Bibliografia

[1] Allaz, B. (1992) *Oligopoly, Uncertainty and Strategic Forward Transactions*, International Journal of Industrial Organization, 10(2): 297-308.

[2] Allaz, B. and J.-L. Vila (1993) *Cournot Competition, Forward Markets and Efficiency*, Journal of Economic Theory 59(1): 1-16.

[3] Barroso, L. A. N., M. V. F. Pereira, R. Kelman, P. Lino and J. Rosenblatt (2002) *Can Brazil Learn from California?*, IEEE Power Engineering Review, August.

[4] Basar, T. and G. J. Olsder (1995) *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2nd edition, Academic Press.

[5] Borenstein, S. (2002) *The Trouble With Electricity Markets: Understanding California's Restructuring Disaster*, Journal of Economic Perspectives, 16(1), 191-211

[6] Borenstein, S. and J. Bushnell (1999) *An Empirical Analysis of The Potential for Market Power in a Deregulated California Electricity Market*, Journal of Industrial Economics, 47(3), 285-323.

[7] Borenstein, S., J. Bushnell and F. Wolak (2002) *Measuring Market Inefficiencies in California's Restructured Wholesale Electricity Market*, American Economic Review, 92(5), 1376-1405.

[8] Bushnell, J. (2003) *A Mixed Complementarity Model of Hydro-Thermal Electricity Competition in the Western U.S.,* Operations Research, 51(1).

[9] Comissão de Análise do Setor Hidrotérmico de Energia Elétrica (2001), *Relatório da Comissão de Análise*

do Setor Hidrotérmico de Energia Elétrica, available at http://www.eletrobras.gov.br/downloads/provedor/c/cne3.zip

[10] Comitê de Revitalização do Modelo do Setor Elétrico (2002) *Relatório de Progresso n. 2*, available at http://www.energiabrasil.gov.br/docs/rel_progress_2.pdf

[11] Crampes, C. and M. Moreaux (2001) *Water Resource and Power Generation*, International Journal of Industrial Organization, 19(6), 975-997.

[12] Dakhlaoui, A. and M. Moreaux (2002) *The Mixed Hydrothermal System Operating Under Regulated and Deregulated Electrical Industry*, mimeo.

[13] Dockner, E., S. Jorgensen, N.V. Long and G. Sorger (2000) *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press, United Kingdom.

[14] Fudenberg, D. and J. Tirole (1991) *Game Theory*, The MIT Press.

[15] Green, R. and D. Newbery (1992) *Competition in the British Electricity Spot Market*, Journal of Political Economy, 100(5), 929-953.

[16] Harvey, S. and W. Hogan (2000) *California Electricity Prices and Forward Market Hedging*, Harvard University, mimeo. available at

[17] Joskow, P. (2003) *Electricity Sector Restructuring and Competition: Lessons Learned*, MIT, mimeo available at: http:

[18] Joskow, P. (2001) *California's Electricity Crisis*, Oxford Review of Economic Policy,17 (3), 365-88.

[19] Joskow, P. and E. Kahn (2002) *A Quantitative Analysis of Pricing Behavior in California's Wholesale Electricity Market During Summer 2000*,The Energy Journal, 23(4), 1-35.

[20] Kelman, R. , L.A.N. Barroso and M.V.F. Pereira (2001) *Market Power Assessment and Mitigation in Hydrothermal Systems*, IEEE Transactions on Power Systems, 16(3), 354-359.

[21] MME (1997) *Restructuring of the Brazilian Electricity Sector*, Final Report, Stage VII, available at http://www.mme.gov.br/sen/reseb/resebnovo.html

[22] Newbery, D. (1998) *Competition, Contracts, and Entry in the Electricity Spot Market*, RAND Journal of Economics, 29(4), 726-749.

[23] Pires, J.C.L., J. Gostkorzewicz and F. Giambiagi (2001) *O Cenário Macroeconômico e as Condições de Oferta de Energia Elétrica no Brasil*, BNDES, TD 85.

[24] Sauer, I. (2002) *Um Novo Modelo para o Setor Elétrico Brasileiro*, USP, IEE, mimeo.

[25] Scott, T. J. and E.G. Read (1996) *Modelling Hydro Reservoir Operation in a Deregulated Electricity Market*, International Transactions in Operational Research 3(3-4): 243-253

[26] Ventosa, M., A. García-Alcade, A. Mencía, M. Rivier, A. Ramos (2000) *Modeling Inflow Uncertainty in Electricity Markets: A Stochastic MCP Approach*, Proceedings 6th PMAPS Conference, Madeira, vol.2, psp 3-106

[27] Wolak, F (2000) *An Empirical Analysis of the Impact of Hedge Contracts on Bidding Behavior in a Competitive Electricity Market*. International Economic Journal, 14(2), 1-39.

[28] Wolak, F. (2003) *Diagnosing the California Electricity Crisis*, The Electricity Journal, 16(7), 11-37.

[29] Wolfram, C. (1999) *Electricity Markets: Should the Rest of the World Adopt the United Kingdom's Reforms?*, Regulation, 22(4), 48-53.

6
Apêndice

6.1
Capítulo 2

6.1.1
Prova da Proposição 2.1

Suponha antes que $S_{t+1} > 0$ é obtido em equilíbrio. Usando a abordagem da programação dinâmica, o problema da hidrelétrica pode ser escrito usando-se a equação funcional:

$$V_t(S_t + f_t) = \max_{\{q_t^T, q_t^H, S_{t+1}\}} \mathcal{W}_t(q_t^T + q_t^H) - c_t(q_t^T) + E\left[V_{t+1}(S_{t+1} + f_{t+1})\right]$$

$$s.a \begin{cases} q_t^H + S_{t+1} = S_t + f_t \quad (\lambda_t) \\ S_t + f_t = \bar{S}_t > 0 \\ q_t^T \geq 0 \qquad\qquad (\mu_t^T) \\ q_t^H \geq 0 \qquad\qquad (\mu_t^H) \end{cases} \tag{6-1}$$

As condições de primeira ordem (CPO) são dadas por:

$$p_t(q_t^T + q_t^H) - c_t'(q_t^T) + \mu_t^T = 0$$

$$p_t(q_t^T + q_t^H) - \lambda_t + \mu_t^H = 0$$

$$E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right] - \lambda_1 = 0$$

$$\mu_t^i q_t^i = 0 \qquad i = H, T$$

$$S_t + f_t - q_t^H - S_{t+1} = 0$$

$$q_t^T \geq 0, q_t^H \geq 0, \mu_t^H \geq 0, \mu_t^T \geq 0, \lambda_t \geq 0$$

. onde nas condições acima usa-se o fato de que pelo teorema do envelope $\frac{\partial}{\partial S_t} V_t(S_t + f_t) = \lambda_t$. Isso implica $\frac{\partial}{\partial S_{t+1}} V_{t+1}(S_{t+1} + f_{t+1}) = \lambda_{t+1} = p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H) + \mu_{t+1}^H$. Mas, em $t+1$, $\mu_{t+1}^H = 0$, pois $q_{t+1}^H = S_{t+1} + f_{t+1} > 0$ por hipótese. Portanto, $E\left[\frac{\partial}{\partial S_{t+1}} V_{t+1}(S_{t+1} + f_{t+1})\right] = E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right]$.

Considere $q_t^H > 0$, então $\mu_t^H = 0$. Considere também que $q_t^T > 0$, então $\mu_t^T = 0$. Portanto, tem-se:

$$p_t(q_t^T + q_t^H) - c_t'(q_t^T) = 0$$
$$E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right] = p_t(q_t^T + q_t^H) = \lambda_t$$
$$S_t + f_t - q_{t+1}^H - S_{t+1} = 0$$

E a proposição 2.1 é obtida. □

Embora não considerada na proposição 2.1, outras possibilidades podem surgir:

Primeiro, note que $q_{t+1}^H = S_{t+1} + f_{t+1}$, que por hipótese é positiva. Portanto, $\mu_{t+1}^H = 0$.

Caso 6.1 *Considere $\mu_t^H > 0$, então $q_t^H = 0$. Uma vez que $p_t(0) - c_t'(0) > 0$, então $q_t^T > 0$, pois de outro modo $\mu_t^T < 0$, o que não é possível. Note ainda que $\lambda_t > 0$, pois de outro modo $p_t(q_t^T) = c_t'(q_t^T) = -\mu_t^H < 0$, o que contradiz a hipótese de que $c_t'(q_t^T) > 0$. Portanto, pode-se ver que:*

$$\begin{aligned}
\mu_t^H &= E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right] - p_t(q_t^T) > 0 \\
& \quad p_t(q_t^T) - c_t'(q_t^T) = 0 \\
& \quad q_t^H = 0, S_{t+1} = S_t + f_t \\
\lambda_t &= E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right]
\end{aligned}$$

Note que, neste caso, tem-se que $\lambda_t > c_t'(q_t^T)$. Em $t+1$:

$$\mu_{t+1}^T\left[f_{t+1}\right] = c_{t+1}^{'}(q_{t+1}^T) - p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)$$

onde $\mu_{t+1}^T\left[f_{t+1}\right]$ é o multiplicador associado à restrição de não-negatividade de q_{t+1}^T para cada realização de f_{t+1}. Os subcasos são:

(6.1.1) $\mu_{t+1}^T\left[f_{t+1}\right] > 0$, logo $q_{t+1}^T = 0$

$$\mu_{t+1}^T\left[f_{t+1}\right] = c_{t+1}^{'}(0) - p_{t+1}(q_{t+1}^H) > 0$$

e, portanto, $Ec^{'}_{t+1}(0) > \lambda_t > c^{\prime}_t(q^T_t)$.

(6.1.2) $q^T_{t+1} \geq 0$ *e* $\mu^T_{t+1}\left[f_{t+1}\right] = 0$

$$p_{t+1}(q^H_{t+1} + q^T_{t+1}) - c^{'}_{t+1}(q^T_{t+1}) = 0$$

e, portanto, $\lambda_1 = Ec^{'}_{t+1}(q^T_{t+1}) > c^{\prime}_t(q^T_t)$.

Caso 6.2 *Se* $\mu^H_t = 0$ *e* $q^H_t = 0$,*então as mesmas condições do caso 6.1 aplicam-se neste caso a menos da primeira que deve ser substituída por:*

$$\mu^H_t \;=\; E\left[p_{t+1}(q^T_{t+1} + q^H_{t+1})\right] - p_t(q^T_t) = 0$$

Caso 6.3 *Considere* $q^H_t > 0$, *logo* $\mu^H_t = 0$.

Subcasos: (6.3.1) $\mu^T_t > 0$, logo $q^T_t = 0$

$$\begin{aligned}
\mu^T_t &= c^{\prime}_t(0) - p_t(q^H_t) > 0 \\
&\quad p_t(q^H_t) - \lambda_t = 0 \\
&\quad E\left[p_{t+1}(q^T_{t+1} + q^H_{t+1})\right] - \lambda_t = 0 \\
&\quad S_t + f_t - q^H_t - S_{t+1} = 0
\end{aligned}$$

Voltando-nos para $t+1$, *pode-se mostrar que:*

$$\mu^T_{t+1}\left[f_{t+1}\right] \;=\; c^{'}_{t+1}(q^T_{t+1}) - p_{t+1}(q^T_{t+1} + q^H_{t+1})$$

onde $\mu^T_{t+1}\left[f_{t+1}\right]$ *é o multiplicador associado à restrição de não-negatividade de* q^T_{t+1} *para cada realização de* f_{t+1}.

Ainda temos as seguintes possibilidades:

(6.3.1.1) $\mu^T_{t+1}\left[f_{t+1}\right] > 0$, *logo* $q^T_{t+1} = 0$

$$\mu^T_{t+1}\left[f_{t+1}\right] = c^{'}_{t+1}(0) - p_{t+1}(q^H_{t+1}) > 0$$

e, portanto, $\min\{c^{\prime}_t(0), Ec^{'}_{t+1}(0)\} > \lambda_t$

(6.3.1.2) $q_{t+1}^T \geq 0$ *e* $\mu_{t+1}^T [f_{t+1}] = 0$

$$p_{t+1}(q_{t+1}^H + q_{t+1}^T) - c_{t+1}^{'}(q_{t+1}^T) = 0$$

e, portanto, $c_t'(0) > \lambda_t = Ec_{t+1}^{'}(q_{t+1}^T)$

(6.3.2) $\mu_t^T = 0$ e $q_t^T \geq 0$

$$p_t(q_t^H + q_t^T) - c_t'(q_t^T) = 0$$
$$p_t(q_t^H + q_t^T) - \lambda_t = 0$$
$$E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right] - \lambda_t = 0$$
$$S_t + f_t - q_t^H - S_{t+1} = 0$$

E as mesmas condições obtidas em (6.3.1.1) e (6.3.1.2) aplicam-se nesse caso também. De qualquer maneira, temos $Ec_{t+1}^{'}(q_{t+1}^T) \geq \lambda_t = c_t'(q_t^T)$.

Suponha, agora, que a restrição sobre S_{t+1} é efetiva. Então:

$$p_t(q_t^T + q_t^H) - c_t'(q_t^T) + \mu_t^T = 0$$
$$p_t(q_t^T + q_t^H) - \lambda_t + \mu_t^H = 0$$
$$E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + f_{t+1})\right] - \lambda_1 = 0$$
$$\mu_t^i q_t^i = 0 \qquad i = H, T$$
$$S_t + f_t - q_t^H = 0$$
$$S_{t+1} = 0$$
$$q_t^T \geq 0, q_t^H \geq 0, \mu_t^H \geq 0, \mu_t^T \geq 0, \lambda_t \geq 0$$

Em um equilíbrio com produção positiva, as equações seguintes caracterizam o equilíbrio de *first-best:*

$$p_t(q_t^T + q_t^H) - c_t'(q_t^T) = 0$$

$$p_t(q_t^T + q_t^H) - \lambda_t = 0$$

$$\mu_{S_{t+1}} = \lambda_t - E\left[p_{t+1}(q_{t+1}^T + f_{t+1})\right] \geq 0$$

$$\bar{S}_t = q_t^H$$

$$S_{t+1} = 0$$

$$q_{t+1}^H = f_{t+1}$$

É fácil ver que $q_t^H > 0$ (e, conseqüentemente, $\mu_t^H = 0$), pois $\bar{S}_t > 0$. Como acima, outros equilíbrios são possíveis e podem ser calculados analogamente.

6.1.2 Duopólio com N fluxos de água e T períodos

Para um problema de N fluxos possíveis de água em T períodos a equação dinâmica do equilíbrio de duopólio quando a solução é interior resume-se a:

$$\begin{pmatrix} a - 2b\left(S_t + f_t - S_{t+1}\right) \\ -b\left(\frac{a-b(S_t+f_t-S_{t+1})}{2b+c}\right) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{pmatrix} a - 2b\left(S_{t+1} + f_{t+1} - S_{t+2}\right) \\ -b\left(\frac{a-b(S_{t+1}+f_{t+1}-S_{t+2})}{2b+c}\right) \end{pmatrix}$$

Com condições:

$$\begin{aligned} S_1 + f_1 &= \bar{S}_1 \\ S_{T+1} &= 0 \end{aligned}$$

onde α_i é a probabilidade de ocorrência da i-ésima realização de f_{t+1}.

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} a - 2b\left(S_t + f_t - S_{t+1}\right) \\ -b\left(\frac{a-b(S_t+f_t-S_{t+1})}{2b+c}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b\left(S_{t+1} + E_t\left(f_{t+1} - S_{t+2}\right)\right) \\ -b\left(\frac{a-b(S_{t+1}+E_t(f_{t+1}-S_{t+2}))}{2b+c}\right) \end{pmatrix}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} S_t + f_t - S_{t+1} &= S_{t+1} + E_t\left(f_{t+1} - S_{t+2}\right) \\ S_{t+1} &= \frac{S_t + f_t - E_t\left(f_{t+1} - S_{t+2}\right)}{2} \end{aligned}$$

Usando as condições de passagem:

Em $t = T - 1$

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{S_{T-1} + f_{T-1} - E_{T-1}\left(f_T - S_{T+1}\right)}{2} = \\ &= \frac{S_{T-1} + f_{T-1} - E_{T-1}\left(f_T\right)}{2} \end{aligned}$$

Em $t = T - 2:$

$$\begin{aligned} S_{T-1} &= \frac{S_{T-2} + f_{T-2} - E_{T-2}\left(f_{T-1} - S_T\right)}{2} \\ &= \frac{2S_{T-2} + 2f_{T-2} - E_{T-2}\left(f_{T-1} + f_T\right) + E_{T-2}\left(S_{T-1}\right)}{4} \\ &= \frac{2S_{T-2} + 2f_{T-2} - E_{T-2}\left(f_{T-1} + f_T\right)}{3} \end{aligned}$$

Em $t = T - 3:$

$$S_{T-2} = \frac{3S_{T-3} + 3f_{T-3} - E_{T-3}\left(f_{T-2} + f_{T-1} + f_T\right)}{4}$$

Portanto, em t:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \frac{S_t + f_t - E_t\left(f_{t+1} + ... + f_T\right)}{2} = \\ &= \frac{\left(T - t\right)\left(S_t + f_t\right) - E_t\left(f_{t+1} + ... + f_T\right)}{T - t + 1} \end{aligned}$$

Em $t = 1$:

$$S_2 = \frac{\left(T - 1\right)\left(S_1\right) - E_1\left(\sum_{i=2}^{T} f_t\right)}{T}$$

Exemplos:

(1) 2 períodos

$$S_2 = \frac{S_1 - E_1\left(f_2\right)}{2}$$

(2) 3 períodos

$$S_2 = \frac{2S_1 - E_1\left(f_2 + f_3\right)}{3}$$

6.1.3 Prova da Proposição 2.3

Usando o teorema (2.2), o MNE é um par de estratégias Markovianas $\{q_s^H = \gamma_s^{H*}(S_s + f_s), q_s^T = \gamma_s^{T*}(S_s + f_s); s = t, t+1\}$ que satisfaz as seguintes equações derivadas das relações recursivas (2-6) e (2-7):

$$\begin{cases} p_t'(q_t^T + q_t^H)q_t^H + p_t(q_t^T + q_t^H) - \lambda_t + \mu_t^H = 0 \\ E\left[p_{t+1}'(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)q_{t+1}^H + p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right] - \lambda_t + \mu_{S_{t+1}} = 0 \\ S_t + f_t - q_t^H - S_{t+1} = 0 \\ \mu_t^H q_t^H = 0, \mu_{S_{t+1}} S_{t+1} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \left[p_t'(q_t^T + q_t^H)q_t^T + p_t(q_t^T + q_t^H) - c_t'(q_t^T)\right] + \mu_t^T = 0 \\ \mu_t^T q_t^T = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o problema de trás para frente, temos:

Em $T = 2$:

$$p_2\left(q_2^T(f_2) + S_2 + f_2\right) + p_2'\left(q_2^T(f_2) + S_2 + f_2\right) q_2^T - c_2'(q_2^T(f_2)) \leq 0 \quad (= 0 \text{ se } q_2^T > 0)$$

Suponha que $q_2^T = 0$:

$$p_2\left(S_2 + f_2\right) - c_2'(0) \leq 0$$

Mas $S_2 \leq \bar{S}_1$, o que implica pela inclinação negativa da demanda em

$$p_2\left(\bar{S}_1 + f + \sigma\right) - c_2'(0) \leq 0$$

O que contradiz uma das hipótese da proposição.

Em $T = 1$:

$$p_1\left(q_1^T + \bar{S}_1 - S_2\right) + p_1'\left(q_1^T + \bar{S}_1 - S_2\right) q_1^T - c_1'(q_1^T) \quad (= 0 \text{ se } q_1^T > 0)$$

Suponha que $q_1^T = 0$:

$$p_1\left(\bar{S}_1 - S_2\right) - c_1'(0) \leq 0$$

Mas $0 \leq S_2 \leq \bar{S}_1$, o que implica, pela inclinação negativa da demanda,

$$p_1\left(\bar{S}_1\right) - c_2'(0) \leq 0$$

O que contradiz uma das hipótese da proposição. Então a termelétrica produz quantidades positivas em equilíbrio.

Em relação ao problema da hidrelétrica. Suponha que $q_1^H = 0$. Portanto, $S_2 = \bar{S}_1$ e

$$\begin{array}{rcl} p_1\left(q_1^T\right) - \lambda_1 & \leq 0 & (= 0 \text{ se } q_1^H > 0) \\ E_1\left[RMg_2^H\left(\bar{S}_1\right)\right] & = & \lambda_1 \end{array}$$

Mas $q_1^T > 0$ em equilíbrio e pela inclinação negativa da demanda:

$$E_1\left[RMg_2^H\left(\bar{S}_1\right)\right] \leq p_1(0)$$

O que contradiz uma das hipótese da proposição.

Por fim, suponha que $q_1^H = \bar{S}_1$. Portanto, $S_2 = 0$ e

$$\begin{array}{rcl} p_1\left(q_1^T + \bar{S}_1\right) + p_1'\left(q_1^T + \bar{S}_1\right)\bar{S}_1 - \lambda_1 & \geq & 0 \\ E_1\left[RMg_2^H\left(\bar{S}_1\right)\right] - \lambda_1 + \mu & \leq & 0 \\ \mu S & = & 0 \\ \mu & \geq & 0 \end{array}$$

Dessa forma,

$$RMg_1^H\left(S_2 = \bar{S}_1\right) - E_1\left[RMg_2^H\left(S_2 = \bar{S}_1\right)\right] \geq \mu$$

e se $E_1\left[RMg_2^H\left(S_2 = \bar{S}_1\right)\right] > RMg_1^H\left(S_2 = \bar{S}_1\right)$ isto implica $\mu < 0$, o que contradiz a hipótese de que o multiplicador associado à restrição de não-negatividade do estoque de água é não-negativo.

Seja $Q_s = q_s^T + q_s^H$. Desse modo, as estratégias MNE dos dois jogadores em cada contingência de t+1, especifica as seguintes ações:

$$q_{t+1}^H = \gamma_{t+1}^{H*}(S_{t+1} + f_{t+1}) = S_{t+1} + f_{t+1}$$

a partir desse resultado, $q_{t+1}^T = \gamma_{t+1}^{T*}(S_{t+1} + f_{t+1})$ é definido implicitamente por:

$$\left[p_{t+1}'(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)q_{t+1}^T + p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H) - c_{t+1}'(q_{t+1}^T)\right] = 0$$

As estratégias MNE dos dois jogadores em t $\{q_t^T = \gamma_t^{T*}(S_t + f_t), q_t^H = \gamma_t^{H*}(S_t + f_t)\}$ são dadas pelo sistema abaixo:

$$
\begin{aligned}
p_t'(q_t^T + q_t^H)q_t^T + p_t(q_t^T + q_t^H) &= c_t'(q_t^T) \\
p_t'(q_t^T + q_t^H)q_t^H + p_t(q_t^T + q_t^H) &= E\left[p_{t+1}'(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)q_{t+1}^H + p_{t+1}(q_{t+1}^T + q_{t+1}^H)\right] \\
S_t + f_t - q_t^H &= S_{t+1}
\end{aligned}
$$

E a proposição 2.3 é obtida. $\square$

6.1.4 Prova da Proposição 2.5

Segue da definição do índice de Lerner que

$$L = 1 - \frac{c'\left[q^T\right]}{p\left[Nq^T + q^H\right]}$$

onde q^T é a produção da termelétrica e q^H a produção da hidrelétrica.

O efeito do aumento do número de termelétricas, desconsiderando a restrição de números inteiros, sobre o índice de Lerner é dado por:

$$\frac{dL}{dN} = -\frac{\left(c''\left[q^T\right]\right)\left(p\left[Q\right]\right)\left(\frac{dq^T}{dN}\right) - \left(c'\left[q^T\right]\right)\left(p'\left[Q\right]\right)\left(N\frac{dq^T}{dN} + q^T + \frac{dq^H}{dN}\right)}{p^2}$$

Portanto, o sinal da derivada acima é negativo se, e somente, se:

$$\left(c'\left[q^T\right]\right)\left(p'\left[Q\right]\right)\left(\frac{dQ}{dN}\right) < \left(c''(q^T)\right)\left(p\left[Q\right]\right)\left(\frac{dq^T}{dN}\right)$$

$\square$

Para mostrar a dificuldade das contas por trás da condição acima, veja o exemplo a seguir.

Suponha que todos os geradores estejam produzindo em equilíbrio. No modelo de dois períodos e duas contingências, as condições de primeira ordem caracterizam-se por:

$$p_2\left(Q_2\left(f-\sigma\right)\right) + p_2'\left(Q_2\left(f-\sigma\right)\right) q_2^T\left(f-\sigma\right) = c'\left(q_2^T\left(f-\sigma\right)\right)$$
$$p_2\left(Q_2\left(f+\sigma\right)\right) + p_2'\left(Q_2\left(f+\sigma\right)\right) q_2^T\left(f+\sigma\right) = c'\left(q_2^T\left(f+\sigma\right)\right)$$
$$p_1\left(Q_1\right) + p_1'\left(Q_1\right) q_1^T = c'\left(q_1^T\right)$$
$$p_1\left(Q_1\right) + p_1'\left(Q_1\right) q_1^H = \left(\begin{array}{c} \alpha\left(p_2\left(Q_2\left(f-\sigma\right)\right) + p_2'\left(Q_2\left(f-\sigma\right)\right)\left(\bar{S} - q_1^H + f - \sigma\right)\right) + \\ \left(1-\alpha\right)\left(p_2\left(Q_2\left(f+\sigma\right)\right) + p_2'\left(Q_2\left(f+\sigma\right)\right)\left(\bar{S} - q_1^H + f + \sigma\right)\right) \end{array}\right)$$

Desconsiderando a restrição sobre N, derivando-se implicitamente as condições acima e escrevendo em notação matricial, temos:

$$A.dq = \left[\begin{array}{c} -\frac{dRmg_{2(f-\sigma)}^T}{dN}dN \\ -\frac{dRmg_{2(f+\sigma)}^T}{dN}dN \\ -\frac{dRmg_1^T}{dN}dN \\ -\frac{dRmg_1}{dN}dN + \alpha\frac{dRmg_2}{dN}dN + \left(1-\alpha\right)\frac{dRmg_2}{dN}dN \end{array}\right]$$

onde

$$A=\begin{bmatrix}
\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2} & 0 & 0 & \frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)dq_1^H}\\
0 & \frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2} & 0 & \frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)dq_1^H}\\
0 & 0 & \frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)^2} & \frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)dq_1^H}\\
\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f-\sigma)}dq_1^H} & \frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f+\sigma)}dq_1^H} & \frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq_1^T dq_1^H} & \frac{d^2\left(\pi^H\right)}{d\left(q_1^H\right)^2}
\end{bmatrix}$$

$$dq=\begin{bmatrix} dq_2^T\left(f-\sigma\right)\\ dq_2^T\left(f+\sigma\right)\\ dq_1^T\\ dq_1^H \end{bmatrix}$$

Portanto, por exemplo, é possível calcular:

$$\frac{dq_1^T}{dN}=\frac{\left(\begin{array}{c}
\frac{dRmg^T_{2(f-\sigma)}}{dN}dN\left(\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f-\sigma)}dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)dq_1^H}\right)+\\
+\frac{dRmg^T_{2(f+\sigma)}}{dN}dN\left(\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f+\sigma)}dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)dq_1^H}\right)\\
+\frac{dRmg_1^T}{dN}dN\left(\begin{array}{c}
\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^H\right)}{d\left(q_1^H\right)^2}+\\
-\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f+\sigma)}dq_1^H}\\
-\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f-\sigma)}dq_1^H}
\end{array}\right)+\\
+\left(\begin{array}{c}
-\frac{dRmg_1}{dN}dN+\\
+\alpha\frac{dRmg_2}{dN}dN+\\
+\left(1-\alpha\right)\frac{dRmg_2}{dN}dN
\end{array}\right)\left(\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)dq_1^H}\right)
\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}
\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2}\left(\frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq_1^T dq_1^H}-\frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^H\right)}{d\left(q_1^H\right)^2}\right)\\
\frac{d^2\left(\pi_1^T\right)}{d\left(q_1^T\right)^2}\left(\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f+\sigma)}dq_1^H}+\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f+\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f+\sigma)}\right)^2}\frac{d^2\left(\pi^T_{2(f-\sigma)}\right)}{d\left(q^T_{2(f-\sigma)}\right)dq_1^H}\frac{d^2\left(\pi_1^H\right)}{dq^T_{2(f-\sigma)}dq_1^H}\right)
\end{array}\right)}$$

E, portanto, condições mais restritas sobre o formato das funções de lucro são exigidas acima do que em sistemas térmicos.

6.1.5 Efeito de aumento do número de geradoras sobre poder de mercado

As condições de primeira ordem quando as condições da proposição 2.3 são atendidas são dadas por:

$$a-b\begin{pmatrix}(N+1)\,q_2^T\,[f+\sigma]+\\+\bar{S}_1-q_1^H+f+\sigma\end{pmatrix}=c_2 \tag{6-2}$$

$$a-b\begin{pmatrix}(N+1)\,q_2^T\,[f-\sigma]+\\+\bar{S}_1-q_1^H+f-\sigma\end{pmatrix}=c_2 \tag{6-3}$$

$$a-b\left((N+1)\,q_1^T+q_1^H\right)=c_1 \tag{6-4}$$

$$a-b\left(Nq_1^T+2q_1^H\right) = \begin{pmatrix}\alpha\left(a-b\begin{pmatrix}(N+1)\,q_2^T\,[f+\sigma]+\\+\bar{S}_1-q_1^H+f+\sigma\end{pmatrix}\right)+\\(1-\alpha)\left(a-b\begin{pmatrix}(N+1)\,q_2^T\,[f-\sigma]+\\+\bar{S}_1-q_1^H+f-\sigma\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix} \tag{6-5}$$

A solução do sistema acima é dada por:

$$\begin{aligned}
q_1^H &= \frac{b\,(N+2)\left(\bar{S}_1+f-\sigma\,(1-2\alpha)\right)+N\,(c_1-c_2)}{2b\,(N+2)}\\
q_1^T &= \frac{(N+2)\left(2\,(a-c_1)-b\left(\bar{S}_1+f-\sigma\,(1-2\alpha)\right)\right)-N\,(c_1-c_2)}{2b\,(N+1)\,(N+2)}\\
q_2^T\,[f-\sigma] &= \frac{(N+2)\left(2\,(a-c_2)-b\left(\bar{S}_1+f+\sigma\,(3-2\alpha)\right)\right)+N\,(c_1-c_2)}{2b\,(N+1)\,(N+2)}\\
q_2^T\,[f+\sigma] &= \frac{(N+2)\left(2\,(a-c_2)-b\left(\bar{S}_1+f-\sigma\,(1+2\alpha)\right)\right)+N\,(c_1-c_2)}{2b\,(N+1)\,(N+2)}
\end{aligned}$$

Assim, é possível calcular o poder de mercado em cada período e contingência:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 1 - \frac{c_1}{a - b\left(\begin{array}{c} N\left(\frac{(N+2)\left(2(a-c_1)-b\left(\bar{S}_1+f-\sigma(1-2\alpha)\right)\right)-N(c_1-c_2)}{2b(N+1)(N+2)}\right)+ \\ \frac{b(N+2)\left(\bar{S}_1+f-\sigma(1-2\alpha)\right)+N(c_1-c_2)}{2b(N+2)} \end{array}\right)} \\
L_2\left[f+\sigma\right] &= 1 - \frac{c_2}{a - b\left(\begin{array}{c} N\left(\frac{(N+2)\left(2(a-c_2)-b\left(\bar{S}_1+f+\sigma(3-2\alpha)\right)\right)+N(c_1-c_2)}{2b(N+1)(N+2)}\right) \\ +\bar{S}_1-\left(\frac{b(N+2)\left(\bar{S}_1+f-\sigma(1-2\alpha)\right)+N(c_1-c_2)}{2b(N+2)}\right)+f+\sigma \end{array}\right)} \\
L_2\left[f-\sigma\right] &= 1 - \frac{c_2}{a - b\left(\begin{array}{c} N\left(\frac{(N+2)\left(2(a-c_2)-b\left(\bar{S}_1+f-\sigma(1+2\alpha)\right)\right)+N(c_1-c_2)}{2b(N+1)(N+2)}\right) \\ +\bar{S}_1-\left(\frac{b(N+2)\left(\bar{S}_1+f-\sigma(1-2\alpha)\right)+N(c_1-c_2)}{2b(N+2)}\right)+f-\sigma \end{array}\right)}
\end{aligned}
$$

Repare que quando $N \to \infty$, temos:

$$L_1 = L_2\left[f+\sigma\right] = L_2\left[f-\sigma\right] = 0$$

Suponha agora que $c_1 = c_2 = c$

$$
\begin{aligned}
a - b\bar{S}_1 &> c_1 = c \\
a - b\left(\bar{S}_1+f+\sigma\right) &\leq c_2 = c
\end{aligned}
$$

A segunda condição implica que $q_2^T\left[f+\sigma\right] = 0$:

$$
\begin{aligned}
a - c &\leq b\left(\bar{S}_1+f+\sigma\right) \\
b\left((N+1)\,q_2^T\left[f+\sigma\right]+\bar{S}_1+f+\sigma\right) &\leq b\left(\bar{S}_1+f+\sigma\right)
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$q_2^T\left[f+\sigma\right] = 0$$

Das outras condições de primeira ordem - (6-3),(6-4) e (6-5) - temos a seguinte solução:

$$
\begin{aligned}
q_1^H &= \frac{N\alpha\left(-a+c+Sb\right)+(N+2)\,b\left(S+f-\sigma\left(1-2\alpha\right)\right)}{b\left(4+2N+N\alpha\right)} \\
q_1^T &= \frac{\left(4+2N+2N\alpha\right)(a-c)-Nb\alpha\left(S+F\right)-(N+2)\,b\left(S+f-\sigma\left(1-2\alpha\right)\right)}{4b+6Nb+Nb\alpha+2N^2b+N^2b\alpha} \\
q_2^T\left[f+\sigma\right] &= 0 \\
q_2^T\left[f-\sigma\right] &= \frac{(4+2N)(a-c)-Nbf\alpha-(N+2)\,b\left(S+f-\sigma\left(1+2\alpha\right)\right)}{4b+6Nb+Nb\alpha+2N^2b+N^2b\alpha}
\end{aligned}
$$

Portanto, os respectivos índices de Lerner são dados por:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 1-\frac{c}{a-b\left(\begin{array}{c} N\frac{(4+2N+2N\alpha)(a-c)-Nb\alpha(S+f+\sigma)-(N+2)b(S+f-\sigma(1-2\alpha))}{4b+6Nb+Nb\alpha+2N^2b+N^2b\alpha}+ \\ \frac{N\alpha(-a+c+Sb)+(N+2)b(S+f-\sigma(1-2\alpha))}{b(4+2N+N\alpha)} \end{array}\right)} \\
L_2\left[f+\sigma\right] &= 1-\frac{a-b\left(\begin{array}{c} N\left(\frac{(4+2N+2N\alpha)(a-c)-Nb\alpha(S+f+\sigma)-(N+2)b(S+f-\sigma(1-2\alpha))}{4b+6Nb+Nb\alpha+2N^2b+N^2b\alpha}\right)+ \\ \left(\frac{N\alpha(-a+c+Sb)+(N+2)b(S+f-\sigma(1-2\alpha))}{b(4+2N+N\alpha)}\right) \end{array}\right)}{a-b\left(S-\left(\frac{N\alpha(-a+c+Sb)+(N+2)b(S+f-\sigma(1-2\alpha))}{b(4+2N+N\alpha)}\right)+f+\sigma\right)} \\
L_2\left[f-\sigma\right] &= 1-\frac{c}{a-b\left(\begin{array}{c} (N)\left(\frac{(4+2N)(a-c)-Nbf\alpha-(N+2)b(S+f-\sigma(1+2\alpha))}{4b+6Nb+Nb\alpha+2N^2b+N^2b\alpha}\right) \\ +S-\left(\frac{N\alpha(-a+c+Sb)+(N+2)b(S+f-\sigma(1-2\alpha))}{b(4+2N+N\alpha)}\right)+f-\sigma \end{array}\right)}
\end{aligned}
$$

Calculando o limite quando $N\rightarrow\infty$:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 0 \\
L_2\left[f+\sigma\right] &= =\frac{2c+c\alpha}{2a+c\alpha-b\left(S+f+\sigma\left(3-2\alpha\right)\right)} \\
L_2\left[f-\sigma\right] &= 0
\end{aligned}
$$

Nesse caso, podemos ver que quando as termelétricas são afastadas em equilíbrio do mercado (ou seja, produzem quantidade nula), algum poder de mercado (medido através do índice de Lerner) pode ser exercido pela hidrelétrica.

6.1.6 Prova da Proposição 2.6

Usando a natureza seqüencial do processo de negociação, começamos analisando o equilíbrio no mercado à vista.

Dadas as posições de contrato a termo $\{x_t^T, x_{t+1}^T\}$ e $\{x_t^H, x_{t+1}^H\}$, o equilíbrio no mercado à vista é dado pelas seguintes equações:

$$a - b\left(S_t + f_t - S_{t+1}\right) - 2bq_t^T + bx_t^T = c$$

$$a - b\left(S_{t+1} + f + \sigma\right) - 2bq_{t+1}^T\left[f + \sigma\right] + bx_{t+1}^T = c$$

$$a - b\left(S_{t+1} + f - \sigma\right) - 2bq_{t+1}^T\left[f - \sigma\right] + bx_{t+1}^T = c$$

$$\begin{pmatrix} a - 2b\left(S_t + f_t - S_{t+1}\right) \\ -bq_t^T + bx_t^H \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \begin{pmatrix} a - 2b\left(S_{t+1} + f + \sigma\right) \\ -bq_{t+1}^T\left[f + \sigma\right] + bx_{t+1}^H \end{pmatrix} + \\ +(1-\alpha) \begin{pmatrix} a - 2b\left(S_{t+1} + f - \sigma\right) \\ -bq_{t+1}^T\left[f - \sigma\right] + bx_{t+1}^H \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

onde $q_{t+1}^i\left[f_j\right]$ representa a produção da firma i na contingência f_j e período.

As quantidades e os preços de equilíbrio são dados por:

$$\begin{aligned}
q_t^H &= \frac{3\left(S_t + f_t + f - (1-2\alpha)\sigma\right) - (x_t^T - x_{t+1}^T) + 2(x_t^H - x_{t+1}^H)}{6} \\
q_t^T &= \frac{\begin{pmatrix} 6(a-c) - 3b\left(S_t + f_t + f - (1-2\alpha)\sigma\right) \\ +7bx_t^T - bx_{t+1}^T - 2b(x_t^H - x_{t+1}^H) \end{pmatrix}}{12b} \\
S_{t+1} &= \frac{3\left(S_t + f_t - f + (1-2\alpha)\sigma\right) + (x_t^T - x_{t+1}^T) - 2(x_t^H - x_{t+1}^H)}{6} \\
q_{t+1}^H\left[f+\sigma\right] &= \frac{3\left(S_t + f_t + f + (3-2\alpha)\sigma\right) + (x_t^T - x_{t+1}^T) - 2(x_t^H - x_{t+1}^H)}{6} \\
q_{t+1}^T\left[f+\sigma\right] &= \frac{\begin{pmatrix} 6(a-c) - 3b\left(S_t + f_t + f + (3-2\alpha)\sigma\right) \\ -bx_t^T + 7bx_{t+1}^T + 2b(x_t^H - x_{t+1}^H) \end{pmatrix}}{12b} \\
q_{t+1}^H\left[f-\sigma\right] &= \frac{3\left(a + f - (1+2\alpha)\sigma\right) + (x_t^T - x_{t+1}^T) - 2(x_t^H - x_{t+1}^H)}{6} \\
q_{t+1}^T\left[f-\sigma\right] &= \frac{\begin{pmatrix} 6(a-c) - 3b\left(S_t + f_t + f - (1+2\alpha)\sigma\right) \\ -bx_t^T + 7bx_{t+1}^T + 2b(x_t^H - x_{t+1}^H) \end{pmatrix}}{12b}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_t &= \frac{\left(\begin{array}{c} 6(a+c) - 3b\left(S_t + f_t + f - (1-2\alpha)\sigma\right) \\ -5bx_t^T - bx_{t+1}^T - 2b(x_t^H - x_{t+1}^H) \end{array}\right)}{12} \\
p_{t+1}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\left(\begin{array}{c} 6(a+c) - 3b\left(S_t + f_t + f + (3-2\alpha)\sigma\right) \\ -bx_t^T - 5bx_{t+1}^T + 2b(x_t^H - x_{t+1}^H) \end{array}\right)}{12} \\
p_{t+1}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\left(\begin{array}{c} 6(a+c) - 3b\left(S_t + f_t + f - (1+2\alpha)\sigma\right) \\ -bx_t^T - 5bx_{t+1}^T + 2b(x_t^H - x_{t+1}^H) \end{array}\right)}{12}
\end{aligned}
$$

onde $p_{t+1}\left[f+\sigma\right]$ e $p_{t+1}\left[f-\sigma\right]$ são os preços em $t+1$ e contingências $f+\sigma, f-\sigma$, respectivamente.

No primeiro estágio do primeiro período, quando as posição a termo $\{x_t^T, x_{t+1}^T\}$ e $\{x_t^H, x_{t+1}^H\}$ são submetidas no mercado de contratos, os agentes sabem que os preços no mercado à vista subseqüente em cada período e cada contingência serão dados pelos preços acima.

Agora, podemos resolver as quantidades de contratos de equilíbrio.

Primeiro, note que uma vez que os mercados a contrato não são viesados, o lucro esperado obtido com as vendas de contrato é zero para os dois geradores.

Substituindo as quantidades acima nas funções-objetivo das duas firmas, cada firma escolhe a quantidade ótima de contratos dada a quantidade escolhida pelos outros agentes. As CPO abaixo são obtidas:

$$
\begin{aligned}
-4x_t^T + 4x_{t+1}^T - x_t^H + x_{t+1}^H &= 0 \\
4x_t^T - 4x_{t+1}^T + x_t^H - x_{t+1}^H &= 0 \\
-2x_t^T + 2x_{t+1}^T - 17x_t^H - x_{t+1}^H &= 0 \\
2x_t^T - 2x_{t+1}^T - x_t^H - 17x_{t+1}^H &= 0
\end{aligned}
$$

a solução do sistema acima é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_t^H &= x_{t+1}^H \\
x_t^T &= x_{t+1}^T = 0
\end{aligned}
$$

Em particular, $x_t^H = x_{t+1}^H = 0$ e, nesse caso, não há incentivo estratégico para as firmas contratarem.

6.1.7
Prova da Proposição 2.7

As mesmas condições da proposição 2.6 acima até o cálculo do equilíbrio no mercado a termo seguem-se. A diferença está em que, ao calcular o equilíbrio no mercado a termo, temos que levar em consideração a quantidade de contratação exigida pelo regulador. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
&\upsilon_t^H - \frac{2}{9}bx_t^T + \frac{2}{9}bx_{t+1}^T - \frac{1}{18}bx_t^H + \frac{1}{18}bx_{t+1}^H = 0 \\
&\upsilon_{t+1}^H + \frac{2}{9}bx_t^T - \frac{2}{9}bx_{t+1}^T + \frac{1}{18}bx_t^H - \frac{1}{18}bx_{t+1}^H = 0 \\
&\upsilon_t^T - \frac{1}{18}bx_t^T + \frac{1}{18}bx_{t+1}^T - \frac{17}{36}bx_t^H - \frac{1}{36}bx_{t+1}^H = 0 \\
&\upsilon_{t+1}^T - \frac{1}{18}bx_t^T - \frac{1}{18}bx_{t+1}^T - \frac{1}{36}bx_t^H - \frac{17}{36}bx_{t+1}^H = 0 \\
&x_t^H \geq \bar{X}_1, x_{t+1}^H \geq \bar{X}_2, x_t^T \geq \bar{X}_1, x_{t+1}^T \geq \bar{X}_2 \\
&\upsilon_t^H \geq 0, \upsilon_{t+1}^H \geq 0, \upsilon_t^T \geq 0, \upsilon_{t+1}^T \geq 0
\end{aligned}$$

É fácil ver que para uma solução existir, então $\upsilon_t^H = \upsilon_{t+1}^H = 0$.

Assim, há quatro casos possíveis:

Caso 6.4 $\upsilon_t^T = 0, \upsilon_{t+1}^T = 0$. *Não pode ocorrer porque nesse caso,* $x_t^T = x_{t+1}^T = 0$*, o que contradiz a restrição de uma quantidade mínima de contratação.*

Caso 6.5 $\upsilon_t^T > 0, \upsilon_{t+1}^T = 0$. *Não pode ocorrer porque nesse caso,* $x_{t+1}^T = -\frac{1}{11}x_t^T$.

Caso 6.6 $\upsilon_t^T = 0, \upsilon_{t+1}^T > 0$. *Esse caso é análogo ao anterior.*

Caso 6.7 $\upsilon_t^T > 0, \upsilon_{t+1}^T > 0$. *Nesse caso, a solução é dada por:*

$$
\begin{aligned}
4\left(\bar{X}_t - \bar{X}_{t+1}\right) &= x_{t+1}^H - x_t^H \\
\upsilon_t^T &= \frac{11}{24} b x_t^H + \frac{1}{24} b x_{t+1}^H \\
\upsilon_{t+1}^T &= \frac{1}{24} b x_t^H + \frac{11}{24} b x_{t+1}^H
\end{aligned}
$$

Substituindo nas quantidades e preços do mercado à vista e exigindo-se que $\bar{X}_t = \bar{X}_{t+1} = \bar{X}$

$$
\begin{aligned}
q_t^H &= \frac{3\left(S_1 + f_1 + f - (1-2\alpha)\sigma\right)}{6} \\
q_t^T &= \frac{6(a-c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f - (1-2\alpha)\sigma\right) + 6b\bar{X}}{12b} \\
S_{t+1} &= \frac{3\left(S_1 + f_1 - f + (1-2\alpha)\sigma\right)}{6} \\
q_{t+1}^H\left[f+\sigma\right] &= \frac{3\left(S_1 + f_1 + f + (3-2\alpha)\sigma\right)}{6} \\
q_{t+1}^T\left[f+\sigma\right] &= \frac{6(a-c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f + (3-2\alpha)\sigma\right) + 6b\bar{X}}{12b} \\
q_{t+1}^H\left[f-\sigma\right] &= \frac{3\left(S_1 + f_1 + f - (1+2\alpha)\sigma\right)}{6} \\
q_{t+1}^T\left[f-\sigma\right] &= \frac{6(a-c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f - (1+2\alpha)\sigma\right) + 6b\bar{X}}{12b} \\
p_t &= \frac{6(a+c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f - (1-2\alpha)\sigma\right) - 6b\bar{X}}{12} \\
p_{t+1}\left[f+\sigma\right] &= \frac{6(a+c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f + (3-2\alpha)\sigma\right) - 6b\bar{X}}{12} \\
p_{t+1}\left[f-\sigma\right] &= \frac{6(a+c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f - (1+2\alpha)\sigma\right) - 6b\bar{X}}{12}
\end{aligned}
$$

Portanto, um aumento em $\bar{X}$ reduz os preços e aumenta as respectivas quantidades no mercado à vista. Mais importante, ainda, o poder de mercado é reduzido, como podemos ver:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_t}{d\bar{X}} &= \frac{-72bc}{\left(6(a+c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f - (1-2\alpha)\sigma\right) - 6b\bar{X}\right)^2} < 0 \\
\frac{dL_{t+1}\left[f+\sigma\right]}{d\bar{X}} &= \frac{-72bc}{\left(6(a+c) - 3b\left(S_1 + f_1 + f + (3-2\alpha)\sigma\right) - 6b\bar{X}\right)^2} < 0
\end{aligned}
$$

$$\frac{dL_{t+1}\left[f-\sigma\right]}{d\bar{X}} = \frac{-72bc}{\left(6(a+c)-3b\left(S_1+f_1+f-(1+2\alpha)\sigma\right)-6b\bar{X}\right)^2} < 0$$

$\square$

6.2 Capítulo 3

6.2.1 Tabelas

6.2.2 Tabela 1

Parâmetros: $D_{t+2} = D_{t+1} = D_t = 100, \alpha = 0.5, \beta = 0.9, \bar{S}_t = 200, f = 20, \sigma = 8, c_t = c_{t+1} = c_{t+2} = 1, I = 160$

Valores de Equilíbrio	Estratégia Anunciada (n_1, h_2, l_2)							
	$(1,0,0)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
S_{t+1}	110.54	109.77	109.47	108.66	113.10	116.08	115.21	117.93
$S_{t+2}\,[f+\sigma]$	58.18	53.61	57.62	52.91	53.17	55.23	60.64	62.07
$S_{t+2}\,[f-\sigma]$	49.76	49.35	43.42	42.91	42.14	52.68	43.60	53.65
$q_{t+1}\,[f+\sigma]$	9. 82	7.92	10.07	8.13	0.00	0.00	0.00	0.00
$q_{t+1}\,[f-\sigma]$	13.61	13.79	10.97	11.13	0.00	0.00	0.00	0.00
$q_{t+2}\,[f+\sigma, f+\sigma]$	6.91	6.13	7.19	6.36	9.41	8.39	0.00	0.00
$q_{t+2}\,[f+\sigma, f-\sigma]$	14.91	11.46	15.19	11.70	17.41	16.39	0.00	0.00
$q_{t+2}\,[f-\sigma, f+\sigma]$	11.12	11.33	9.53	9.70	14.93	0.00	14.20	0.00
$q_{t+2}\,[f-\sigma, f-\sigma]$	19.12	19.33	14.86	15.03	22.93	0.00	22.20	0.00
$\pi\ (n_1, h_2, l_2)$	-19.76	-90.08	-90.37	-160.63	-28.51	-37.70	-1.70	0.00

6.2.3 Tabela 2

Parâmetros: $D_{t+2} = D_{t+1} = D_t = 100, \alpha = 0.5, \beta = 0.9, \bar{S}_t = 190, f = 20, \sigma = 8, c_t = c_{t+1} = c_{t+2} = 1, I = 160$

Valores de Equilíbrio	Estratégia Anunciada (n_1, h_2, l_2)							
	$(1,0,0)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
S_{t+1}	102.30	101.37	101.07	100.11	105.28	108.69	107.82	110.92
$S_{t+2}\,[f+\sigma]$	53.84	48.36	53.20	47.57	47.78	50.13	56.75	58.38
$S_{t+2}\,[f-\sigma]$	45.42	44.93	38.17	37.57	36.75	48.79	38.50	49.96
$q_{t+1}\,[f+\sigma]$	11.77	9.49	12.06	9.73	0.00	0.00	0.00	0.00
$q_{t+1}\,[f-\sigma]$	15.56	15. 78	12.55	12.73	0.00	0.00	0.00	0.00
$q_{t+2}\,[f+\sigma, f+\sigma]$	9.08	7.88	9.40	8.14	12.11	10.94	0.00	0.00
$q_{t+2}\,[f+\sigma, f-\sigma]$	17.08	13.21	17.40	13.48	20.11	18.94	0.00	0.00
$q_{t+2}\,[f-\sigma, f+\sigma]$	13.29	13.53	11.28	11.48	17.63	0.00	16.75	0.00
$q_{t+2}\,[f-\sigma, f-\sigma]$	21.29	21.53	16.61	16.81	25.63	0.00	24.75	0.00
$\pi\ (n_1, h_2, l_2)$	27.31	-42.27	-42.62	-112.12	9.74	-23.60	18.44	0.00

6.2.4
Prova da Proposição 3.1

$$\min_{\{q_s^{T_i}, q_s^H\}} E_t \left[\sum_{s=t}^{t+K-1} \sum_{i=1}^{M} \beta^{s-t} c_s^i [q_s^{T_i}] \right]$$

$$s.a \quad \begin{cases} q_s^H + S_{s+1} = S_s + f_s & (\lambda_s) \\ q_s^H + \sum_{i=1}^{M} q_s^{T_i} = D_s & (\phi_s) \\ q_s^H \geq 0 & (\mu_s^H) \\ q_s^{T_i} \geq 0 & (\mu_s^{T_i}) \\ S_{s+1} \geq 0 & (\mu_S) \end{cases}$$

Seja $V(S_t + f_t)$ o valor máximo da função objetivo quando o estado inicial é $S_t + f_t$. Usando o método da programação dinâmica, eliminando a restrição sobre q_t^H por substituição e reescrevendo o problema acima como um problema de maximização:

$$V(S_t + f_t) = \max_{\{S_{t+1}, q_t^{T_i}\}} - \left\{ \sum_{i=1}^{M} c_t^i [q_t^{T_i}] \right\} + \beta E \left[V \left(S_{t+1} + f_{t+1} \right) \right]$$

$$s.t \quad \begin{cases} D_t + S_{t+1} = S_t + f_t + \sum_{i=1}^{M} q_t^{T_i} & (\phi_t) \\ q_t^{T_i} \geq 0 & (\mu_t^{T_i}) \\ S_{t+1} \geq 0 & (\mu_S) \end{cases}$$

As CPOs são dadas por:

$$\begin{aligned} -c_t^{i\prime} \left(q_t^{T_i} \right) - \phi_t + \mu_t^{T_i} &= 0 \\ \beta E \left[V' \left(S_{t+1} + f_{t+1} \right) \right] + \phi_t + \mu_S &= 0 \\ S_t + f_t - S_{t+1} + \sum_{i=1}^{M} q_t^{T_i} &= D_t \\ \mu_t^{T_i} q_t^{T_i} &= 0 \\ \mu_S S_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, ..., M$.

Pelo teorema do envelope:

$$V'\left(S_t + f_t\right) = -\phi_t \tag{6-6}$$

Então, podemos reescrever as CPOs como as condições a seguir:

$$\begin{aligned}
c_t^{i\prime}\left(q_t^{T_i}\right) - \mu_t^{T_i} - \beta E\left[c_{t+1}^{i\prime}\left(q_{t+1}^{T_i}\right) - \mu_{t+1}^{T_i}\right] &= \mu_S \\
S_t + f_t - S_{t+1} + \sum_{i=1}^{M} q_t^{T_i} &= D_t \\
\mu_t^{T_i} q_t^{T_i} &= 0 \\
\mu_S S_{t+1} &= 0
\end{aligned}$$

Para $S_{t+1}, q_t^{T_i}, q_{t+1}^{T_i}$ positivos, pode-se obter a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned}
c_t^{i\prime}\left(q_t^{T_i}\right) &= \beta E\left[c_{t+1}^{i\prime}\left(q_{t+1}^{T_i}\right)\right] \\
q_t^H + \sum_{i=1}^{M} q_t^{T_i} &= D_t \\
q_t^H + S_{t+1} &= S_t + f_t
\end{aligned}$$

Em $t + K - 1$, $S_{t+K} = 0$, pois do contrário a custosa produção da termelétrica teria que aumentar. Se existir equilíbrio no qual todas as plantas produzem quantidades positivas, este pode ser descrito pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned}
c_{t+K-1}^{1\prime}\left(q_{t+K-1}^{T_1}\right) &= ... = c_{t+K-1}^{M\prime}\left(q_{t+K-1}^{T_M}\right) \qquad i = 1, 2, ..., M \\
q_{t+K-1}^H &= S_{t+K-1} + f_{t+K-1} \\
q_{t+K-1}^H + \sum_{i=1}^{M} q_{t+K-1}^{T_i} &= D_{t+K-1}
\end{aligned}$$

6.2.5
Prova do Corolário 3.2

Tome a i-ésima termelétrica $(i = 1, 2, ..., M - 1)$. Suponha que $q_s^{T_{i+1}} > q_s^{T_i}$ para algum $s = t, ..., t + K - 1$.

Como $q_s^{T_i} \geq 0$, tem-se que $q_s^{T_{i+1}} > 0$ e assim $\mu_s^{T_{i+1}} = 0$.

Além disso,

$$-c_s^{(i+1)\prime}\left(q_s^{T_{i+1}}\right) = \phi_s = -c_s^{i\prime}\left(q_s^{T_i}\right) + \mu_s^{T_i}$$

Mas, $-c_s^{(i+1)\prime}\left(q_s^{T_{i+1}}\right) < -c_s^{i\prime}\left(q_s^{T_{i+1}}\right) < -c_s^{i\prime}\left(q_s^{T_i}\right)$ onde a primeira desigualdade segue das hipóteses iniciais e a segunda desigualdade reflete a convexidade estrita da função custo.

Portanto,

$$-c_s^{(i+1)\prime}\left(q_s^{T_{i+1}}\right) = \phi_s < -c_s^{i\prime}\left(q_s^{T_{i+1}}\right) < -c_s^{i\prime}\left(q_s^{T_i}\right) = \phi_s - \mu_s^{T_i}$$

Daí surge uma contradição porque $\mu_s^{T_i} \geq 0$.

6.2.6
Equivalência entre o Modelo NEWAVE e o Método Recursivo

O modelo NEWAVE como descrito por Castro (2000) consiste em simular os fluxos hidrológicos futuros. Mostraremos que no contexto do modelo apresentado o modelo NEWAVE e o método recursivo de solução do problema (3-2) geram os mesmos valores ótimos para S_{t+1} e q_t.

Seja a proporção dos fluxos hidrológicos futuros $[f_{t+1}, f_{t+2}]$ dada respectivamente por: α^2 para $[f + \sigma, f + \sigma]$, $\alpha(1 - \alpha)$ para $[f + \sigma, f - \sigma]$, $\alpha(1 - \alpha)$ para $[f - \sigma, f + \sigma]$, e $(1 - \alpha)^2$ para $[f - \sigma, f - \sigma]$.

Suponha que a estrutura de mercado é tal que na data t haja uma hidrelétrica e M termelétricas iguais, na data $t + 1$ haja 1 hidrelétrica e N termelétricas e na data $t + 2$ haja 1 hidrelétrica e P termelétricas (onde $M \leq N \leq P$), com a hipótese de que cada potencial termelétrica entrante tem a mesma tecnologia das termelétricas já estabelecidas.

Para cada seqüência simulada de fluxo hidrológico $[f_{t+1}, f_{t+2}]$, pode-se calcular o respectivo $S_{t+1}[f_{t+1}, f_{t+2}]$ resolvendo-se o problema de trás para frente para a produção ótima das termelétricas e para o estoque de água a ser acumulado no reservatório da hidrelétrica para o período seguinte.

Suponha uma solução interior:

Em $t+2$:

$$\begin{aligned} q_{t+2} &= \frac{D_{t+2} - S_{t+2} - f_{t+2}}{Pc_{t+2}} \\ S_{t+3} &= 0 \end{aligned}$$

Em $t+1$:

$$q_{t+1} = \frac{D_{t+1} - S_{t+1} - f_{t+1} + S_{t+2}}{Nc_{t+1}}$$

Usando as equações de Euler e fazendo as substituições adequadas:

$$\begin{aligned} c_t \left(\frac{D_t - \bar{S}_t + S_{t+1}}{M} \right) &= \beta c_{t+1} \left(\frac{D_{t+1} - f_{t+1} - S_{t+1} + S_{t+2}}{N} \right) \\ c_{t+1} \left(\frac{D_{t+1} - f_{t+1} - S_{t+1} + S_{t+2}}{N} \right) &= \beta c_{t+2} \left(\frac{D_{t+2} - f_{t+2} - S_{t+2}}{P} \right) \end{aligned}$$

A solução (S_{t+1}, S_{t+2}) para cada $[f_{t+1}, f_{t+2}]$ simulado é dada por:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \frac{M\beta^2 c_{t+1} c_{t+2} \left(D_{t+1} - f_{t+1} + D_{t+2} - f_{t+2}\right) - c_t \left(N\beta c_{t+2} + Pc_{t+1}\right) \left(D_t - \bar{S}_t\right)}{Pc_t c_{t+1} + N\beta c_t c_{t+2} + M\beta^2 c_{t+1} c_{t+2}} \\ S_{t+2} &= \frac{\beta c_{t+2} \left(M\beta c_{t+1} + Nc_t\right) \left(D_{t+2} - f_{t+2}\right) - Pc_t c_{t+1} \left(D_{t+1} - f_{t+1} + D_t - \bar{S}_t\right)}{Pc_t c_{t+1} + N\beta c_t c_{t+2} + M\beta^2 c_{t+1} c_{t+2}} \end{aligned}$$

O modelo NEWAVE calcula o S_{t+1} ótimo como a média ponderada dos S_{t+1} para cada $[f_{t+1}, f_{t+2}]$ simulado:

$$S_{t+1} = \frac{M\beta^2 c_{t+1} c_{t+2} \left(D_{t+1} + D_{t+2} - \sum_{l=1}^{L} w_l (f_{t+1} + f_{t+2})\right) - c_t \left(N\beta c_{t+2} + Pc_{t+1}\right) \left(D_t - \bar{S}_t\right)}{Pc_t c_{t+1} + N\beta c_t c_{t+2} + M\beta^2 c_{t+1} c_{t+2}}$$

onde w_l são os pesos respectivos para cada um dos 4 cenários descritos acima.

Voltemo-nos agora para o cálculo do valor ótimo de S_{t+1} usando a abordagem recursiva para o problema descrito em (3-2) no qual S_{t+1} é o valor que maximiza o valor esperado intertemporal da função custo:

As equações de Euler são dadas por:

$$\begin{cases} c_t \left(\frac{D_t - \bar{S}_t + S_{t+1}}{M} \right) = \beta E_t \left[c_{t+1} \left(\frac{D_{t+1} - f_{t+1} - S_{t+1} + S_{t+2}}{N} \right) \right] \\ c_{t+1} \left(\frac{D_{t+1} - f_{t+1} - S_{t+1} + S_{t+2}}{N} \right) = \beta E_{t+1} \left[c_{t+2} \left(\frac{D_{t+2} - f_{t+2} - S_{t+2}}{P} \right) \right] \end{cases}$$

Resolvendo para S_{t+2} na primeira equação, substituindo na segunda equação e usando a lei das expectativas iteradas, pode-se obter:

$$S_{t+1} = \frac{M\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]-c_t\left(N\beta c_{t+2}+Mc_{t+1}\right)\left(D_t-\bar{S}_t\right)}{Pc_tc_{t+1}+N\beta c_tc_{t+2}+M\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}}$$

Note que a trajetória da demanda $\{D_t\}$ é exógena e então:

$$E_t\left[f_{t+1}+f_{t+2}\right] = \sum_{l=1}^{L} w_l(f_{t+1}+f_{t+2})$$

Portanto, em nosso modelo, os dois métodos são equivalentes.

6.2.7
A Abordagem do Modelo de Opções Reais

Primeiro calculamos S_{t+1} e $S_{t+2}\left[f_{t+1}\right]$ supondo que não haja expansão da capacidade. Das seções passadas, podemos calcular S_{t+1} e $S_{t+2}\left[f_{t+1}\right]$ para $N = M = 1$:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \frac{\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]-c_t\left(\beta c_{t+2}+c_{t+1}\right)\left(D_t-\bar{S}_t\right)}{c_tc_{t+1}+\beta c_tc_{t+2}+\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\ S_{t+2}\left[f_{t+1}\right] &= \frac{c_{t+1}\left(S_{t+1}+f_{t+1}-D_{t+1}\right)+\beta c_{t+2}E_{t+1}\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \end{aligned}$$

Na abordagem usada nos modelos de opções reais, a entrada futura não afeta o valor de S_{t+1} em (3-15). Usamos esse fato para calcular o valor da opção de espera.

As quantidades futuras simuladas produzidas por uma termelétrica (com a mesma tecnologia da termelétrica já estabelecida) que entra no mercado na data t é dada por:

$$\begin{aligned} q_{t+1}\left[f_{t+1}\right] &= \frac{D_{t+1}-S_{t+1}-f_{t+1}+S_{t+2}\left[f_{t+1}\right]}{2} \\ q_{t+2}\left[f_{t+1},f_{t+2}\right] &= \frac{D_{t+2}-S_{t+2}\left[f_{t+1}\right]-f_{t+2}}{2} \end{aligned}$$

onde $q_{t+1}\left[f_{t+1}\right]$ é a produção da termelétrica na data $t+1$ e $q_{t+2}\left[f_{t+1},f_{t+2}\right]$ é a produção da termelétrica na data $t+2$ se o fluxo for f_{t+2}, dado que no período anterior o fluxo foi f_{t+1}. Os preços correspondentes nas datas $t+1$ e $t+2$ são dadas respectivamente por $c_{t+1}q_{t+1}\left[f_{t+1}\right]$ e $c_{t+2}q_{t+2}\left[f_{t+1},f_{t+2}\right]$.

Se uma nova termelétrica investe na data t, o operador do sistema calculará o $S_{t+2}[f_{t+1}]$ ótimo em $t+1$ incluindo uma nova termelétrica. No nosso exemplo, esse valor será dado pela seguinte equação de Euler:

$$c_{t+1}\frac{D_{t+1}-S_{t+1}-f_{t+1}+S_{t+2}[f_{t+1}]}{2} = \beta E_{t+1}\left[c_{t+2}\frac{D_{t+2}-S_{t+2}[f_{t+1}]-f_{t+2}}{2}\right]$$

e, por conseguinte, o mesmo valor de $S_{t+2}[f_{t+1}]$ como acima é obtido.

Assim:

$$\begin{aligned} q_{t+1}[f_{t+1}] &= \frac{\beta c_{t+2}\left(\begin{array}{c} \left(c_t\left(E_{t+1}[D_{t+2}-f_{t+2}]+D_{t+1}-f_{t+1}+D_t-\bar{S}_t\right)\right)+ \\ \frac{\left(\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}\right)\left(E_t[f_{t+1}]-f_{t+1}\right)}{\left(c_{t+1}+\beta c_{t+2}\right)} \end{array}\right)}{2\left(c_t c_{t+1}+\beta c_t c_{t+2}+\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}\right)} \\ q_{t+2}[f_{t+1},f_{t+2}] &= \frac{c_{t+1}\left(D_{t+2}-f_{t+2}+D_{t+1}-f_{t+1}-S_{t+1}\right)+\beta c_{t+2}\left(E_{t+1}[f_{t+2}]-f_{t+2}\right)}{2\left(c_{t+1}+\beta c_{t+2}\right)} \end{aligned}$$

E o correspondente valor presente líquido pode, então, ser obtido:

$$J_t - I = E_t\left[\sum_{s=t+1}^{t+2}\beta^{s-t}c_s\frac{(q_s)^2}{2} - I\right] \tag{6-7}$$

Para calcular os valores esperados das oportunidades futuras de investimento, temos que simular as quantidades e preços futuros para uma termelétrica que entra na data $t+1$.

$$q_{t+2}[f_{t+2},f_{t+1}] = \frac{D_{t+2}-S_{t+2}[f_{t+1}]-f_{t+2}}{2}$$

onde $S_{t+2}[f_{t+1}]$ é o mesmo calculado acim, porque a equação de Euler respectiva será

$$c_{t+1}\left(D_{t+1}-S_{t+1}-f_{t+1}+S_{t+2}[f_{t+1}]\right) = \beta c_{t+2}\left(E_{t+1}\left[D_{t+2}-S_{t+2}[f_{t+1}]-f_{t+2}\right]\right)$$

E para calcular as oportunidades futuras de investimento:

$$F_{t+1} = \max\{J_{t+1}-I, 0\} \tag{6-8}$$

Portanto, o valor da opção de esperar pode ser assim obtido.

6.2.8
Capacidade Endógena

Para calcular o equilíbrio de comprometimento total é necessário obter a função de reação do operador do sistema a um dado anúncio de entrada.

Para cada possível anúncio (n_1, h_2, l_2) e manipulando as condições (3-20) - (3-26), as seguintes equações de Euler caracterizam a função de reação do operador do sistema:

$$\begin{cases} c_t\left(D_t - \bar{S}_t + S_{t+1}\right) = \beta E_t\left[c_{t+1}\left(\frac{D_{t+1}-f_{t+1}-S_{t+1}+S_{t+2}}{1+n_1}\right)\right] \\ c_{t+1}\left(\frac{D_{t+1}-f-\sigma-S_{t+1}+S_{t+2}}{1+n_1}\right) = \beta E_{t+1}\left[c_{t+2}\left(\frac{D_{t+2}-f_{t+2}-S_{t+2}}{1+n_1+h_2}\right)\right] \\ c_{t+1}\left(\frac{D_{t+1}-f+\sigma-S_{t+1}+S_{t+2}}{1+n_1}\right) = \beta E_{t+1}\left[c_{t+2}\left(\frac{D_{t+2}-f_{t+2}-S_{t+2}}{1+n_1+l_2}\right)\right] \end{cases}$$

Há oito possíveis estratégias. Para cada estratégia, resolvemos para os valores de $S_{t+1}, S_{t+2}\left[f+\sigma\right], S_{t+2}\left[f-\sigma\right]$:

1.1) $(n_1, h_2, l_2) = (1, 0, 0)$: "Entra em t, não entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f + \sigma$, não entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f - \sigma$".

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \frac{\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right] + 2c_t(c_{t+1}+\beta c_{t+2})\left(S_t+f_t-D_t\right)}{2c_tc_{t+1}+2\beta c_tc_{t+2}+\beta^2c_{t+1}c_{t+2}} \\ S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+c_{t+1}\left(S_{t+1}+f+\sigma-D_{t+1}\right)}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\ S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+c_{t+1}\left(S_{t+1}+f-\sigma-D_{t+1}\right)}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \end{aligned}$$

1.2) $(n_1, h_2, l_2) = (1, 1, 0)$: "Entra em t, entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f + \sigma$, não entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f - \sigma$".

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \frac{\left(\begin{array}{c} (2\beta^3c_{t+1}c_{t+2}^2+3\beta^2c_{t+1}^2c_{t+2}-\alpha\beta^2c_{t+1}^2c_{t+2})E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]+ \\ -2\alpha(1-\alpha)\sigma\beta^2c_{t+1}^2c_{t+2}+ \\ 2c_t(3c_{t+1}^2+5\beta c_{t+2}c_{t+1}+2\beta^2c_{t+2}^2)\left(S_t+f_t-D_t\right) \end{array}\right)}{10\beta c_tc_{t+1}c_{t+2}+6c_tc_{t+1}^2+4\beta^2c_tc_{t+2}^2+3\beta^2c_{t+1}^2c_{t+2}+2\beta^3c_{t+1}c_{t+2}^2-\alpha\beta^2c_{t+1}^2c_{t+2}} \\ S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{2\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+3c_{t+1}\left(S_{t+1}+f+\sigma-D_{t+1}\right)}{3c_{t+1}+2\beta c_{t+2}} \\ S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+c_{t+1}\left(S_{t+1}+f-\sigma-D_{t+1}\right)}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \end{aligned}$$

1.3) $(n_1, h_2, l_2) = (1, 1, 1)$: "Entra em t, entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f + \sigma$, entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f - \sigma$".

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{(\beta^2 c_{t+1}c_{t+2})E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]+c_t(3c_{t+1}+2\beta c_{t+2})\left(S_t+f_t-D_t\right)}{2\beta c_t c_{t+2}+3c_t c_{t+1}+\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{2\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+3c_{t+1}\left(S_{t+1}+f+\sigma-D_{t+1}\right)}{3c_{t+1}+2\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{2\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+3c_{t+1}\left(S_{t+1}+f-\sigma-D_{t+1}\right)}{3c_{t+1}+2\beta c_{t+2}}
\end{aligned}
$$

1.4) $(n_1,h_2,l_2)=(1,0,1)$: "Entra em t, não entra em $t+1$ se $f_{t+1}=f+\sigma$, entra em $t+1$ se $f_{t+1}=f-\sigma$".

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\left(\begin{array}{c}(2\beta^3 c_{t+1}c_{t+2}^2+2\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}+\alpha\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2})E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]+ \\ -2\alpha(1-\alpha)\sigma\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2} \\ +2c_t(3c_{t+1}^2+5\beta c_{t+2}c_{t+1}+2\beta^2 c_{t+2}^2)\left(S_t+f_t-D_t\right)\end{array}\right)}{10\beta c_t c_{t+1}c_{t+2}+6c_t c_{t+1}^2+2\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}+2\beta^3 c_{t+1}c_{t+2}^2+\alpha\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}+4\beta^2 c_t c_{t+2}^2} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+c_{t+1}\left(S_{t+1}+f+\sigma-D_{t+1}\right)}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{2\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+3c_{t+1}\left(S_{t+1}+f-\sigma-D_{t+1}\right)}{3c_{t+1}+2\beta c_{t+2}}
\end{aligned}
$$

2.1) $(n_1,h_2,l_2)=(0,1,0)$: "Não entra em t, entra em $t+1$ se $f_{t+1}=f+\sigma$, não entra em $t+1$ se $f_{t+1}=f-\sigma$".

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\left(\begin{array}{c}(\beta^3 c_{t+1}c_{t+2}^2+2\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}-\alpha\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2})E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]+ \\ +2\alpha(1-\alpha)\sigma\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}+c_t(2c_{t+1}^2+3\beta c_{t+2}c_{t+1}+\beta^2 c_{t+2}^2)\left(S_t+f_t-D_t\right)\end{array}\right)}{3\beta c_t c_{t+1}c_{t+2}+2c_t c_{t+1}^2+\beta^2 c_t c_{t+2}^2+2\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}+\beta^3 c_{t+1}c_{t+2}^2-\alpha\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+2c_{t+1}\left(S_{t+1}+f+\sigma-D_{t+1}\right)}{2c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+c_{t+1}\left(S_{t+1}+f-\sigma-D_{t+1}\right)}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}}
\end{aligned}
$$

2.2) $(n_1,h_2,l_2)=(0,1,1)$: "Não entra em t, entra em $t+1$ se $f_{t+1}=f+\sigma$, entra em $t+1$ se $f_{t+1}=f-\sigma$".

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}-f_{t+1}-f_{t+2}\right]+c_t(2c_{t+1}+\beta c_{t+2})\left(S_t+f_t-D_t\right)}{2c_t c_{t+1}+\beta c_t c_{t+2}+\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+2c_{t+1}\left(S_{t+1}+f+\sigma-D_{t+1}\right)}{2c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2}-f_{t+2}\right]+c_{t+1}\left(S_{t+1}+f-\sigma-D_{t+1}\right)}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}}
\end{aligned}
$$

2.3) $(n_1, h_2, l_2) = (0,0,0)$: "Não entra em t, não entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f + \sigma$, não entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f - \sigma$".

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\beta^2 c_{t+1} c_{t+2} E_t\left[D_{t+1} + D_{t+2} - f_{t+1} - f_{t+2}\right] + c_t(c_{t+1} + \beta c_{t+2})\left(S_t + f_t - D_t\right)}{c_t c_{t+1} + \beta c_t c_{t+2} + \beta^2 c_{t+1} c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2} E_t\left[D_{t+2} - f_{t+2}\right] + c_{t+1}\left(S_{t+1} + f + \sigma - D_{t+1}\right)}{c_{t+1} + \beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2} E_t\left[D_{t+2} - f_{t+2}\right] + c_{t+1}\left(S_{t+1} + f - \sigma - D_{t+1}\right)}{c_{t+1} + \beta c_{t+2}}
\end{aligned}$$

2.4) $(n_1, h_2, l_2) = (0,0,1)$: "Não entra em t, não entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f + \sigma$, entra em $t+1$ se $f_{t+1} = f - \sigma$".

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\left(\begin{array}{c} (\beta^3 c_{t+1} c_{t+2}^2 + \beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2} + \alpha\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}) E_t\left[D_{t+1} + D_{t+2} - f_{t+1} - f_{t+2}\right] + \\ -2\alpha(1-\alpha)\sigma\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2} + c_t(2c_{t+1}^2 + 3\beta c_{t+2} c_{t+1} + \beta^2 c_{t+2}^2)\left(S_t + f_t - D_t\right) \end{array}\right)}{3\beta c_t c_{t+1} c_{t+2} + 2 c_t c_{t+1}^2 + \beta^2 c_t c_{t+2}^2 + \beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2} + \beta^3 c_{t+1} c_{t+2}^2 + \alpha\beta^2 c_{t+1}^2 c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2} E_t\left[D_{t+2} - f_{t+2}\right] + c_{t+1}\left(S_{t+1} + f + \sigma - D_{t+1}\right)}{c_{t+1} + \beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2} E_t\left[D_{t+2} - f_{t+2}\right] + 2c_{t+1}\left(S_{t+1} + f - \sigma - D_{t+1}\right)}{2c_{t+1} + \beta c_{t+2}}
\end{aligned}$$

6.2.9
Exemplos Numéricos para o Método dos Modelos de Opções Reais

Parâmetros: $D_{t+2} = D_{t+1} = D_t = 100, \alpha = 0.5, \beta = 0.9, \bar{S}_t = 200, f = 20, \sigma = 8, c_t = c_{t+1} = c_{t+2} = 1, I = 160$

Na abordagem de opções reais:

$$S_{t+1} = 117.93, S_{t+2}\left[f+\sigma\right] = 62.07, S_{t+2}\left[f-\sigma\right] = 53.65$$

com as quantidades respectivas dadas por:

$$\begin{aligned}
q_{t+1}\left[f+\sigma\right] &= 8.068, q_{t+1}\left[f-\sigma\right] = 11.858 \\
q_{t+2}\left[f+\sigma, f+\sigma\right] &= 4.966, q_{t+2}\left[f+\sigma, f-\sigma\right] = 12.966 \\
q_{t+2}\left[f-\sigma, f+\sigma\right] &= 9.176, q_{t+2}\left[f-\sigma, f-\sigma\right] = 17.176
\end{aligned}$$

O valor presente do projeto é igual a:

$$\begin{aligned} J_t - I &= -55.81 \\ E_t F_{t+1}[f+\sigma] &= E_t[\max\{-116.64, 0\}] = 0 \\ E_t F_{t+1}[f-\sigma] &= E_t[\max\{-74.68, 0\}] = 0 \end{aligned}$$

Quando $\bar{S}_t = 190$

$$S_{t+1} = 110.92, S_{t+2}[f+\sigma] = 58.38, S_{t+2}[f-\sigma] = 49.96$$

com as quantidades respectivas dadas por:

$$\begin{aligned} q_{t+1}[f+\sigma] &= 9.729, q_{t+1}[f-\sigma] = 13.518 \\ q_{t+2}[f+\sigma, f+\sigma] &= 6.810, q_{t+2}[f+\sigma, f-\sigma] = 14.810 \\ q_{t+2}[f-\sigma, f+\sigma] &= 11.020, q_{t+2}[f-\sigma, f-\sigma] = 19.020 \end{aligned}$$

e valor presente do projeto dado por:

$$\begin{aligned} J_t - I &= -21.76 \\ E_t F_{t+1}[f+\sigma] &= 0 \\ E_t F_{t+1}[f-\sigma] &= 0 \end{aligned}$$

6.3 Capítulo 4

6.3.1 Solução do Mercado Competitivo sem Regulação

Mercado à Vista

Para cada contingência f_2:

$$\begin{aligned} a - bf_2 - 2bq_1 - bq_2 + bx_1 &= c_1 q_1 \\ a - bf_2 - bq_1 - 2bq_2 + bx_2 &= c_2 q_2 \\ a - b(f_2 + q_1 + q_2) &= p \end{aligned}$$

A solução do sistema acima é dada por:

$$\begin{aligned} p &= \frac{(c_1c_2+b^2+bc_1+bc_2)(a-bf_2)-b^2((b+c_2)x_1+(b+c_1)x_2)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2} \\ q_1 &= \frac{(b+c_2)(a-bf_2+bx_1)+b^2(x_1-x_2)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2} \\ q_2 &= \frac{(b+c_1)(a-bf_2+bx_2)+b^2(x_2-x_1)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2} \end{aligned}$$

E as equações (4-5),(4-6) e (4-7) são obtidas.

Mercado a Termo

As CPO para o nível de contrato ótimo são dadas por:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\begin{array}{c} \alpha\left(\begin{array}{c} \frac{\left(\begin{array}{c}(c_1c_2+b^2+bc_1+bc_2)(a-b(f+\sigma)) \\ -b^2((b+c_2)x_1+(b+c_1)x_2)\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\frac{\left(\begin{array}{c}(b+c_2)(a-b(f+\sigma)) \\ +(bc_2+2b^2)x_1-b^2x_2\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2} \\ -c_1\frac{\left(\frac{(b+c_2)(a-b(f+\sigma))+(bc_2+2b^2)x_1-b^2x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2} \end{array}\right) \\ +(1-\alpha)\left(\begin{array}{c} \frac{\left(\begin{array}{c}(c_1c_2+b^2+bc_1+bc_2)(a-b(f-\sigma)) \\ -b^2((b+c_2)x_1+(b+c_1)x_2)\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\frac{\left(\begin{array}{c}(b+c_2)(a-b(f-\sigma)) \\ +(bc_2+2b^2)x_1-b^2x_2\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2} \\ -c_1\frac{\left(\frac{(b+c_2)(a-b(f-\sigma))+(bc_2+2b^2)x_1-b^2x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2} \end{array}\right) \end{array}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx_2}\left(\begin{array}{c}\alpha\left(\begin{array}{c}\frac{\left(\begin{array}{c}(c_1c_2+b^2+bc_1+bc_2)(a-b\,(f+\sigma))\\-b^2\left((b+c_2)x_1+(b+c_1)x_2\right)\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\frac{\left(\begin{array}{c}(b+c_1)(a-b\,(f+\sigma))\\+(bc_1+2b^2)x_2-b^2x_1\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\\-c_2\frac{\left(\frac{(b+c_1)(a-b(f+\sigma))+(bc_1+2b^2)x_2-b^2x_1}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2}\end{array}\right)\\+(1-\alpha)\left(\begin{array}{c}\frac{\left(\begin{array}{c}(c_1c_2+b^2+bc_1+bc_2)(a-b\,(f-\sigma))\\-b^2\left((b+c_2)x_1+(b+c_1)x_2\right)\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\left(\frac{\left(\begin{array}{c}(b+c_1)(a-b\,(f-\sigma))\\+(bc_1+2b^2)x_2-b^2x_1\end{array}\right)}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)\\-c_2\frac{\left(\frac{(b+c_1)(a-b(f-\sigma))+(bc_1+2b^2)x_2-b^2x_1}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2}\end{array}\right)\end{array}\right)=0$$

A solução do sistema acima é dada por:

$$x_1 = \frac{\left(b^3+b^2c_1+2b^2c_2+bc_1c_2\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha)))}{\left(\begin{array}{c}5b^4+(10b^3+4bc_1c_2)(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)}$$

$$x_2 = \frac{\left(b^3+2b^2c_1+b^2c_2+bc_1c_2\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha)))}{\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)}$$

E as equações (4-11) e (4-12) são obtidas

A alocação de equilíbrio é obtida substituindo-se (4-11) e (4-12) em (4-5) a (4-7). Logo,

$$q_1 = \frac{\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)(b+c_2)(a-bf_2)\\+\left(\begin{array}{c}b^5+4b^4c_2+2b^3c_1c_2\\+2b^3c_2^2+b^2c_1c_2^2\end{array}\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha)))\end{array}\right)}{(2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2)\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)}$$

$$q_2 = \frac{\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)(b+c_1)(a-bf_2)\\+\left(\begin{array}{c}b^5+4b^4c_1+2b^3c_1c_2+\\2b^3c_1^2+b^2c_1^2c_2\end{array}\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha)))\end{array}\right)}{(2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2)\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)}$$

$$p = \frac{\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)(c_1c_2+b^2+bc_1+bc_2)(a-bf_2)\\-b^2\left(\left(\begin{array}{c}(b+c_2)\left(b^3+b^2c_1+2b^2c_2+bc_1c_2\right)\\+(b+c_1)\left(b^3+2b^2c_1+b^2c_2+bc_1c_2\right)\end{array}\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha)))\right)\end{array}\right)}{(2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2)\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right)}$$

Poder de Mercado

O poder de mercado da indústria é dado por:

$$\begin{aligned} L\left[f_2\right] &= \frac{p[f_2]-c(q_1+q_2)}{p[f_2]} = \\ &= \frac{a-bf_2-(b+c)(q_1+q_2)}{a-bf_2-b(q_1+q_2)} \end{aligned}$$

Suponha que $L[f+\sigma] \geq L[f-\sigma]$

Chame

$$H_1 = \left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right) > 0$$

$$H_2 = \left(\begin{array}{c}b^5+4b^4c_2+2b^3c_1c_2\\+2b^3c_2^2+b^2c_1c_2^2\end{array}\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha))) > 0$$

$$H_3 = \left(\begin{array}{c}b^5+4b^4c_1+2b^3c_1c_2+\\2b^3c_1^2+b^2c_1^2c_2\end{array}\right)(a-b(f-\sigma(1-2\alpha))) > 0$$

$$D = (2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2)\left(\begin{array}{c}5b^4+10b^3(c_1+c_2)+4bc_1c_2(c_1+c_2)\\+13b^2c_1c_2+4b^2c_1^2+4b^2c_2^2+c_1^2c_2^2\end{array}\right) > 0$$

Então,

$$q_1 = \frac{(H_1(b+c_2)(a-bf_2)+H_2)}{D}$$

$$q_2 = \frac{(H_1(b+c_1)(a-bf_2)+H_3)}{D}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a-b(f+\sigma) \\ -(b+c)\begin{pmatrix} \frac{(H_1(b+c_2)(a-b(f+\sigma))+H_2)}{D} \\ +\frac{(H_1(b+c_1)(a-b(f+\sigma))+H_3)}{D} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a-b(f+\sigma) \\ -b\begin{pmatrix} \frac{(H_1(b+c_2)(a-b(f+\sigma))+H_2)}{D} \\ +\frac{(H_1(b+c_1)(a-b(f+\sigma))+H_3)}{D} \end{pmatrix} \end{pmatrix}} \geq \frac{\begin{pmatrix} a-b(f-\sigma) \\ -(b+c)\begin{pmatrix} \frac{(H_1(b+c_2)(a-b(f-\sigma))+H_2)}{D} \\ +\frac{(H_1(b+c_1)(a-b(f-\sigma))+H_3)}{D} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a-b(f-\sigma) \\ -b\begin{pmatrix} \frac{(H_1(b+c_2)(a-b(f-\sigma))+H_2)}{D} \\ +\frac{(H_1(b+c_1)(a-b(f-\sigma))+H_3)}{D} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}$$

Manipulando algebricamente as condições acima:

$$-H_2 - H_3 \geq 0$$

que representa uma contradição com as hipóteses acima.

Portanto,

$$L[f-\sigma] > L[f+\sigma]$$

6.3.2
Solução do Mercado Competitivo Regulado

A mesma alocação de equilíbrio (4-5),(4-6) e (4-7) é obtida no mercado à vista.

As CPO do problema (4-17) no qual as restrições não são efetivas são dadas por:

$$\frac{d}{dx_1}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a\left(\frac{(2b+c_2+c_1)(a-bf_2)+(bc_2+b^2)x_1+(bc_1+b^2)x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}+f_2\right) \\ -\frac{b}{2}\left(\frac{(2b+c_2+c_1)(a-bf_2)+(bc_2+b^2)x_1+(bc_1+b^2)x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}+f_2\right)^2 \end{pmatrix} \\ -\frac{c_1\left(\frac{(b+c_2)(a-bf_2)+(bc_2+2b^2)x_1-b^2x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2} - \frac{c_2\left(\frac{(b+c_1)(a-bf_2)+(bc_1+2b^2)x_2-b^2x_1}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{d}{dx_2}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a\left(\frac{(2b+c_2+c_1)(a-bf_2)+(bc_2+b^2)x_1+(bc_1+b^2)x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}+f_2\right) \\ -\frac{b}{2}\left(\frac{(2b+c_2+c_1)(a-bf_2)+(bc_2+b^2)x_1+(bc_1+b^2)x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}+f_2\right)^2 \end{pmatrix} \\ -\frac{c_1\left(\frac{(b+c_2)(a-bf_2)+(bc_2+2b^2)x_1-b^2x_2}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2} - \frac{c_2\left(\frac{(b+c_1)(a-bf_2)+(bc_1+2b^2)x_2-b^2x_1}{2bc_1+2bc_2+c_1c_2+3b^2}\right)^2}{2} \end{pmatrix} = 0$$

Solução:

$$x_1 = \frac{c_2(a-bEf_2)}{bc_1+bc_2+c_1c_2}$$

$$x_2 = \frac{c_1(a-bEf_2)}{bc_1+bc_2+c_1c_2}$$

6.3.3 Análise Numérica

Caso Base:

$$
\begin{aligned}
p\left[f_2\right] &= 200-3\left(Q^T\left[f_2\right]\right)\\
c_1 &= 5, c_2 = 10\\
f &= 33, \sigma = 30, \alpha = (0.75)
\end{aligned}
$$

Solução do Mercado Sem Regulação

A alocação NE no mercado à vista é dada pelas seguintes condições:

$$
\begin{aligned}
(200)-((3))f_2-2((3))q_1-((3))q_2+((3))x_1 &= 5q_1\\
(200)-((3))f_2-((3))q_1-2((3))q_2+((3))x_2 &= 10q_2\\
(200)-((3))(f_2+q_1+q_2) &= p
\end{aligned}
$$

Cuja solução é:

$$
\begin{aligned}
p &= \tfrac{(104)((200)-((3))f_2)-117x_1-72x_2}{167}\\
q_1 &= \tfrac{(13)((200)-((3))f_2)+48x_1-9x_2}{167}\\
q_2 &= \tfrac{(8)((200)-((3))f_2)+33x_2-9x_1}{167}
\end{aligned}
$$

O equilíbrio no mercado a termo é dado pelas seguintes condições:

$$
\frac{d}{dx_1}\left(\begin{array}{c}
\frac{3}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\frac{(104)((200)-((3))(63))-117x_1-72x_2}{167}\right)\left(\frac{(13)((200)-((3))(63))+48x_1-9x_2}{167}\right)\\
-\frac{5\left(\frac{(13)((200)-((3))(63))+48x_1-9x_2}{167}\right)^2}{2}\end{array}\right)\\
+\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\frac{(104)((200)-((3))3)-117x_1-72x_2}{167}\right)\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}\right)\\
-\frac{5\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}\right)^2}{2}\end{array}\right)
\end{array}\right)=0
$$

$$\frac{d}{dx_2}\left(\begin{array}{c} \frac{3}{4}\left(\begin{array}{c} \left(\frac{(104)((200)-((3))(63))-117x_1-72x_2}{167}\right)\left(\frac{(8)((200)-((3))(63))+33x_2-9x_1}{167}\right) \\ -\frac{10\left(\frac{(8)((200)-((3))(63))+33x_2-9x_1}{167}\right)^2}{2} \end{array}\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} \left(\frac{(104)((200)-((3))3)-117x_1-72x_2}{167}\right)\left(\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}\right) \\ -\frac{10\left(\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}\right)^2}{2} \end{array}\right) \end{array}\right)=0$$

Cuja solução é:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.86 \\ x_2 &= 0.76 \end{aligned}$$

A alocação de equilíbrio é obtida ao substituir estes valores nas equações da alocação do NE. Portanto,

$$\begin{cases} p\left[f+\sigma\right]=5.92, q_1\left[f+\sigma\right]=1.06, q_2\left[f+\sigma\right]=0.63, Q\left[f+\sigma\right]=64.69 \\ p\left[f-\sigma\right]=118.02, q_1\left[f-\sigma\right]=15.07, q_2\left[f-\sigma\right]=9.25, Q\left[f-\sigma\right]=27.33 \end{cases}$$

O poder de mercado da indústria a cada contingência é dado respectivamente por:

$$\begin{aligned} L[f+\sigma] &= \frac{5.92-\left(\frac{50}{15}\right)(1.06+0.63)}{5.92}=4.76\% \\ L[f-\sigma] &= \frac{118.02-\left(\frac{50}{15}\right)(15.07+9.25)}{118.02}=31.29\% \end{aligned}$$

Pode-se ver que $L[f-\sigma]>L[f+\sigma]$

Solução do Mercado Regulado

Considere agora o problema no qual o regulador pode intervir. O equilíbrio de NE no mercado à vista para cada par $\{x_1, x_2\}$ é dado pelas mesmas condições do mercado sem regulação.

As CPOs do problema (4-17) quando as restrições não são efetivas são dadas por:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\begin{array}{c}\frac{3}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}200\left(\frac{(13)((200)-((3))63)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))63)+33\,x_2-9x_1}{167}+63\right)\\ -\frac{3}{2}\left(\frac{(13)((200)-((3))63)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))63)+33\,x_2-9x_1}{167}+63\right)^2\end{array}\right)\\ -\frac{5\left(\frac{(13)((200)-((3))63)+48x_1-9x_2}{167}\right)^2}{2}-\frac{10\left(\frac{(8)((200)-((3))63)+33\,x_2-9x_1}{167}\right)^2}{2}\end{array}\right)\\ +\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}200\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}+3\right)\\ -\frac{3}{2}\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}+3\right)^2\end{array}\right)\\ -\frac{(5)\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}\right)^2}{2}-\frac{10\left(\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}\right)^2}{2}\end{array}\right)\end{array}\right)=0$$

$$\frac{d}{dx_2}\left(\begin{array}{c}\frac{3}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}200\left(\frac{(13)((200)-((3))63)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))63)+33\,x_2-9x_1}{167}+63\right)\\ -\frac{3}{2}\left(\frac{(13)((200)-((3))63)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))63)+33\,x_2-9x_1}{167}+63\right)^2\end{array}\right)\\ -\frac{5\left(\frac{(13)((200)-((3))63)+48x_1-9x_2}{167}\right)^2}{2}-\frac{10\left(\frac{(8)((200)-((3))63)+33\,x_2-9x_1}{167}\right)^2}{2}\end{array}\right)\\ +\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}200\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}+3\right)\\ -\frac{3}{2}\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}+\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}+3\right)^2\end{array}\right)\\ -\frac{5\left(\frac{(13)((200)-((3))3)+48x_1-9x_2}{167}\right)^2}{2}-\frac{10\left(\frac{(8)((200)-((3))3)+33\,x_2-9x_1}{167}\right)^2}{2}\end{array}\right)\end{array}\right)=0$$

Cuja solução é igual a:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5.89 \\ x_2 &= 2.95 \end{aligned}$$

Os valores de equilíbrio no mercado à vista:

$$\begin{cases} p\left[f+\sigma\right]=1.45, q_1\left[f+\sigma\right]=2.39, q_2\left[f+\sigma\right]=0.79, Q\left[f+\sigma\right]=66.18 \\ p\left[f-\sigma\right]=113.55, q_1\left[f-\sigma\right]=16.40, q_2\left[f-\sigma\right]=9.41, Q\left[f-\sigma\right]=28.82 \end{cases}$$

É fácil ver que a esses valores, as restrições não são ativas.

Com isso, podemos calcular o poder de mercado da indústria.

No caso de um fluxo hidrológico favorável, o custo marginal é maior do que o preço à vista e, portanto, não há poder de mercado no sentido que aqui se utiliza como preço acima dos custos marginais.

No caso de um fluxo hidrológico desfavorável:

$$L^W[f-\sigma]=\frac{113.55-\left(\frac{50}{15}\right)(16.40+9.41)}{113.55}=24.21\%$$

6.3.4
Análise de Sensibilidade

	$a = 198$				$a = 220$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	0.83		5.68		1.16		8.00	
x_2	0.73		2.84		1.03		4.00	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	0.90	14.91	2.39	16.40	2.69	16.70	4.50	18.51
q_2	0.53	9.15	0.79	9.41	1.63	10.25	1.84	10.47
x_1/q_1	91.87%	5.53%	260.60%	35.10%	43.15%	6.95%	177.90%	43.22%
x_2/q_2	137.89%	8.01%	414.05%	30.53%	63.42%	10.06%	216.88%	38.22%
p	4.71	116.81	0.40	112.49	18.05	130.14	11.98	124.07
cQ^c	4.77	80.22	9.56	85.01	14.39	89.84	21.14	96.59
L	0.00%	31.33%	0.00%	24.43%	20.25%	30.97%	0.00%	22.15%
$E\pi_1$	416.57		427.63		548.91		574.50	
$E\pi_2$	242.32		233.59		317.65		301.23	

Tabela 6.1: Efeito de uma variação em *a*

	$b = 2.5$				$b = 3.02$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	1.20		9.14		0.84		5.78	
x_2	1.08		4.57		0.75		2.89	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	3.96	17.01	5.88	18.93	0.96	15.00	2.26	16.31
q_2	2.35	10.18	2.61	10.44	0.57	9.22	0.72	9.38
x_1/q_1	30.38%	7.08%	155.44%	48.31%	87.91%	5.61%	255.11%	35.41%
x_2/q_2	45.79%	10.58%	174.82%	43.78%	131.59%	8.10%	398.48%	30.80%
p	26.71	124.54	21.26	119.08	5.14	117.79	0.71	113.37
cQ^c	21.05	90.62	28.32	97.89	5.08	80.74	9.96	85.62
L	21.19%	27.24%	0.00%	17.80%	1.02%	31.45%	0.00%	24.47%
$E\pi_1$	572.76		611.49		423.14		434.59	
$E\pi_2$	320.94		306.81		246.37		237.26	

Tabela 6.2: Efeito de uma variação em *b*

	$\alpha = 0.7$				$\alpha = 0.8$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	0.99		6.84		0.72		4.95	
x_2	0.88		3.42		0.64		2.47	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	1.09	15.11	2.64	16.65	1.03	15.04	2.14	16.16
q_2	0.65	9.27	0.83	9.46	0.61	9.24	0.75	9.37
x_1/q_1	90.78%	6.58%	259.32%	41.09%	69.85%	4.78%	230.65%	30.62%
x_2/q_2	136.19%	9.52%	410.09%	36.17%	103.84%	6.91%	330.21%	26.39%
p	5.77	117.87	0.58	112.68	6.07	118.17	2.32	114.41
cQ^c	5.81	81.26	11.58	87.02	5.48	80.92	9.65	85.10
L	0.00%	31.06%	0.00%	22.77%	9.83%	31.52%	0.00%	25.62%
$E\pi_1$	512.10		529.71		341.30		348.95	
$E\pi_2$	298.09		285.81		197.90		191.11	

Tabela 6.3: Efeito de uma variação em α

	$\sigma = 30.5$				$\sigma = 28$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	0.84		5.82		0.90		5.78	
x_2	0.75		2.91		0.80		2.89	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	0.94	15.19	2.25	16.50	1.54	14.62	2.94	16.02
q_2	0.56	9.32	0.72	9.48	0.92	8.97	1.09	9.14
x_1/q_1	89.65%	5.56%	257.97%	35.25%	58.57%	6.17%	211.17%	38.77%
x_2/q_2	134.44%	8.04%	405.97%	30.67%	86.66%	8.92%	284.03%	33.97%
p	5.00	118.97	0.59	114.55	9.61	114.23	4.90	109.52
cQ^c	5.00	81.71	9.90	86.81	8.21	78.63	13.45	83.87
L	0.06%	31.32%	0.00%	24.39%	14.55%	31.17%	0.00%	24.47%
$E\pi_1$	432.71		444.44		404.49		418.35	
$E\pi_2$	251.91		242.80		233.52		223.25	

Tabela 6.4: Efeito de uma variação em σ

	$f = 32$				$f = 33.5$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	0.90		6.21		0.83		5.74	
x_2	0.80		3.11		0.74		2.87	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	1.31	15.11	2.71	16.72	0.94	14.95	2.23	16.25
q_2	0.78	9.27	0.95	9.57	0.56	9.18	0.71	9.34
x_1/q_1	69.05%	6.58%	229.38%	37.15%	88.69%	5.57%	256.81%	35.31%
x_2/q_2	102.62%	9.52%	327.02%	32.44%	132.94%	8.06%	402.45%	30.73%
p	7.74	117.87	3.03	115.12	5.01	117.11	0.66	112.76
cQ^c	6.95	81.26	12.19	87.64	4.98	80.43	9.82	85.27
L	10.18%	31.06%	0.00%	23.87%	0.58%	31.32%	0.00%	24.38%
$E\pi_1$	442.45		456.30		419.05		430.38	
$E\pi_2$	256.88		246.61		243.71		234.83	

Tabela 6.5: Efeito de uma variação em f

	$c_1 = 6$				$c_1 = 4$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	0.78		5.19		0.95		5.78	
x_2	0.71		3.11		0.81		2.89	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	0.95	13.74	1.99	14.78	1.20	16.70	2.96	18.45
q_2	0.64	9.50	0.90	9.75	0.61	8.96	0.65	8.99
x_1/q_1	81.83%	5.66%	260.76%	35.09%	79.22%	5.70%	231.10%	37.01%
x_2/q_2	111.02%	7.52%	346.45%	31.91%	131.90%	9.04%	423.12%	30.39%
p	6.22	121.30	2.34	117.42	5.55	114.03	0.20	108.67
cQ^c	5.98	87.12	10.82	91.97	5.19	73.30	10.29	78.41
L	3.92%	28.18%	0.00%	21.67%	6.61%	35.72%	0.00%	27.85%
$E\pi_1$	396.13		406.12		460.72		474.43	
$E\pi_2$	262.40		256.70		230.94		217.02	

Tabela 6.6: Efeito de uma variação em c_1

	$c_2 = 9$				$c_2 = 11$			
	Sem Regulação		Com Regulação		Sem Regulação		Com Regulação	
x_1	0.90		5.82		0.81		5.78	
x_2	0.82		2.91		0.71		2.89	
	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$	$f+\sigma$	$f-\sigma$
q_1	1.06	14.91	2.33	16.18	1.06	15.22	2.94	16.02
q_2	0.68	9.92	0.91	10.14	0.59	8.68	1.09	9.14
x_1/q_1	85.32%	6.07%	248.46%	35.81%	76.47%	5.34%	211.17%	38.77%
x_2/q_2	119.21%	8.23%	353.40%	31.73%	121.53%	8.20%	284.03%	33.97%
p	5.77	116.54	1.27	112.04	6.06	119.32	4.90	109.52
cQ^c	5.61	79.78	10.42	84.60	5.66	82.14	13.45	83.87
L	2.76%	31.54%	0.00%	24.50%	6.56%	31.16%	0.00%	24.47%
$E\pi_1$	416.25		426.41		435.80		449.58	
$E\pi_2$	264.90		255.97		232.75		223.18	

Tabela 6.7: Efeito de uma variação em c_2

6.3.5 O Poder de Mercado da Indústria

Segundo Borenstein e Bushnell (1999), o índice de Lerner é dado pelo "*mark-up* sobre o preço que resultaria na mesma quantidade (isto é, a quantidade de Cournot) em um mercado perfeitamente competitivo".

O custo marginal da indústria é dado pelas seguintes condições:

$$P = c_1 q_1$$
$$P = c_2 q_2$$

Defina a produção total da indústria (líquida da produção hidrelétrica) como $Q = q_1 + q_2$

Portanto, a função de oferta da indústria com firmas competitivas é dada por

$$P = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} Q = cQ$$

Na quantidade de Cournot: $P = cQ^c$.

O poder de mercado da indústria é dado por:

$$L\left[f_2\right] = \frac{P(Q^c) - cQ^c}{P(Q^c)}$$

sempre que os preços estiverem acima do custo marginal total.

6.3.6 Modelo de Despacho de Custo Mínimo com Expansão da Capacidade

As CPOs para uma solução interior para o problema (4-22) são dadas por:

$$c_t q_t^{T_1} = \beta E_t \left[c_{t+1} q_{t+1}^{T_1} \right] \tag{6-9}$$

$$D_t = S_t + f_t - S_{t+1} + q_t^{T_1} \tag{6-10}$$

Para calcular o valor ótimo de $E_t \left[q_{t+1}^{T_1} \right]$ utilizamos a abordagem recursiva, começando da data terminal em direção à data inicial:

Na data terminal $t+2$:

$$q_{t+2}^{T_1} = D_{t+2} - S_{t+2} - f_{t+2} - q_{t+2}^{T_2} \tag{6-11}$$

$$q_{t+2}^{T_1} = q_{t+2}^{T_2} \tag{6-12}$$

Nas datas anteriores:

$$c_{t+1} q_{t+1}^{T_1} = \beta E_{t+1} \left[c_{t+2} q_{t+2}^{T_1} \right] \tag{6-13}$$

$$D_{t+1} = S_{t+1} + f_{t+1} - S_{t+2} + q_{t+1}^{T_1} + q_{t+1}^{T_1} \tag{6-14}$$

$$q_{t+1}^{T_1} = q_{t+1}^{T_2} \tag{6-15}$$

Resolvendo para o estoque ótimo $S_{t+2} \left[f_{t+1} \right]$:

$$S_{t+2} \left[f_{t+1} \right] = \frac{\beta c_{t+2} E_t \left[D_{t+2} - f_{t+2} \right] + c_{t+1} \left(S_{t+1} - D_{t+1} + f_{t+1} \right)}{\left(c_{t+1} + \beta c_{t+2} \right)} \tag{6-16}$$

O estoque ótimo de água S_{t+1} é obtido ao substituir (6-11) e (6-13) em (6-9):

$$S_{t+1} = \frac{\beta^2 c_{t+1} c_{t+2} E \left[D_{t+1} - f_{t+1} + D_{t+2} - f_{t+2} \right] + 2c_t (c_{t+1} + \beta c_{t+2}) \left(S_t + f_t - D_t \right)}{2c_t (c_{t+1} + \beta c_{t+2}) + \beta^2 c_{t+1} c_{t+2}} \tag{6-17}$$

No caso em que $N = 1$ em t e $t+1$ e $N = 2$ em $t+2$, o estoque ótimo de água S_{t+1}é dado pelas mesmas condições (6-9) e (6-11), mas (6-13) é modificado por:

$$c_{t+1}q_{t+1}^{T_1} = \beta E_{t+1}\left[c_{t+2}q_{t+2}^{T_1}\right]$$
$$D_{t+1} = S_{t+1} + f_{t+1} - S_{t+2} + q_{t+1}^{T_1}$$

Portanto, o estoque ótimo de água correspondente $S_{t+2}^{*}\left[f_{t+1}\right]$ é dado por:

$$S_{t+2}^{*}\left[f_{t+1}\right] = \frac{\beta c_{t+2}E_t\left[D_{t+2} - f_{t+2}\right] + c_{t+1}\left(S_{t+1}^{*} - D_{t+1} + f_{t+1}\right)}{\left(c_{t+1} + \beta c_{t+2}\right)} \quad (6\text{-}18)$$

e o estoque ótimo S_{t+1}^{*} é igual a:

$$S_{t+1}^{*} = \frac{\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}E\left[D_{t+1} - f_{t+1} + D_{t+2} - f_{t+2}\right] + c_t(2c_{t+1} + \beta c_{t+2})\left(S_t + f_t - D_t\right)}{2c_t c_{t+1} + \beta c_{t+2}(c_t + \beta c_{t+1})} \quad (6\text{-}19)$$

Comparando S_{t+1}^{*} com S_{t+1}, pode-se ver que $S_{t+1}^{*} \geq S_{t+1}$, pois de outra forma $S_{t+1} > S_{t+1}^{*}$ implicaria:

$$\left(\beta^3 c_t c_{t+1}\left(c_{t+2}\right)^2\right)\left(E\left[D_{t+1} - f_{t+1} + D_{t+2} - f_{t+2}\right] + D_t - \left(S_t + f_t\right)\right) < 0 \quad (6\text{-}20)$$

que é incompatível com $q_t \geq 0$.

Despacho Ótimo

As equações (4-26),(4-27) e (4-28) são derivadas das seguintes CPOs:

$$\frac{c_t}{\beta c_{t+1}}(S_{t+1} - S_t + D_t) = \alpha \frac{\begin{pmatrix} D_{t+1} - (f+\sigma) \\ -S_{t+1} + S_{t+2}\left[f+\sigma\right] \end{pmatrix}}{(1+n_1)} + (1-\alpha)\frac{\begin{pmatrix} D_{t+1} - (f-\sigma) \\ -S_{t+1} + S_{t+2}\left[f-\sigma\right] \end{pmatrix}}{(1+n_1)}$$

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_{t+2}}\frac{\begin{pmatrix} D_{t+1} - (f+\sigma) \\ -S_{t+1} + S_{t+2}\left[f+\sigma\right] \end{pmatrix}}{(1+n_1)} = \alpha\frac{D_{t+2} - (f+\sigma) - S_{t+2}[f+\sigma]}{(1+n_1+h_2)} + (1-\alpha)\frac{D_{t+2} - (f-\sigma) - S_{t+2}[f+\sigma]}{(1+n_1+h_2)}$$

$$\frac{c_{t+1}}{\beta c_{t+2}}\frac{\begin{pmatrix} D_{t+1} - (f-\sigma) \\ -S_{t+1} + S_{t+2}\left[f-\sigma\right] \end{pmatrix}}{(1+n_1)} = \alpha\frac{D_{t+2} - (f+\sigma) - S_{t+2}[f-\sigma]}{(1+n_1+l_2)} + (1-\alpha)\frac{D_{t+2} - (f-\sigma) - S_{t+2}[f-\sigma]}{(1+n_1+l_2)}$$

Para cada estratégia é possível calcular o despacho correspondente:

1) $(0,0,0)$

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\left((S_t-D_t)\begin{pmatrix} c_t(\beta c_{t+2}+c_{t+1}) \\ +\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}\left(D_{t+1}+D_{t+2}-2f+2\sigma\left(1-2\alpha\right)\right)\end{pmatrix}\right)}{c_t(\beta c_{t+2}+c_{t+1})+\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-c_{t+1}(D_{t+1}-(f+\sigma)-S_{t+1})}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-c_{t+1}(D_{t+1}-(f-\sigma)-S_{t+1})}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}}
\end{aligned}$$

2) $(0,0,1)$

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\begin{pmatrix} (S_t-D_t)\begin{pmatrix} c_t\left(2c_{t+1}^2+3\beta c_{t+1}c_{t+2}+\beta^2 c_{t+2}^2\right) \\ +\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}(\beta c_{t+2}+c_{t+1}(1+\alpha))\left(D_{t+1}+D_{t+2}-2f+\sigma\left(1-2\alpha\right)\right)\end{pmatrix} \\ +\left(\beta c_{t+2}\left(1-2\alpha\right)+c_{t+1}\left(1-3\alpha\right)\right)\sigma\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}\end{pmatrix}}{c_t\left(2c_{t+1}^2+3\beta c_{t+1}c_{t+2}+\beta^2 c_{t+2}^2\right)+((1+\alpha)c_{t+1}+\beta c_{t+2})\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-c_{t+1}(D_{t+1}-(f+\sigma)-S_{t+1})}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-2c_{t+1}(D_{t+1}-(f-\sigma)-S_{t+1})}{2c_{t+1}+\beta c_{t+2}}
\end{aligned}$$

3) $(0,1,0)$

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\begin{pmatrix} (S_t-D_t)\begin{pmatrix} c_t\left(2c_{t+1}^2+3\beta c_{t+1}c_{t+2}+\beta^2 c_{t+2}^2\right) \\ +\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}(\beta c_{t+2}+c_{t+1}(2+\alpha))\left(D_{t+1}+D_{t+2}-2f+\sigma\left(1-2\alpha\right)\right)\end{pmatrix} \\ +\left(\beta c_{t+2}\left(1-2\alpha\right)+c_{t+1}\left(2-3\alpha\right)\right)\sigma\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}\end{pmatrix}}{c_t\left(2c_{t+1}^2+3\beta c_{t+1}c_{t+2}+\beta^2 c_{t+2}^2\right)+((1+\alpha)c_{t+1}+\beta c_{t+2})\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-2c_{t+1}(D_{t+1}-(f+\sigma)-S_{t+1})}{2c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-c_{t+1}(D_{t+1}-(f-\sigma)-S_{t+1})}{c_{t+1}+\beta c_{t+2}}
\end{aligned}$$

4) $(0,1,1)$

$$\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\begin{pmatrix} (S_t-D_t)\begin{pmatrix} c_t\left(4c_{t+1}^2+4\beta c_{t+1}c_{t+2}+\beta^2 c_{t+2}^2\right) \\ +\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}(\beta c_{t+2}+2c_{t+1})\left(D_{t+1}+D_{t+2}-2f+\sigma\left(1-2\alpha\right)\right)\end{pmatrix} \\ +\left(\beta c_{t+2}\left(1-2\alpha\right)+c_{t+1}2\left(1-2\alpha\right)\right)\sigma\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}\end{pmatrix}}{c_t\left(2c_{t+1}^2+4\beta c_{t+1}c_{t+2}+\beta^2 c_{t+2}^2\right)+(2c_{t+1}+\beta c_{t+2})\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-2c_{t+1}(D_{t+1}-(f+\sigma)-S_{t+1})}{2c_{t+1}+\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-2c_{t+1}(D_{t+1}-(f-\sigma)-S_{t+1})}{2c_{t+1}+\beta c_{t+2}}
\end{aligned}$$

5) $(1,0,0)$

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= \frac{\begin{pmatrix} +\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}(2\beta c_{t+2}+2c_{t+1})\left(E_t\left[D_{t+1}+D_{t+2}\right]-2f+\sigma\left(1-2\alpha\right)\right) \\ (S_t-D_t)c_t\left(4c_{t+1}^2+8\beta c_{t+1}c_{t+2}+4\beta^2c_{t+2}^2\right) \\ +\left(2\left(1-2\alpha\right)\beta c_{t+2}+2\left(1-2\alpha\right)c_{t+1}\right)\sigma\beta^2 c_{t+1}c_{t+2} \end{pmatrix}}{c_t\left(8\beta c_{t+1}c_{t+2}+4c_{t+1}^2+4\beta^2c_{t+2}^2\right)+(2c_{t+1}+2\beta c_{t+2})\beta^2 c_{t+1}c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f+\sigma\right] &= \frac{2\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-2c_{t+1}(D_{t+1}-(f+\sigma)-S_{t+1})}{2c_{t+1}+2\beta c_{t+2}} \\
S_{t+2}\left[f-\sigma\right] &= \frac{2\beta c_{t+2}(D_{t+2}-(f-(1-2\alpha)\sigma))-2c_{t+1}(D_{t+1}-(f-\sigma)-S_{t+1})}{2c_{t+1}+2\beta c_{t+2}}
\end{aligned}
$$