *ode45* do MATLAB.

O código completo pode ser encontrado no Anexo A.

4.2.1

Resultados Obtidos

Os resultados obtidos após a simulação estão mostrados nas figuras 4.2 à 4.7. Os valores das variáveis utilizadas podem ser encontrados na tabela abaixo:

Parâmetro	Valor	Unidade	-
L	500	m	Comprimento da coluna
r	0.16	m	Raio da coluna
J	0.0037	m^4	Momento de inércia polar
G	77	GPa	Módulo de cisalhamento
ρ	7850	$kg.m^{-3}$	Densidade
n	100	-	Número de nós
ω	1	$rad.s^{-1}$	Velocidade imposta

Tabela 4.1: Parâmetros aplicados na simulação slip

Para uma coluna com as extremidades livres e sem forças externas aplicadas, ao impor uma velocidade angular inicial ω em toda a coluna é possível verificar que esta velocidade continua constante e sem alteração ao longo do tempo. A coluna se comporta como um corpo rígido, ou seja, a coluna rotaciona com velocidade constante em todos os nós (Fig. 4.2) sem se deformar. A figura 4.3 reflete o deslocamento angular em função do tempo que também é uniforme em todos os nós por se tratar da dinâmica de um corpo rígido.

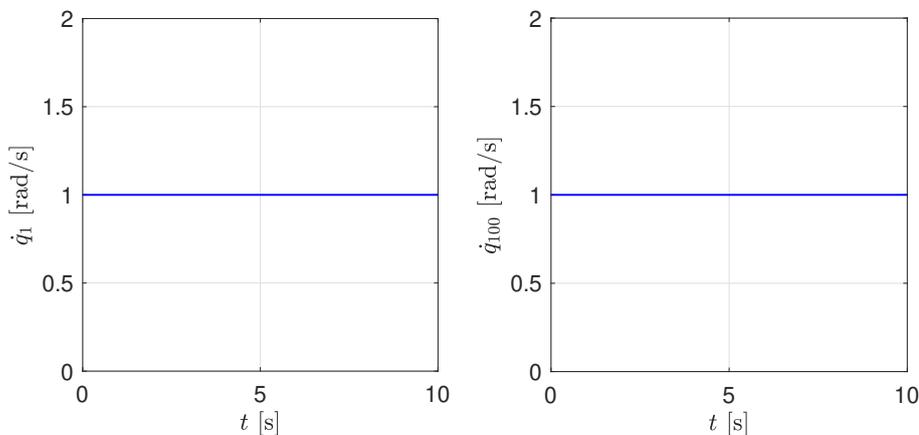


Figura 4.2: Velocidade angular no primeiro nó (esq.) e no último nó (dir.).

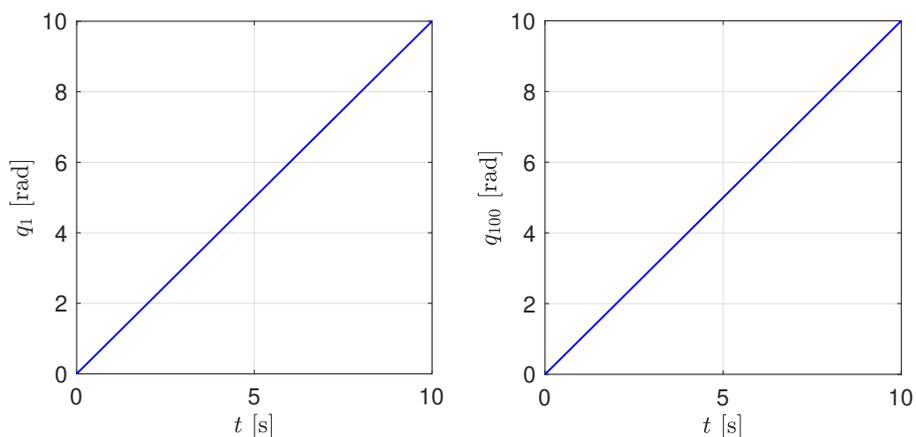


Figura 4.3: Deslocamento angular no primeiro nó (esq.) e no último nó (dir.).

Continuando com a mesma hipótese da coluna com extremidades livres e sem forças externas aplicadas porém impondo a velocidade angular ω somente no primeiro elemento, o sistema passa a não se comportar como um corpo rígido. O primeiro nó continua com comportamento semelhante ao apresentado anteriormente, pois o mesmo continua submetido à velocidade imposta ω vide figura [4.4](#).

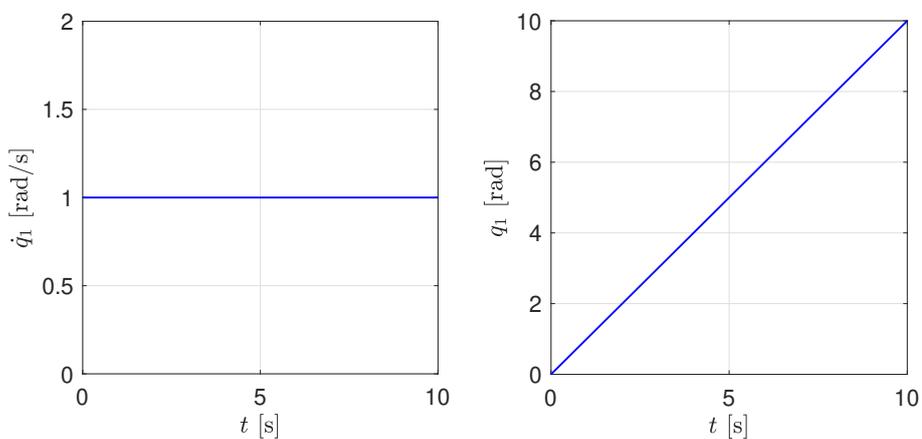


Figura 4.4: Velocidade (esq.) e deslocamento angular (dir.) no primeiro nó.

A figura 4.5, representa a velocidade angular no último nó (\dot{q}_{100}). A resposta do sistema neste nó apresenta um comportamento quase periódico e em torno da velocidade angular próxima à zero e dois existem oscilações. Estas oscilações são devido ao fato de existir uma velocidade de propagação da onda dentro da coluna que é resultado da superposição de todos os modos do sistema.

Ao induzir uma rotação no primeiro elemento através de ω , estamos introduzindo energia cinética no sistema. Esta energia se propaga pela coluna com certa velocidade fazendo que os elementos subsequentes ao primeiro elemento torsionem. Como não há perdas de energia no sistema (Eq. 2-6), ou seja, não existe nenhuma forma de dissipação, as condições iniciais tem muita influência no sistema. Além disso, existe a superposição de modos de vibração que vai influenciar diretamente na resposta do sistema.

Perceba na imagem que nos primeiros instantes, a velocidade angular no ultimo no fundo da coluna é zero, pois a onda ainda não se propagou até lá. Uma vez que a onda se propaga até o fundo ela é refletida retomando assim a velocidade zero no ultimo nó.

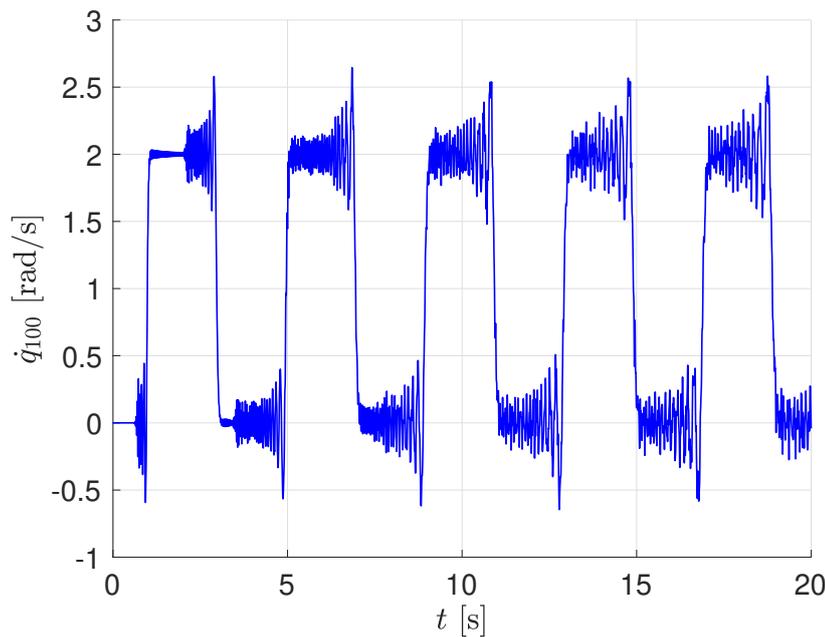


Figura 4.5: Velocidade angular em função do tempo no último nó.

A figura abaixo (Fig. 4-6) mostra a velocidade angular 3 diferentes nós para ilustrar a propagação da onda.

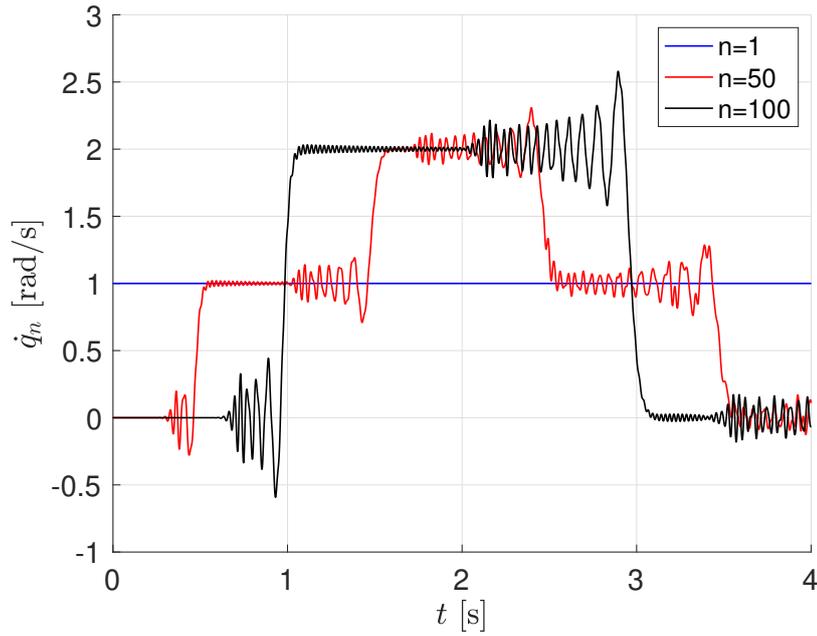


Figura 4.6: Velocidade angular em diferentes nós.

No que diz respeito ao deslocamento angular no último nó (q_{100}) percebemos uma forma de "degrau" (Fig. 4.7) onde podemos verificar que, devido aos mesmos fatores citados acima, o nó ganha energia, realiza um deslocamento e, pela reflexão da onda, volta a ficar parado, repetindo esta alternância de movimentos.

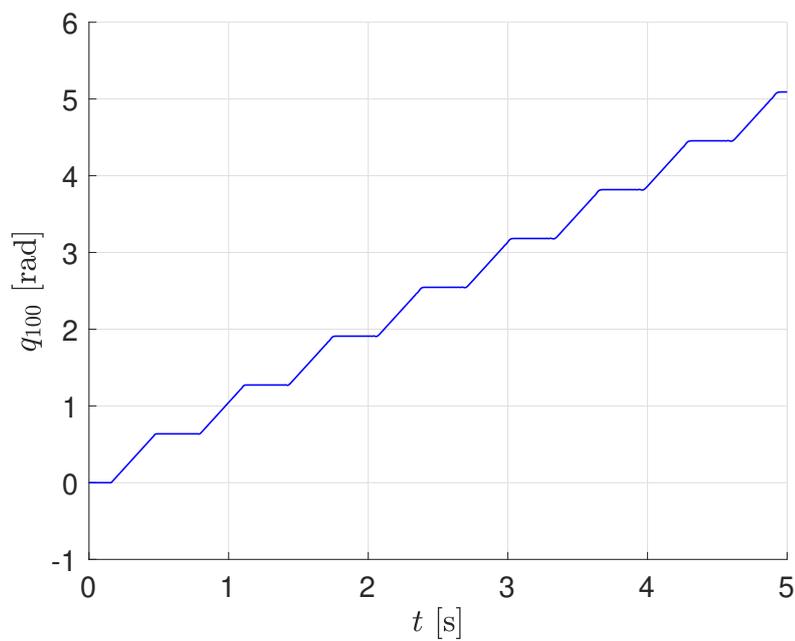


Figura 4.7: Deslocamento angular em função do tempo no último nó.

Perceba pela figura 4.8 que o deslocamento angular no último nó ao final do intervalo de integração $[0, 5]$ segundos, é muito próximo ao deslocamento angular no primeiro nó ao final do mesmo tempo o que mostra que, de certa forma, o fundo da coluna consegue acompanhar o movimento imposto no topo da coluna.

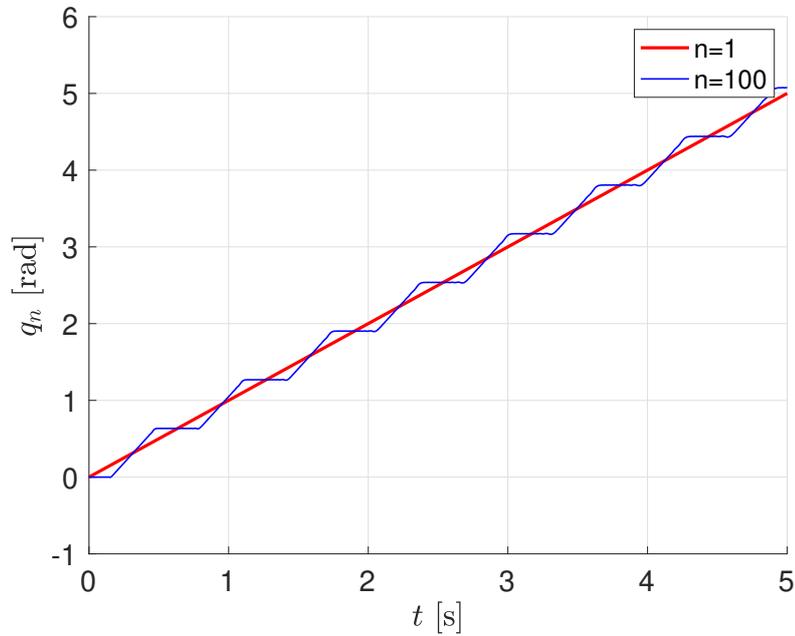


Figura 4.8: Comparação deslocamento angular no primeiro e último nó.

Vale ressaltar que, como não é possível trabalhar com infinitos elementos, sempre haverá erros ligados à aproximações quando comparados com a solução contínua do problema.

5

O Fenômeno Stick-Slip

Stick-slip é um fenômeno no qual a velocidade entre dois ou mais corpos em contato alterna de uma velocidade nula (fase stick) para uma velocidade finita não-nula (fase slip).

A configuração mais usual dos movimentos de stick-slip é uma configuração onde existe a interação de um sistema elástico com uma superfície de deslizamento por atrito. Um exemplo cotidiano do fenômeno stick-slip são os terremotos ou, como ilustrado na figura abaixo (Fig. 5.1), puxar uma massa sobre uma superfície com atrito. Porém podemos também verificar a presença do fenômeno em outros tipos de sistemas como visto em [14].

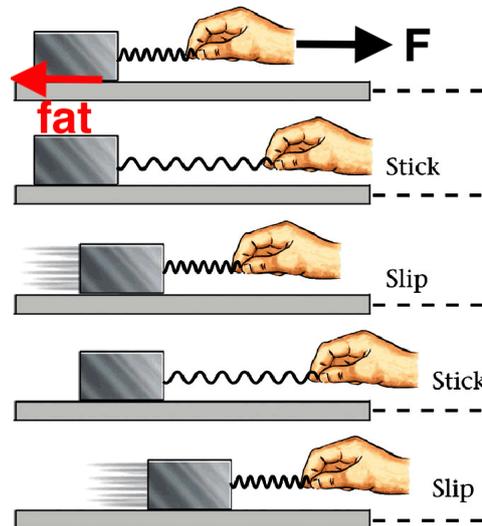


Figura 5.1: Fenômeno stick-slip.

Tradicionalmente, essa interação é modelada com alguma lei de atrito, na qual a força de atrito depende da taxa de deslizamento (velocidade relativa) [15]. Neste trabalho será aplicada o modelo de atrito de Coulomb onde será feita uma simplificação conforme a figura 5.2. O gráfico da esquerda apresenta o modelo de atrito de Coulomb em sua forma clássica onde se a velocidade relativa entre os corpos for estritamente zero, a força de atrito pode assumir diferentes valores entre a força atrito máxima e mínima.

No gráfico apresentado à direita da figura 5.2, é criada uma relação funcional afim de simplificar o modelo de Coulomb em sua forma clássica a qual não apresenta uma relação funcional como pode ser verificado no gráfico à esquerda da figura 5.2. Devido estarmos trabalhando com integrações numéricas, ou seja, com aproximações, não é possível obter uma velocidade

relativa nula. Para solucionar estes problemas a descontinuidade em zero foi transformada em uma função linear com inclinação f_{at}/e , onde e é um número pequeno predefinido, cujo valor adequado pode ser determinado por tentativa e erro na simulação.

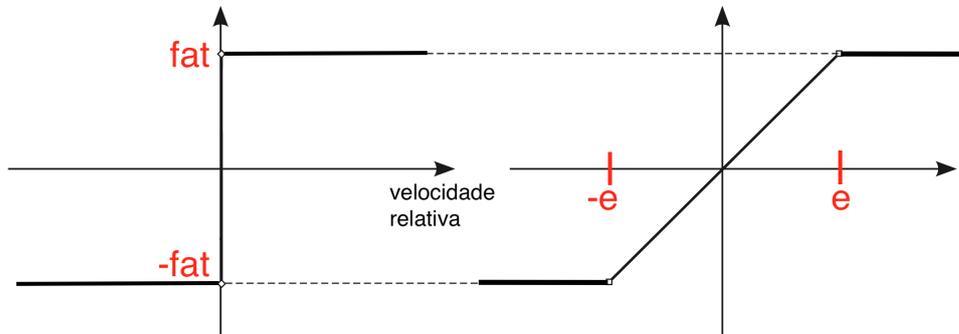


Figura 5.2: Modelos de atrito de Coulomb.

5.1 Modelo Massa-Mola-Esteira

Uma forma intuitiva para visualizar o fenômeno do stick-slip é imaginar uma massa sobre uma esteira ligada a uma parede por uma mola. A imagem abaixo ilustra o modelo [16]. Única e exclusivamente nesta seção x representará o deslocamento da massa.

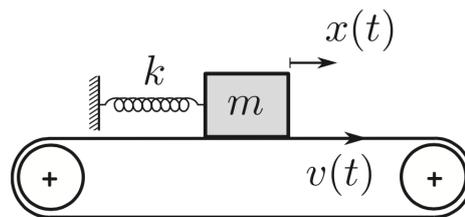


Figura 5.3: Sistema massa-mola-esteira.

A esteira possui velocidade constante v e a massa m se desloca em função do tempo obedecendo as leis de Newton, então

$$m \ddot{x} = -kx + f_{at}, \tag{5-1}$$

onde k é a constante elástica da mola que obedece a Lei de Hooke e f_{at} a força de atrito que segue o modelo descrito na figura 5.2 (esquerda).

Quando a velocidade relativa (*velocidade da esteira* – *velocidade da massa*) é nula e o deslocamento estiver no intervalo $-f_{at_{max}}/k < x <$

$+fat_{max}/k$ o sistema estará na fase stick. Caso contrário, se a velocidade relativa for diferente de zero, a massa estará em movimento, ou seja, na fase slip.

A figura 5.4 ilustra, com valores arbitrários, o fenômeno stick-slip descrito acima.

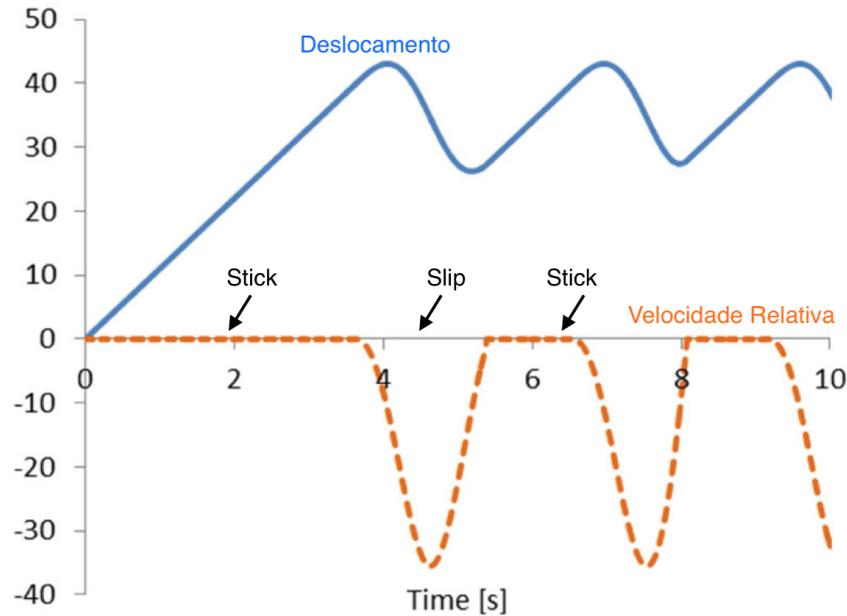


Figura 5.4: Stick-slip em um sistema massa-mola-esteira.

5.2

O Fenômeno Stick-Slip na Dinâmica de Colunas de Perfuração

Neste trabalho de conclusão de curso será estudado o efeito stick-slip em colunas de perfuração. Para modelizar tal problema, a coluna será considerada um eixo uniforme unidimensional com as extremidades livres conforme visto no capítulo anterior. De forma análoga, na extremidade superior deste eixo, será imposto uma velocidade de rotação constante (ω) que tem por finalidade incluir no modelo a ação externa de um motor. Aplicaremos um torque impeditivo na extremidade inferior (fundo) da coluna. Ou seja, um torque contrário ao movimento de rotação com a finalidade de simular o atrito entre o fundo da coluna e o solo.

Se faz necessário incluir e modelizar este torque impeditivo T_L que tem por objetivo simular a existência de uma força de atrito seco. O subscrito L diz que o torque está sendo aplicado no último elemento. Neste trabalho de conclusão de curso, tal torque será modelado como atrito de Coulomb incluindo a simplificação anteriormente apresentada. A figura 5.2 (direita) ilustra em um único gráfico o modelo de atrito utilizado o qual é modelizado através da seguinte função 5-2:

$$T_L = \begin{cases} -\frac{fat_{max}}{e} \dot{q}_L(t) & se \quad |\omega_s - \dot{q}_L(t)| < e \\ -fat_{max} sgn(\dot{q}_L(t)) & se \quad |\omega_s - \dot{q}_L(t)| \geq e \end{cases}, \quad (5-2)$$

onde ω_s é a velocidade do solo que será considerada como zero neste trabalho, $\dot{q}_L(t)$ é a velocidade angular no fundo da coluna, e é um número pequeno predefinido e $fat_{max} = \mu_s W_o r$ sendo μ_s o coeficiente de atrito, W_o é o peso da coluna e r o raio da coluna.

Conclui-se que o fenômeno de stick ocorre quando a velocidade relativa entre a broca e o solo chega a zero ou fica bem próxima de zero e o fenômeno de slip ocorre nos outros momentos.

6 Aplicação Numérica - Stick-Slip

A aplicação numérica quando considerado o efeito stick-slip segue o mesmo princípio visto no capítulo 4. A diferença entrará no fato que incluiremos um torque resistivo no último nó (T_L). Em outras palavras, o vetor torque $\{T\}$ que anteriormente era considerado como um vetor de zeros, terá, em seu último nó, a equação [5-2](#).

O código utilizado para a simulação pode ser encontrado em anexo.

6.1 Resultados

Supondo novamente o eixo livre-livre e aplicando a condição inicial de velocidade e deslocamento angular nulos em toda coluna exceto para o primeiro nó (velocidade angular imposta ω) e definindo os valores necessários para as variáveis, podemos realizar a simulação numérica do problema.

Serão apresentados dois conjuntos de resultados. O primeiro com valores não próximos aos reais e outro com valores próximos aos reais de acordo com estimativas da literatura [17](#).

No que diz respeito aos dois casos que serão apresentados, a velocidade e deslocamento angular no primeiro nó se mantém idênticos ao apresentado no Capítulo 4 como mostra o resultado da simulação apresentado na figura [6.1](#). Lembrando que este primeiro nó recebe energia de cinética através da velocidade imposta.

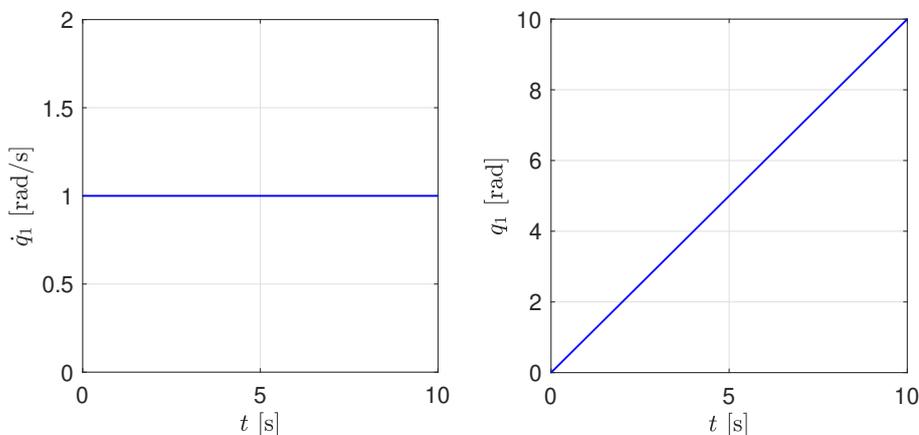


Figura 6.1: Velocidade (esq.) e deslocamento angular (dir.) no primeiro nó.

Estamos interessados em analisar o comportamento para o último nó, ou seja, onde queremos saber se efeito stick-slip ocorrerá no modelo proposto. A tabela 6.1 apresenta os valores aplicados nas variáveis e a imagem 6.2 apresenta o resultado obtido.

Parâmetro	Valor	Unidade	-
L	1	m	Comprimento da coluna
J	1	m^4	Momento de inércia polar
G	1	Pa	Módulo de cisalhamento
ρ	1	$kg.m^{-3}$	Densidade
n	100	-	Número de nós
ω	1	$rad.s^{-1}$	Velocidade imposta
f_{at}	9.25	N	Força de atrito máxima

Tabela 6.1: Parâmetros aplicados na primeira simulação stick-slip.

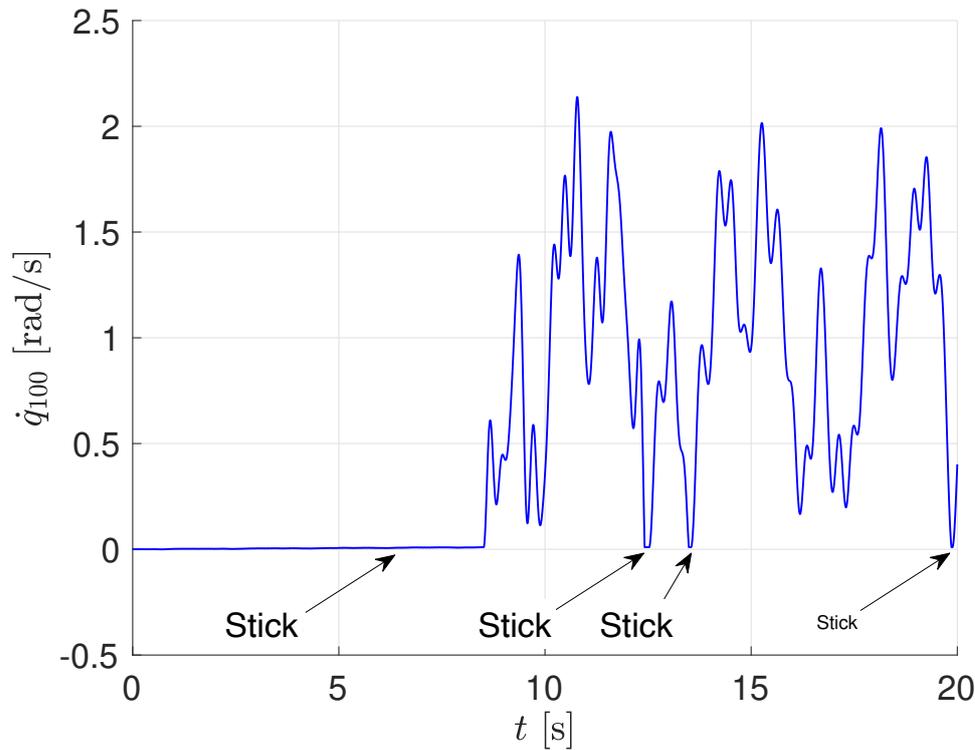


Figura 6.2: Fenômeno stick-slip com $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$.

Percebe-se que no início da torsão da coluna, seu fundo (último nó) está sua fase stick, pois ainda não tem energia suficiente para ultrapassar o torque resistivo causado pelo atrito. A partir de certo momento, no caso em aproximadamente nove segundos, a barreira do torque impeditivo é ultrapassada e o fundo da coluna começa a ganhar energia (fase slip) até um certo momento onde entra novamente em sua fase stick por um curto período de tempo.

Em perfuração de poços de petróleo, cada dia de operação tem um custo elevado. Existe então o interesse de acelerar o processo de perfuração. Uma ideia para fazer essa aceleração seria aumentar a velocidade do motor, no nosso caso a velocidade imposta ω . A figura abaixo (Fig. 6.3) ilustra o resultado obtido quando $\omega = 5 \text{ rad.s}^{-1}$.

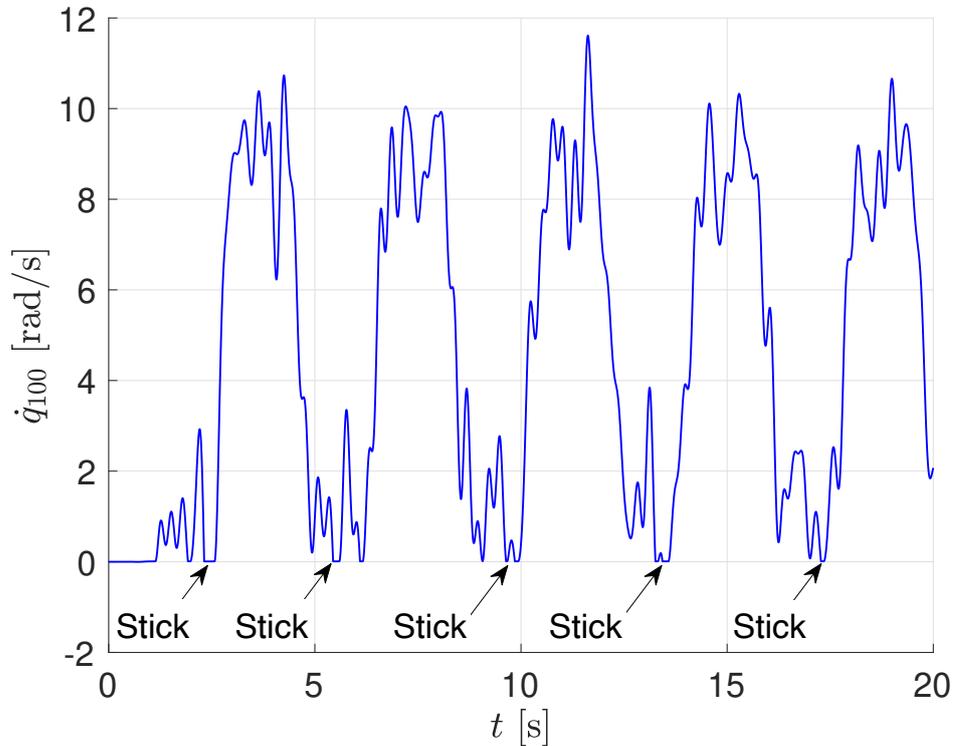


Figura 6.3: Fenômeno stick-slip com $\omega = 5 \text{ rad.s}^{-1}$.

O resultado da simulação mostra que ao aumentar a velocidade de rotação do motor no topo, pode-se aumentar a frequência de sticks no fundo da coluna. Alguns pontos interessantes ressaltar são que um aumento da velocidade imposta no topo não vai obrigatoriamente trazer um aumento no tempo de perfuração no fundo. Em alguns casos pode acontecer deste aumento de velocidade ocasionar tantos momentos de stick que talvez, trabalhar com velocidades mais baixas, pode ser mais vantajoso. Outro ponto importantíssimo de ressaltar é a fadiga na coluna ocasionada pela paralisação da broca. Perceba que nos momentos de stick o ultimo nó está literalmente parado, com velocidade relativa (\dot{q}_{100}) zero.

A partir do estudo da literatura disponível [18], foram estimados os seguintes valores para cada parâmetro.

Parâmetro	Valor	Unidade	-
L	500	m	Comprimento da coluna
r	0.16	m	Raio da coluna
J	0.0037	m^4	Momento de inércia polar
G	77	GPa	Módulo de cisalhamento
ρ	7850	$kg.m^{-3}$	Densidade
n	100	-	Número de nós
ω	3	$rad.s^{-1}$	Velocidade imposta
μ	0.5	-	Coefficiente de atrito
$f_{at_{max}}$	1500	kN	Força de atrito máxima

Tabela 6.2: Parâmetros aplicados na segunda simulação stick-slip.

A figura abaixo (Fig. 6.4) ilustra os resultados obtidos para a velocidade angular no fundo em função do tempo. Mais uma vez pode-se perceber a ocorrência do fenômeno de stick-slip.

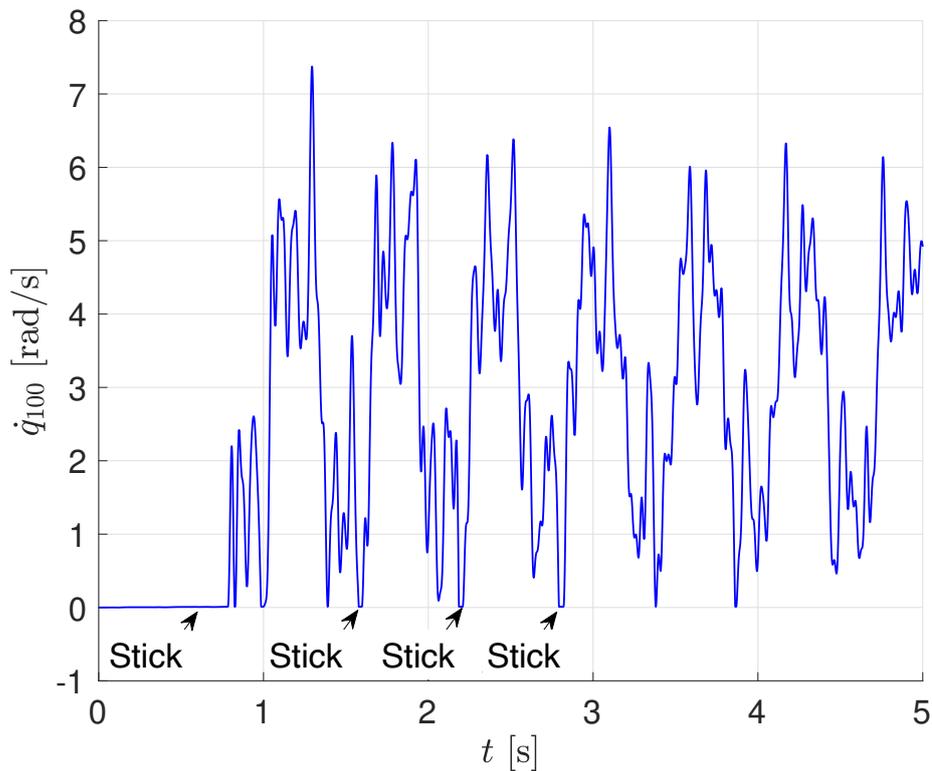


Figura 6.4: Velocidade angular no último nó com $\omega = 3 rad.s^{-1}$.

No que diz respeito ao deslocamento angular no fundo, mantendo os mesmo valores de parâmetros, é obtido o resultado apresentado na figura [6.5](#). Verifica-se a ocorrência do fenômeno de stick quando o deslocamento do último nó é zero.

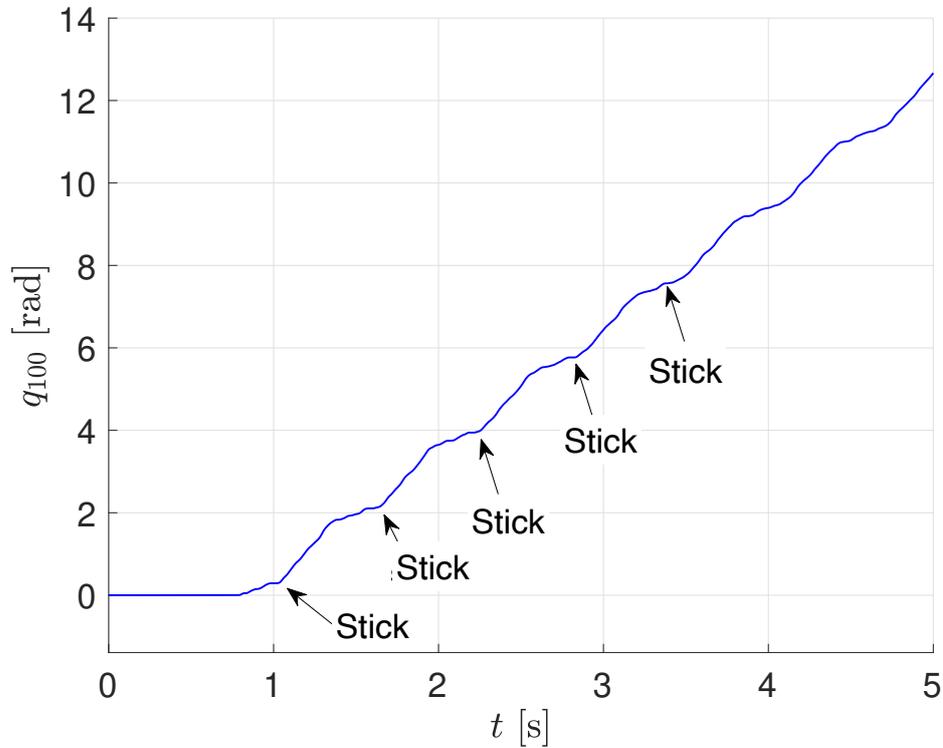


Figura 6.5: Deslocamento angular no último nó com $\omega = 3 \text{ rad.s}^{-1}$.

Perceba que devido à esses intervalos de sticks, o fundo da coluna não consegue acompanhar o movimento induzido no topo da coluna (Fig. [6.6](#)). Sendo assim existem avanços diferentes entre o topo e o fundo da coluna o que resulta na redução da eficiência da perfuração.

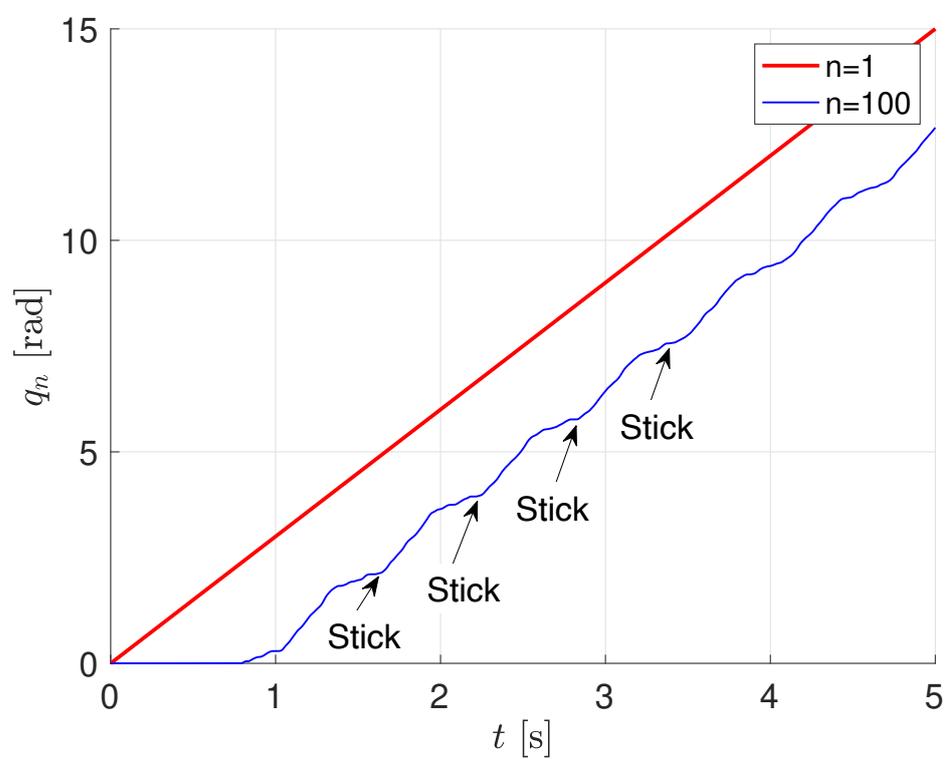


Figura 6.6: Deslocamento angular no primeiro e último nó.

7

Conclusão

No presente trabalho foram apresentadas as formulações variacionais da dinâmica de eixos, um resumo da teoria de elementos finitos e do método de aproximação de Galerkin assim como as estimativas das aproximações das soluções relacionadas à problemas unidimensionais de vibrações em colunas com velocidade imposta no topo.

Um dos atuais desafios na área de perfuração da indústria de petróleo é controlar o comportamento de stick-slip. Então, foi apresentado no capítulo 6 os resultados da simulação de um modelo do comportamento do eixo quando submetido ao fenômeno de stick-slip. Os resultados alcançados foram coerentes com o que era esperado levando em consideração todas as premissas e simplificações consideradas como por exemplo a coluna de perfuração ser vertical, não haver movimento lateral da mesma, entre outras.

O fenômeno de stick-slip pode ser visto nas figuras 6.2 à 6.6. É possível claramente verificar a existência de mudanças abruptas na velocidade, o que demonstra a transição do momento em que a broca (último elemento discretizado do eixo) passa da fase stick para a fase slip.

De uma maneira geral o modelo apresentado é simples para o nível de complexidade do problema real, porém é excelente como forma de introdução e aprendizado pois desenvolve a parte teórica do fenômeno mostrando, matematicamente, toda a perda de eficiência que a ocorrência do fenômeno stick-slip traz à perfuração. Tal perda de eficiência pode dizer respeito ao tempo de perfuração, como pode ser visto neste trabalho, ou até mesmo à fadiga da coluna ou falhas que podem ocorrer na broca.

Como proposta para trabalhos futuros fica a tarefa de aprimorar a modelagem introduzindo outros tipos de vibrações como axiais e laterais, diferentes condições de contorno, etc, sendo o mais importante deles considerar as vibrações como sendo aleatórias, aplicando, então, uma abordagem estocástica através de métodos como o de Monte Carlo a este modelo não-linear que simula o efeito de stick-slip numa coluna de perfuração.

Referências Bibliográficas

- [1] M. T. Piovan R. Sampaio and G. Venero Lozano. Stick-slip patterns in coupled extensional/torsional vibrations of drill-strings. *VIII Congreso Argentino de Mecánica Computacional*, pages 861–877, 2005.
- [2] M. T. Piovan R. Sampaio and G. Venero Lozano. Coupled axial/torsional vibrations of drill-strings by means of non-linear model. *Mechanics Research Communications*, 34:497—502, 2007.
- [3] Christophe Germy Thomas Richard and Emmanuel Detournay. A simplified model to explore the root cause of stick–slip vibrations in drilling systems with drag bits. *Journal of Sound and Vibration*, 305:432–456, 2007.
- [4] R. Sampaio and T. G. Ritto. Short course on dynamics of flexible structures - deterministic and stochastic analysis. *Seminar on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling, PUC-Rio*, pages 60–77, 2008.
- [5] A.L. RUINA S.T. TSE J.C. GU, J. R. RICE. Slip motion and stability of a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction. *J. Mech. Phys. Solids*, 32:167–196, 1984.
- [6] Cortés Domingo Navarro-Lopéz, Eva M. Avoiding harmful oscillations in a drill string through dynamical analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 307:152–171, 2007.
- [7] Marcelo Tulio Piovan and Germa Lozano. Stick-slip patterns in coupled extensional/torsional vibrations of drill-strings. 01 2005.
- [8] Wenjing Ding. *Self-Excited Vibration Theory, Paradigms, and Research Methods*. Springer Heidelberg Dordrecht, New York, 1st edition, 2010.
- [9] S. S. Rao. *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley Sons, Inc, Hoboken, New Jersey, 1st edition, 2007.
- [10] T. I. ; Shah A. H. Desai, Y. M. ; Eldho. *Finite Element Method with Applications in Engineering*. Dorling Kindersley, -, 1st edition, 2011.
- [11] Young W. Kwon. *The Finite Element Method using MATLAB*. CRC Press LLC, -, 2nd edition, 2000.
- [12] T. RITTO R. SAMPAIO. Short course on dynamics of flexible structures – deterministic and stochastic analysis, 2008. Acesso em: Abril de 2012.

- [13] Rao V. Dukkipati. *Solving Vibration Analysis Problems Using MATLAB*. New Age International Ltd, Daryaganj, New Delhi, 1st edition, 2000.
- [14] Rubens Sampaio Roberta Lima. Stick-slip oscillations in a multiphysics system. *International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*, 2020.
- [15] Jan Awrejcewicz and Pawel Olejnik. The occurrence of stick-slip phenomenon. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45:33–40, 1 2007.
- [16] Rubens Sampaio Roberta Lima. Construction of a statistical model for the dynamics of a base-driven stick-slip oscillator. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 91:157–166, 2017.
- [17] Stephen Butt Hongyuan Qiu, Jianming Yang. Stick-slip analysis of a a drill-string. *Proceedings of The Canadian Society for Mechanical Engineering International Congress 2014*, 2014.
- [18] S.I. Niculescu H. Mounier I. Boussaada B. Saldivar, S. Mondié. A control oriented guided tour in oilwell drilling vibration modeling. *Annual Reviews in Control*, 42:100–113, 2016.

A

Código MATLAB

```
1 %% Initialization
2
3 global nnp erro_rel M K F fatmax ZEROM I ZEROF
4
5 L = 500; % Comprimento Coluna
6 r = 0.16; % Raio Coluna
7 J = 0.0037; % Momento Inercia Polar
8 G = 77e9; % Modulo Cisalhamento
9 rho = 7850; % Densidade
10 nel = 5 ; % Numero Elementos
11 nnp = nel+1; % Numero Nos
12 mu = 0.5; % Coeficiente Atrito
13 fatmax = 1.5e7; % Forca Atrito Maxima
14
15 M = zeros(nnp,nnp); % Matriz Inercia
16 K = zeros(nnp,nnp); % Matriz Rigidez
17 F = zeros(nnp,1); % Vetor Torques
18 lel = L/nel; % Tamanho Elemento
19
20 ZEROM = zeros(size(M)); % Matriz Zero
21 I = eye(size(M)); % Matriz Identidade
22 ZEROF = zeros(size(F)); % Vetor Zero
23
24 %% Mass Matrix Generation
25
26 M_el = [2, 1 ;
27         1, 2];
28
29 for i = 1:nel
30     range = [i i+1];
31     M(range,range) = M(range,range) + (rho*J*lel/6)*M_el;
32 end
33
34 %% Stifness Matrix Generation
35
36 K_el = [1,-1 ;
37         -1, 1];
38
39 for i = 1:nel
40     range = [i i+1];
```

```

41     K(range,range) = K(range,range) + (J*G/1e1)*K_el;
42 end
43
44 %% Limites de Integracao
45
46 dt = 0.001;
47 tspan = 0:dt:10;
48 erro_rel = 1/100;
49
50 %% Column Velocity
51
52 v0 = 1;
53
54 %% Initial Conditions
55
56 y0 = zeros(2*nnp,1); %initial condition
57 y0(nnp+1) = v0;
58 %y0 = [zeros(1,nnp) repmat(v0, 1, nnp)]';
59
60 %% ODE45
61 tic
62 options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
63 [t,s] = ode45(@ODE,tspan,y0,options);
64 toc
65
66 %% Tempo em Stick
67
68 tstick = 0;           % Tempo em stick
69 tslip = 0;           % Tempo em slip
70
71 for i = 1:length(t)-1
72     if s(i,2*nnp) < erro_rel
73         tstick = dt + tstick;
74     else
75         tslip = dt + tslip;
76     end
77 end
78
79 function [s_dot] = ODE(t,s)
80
81 %% Initialization
82
83 global nnp erro_rel M K F fatmax ZEROM I ZEROF
84
85 %% Boundary Conditions
86
87 if abs(s(2*nnp)) < erro_rel % verifica se est em stick

```

```
88
89     force_nodes = ceil(nnp); % N s com for as aplicadas
90     force_val = -(fatmax/erro_rel)*s(2*nnp);
91
92 else
93     force_nodes = ceil(nnp); % N s com for as aplicadas
94     force_val = -fatmax*sign(s(2*nnp));
95
96 end
97
98 F(force_nodes) = force_val;
99
100 %% State Matrix Generation
101
102 A = [ZEROM, I ; -inv(M)*K, ZEROM];
103 B = [ZEROF; M\F];
104
105 s_dot = A*s+B;
106 s_dot(nnp+1) = 0;
107
108 end
```