



**Hugo Leonardo Leite Lima**

**Estudo da dinâmica estocástica de  
redistribuição da riqueza usando uma equação  
de Fokker-Planck**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física, do Departamento de Física da PUC-Rio.

Orientadora : Prof<sup>a</sup>. Celia Beatriz Anteneodo de Porto  
Coorientador: Prof. Allan Rodrigues Vieira

Rio de Janeiro,  
setembro de 2020



**Hugo Leonardo Leite Lima**

**Estudo da dinâmica estocástica de  
redistribuição da riqueza usando uma equação  
de Fokker-Planck**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof<sup>ª</sup>. Celia Beatriz Anteneodo de Porto**

Orientadora  
Departamento de Física – PUC-Rio

**Prof. Allan Rodrigues Vieira**

Coorientador  
Departamento de Física – PUC-Rio

**Prof. Evaldo Mendonça Fleury Curado**

CBPF

**Prof. Sebastián Gonçalves**

UFRGS

**Prof. Lucianno Augusto Coddato Antunes e Defaveri**

Departamento de Física – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 25 de setembro de 2020

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Hugo Leonardo Leite Lima**

Graduou-se em Licenciatura em Física na Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ em 2013.

#### Ficha Catalográfica

Leite Lima, Hugo Leonardo

Estudo da dinâmica estocástica de redistribuição da riqueza usando uma equação de Fokker-Planck / Hugo Leonardo Leite Lima; orientador: Celia Beatriz Anteneodo de Porto; coorientador: Allan Rodrigues Vieira. – 2020.

75 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física, 2020.

Inclui bibliografia

1. Física – Dissertações. 2. Dinâmica estocástica. 3. distribuição de riqueza. 4. equação de Fokker-Planck. 5. modelo de agentes. I. Anteneodo, Celia. II. Rodrigues Vieira, Allan. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. IV. Título.

CDD: 530

Para Estela e Davi,  
presentes de Deus em minha vida.

## Agradecimentos

A Deus, pelo sopro de vida.

A minha querida esposa Estela, por estar ao meu lado compartilhando as alegrias e trazendo palavras de conforto na tristeza. Sem você tudo seria muito mais difícil. "Alegrai-vos com os que se alegram; e chorai com os que choram." (Romanos 12:15).

A minha orientadora, Celia Anteneodo, por tudo que aprendi, pela paciência e por me incentivar a superar as dificuldades, sempre acreditando em minha capacidade. Ao meu coorientador, Allan Vieira, por acompanhar de perto cada etapa desse desafio, com dicas e sugestões valiosas.

Aos colegas do Departamento de Física que conheci durante esse tempo. Não vou citar nomes para não cometer injustiças esquecendo alguém, mas muitos foram aqueles que me ajudaram, seja tirando dúvidas, seja dando conselhos ou até mesmo apenas ouvindo minhas lamentações. Fica aqui meu muito obrigado e desejo todo o sucesso do mundo a vocês.

Aos meus pais, por sempre me incentivarem a não desistir dos meus sonhos e a lutar até o fim.

Por fim, agradeço a PUC-Rio e a CAPES pela oportunidade e por toda a estrutura e apoio oferecidos para a conclusão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Leite Lima, Hugo Leonardo; Anteneodo, Celia; Rodrigues Vieira, Allan. **Estudo da dinâmica estocástica de redistribuição da riqueza usando uma equação de Fokker-Planck**. Rio de Janeiro, 2020. 75p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A dinâmica da distribuição da riqueza para o modelo conhecido em inglês como *Yard-Sale Model* (Modelo da Venda de Quintal) pode ser descrita através de uma equação de Fokker-Planck para a função densidade de probabilidade  $P(w, t)$  da riqueza  $w$  em um instante  $t$ . Neste trabalho foi investigado o efeito de um arrasto redistributivo não linear nessa dinâmica. Considera-se (I) uma taxaçoão do tipo linear por partes, onde apenas aqueles com riqueza acima de um determinado valor são taxados, e, (II) uma taxaçoão na forma de lei de potência, que inclui os tipos progressivo e regressivo. Em todos os casos, o total arrecadado é distribuído igualmente. Analisou-se como essas regras podem modificar a distribuição da riqueza numa população e, principalmente, o nível de desigualdade medido pelo índice de Gini.

## Palavras-chave

Dinâmica estocástica; distribuição de riqueza; equação de Fokker-Planck; modelo de agentes.

## Abstract

Leite Lima, Hugo Leonardo; Anteneodo, Celia (Advisor); Rodrigues Vieira, Allan (Co-Advisor). **Study of the stochastic dynamics of wealth redistribution using a Fokker-Planck equation.** Rio de Janeiro, 2020. 75p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The dynamics of wealth distribution for the so-called Yard-Sale Model can be described by a Fokker-Planck equation for the probability density function  $P(w, t)$  of wealth  $w$  at time  $t$ . In this work, the effect of nonlinear redistributive drifts was investigated. It was considered (I) a piecewise linear tax, where only those with wealth above a certain threshold are taxed, and, (II) a power-law tax that includes the progressive and regressive types. In all cases, the collected amount of wealth is redistributed equally. We analyze how these rules modify the distribution of wealth across the population and, mainly, the inequality level measured through the Gini index.

## Keywords

Stochastic dynamics; wealth distribution; Fokker-Planck equation; agent-based model.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Modelo de trocas</b>	<b>22</b>
2.1	Simulações	23
2.2	Equação de Fokker-Planck para o MVQ	26
2.3	Medindo a desigualdade	26
2.4	Evolução temporal	29
2.5	Equação de Fokker-Planck para o MVQ com taxaço linear	31
<b>3</b>	<b>Equação de Fokker-Planck para o MVQ com taxaço não linear</b>	<b>34</b>
3.1	Linear por partes	35
3.2	Lei de potência	36
3.3	Modulaço temporal	37
3.3.1	Esquema I (arrecadaço modulada)	37
3.3.2	Esquema II (redistribuiço modulada)	37
3.3.3	Estado estacionário	38
<b>4</b>	<b>Resultados para a EFP com taxaço não linear</b>	<b>39</b>
4.1	Taxaço linear por partes	39
4.2	Taxaço por lei de potência	42
4.3	Esquema II - redistribuiço modulada	46
<b>5</b>	<b>Sobre as estratégias de integraço numérica da EFP</b>	<b>50</b>
5.1	Evolução temporal	50
5.2	Estado estacionário	54
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>57</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>60</b>
<b>A</b>	<b>Derivaço da equação de Fokker-Planck a partir do MVQ</b>	<b>64</b>
<b>B</b>	<b>Gráficos complementares</b>	<b>67</b>
B.1	MVQ sem taxaço	67
B.2	MVQ com taxaço linear	70
B.3	MVQ com taxaço não linear	72
B.4	Comparaço entre os esquemas I e II	75

## Lista de figuras

- Figura 1.1 **Exemplos de distribuições de riqueza.** Em (a) temos a distribuição  $P(x)$  da riqueza normalizada dos 400 mais ricos nos Estados Unidos no período de 1988 a 2003 (Extraído da Ref. [5]). Em (b) observa-se a riqueza líquida em dólares dos mais ricos nos Estados Unidos em outubro de 2003 (Extraído da Ref. [6]). 17
- Figura 1.2 **Distribuição da riqueza no mundo.** Extraído da Ref. [9]. 18
- Figura 1.3 **Quantidade de bilionários com riqueza equivalente à metade mais pobre da população mundial ao longo do tempo.** Fonte: Oxfam, 2019. 19
- Figura 2.1 **Ilustração do modelo de trocas MVQ.** Extraído de [11]. 22
- Figura 2.2 **Algoritmo utilizado nas simulações do MVQ sem taxação.** 23
- Figura 2.3 **Simulação do MVQ usando a regra do mais pobre** com  $N = 10^4$  agentes e  $\varepsilon = 0,5$ . Em cada figura temos a distribuição de riqueza no instante inicial  $t = 0$  (azul), bem como a distribuição após  $t$  passos de Monte Carlo (a cada unidade de tempo, ocorrem  $N$  negociações). Em cada gráfico inserido, é mostrada uma ampliação para o intervalo de riqueza dos mais ricos. 24
- Figura 2.4 **Simulação do MVQ usando a regra do mais pobre** com  $N = 10^4$  agentes para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Em cada figura temos a distribuição de riqueza no instante inicial  $t = 0$  (azul), bem como a distribuição no tempo  $t = 10$  passos de Monte Carlo. Em cada gráfico inserido, é mostrada uma ampliação para o intervalo de riqueza dos mais ricos. 25
- Figura 2.5 **Curva de Lorenz,  $Y(w)$  vs  $X(w)$ , separando as áreas  $a$  e  $b$ , utilizadas no cálculo do índice Gini.** A linha diagonal verde indica total igualdade. Quanto maior a área em amarelo ( $a$ ), maior a desigualdade, que no caso extremo (condensação dos mais pobres com riqueza próxima de zero e concentração da riqueza numa fração ínfima dos mais ricos) é representada pela curva em vermelho. 27
- Figura 2.6 **Exemplos de distribuições (a) com suas correspondentes curvas de Lorenz (b).** A curva em azul é uma FDP de Pareto típica com índice de Pareto igual a 2 (veja a Ref. [28]). Em verde temos uma distribuição normal com média 3 e variância 1, enquanto que a curva laranja é uma distribuição quase-igualitária, na qual todos os agentes possuem a mesma riqueza  $w = 1$ . 27

- Figura 2.7 **Evolução temporal da FDP da riqueza  $P(w, t)$  da Eq. (2-1) para diferentes tipos de distribuições iniciais  $P_0(w)$ .** Em (a) todos os agentes possuem inicialmente a mesma riqueza  $w = 10$ , Enquanto que em (b) a distribuição inicial é uniforme. Após  $t = 0$  (linha tracejada vermelha), a evolução é representada para tempos crescentes da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta t = 3/80$  para  $3/80 \leq t \leq 27/80$  e a cada  $\Delta t = 3/8$  para  $3/8 \leq t \leq 3$ . Os intervalos de tempo entre as curvas são os mesmos em ambos os painéis. Nos gráficos inseridos são representadas as mesmas curvas em escala log-log. 29
- Figura 2.8 **Evolução temporal do índice de Gini para os casos da Fig. 2.7.** As linhas são somente um guia para a visão. 30
- Figura 2.9 **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  no caso de taxaço linear,** integrando a Eq. (2-15), desde uma distribuição inicial  $P_0(w)$  aproximadamente igualitária (linha mais clara). As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (2-15), conforme detalhado no Capítulo 5. No gráfico inserido, em escala logarítmica, a linha mais clara corresponde ao instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura a  $t = 5,0$ . Os círculos ocos referem-se à solução estacionária. 32
- Figura 2.10 **Evolução temporal do índice de Gini (a) e Gini estacionário em função de  $\chi$  (b) para o MVQ com taxaço linear.** 33
- Figura 3.1 **Percentual tributado (alíquota) em função da renda no Brasil.** Além da faixa livre de impostos, existem quatro faixas de taxaço, que a partir das regras estabelecidas levam a uma alíquota efetiva descrita pela curva preta pontilhada. Para rendas  $\gg$  R\$ 20.000,00, a alíquota efetiva tende à taxa máxima de 27,5%. Dados: Receita Federal do Brasil em 2020. 35
- Figura 3.2 (a) **Função de arrecadação  $g(w)$  linear por partes,** para diferentes valores do limite de isenção  $w_0$  indicados na figura. O caso linear é recuperado quando  $w_0 = 0$  (curva preta). (b) **Alíquota  $g(w)/w$  para os mesmos casos.** 36
- Figura 3.3 (a) **Função de arrecadação  $g(w) = w^\alpha$ .** (b) **Alíquota  $g(w)/w = w^{\alpha-1}$  para diferentes valores de  $\alpha$ .** As linhas pretas correspondem ao caso linear ( $\alpha = 1$ ). 36

- Figura 4.1 **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$** , da integração numérica da Eq. (3-1). As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1), conforme detalhado no Capítulo 5. No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à solução estacionária da Eq. (3-1). 40
- Figura 4.2 **Distribuições estacionárias da Eq. (3-1) no caso  $g(w)$  linear por partes para diferentes valores de  $\chi$** . Partindo de  $w_0 = 0$ , o limite mínimo de tributação cresce a cada  $\Delta w_0 = 0,1$  da curva mais clara para a mais escura, onde  $w_0 \approx 2,5$  (a),  $w_0 \approx 1,7$  (b),  $w_0 \approx 1,4$  (c) e  $w_0 \approx 1,1$  (d). 41
- Figura 4.3 (a) **Índice de Gini Estacionário** para diferentes  $\chi$  em função de  $w_0$ . (b) **Moda de  $P(w, t)$**  (símbolos cheios) vs.  $w_0$ . O segundo máximo, caso exista, é mostrado em símbolos ocios. As linhas são apenas um guia para a visão. 42
- Figura 4.4 **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $\alpha$** . As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1). No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à distribuição estacionária da Eq. (3-1) obtida diretamente. 43
- Figura 4.5 **Distribuições estacionárias da Eq. (3-1) com arrecadação  $g(w) = w^\alpha$  para diferentes valores de  $\chi$** . Os valores de  $\alpha$  crescem da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta \alpha = 0,1$  para  $0,5 \leq \alpha \leq 0,9$  e  $\Delta \alpha = 1$  para  $1 \leq \alpha \leq 10$ . 44
- Figura 4.6 (a) **Índice de Gini Estacionário** para diferentes  $\chi$  em função de  $\alpha$ . (b) **Moda de  $P(w, t)$**  (símbolos cheios) vs.  $\alpha$ . O segundo máximo, quando existe, é mostrado em símbolos ocios. As linhas são apenas um guia para a visão. 45
- Figura 4.7 **Esquema II: evolução temporal para o caso linear por partes**. (a) FDP da riqueza,  $P(w, t)$  vs.  $w$ , com  $\beta$  variável, para os mesmos tempos usados na Fig. 4.1. (b) Índice de Gini vs. tempo para os esquemas I (preto) e II (verde-claro), com parâmetros que verificam as Eqs. (3-13) levando ao mesmo estado estacionário. 47

- Figura 4.8 **Esquema II: FDP estacionária para riqueza no caso de arrasto linear por partes**, para  $\chi$  fixo, de acordo com a legenda, e diferentes valores de  $w_0$  variando (da linha mais clara para a mais escura) a cada  $\Delta w_0 = 0,1$  de 0,0 até 1,0 em (a) e de 0,0 até 0,9 em (b). gráfico inserido: mesmos dados em escala log-log a fim de exibir os extremos. 48
- Figura 4.9 **Índice de Gini estacionário para o esquema II** em função de  $w_0$  (a) e  $\alpha$  (b). As linhas funcionam como guia para a visão. 49
- Figura 5.1 (a) **Evolução temporal de  $\gamma$** , a partir da integração numérica da Eq. (3-1), para valores de  $\chi$  e  $w_0$  conforme legenda. O valor de  $\gamma$  para tempos longos coincide com o obtido pela integração direta da Eq. (3-1) no estado estacionário. (b) **Evolução do índice de Gini  $G(t)$** . As linhas tracejadas representam os valores estacionários. O esforço computacional aumenta conforme se aproxima do limite sem arrasto  $\chi = 0$ . 53
- Figura 5.2 **Valor estacionário de  $\gamma$**  em função de  $w_0$  (a) e  $\alpha$  (b), para diferentes valores de  $\chi$  indicados na legenda. Em (a), as linhas verticais tracejadas indicam a assíntota. Em (b), a região próxima da origem aparece de forma ampliada no gráfico inserido. As linhas cheias servem apenas como guia. 55
- Figura 6.1 **Curvas de Lorenz para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$** . A curva tracejada azul corresponde à distribuição inicial ( $G \approx 0.59$ ), enquanto a igualdade total é indicada pela linha pontilhada preta ( $G = 0$ ). Todos os casos se referem ao estado estacionário. 58
- Figura B.1 **Evolução temporal da FDP da riqueza  $P(w, t)$  da Eq. (2-1) para diferentes tipos de distribuições iniciais  $P_0(w)$** . Após  $t = 0$ , a evolução ocorre da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta t = 3/80$  para  $3/80 \leq t \leq 27/80$  e a cada  $\Delta t = 3/8$  para  $3/8 \leq t \leq 3$ . Em todos os casos  $P_0(w) = 0$  exceto na região  $w_c - \frac{L}{2} < w < w_c + \frac{L}{2}$ , onde  $w_c = 10$  e  $L = 0,5$  (a), 1 (b), 2 (c), 4 (d), 8 (e) e 15 (f). Nos gráficos inseridos são representadas as mesmas curvas em escala log-log. 68
- Figura B.2 **Efeito da mudança do parâmetro  $L$  das FDPs iniciais  $P_0(w)$  para o MVQ sem taxaço**. As figuras mostram a evolução do valor máximo de  $P(w, t)$  (a) e da moda (b) para diferentes valores de  $L$ . Assim como nas Figs. B.1 e 2.7,  $L$  representa o tamanho da região de uniformidade da distribuição inicial  $P_0(w)$ . As PDFs para  $L = 0,1$  e  $L = 19$  constam nas Figs. 2.7a e 2.7b, respectivamente. As Figs. (a) e (b) apresentam os mesmos instantes de tempo das Figs. B.1 e 2.7, exceto  $t = 0$ , onde não há um único ponto de máximo. 69

- Figura B.3 **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  com taxaço linear**, integrando numericamente a Eq. (2-15) partindo de uma FDP inicial  $P_0(w)$  aproximadamente igualitária. As distribuiçoes são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a soluço estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (2-15). No gráfico inserido, em escala logarítmica, a linha mais clara corresponde ao instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura a  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à distribuiço estacionária da Eq. (2-15) obtida diretamente. 70
- Figura B.4 **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$** , integrando a Eq. (3-1). As distribuiçoes são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a soluço estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1). No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à distribuiço estacionária da Eq. (3-1). 72
- Figura B.5 **Distribuiçoes estacionárias para a Eq. (3-1) no caso  $g(w)$  linear por partes para diferentes valores de  $\chi$** . Partindo de  $w_0 = 0$ , o limite mínimo de tributaço cresce a cada  $\Delta w_0 = 0,1$  da curva mais clara para a mais escura, onde  $w_0 = 3,6$  (a),  $2,0$  (b),  $1,8$  (c) e  $1,2$  (d). 73
- Figura B.6 **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $\alpha$** , integrando a Eq. (3-1). As distribuiçoes são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a soluço estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1). No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à distribuiço estacionária da Eq. (3-1) obtida diretamente. 74
- Figura B.7 **Distribuiçoes estacionárias da Eq 3-1 com  $g(w) = w^\alpha$  para diferentes valores de  $\chi$** . Os valores de  $\alpha$  crescem da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta\alpha = 0,1$  para  $0,5 \leq \alpha \leq 0,9$  e  $\Delta\alpha = 1$  para  $1 \leq \alpha \leq 10$ . 74
- Figura B.8 **Comparaço entre os esquemas I e II**, para valores dos parâmetros estacionários, indicados na legenda, seguindo as relaçoes de correspondência na Eq. (3-13). 75

## Lista de tabelas

Tabela 4.1	<b>Percentual da riqueza total por classe econômica para o estado estacionário do caso linear por partes, de acordo com os parâmetros <math>\chi</math> e <math>w_0</math>.</b>	39
Tabela 4.2	<b>Percentual da riqueza total por classe econômica para o estado estacionário da EFP com taxaço tipo lei de potência, de acordo com os parâmetros <math>\chi</math> e <math>\alpha</math>.</b>	44

## Lista de Abreviaturas

MTA – Modelo de Troca de Ativos

EFP – Equação de Fokker-Planck

MVQ – Modelo de Venda de Quintal, do inglês *Yard-Sale Model*

FDP – Função Densidade de Probabilidade

PTCE – Progressivo no Tempo e Centrado no Espaço, do inglês *Forward Time Centered Space* (FTCS)

NR – Newton-Raphson

*Above all things, good policy is to be used,  
that the treasure and moneys in a state be  
not gathered into few hands; for, otherwise,  
a state may have a great stock, and yet starve.  
And money is like muck, not good except it be  
spread.*

**Francis Bacon**, *Essays*.

# 1 Introdução

Segundo Atkinson [1], a riqueza de um indivíduo pode ser definida como a soma de todos os ativos reais (imóveis, terras, bens de consumo duráveis como automóveis, mobiliário, além de joias e obras de arte, mas o semiduráveis como roupas também poderiam ser incluídos) e financeiros (dinheiro, depósitos bancário, ações de empresas, títulos de dívidas, cotas de fundos de pensão, etc.), menos as dívidas.

No início do século XX, o engenheiro, economista e sociólogo Vilfredo Pareto [2] estudou dados de renda e de riqueza. Ele observou que a posse de terras na Itália seguia a proporção 80/20 (20% da população possuindo 80% das terras), resultado posteriormente conhecido como princípio de Pareto. Esta observação é consistente com uma distribuição de riqueza decaindo como uma lei de potência, observada em diversos casos reais para a distribuição dos mais ricos [3, 4, 5, 6], como ilustrado na Fig. 1.1 para dados dos Estados Unidos.

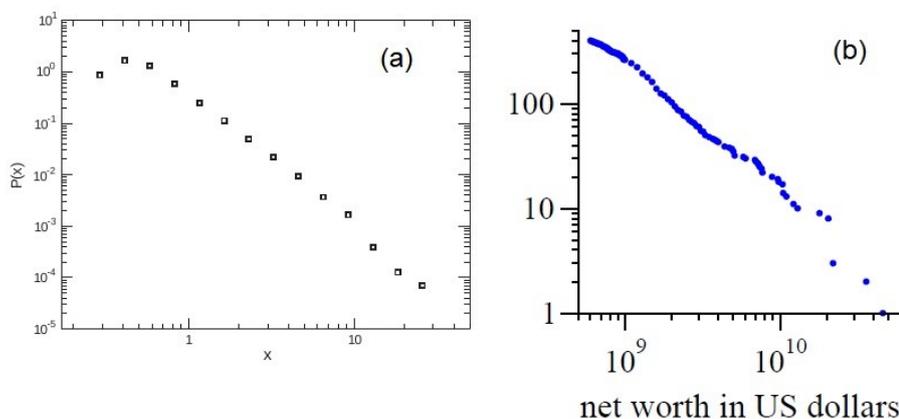


Figura 1.1: **Exemplos de distribuições de riqueza.** Em (a) temos a distribuição  $P(x)$  da riqueza normalizada dos 400 mais ricos nos Estados Unidos no período de 1988 a 2003 (Extraído da Ref. [5]). Em (b) observa-se a riqueza líquida em dólares dos mais ricos nos Estados Unidos em outubro de 2003 (Extraído da Ref. [6]).

Uma das contribuições desses estudos é quantificar a desigualdade. Apesar do crescimento econômico e da redução da pobreza extrema nas últimas décadas [7], a desigualdade de riqueza ainda se encontra em níveis elevados

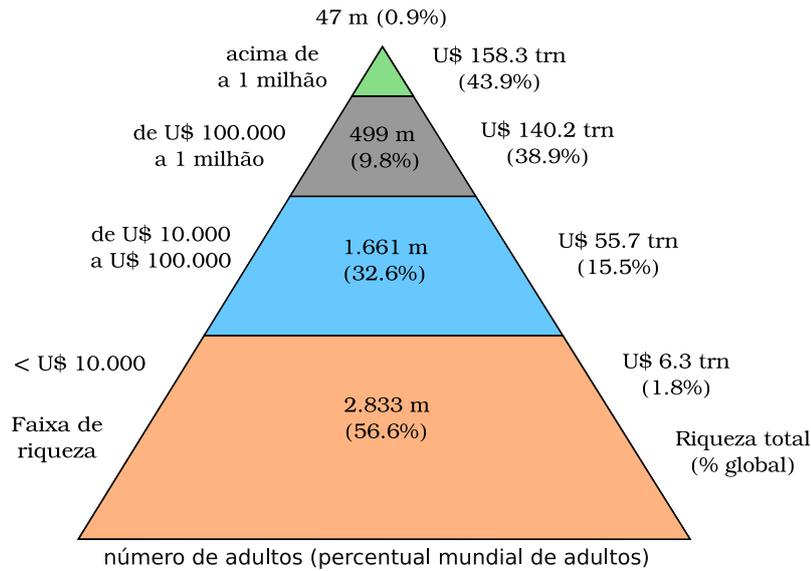


Figura 1.2: **Distribuição da riqueza no mundo.** Extraído da Ref. [9].

no mundo [8]. Segundo o banco de investimentos Credit Suisse [9], a metade mais pobre da população soma menos de 1% da riqueza mundial, enquanto que para os 10% mais ricos esse montante chega a 82% do total, sendo que somente o percentil mais alto possui 44% dos ativos (veja Fig. 1.2). Além disso, dentro da parcela mais rica, há também um nítido aumento de concentração da riqueza ao longo do tempo. Como pode ser visto na Fig. 1.3, em 2009 a riqueza combinada dos 380 mais ricos era equivalente ao total da riqueza dos 50% mais pobres, já em 2018 temos apenas 26 bilionários com riqueza equivalente à metade mais pobre da população. Com efeito, os mecanismos de enriquecimento podem levar a uma retroalimentação positiva, com acúmulo contínuo de ativos, acentuando a desigualdade de riqueza, como observado na maioria países ao longo do tempo [10, 11, 12]. As causas dessa desigualdade, suas consequências, bem como as possíveis soluções, são temas de debate em diversas áreas do conhecimento. Portanto, os efeitos de processos regulatórios capazes de neutralizar ou mitigar essas tendências merecem ser estudados.

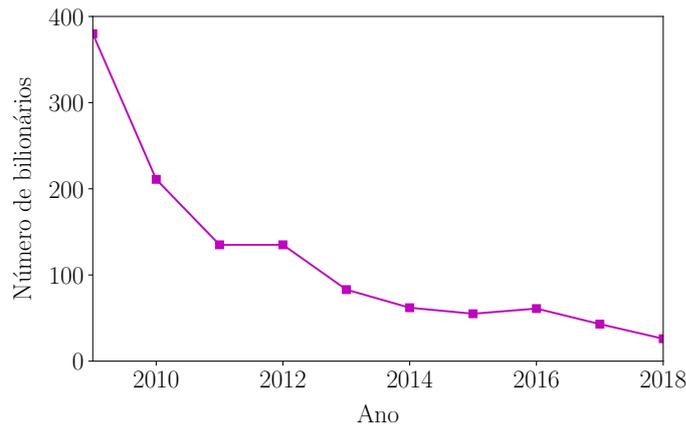


Figura 1.3: **Quantidade de bilionários com riqueza equivalente à metade mais pobre da população mundial ao longo do tempo.** Fonte: Oxfam, 2019.

As ferramentas da mecânica estatística para lidar com processos fora do equilíbrio podem ser úteis para a compreensão da dinâmica da riqueza. Diferentes abordagens podem ser usadas, como os modelos de agentes ou teorias probabilísticas.

Os modelos estocásticos baseados em agentes são conhecidos, neste contexto como Modelos de Troca de Ativos (MTAs) [13, 14, 15], que foram inicialmente modelados matematicamente dentro de uma descrição de campo médio [16]. A cada passo de tempo, dois agentes são escolhidos aleatoriamente, e da mesma forma, determina-se aquele que “vence” a negociação, sendo consideradas diversas regras para definir a quantidade de ativos transferida em cada negociação de pares [17, 18, 19, 20]. A distribuição da riqueza entre os agentes pode ser observada em determinados instantes de tempo. Estes modelos tiveram sucesso em mostrar o surgimento endógeno de alguns fatos estilizados das distribuições reais de riqueza, como a concentração da riqueza nas mãos de poucos e a condensação de agentes numa camada de pessoas muito pobres [21, 22]. Um trabalho publicado no ano 2000 intitulado “Statistical mechanics of money” [23] mostrou, através de um modelo de agentes, fortes evidências de que a distribuição desigual de riqueza surge naturalmente, a partir da própria dinâmica de negociações entre os agentes, mesmo quando esses são considerados idênticos. Resultados semelhantes foram obtidos por meio de abordagens diferentes [21, 24, 25].

Um MTA proposto por Chakraborti em 2002 [26] passou naquele mesmo ano a ser conhecido como *Yard-Sale Model*, modelo de venda de quintal (MVQ), após a expressão ser usada por Hayes [27]. Os resultados de ambos os trabalhos revelaram que, no limite de tempo longo, toda a riqueza se concentra em poder de um único agente, tendência já observada no primeiro MTA [16], embora as

regras de negociação fossem diferentes. Apesar da tendência à concentração, observou-se a possibilidade de que o sistema alcançasse um estado estacionário diferente do de concentração absoluta, inserindo-se algum tipo de regulação externa com redistribuição [27].

Para o MVQ, no limite de pequenas transações, Bruce Boghosian derivou uma equação de Fokker-Planck (EFP) para a evolução temporal da função de densidade de probabilidade (FDP) da riqueza,  $P(w, t)$  [28, 29, 30, 31], apresentada resumidamente no Apêndice A. Com a inclusão de um termo de arrasto na EFP, representando mecanismos redistributivos lineares, a distribuição de riqueza pode atingir um estado estacionário, evitando a condensação. Além disso, uma variante do modelo original [22] foi capaz de reproduzir dados empíricos com excelente precisão. A EFP tornou mais simples a descrição matemática tanto do ponto analítico quanto do ponto de vista numérico, possibilitando investigar com mais clareza aspectos importantes como a forma de regulação, assunto aqui tratado.

A contribuição do presente trabalho reside em considerar mecanismos redistributivos não lineares, que podem ser regressivos, progressivos ou isentar a população mais pobre. O objetivo é investigar como a inserção da regulação não linear na EFP pode afetar a redistribuição de riqueza e especialmente como pode contribuir para reduzir o nível de desigualdade. Além da não linearidade, o modelo aqui apresentado inclui seja a modulação da arrecadação em função do tempo, mantendo-se a redistribuição fixa (Esquema I), seja modulação da redistribuição mantendo a arrecadação fixa (Esquema II).

O primeiro foco do Capítulo 2 consiste em discutir os principais conceitos a serem aqui utilizados, dando maior ênfase ao MVQ, pois é nele que se sustenta o modelo matemático adotado neste trabalho. As curvas de Lorenz e o índice de Gini, importantes para a análise da desigualdade, também são introduzidos nesse capítulo. Também é mostrado o desenvolvimento de testes preliminares, reproduzindo como controle alguns resultados do modelo de Boghosian [30] (utilizando diferentes valores dos parâmetros), primeiramente suprimindo a tributação, e em um segundo momento, utilizando taxaço linear.

A proposta deste trabalho é introduzida no Capítulo 3. Nele são descritas as funções de arrecadação não lineares estudadas, bem como as EFPs resultantes, e o papel dos parâmetros envolvidos.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados principais do trabalho. São analisados os resultados relativos à evolução temporal da distribuição de riqueza em diversos casos. Também é analisado o estado estacionário, assim como o índice de Gini para todas as formas de redistribuição não linear propostas, comparando-se o impacto das diversas formas de taxaço sobre

a distribuição da riqueza.

As EFPs aqui estudadas possuem algumas peculiaridades, como o caráter integro-diferencial e a dependência temporal de alguns coeficientes, características que tornam a análise e a integração numérica um pouco trabalhosas, requerendo adaptações dos métodos usuais. Assim, o Capítulo 5 tem por finalidade descrever os detalhes e aprimoramentos dos métodos utilizados, tanto no Capítulo 2 quanto no Capítulo 4, sendo estas adaptações outra contribuição do trabalho.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras.

## 2

### Modelo de trocas

O modelo de trocas conhecido em inglês como *yard-sale model*, que significa “modelo de venda de quintal” (MVQ), consiste em uma forma simplificada de descrever a dinâmica de transações em um grupo de indivíduos. O nome do modelo remete a um tipo de comércio onde pessoas em uma vizinhança colocam à venda itens em frente às suas casas. Isto ocorre seja no quintal ou na garagem, pelo que este tipo de troca é também conhecida como “venda de garagem”. Ao final do dia é feito um inventário, a partir do qual quantifica-se a riqueza de cada agente. A soma das riquezas de todos os indivíduos permanece a mesma.

Há uma premissa importante no modelo, quanto à precificação dos produtos. Assume-se que os itens possuem um valor teórico, o qual nenhum dos agentes conhece exatamente. Desse modo em toda negociação, devido a um “erro de avaliação” [11, 28], um dos agentes é favorecido aumentando assim sua riqueza, enquanto o outro tem seu patrimônio reduzido em igual valor (Fig. 2.1). Na prática isso ocorre, por exemplo, quando o comprador paga um preço abaixo (ou acima) do valor teórico do item.

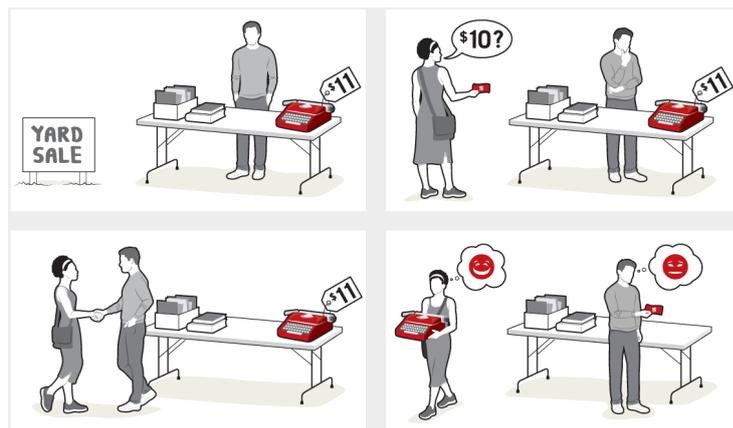


Figura 2.1: Ilustração do modelo de trocas MVQ. Extraído de [11].

Quanto às regras do modelo, inicialmente, considera-se que todos os agentes possuem o mesmo valor de riqueza. A partir de então, a cada rodada, escolhem-se aleatoriamente dois agentes, cada um com 50% de chances de ser o vencedor da negociação. O lucro (ou prejuízo) é definido a partir da chamada

*regra do mais pobre*, que limita esse valor a uma fração  $\varepsilon$  da riqueza do mais pobre dos dois agentes.

## 2.1 Simulações

A abordagem deste trabalho é baseada no estudo de EFPs para a distribuição da riqueza, entretanto, somente para ilustrar a dinâmica do MVQ, foram feitas algumas simulações de agentes, conforme o algoritmo esquematizado na Fig. 2.2.

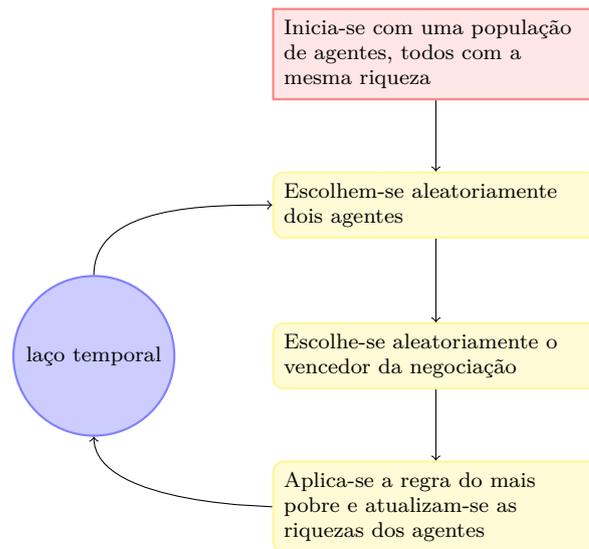


Figura 2.2: Algoritmo utilizado nas simulações do MVQ sem taxaçao.

Inicialmente, todos os  $N$  agentes recebem a mesma riqueza  $w = 1$  e, após um certo número  $t$  de unidades de tempo de Monte Carlo (com  $N$  negociações correspondendo a um passo de Monte Carlo), verifica-se em maior ou menor grau, uma assimetria positiva da distribuição de riqueza, indicando dois efeitos: (i) condensação da população na faixa dos mais pobres e (ii) concentração da riqueza em poucos agentes (oligarquia). Esses fenômenos se manifestam e acentuam, conforme  $t$  aumenta, como mostrado, a título de ilustração, na Fig. 2.3.

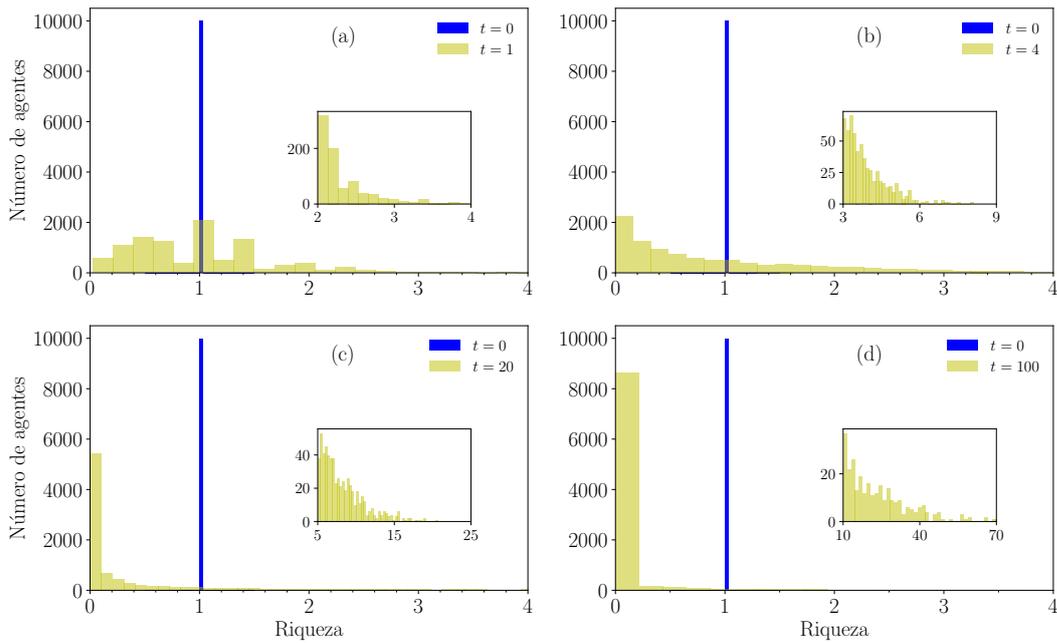


Figura 2.3: **Simulação do MVQ usando a regra do mais pobre** com  $N = 10^4$  agentes e  $\varepsilon = 0,5$ . Em cada figura temos a distribuição de riqueza no instante inicial  $t = 0$  (azul), bem como a distribuição após  $t$  passos de Monte Carlo (a cada unidade de tempo, ocorrem  $N$  negociações). Em cada gráfico inserido, é mostrada uma ampliação para o intervalo de riqueza dos mais ricos.

Note que (ver Fig. 2.4)  $\varepsilon$  altera a escala de tempo. Entretanto, diminuir  $\varepsilon$  apresenta um custo computacional grande, requerendo tempos maiores. Nesse sentido, a descrição matemática do MVQ através de uma EFP, como veremos em seguida, pode ser muito útil frente às simulações numéricas, e será a metodologia usada neste trabalho.

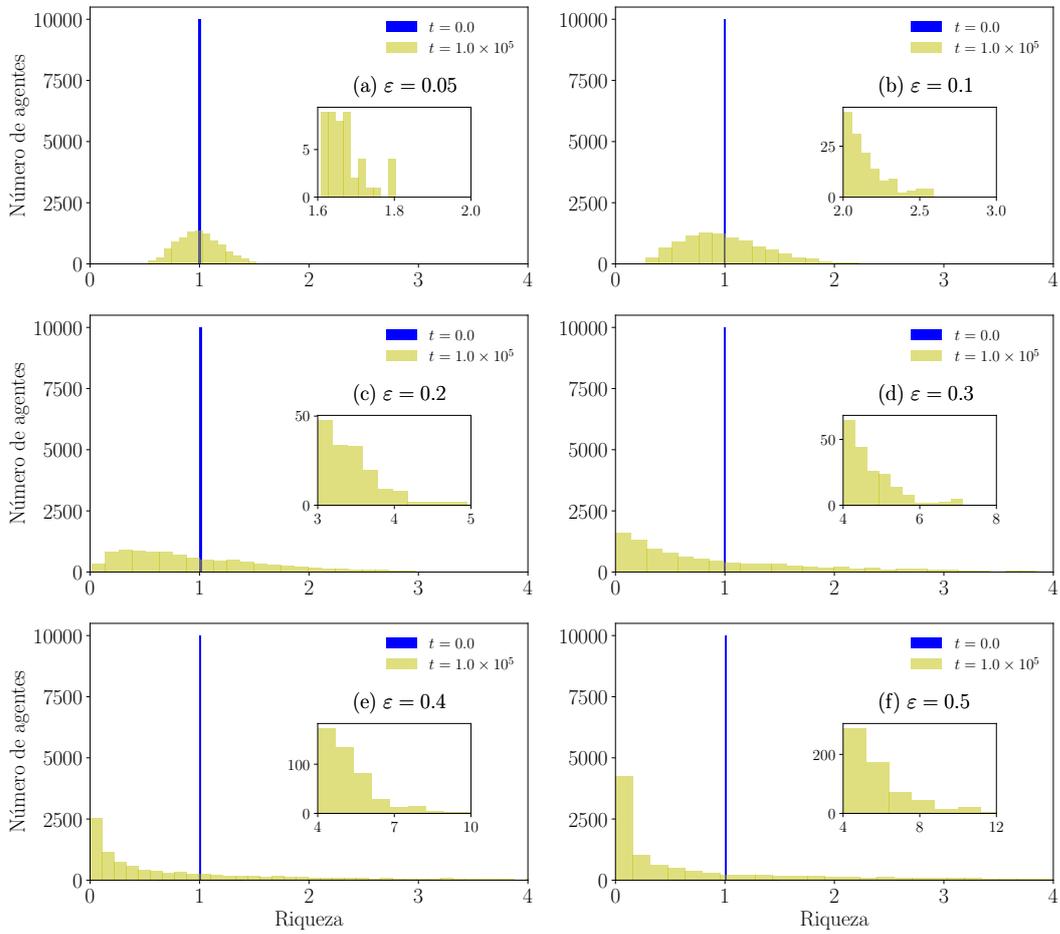


Figura 2.4: **Simulação do MVQ usando a regra do mais pobre** com  $N = 10^4$  agentes para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Em cada figura temos a distribuição de riqueza no instante inicial  $t = 0$  (azul), bem como a distribuição no tempo  $t = 10$  passos de Monte Carlo. Em cada gráfico inserido, é mostrada uma ampliação para o intervalo de riqueza dos mais ricos.

## 2.2

### Equação de Fokker-Planck para o MVQ

Conforme mostrado por Boghosian [28], considerando o limite de pequenas transações ( $\varepsilon \ll 1$ )<sup>1</sup>, o MVQ pode ser descrito mediante uma equação de Fokker-Planck para a função densidade de probabilidade (FDP)  $P(w, t)$  da seguinte forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} [(w^2 A + B) P], \quad (2-1)$$

com  $A$  e  $B$  funcionais definidos como:

$$A \equiv A(w, t) = \int_w^\infty dx P(x, t), \quad (2-2)$$

$$B \equiv B(w, t) = \int_0^w dx x^2 P(x, t). \quad (2-3)$$

Dado que  $P(w, t)dw$  é a probabilidade de encontrar um agente com riqueza entre  $w$  e  $w + dw$  num instante  $t$ , vale a condição de normalização

$$\int_0^\infty P(w, t)dw = 1. \quad (2-4)$$

A densidade de agentes pode ser obtida como  $NP(w, t)$ , onde  $N$  é o total de agentes que assim como a riqueza total  $W$ , são grandezas que se conservam no modelo.

Já a riqueza média é dada pelo primeiro momento de  $P(w, t)$ :

$$\bar{w} = \frac{W}{N} = \int_0^\infty wP(w, t)dw. \quad (2-5)$$

## 2.3

### Medindo a desigualdade

Conhecendo  $P(w, t)$ , é possível determinar valores acumulados de agentes  $X(w, t)$  e de riqueza  $Y(w, t)$ , dados por

$$X(w, t) = \int_0^w P(w, t)dw, \quad (2-6)$$

$$Y(w, t) = \frac{1}{\bar{w}} \int_0^w wP(w, t)dw. \quad (2-7)$$

O gráfico de  $Y(w, t)$  vs  $X(w, t)$  determina o que é chamado curva

<sup>1</sup>Uma derivação da EFP para o MVQ, extraída de [29], com alguns ajustes, consta no Apêndice A.

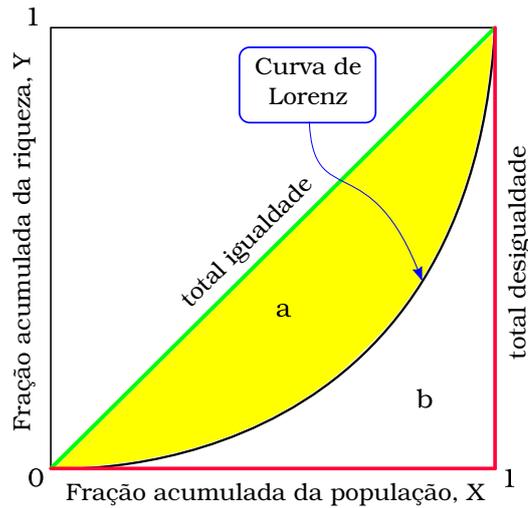


Figura 2.5: **Curva de Lorenz,  $Y(w)$  vs  $X(w)$ , separando as áreas  $a$  e  $b$ , utilizadas no cálculo do índice Gini.** A linha diagonal verde indica total igualdade. Quanto maior a área em amarelo ( $a$ ), maior a desigualdade, que no caso extremo (condensação dos mais pobres com riqueza próxima de zero e concentração da riqueza numa fração ínfima dos mais ricos) é representada pela curva em vermelho.

de Lorenz (Fig. 2.5), representando a distribuição acumulada da riqueza. A igualdade total corresponde a uma linha reta ligando os pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . O caso de desigualdade total é dado pela linha vermelha, correspondendo à condensação dos mais pobres com riqueza próxima de zero e concentração da riqueza numa fração muito pequena dos mais ricos. Como ilustração, a Fig. 2.6b mostra as curvas de Lorenz correspondentes às distribuições da Fig. 2.6a.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1812662/CA

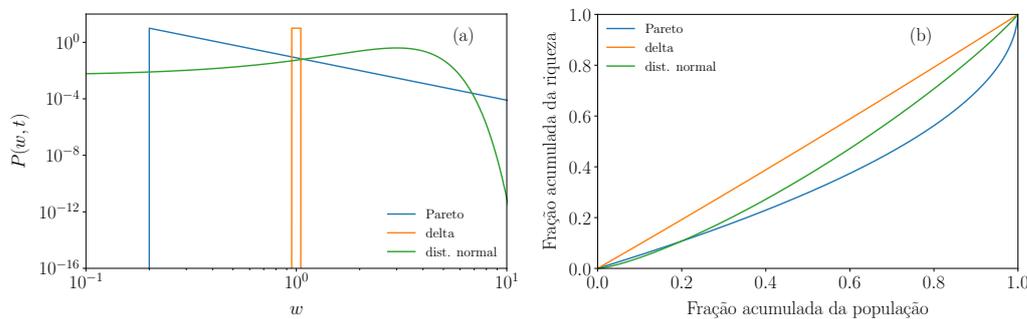


Figura 2.6: **Exemplos de distribuições (a) com suas correspondentes curvas de Lorenz (b).** A curva em azul é uma FDP de Pareto típica com índice de Pareto igual a 2 (veja a Ref. [28]). Em verde temos uma distribuição normal com média 3 e variância 1, enquanto que a curva laranja é uma distribuição quase-igualitária, na qual todos os agentes possuem a mesma riqueza  $w = 1$ .

Para quantificar a desigualdade através de uma única medida, uma quantidade bastante utilizada é o índice de Gini  $G$ . Por meio das curvas de Lorenz esse índice pode ser obtido a partir da relação

$$G = \frac{a}{a+b} = 1 - 2b, \quad (2-8)$$

onde  $a$  e  $b$  são as áreas indicadas na Fig. 2.5. Usando

$$b = \int_0^1 Y dX = \int_0^\infty dw Y(w)P(w) \quad (2-9)$$

$$= \int_0^\infty dw P(w) \frac{1}{\bar{w}} \int_0^w dw' w' P(w') \quad (2-10)$$

$$= \frac{1}{\bar{w}} \int_0^\infty dw P(w) \int_0^w dw' w' P(w') \quad (2-11)$$

$$= \frac{1}{\bar{w}} \int_0^\infty dw' w' P(w') \int_{w'}^\infty dw P(w) \quad (2-12)$$

$$= \frac{1}{\bar{w}} \int_0^\infty dw' w' A(w') P(w') \quad (2-13)$$

na Eq. (2-8), podemos obter o índice de Gini através da relação

$$G = 1 - \frac{2}{\bar{w}} \int_0^\infty dw w A(w) P(w). \quad (2-14)$$

## 2.4 Evolução temporal

A evolução temporal da FDP da riqueza  $P(w, t)$  referente ao MVQ sem redistribuição pode ser obtida integrando numericamente a EFP (2-1), a partir de uma dada condição inicial. Sucintamente, foi usado um algoritmo de diferenças finitas progressivo no tempo e centrado no espaço [32]. Entretanto o procedimento padrão foi adaptado para tratar o problema não linear mais geral, sendo esta outra contribuição do presente trabalho, e será apresentado detalhadamente no Capítulo 5, depois de introduzido o problema geral.

Os resultados da integração numérica são apresentados na Fig. 2.7 para dois dos casos estudados.<sup>2</sup> Assim como nas simulações de agentes (Seção 2.1), verifica-se a ocorrência de condensação da distribuição, onde a maior parte da população possui riqueza muito menor que a minoria mais rica. Uma vez que não há estado estacionário, foi estabelecido um tempo máximo  $t_{max} = 3$  no cálculo de  $P(w, t)$ .

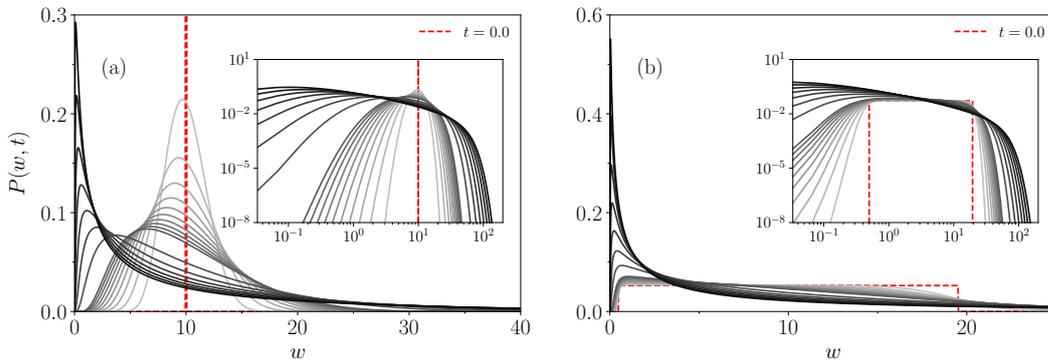


Figura 2.7: **Evolução temporal da FDP da riqueza  $P(w, t)$  da Eq. (2-1) para diferentes tipos de distribuições iniciais  $P_0(w)$ .** Em (a) todos os agentes possuem inicialmente a mesma riqueza  $w = 10$ , Enquanto que em (b) a distribuição inicial é uniforme. Após  $t = 0$  (linha tracejada vermelha), a evolução é representada para tempos crescentes da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta t = 3/80$  para  $3/80 \leq t \leq 27/80$  e a cada  $\Delta t = 3/8$  para  $3/8 \leq t \leq 3$ . Os intervalos de tempo entre as curvas são os mesmos em ambos os painéis. Nos gráficos inseridos são representadas as mesmas curvas em escala log-log.

<sup>2</sup>Optou-se por apresentar aqui os casos extremos (total igualdade e ampla região de uniformidade), os demais resultados estão detalhados na Fig. B.1.

Conforme a Fig. 2.8, observa-se crescimento monotônico de  $G$ . De fato, segundo demonstrado por Boghosian [33], no caso da EFP para o modelo MVQ, vale a seguinte relação:

$$\frac{dG}{dt} \geq 0.$$

De forma complementar, foi obtida a evolução temporal do valor máximo (Fig. B.2a) e da moda (Fig. B.2b) das FDPs  $P(w, t)$ , a fim de fornecer mais ferramentas para caracterizar a evolução temporal da distribuição de riqueza.

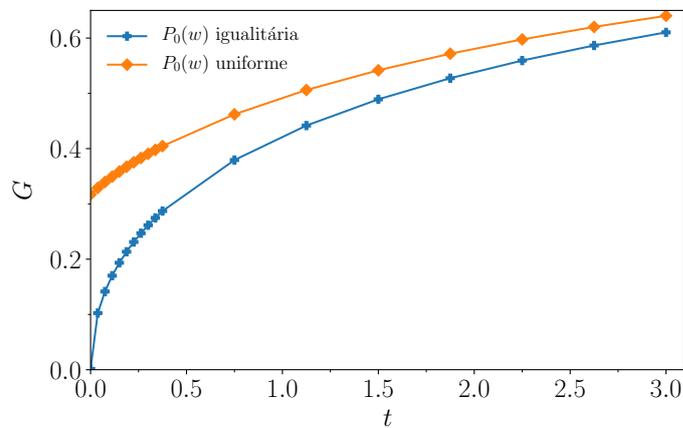


Figura 2.8: **Evolução temporal do índice de Gini para os casos da Fig. 2.7.** As linhas são somente um guia para a visão.

## 2.5

### Equação de Fokker-Planck para o MVQ com taxaço linear

Para criar um mecanismo que evite a condensac o de  $P(w, t)$  próximo de  $w = 0$ , foi introduzido, na Ref. [28], um termo de arrasto linear na Eq. (2-1), resultando a EFP

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left( [w^2 A + B] P \right) - \chi \frac{\partial}{\partial w} ([\bar{w} - w] P). \quad (2-15)$$

Para entender a origem do último termo do lado direito da Eq. (2-15), note que, na ausência do termo difusivo, a equac o  $\partial P / \partial t = -\chi \partial([\bar{w} - w]P) / \partial w$    uma equac o de continuidade para o fluxo  $\chi(\bar{w} - w)P$ . O parâmetro  $\chi$  modula a intensidade relativa do processo de arrasto com rela o ao difusivo, ou equivalentemente, controla a taxa ou frequência relativa com que o processo redistributivo   aplicado. O termo  $\chi\bar{w}$    a quantidade redistribuída por unidade de tempo (igual para todos e lembrando que  $\bar{w} = \frac{W}{N}$ ). Já o termo  $\chi w$  significa o montante tributado por unidade de tempo, de um agente com riqueza  $w$ . Desse modo  $\chi(\bar{w} - w)$  representa o saldo (recebido - arrecado) de um agente com riqueza  $w$  por unidade de tempo.

Os resultados obtidos da integraço numérica da Eq. (2-15) são ilustrados na Fig. 2.9 . Mostram claramente que a regula o evita a ocorrência de condensac o, introduzindo também uma queda abrupta para  $w$  grande. Comparando-se os gráficos inseridos, nota-se o efeito do parâmetro  $\chi$  na cauda, suprimindo as camadas de pobreza extrema e reduzindo a parcela mais rica. Para valores maiores de  $\chi$ , observa-se a tend ncia de estreitamento da FDP acompanhada do deslocamento da moda em dire o   média, diminuindo assim a assimetria em termos absolutos. Tendo por base o número de curvas visíveis nos gráficos principais, pode-se concluir que o tempo para atingir o estado estacionário diminui com o aumento de  $\chi$ . Resultados complementares para outros valores de  $\chi$  podem ser vistos na Fig. B.3 do Apêndice B.

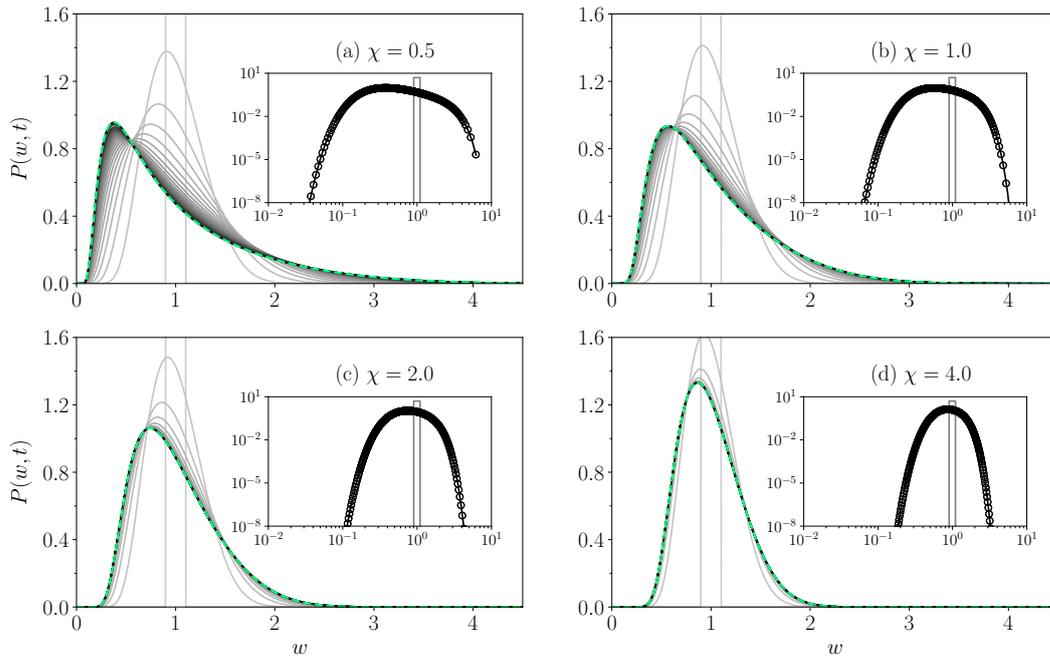


Figura 2.9: **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  no caso de taxaço linear**, integrando a Eq. (2-15), desde uma distribuiço inicial  $P_0(w)$  aproximadamente igualitária (linha mais clara). As distribui es são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a soluço estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (2-15), conforme detalhado no Capítulo 5. No gráfico inserido, em escala logarítmica, a linha mais clara corresponde ao instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura a  $t = 5,0$ . Os círculos referem-se   soluço estacionária.

Os resultados do cálculo do Gini relativo à evolução temporal da distribuição de riqueza são mostrados na Fig. 2.10a. Observamos que o índice de Gini atinge um valor estacionário que depende do parâmetro  $\chi$ , diminuindo a medida que aumenta  $\chi$  Fig. 2.10b, mostrando que a regulação diminui a desigualdade, como esperado. Quanto maior o valor de  $\chi$  mais rápido se atinge o estado estacionário.

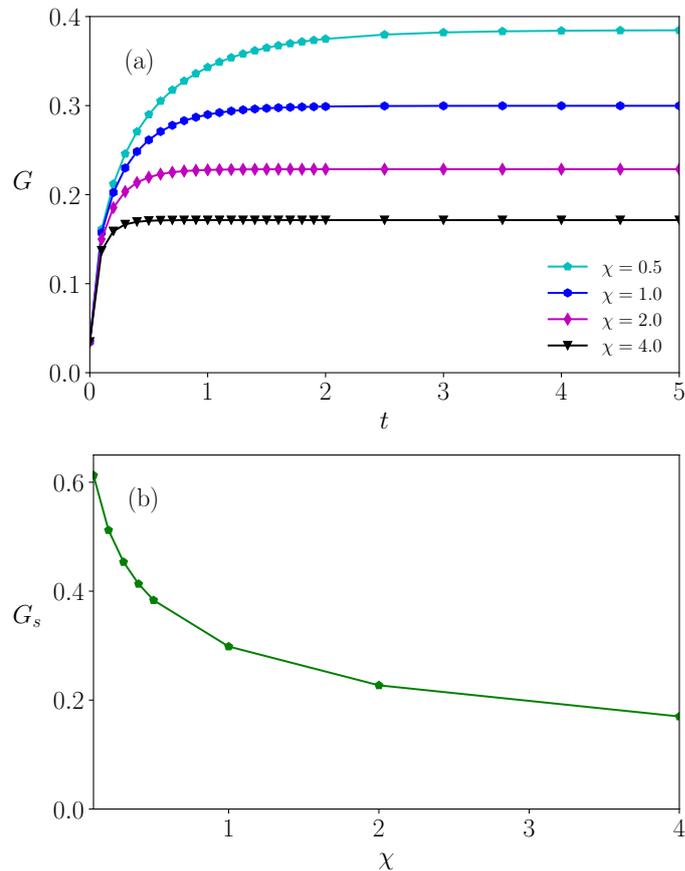


Figura 2.10: Evolução temporal do índice de Gini (a) e Gini estacionário em função de  $\chi$  (b) para o MVQ com taxaço linear.

Resultados complementares mostrando a evolução temporal para diferentes valores de  $\chi$  são apresentados no Apêndice B (Fig. B.3).

### 3

## Equação de Fokker-Planck para o MVQ com taxaço não linear

Neste capítulo, apresenta-se a contribuição deste trabalho para a modelagem da dinâmica da redistribuição de riqueza [34]. Analisaremos agora a seguinte EFP para o MVQ com taxaço:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left( [w^2 A + B] P \right) - \frac{\partial}{\partial w} (fP), \quad (3-1)$$

onde o arrasto  $f(w)$  é dado por

$$f(w) = \chi (\beta \bar{w} - \gamma g(w)), \quad (3-2)$$

sendo composto pela diferença entre a quantidade recebida (que é igual para todos, e proporcional a  $\bar{w}$ ) e a parcela arrecadada (que depende da riqueza, proporcionalmente a  $g(w)$ ), por unidade de tempo. A função de arrecadação  $g(w)$  define a forma de tributação, já os coeficientes  $\beta \equiv \beta(t)$  e  $\gamma \equiv \gamma(t)$  servem para modular (ajustar) no tempo, respectivamente, a redistribuição e a arrecadação, para conservar a riqueza total. O parâmetro (constante no tempo)  $\chi$  possui um papel igual ao descrito para o arrasto linear na Eq. (2-15) e permite ajustar o peso desse arrasto em relação ao termo difusivo e eventualmente eliminar a taxaço.

Note-se que a alíquota é dada por  $g(w)/w$ , tal que a parcela arrecadada de um indivíduo com riqueza  $w$  é  $g(w)/w \times w = g(w)$ . Por exemplo, no Brasil não há imposto direto sobre a riqueza, porém consideremos o imposto de renda. Nesse caso, a taxa de arrecadação (ou percentual tributado) mostrada na Fig. 3.1, define, a menos de um fator constante,  $g(w)/w$ .

No caso em que a arrecadação é proporcional à riqueza (caso linear  $g(w) = w$ ) a taxa é constante, independente da riqueza. Entretanto, se a alíquota  $g(w)/w$  é uma função crescente (decrecente) de  $w$ , então a arrecadação é progressiva (regressiva).

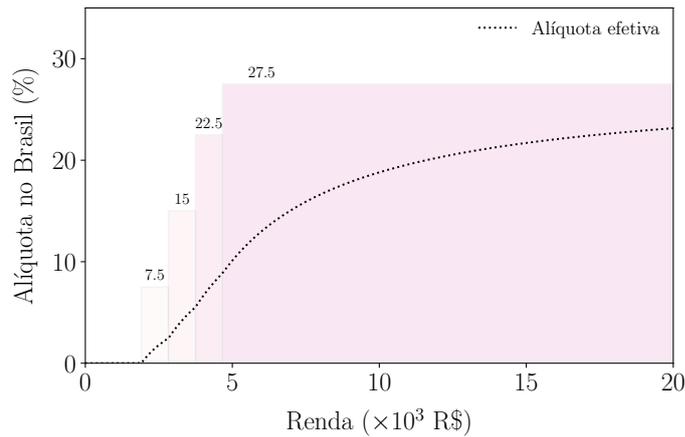


Figura 3.1: **Percentual tributado (alíquota) em função da renda no Brasil.** Além da faixa livre de impostos, existem quatro faixas de taxaço, que a partir das regras estabelecidas levam a uma alíquota efetiva descrita pela curva preta pontilhada. Para rendas  $\gg$  R\$ 20.000,00, a alíquota efetiva tende à taxa máxima de 27,5%. Dados: Receita Federal do Brasil em 2020.

Foram estudadas duas famílias de funções de arrecadação  $g(w)$  não lineares (ou seja, não proporcionais), que serão descritas a seguir.

### 3.1 Linear por partes

No primeiro caso,

$$g(w) = (w - w_0)\Theta(w - w_0), \quad (3-3)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função degrau de Heaviside,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3-4)$$

Esta função é ilustrada na Fig. 3.2a, para três valores diferentes de  $w_0$ , que representa o limite de isenção (ou limiar de tributação). Na Fig. 3.2b, é mostrada a taxa  $g(w)/w$ . Nota-se que, no caso linear, a taxa é uma constante independente da riqueza. Já para  $w_0 > 0$ , a taxa é uma função crescente com a riqueza (progressiva) acima do limiar de tributação, como pode ser visto na Fig. 3.2b.

Desse modo, a tributação incide apenas sobre os agentes que possuem riqueza  $w > w_0$ , sendo que o montante arrecadado é igualmente dividido entre os agentes. Esse esquema é uma simplificação do aplicado no Brasil para a renda (veja Fig. 3.1), em que há um limite de isenção a partir do qual a alíquota é uma função crescente (progressivo).

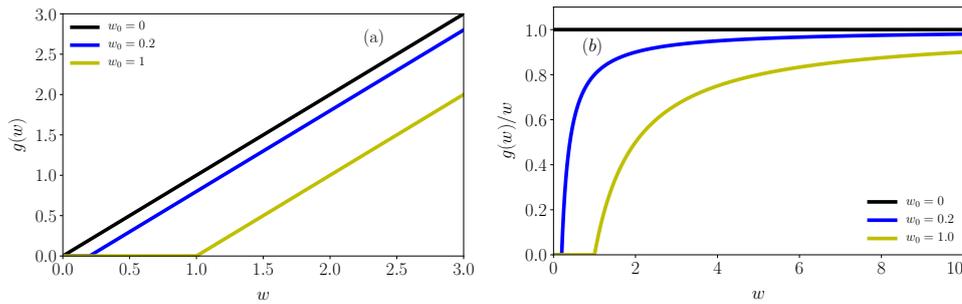


Figura 3.2: (a) **Função de arrecadação  $g(w)$  linear por partes**, para diferentes valores do limite de isenção  $w_0$  indicados na figura. O caso linear é recuperado quando  $w_0 = 0$  (curva preta). (b) **Alíquota  $g(w)/w$**  para os mesmos casos.

### 3.2 Lei de potência

O segundo tipo de função de arrecadação não linear tratado é a lei de potência

$$g(w) = w^\alpha, \quad (3-5)$$

onde  $\alpha > 0$  (como ilustrado na Fig. 3.3a).

Observe na Fig. 3.3b, que mostra a alíquota  $g(w)/w$ , como o regime de tributação pode ser progressivo, quando  $\alpha > 1$  (alíquota crescente com  $w$ ), ou regressivo, para  $0 < \alpha < 1$  (alíquota decrescente com  $w$ ). O caso linear (alíquota constante) ocorre para  $\alpha = 1$ .

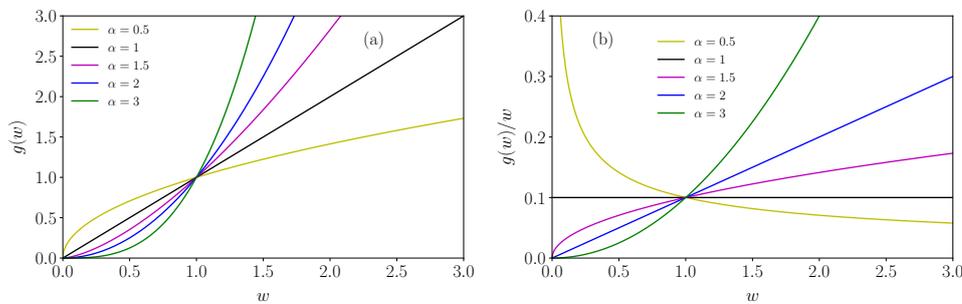


Figura 3.3: (a) **Função de arrecadação  $g(w) = w^\alpha$** . (b) **Alíquota  $g(w)/w = w^{\alpha-1}$**  para diferentes valores de  $\alpha$ . As linhas pretas correspondem ao caso linear ( $\alpha = 1$ ).

### 3.3

#### Modulaço temporal

Diferentemente do caso linear, os coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$  definidos na Eq. (3-2) possuem um papel fundamental na dinâmica da riqueza, proporcionando ajustes (modulaço) durante a evoluço da FDP, seja na redistribuiço ou na arrecadaço, respectivamente.

Considerando que tanto o número de agentes quanto a riqueza total se conservam (conseqüentemente o mesmo vale para  $\bar{w}$ ), deve ser nulo o fluxo médio, ou seja,

$$\int_0^{\infty} f(w)P(w)dw = 0. \quad (3-6)$$

O estudo do arrasto não linear foi separado nos dois esquemas a seguir.

#### 3.3.1

##### Esquema I (arrecadaço modulada)

Neste caso, temos

$$f_I(w, t) = \chi(\bar{w} - \gamma(t)g(w)), \quad (3-7)$$

onde apenas a arrecadaço é modulada, tendo considerado  $\beta = 1$  na Eq. (3-2). Assim, a EFP Eq. (3-1) explicitamente é

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} ([w^2 A + B] P) - \chi \frac{\partial}{\partial w} ([\bar{w} - \gamma(t)g(w)] P), \quad (3-8)$$

complementada com a condiço de conservaço da riqueza dada pela Eq. (3-6), que neste caso tem a forma

$$\gamma(t) \int_0^{\infty} g(w)P(w, t)dw = \bar{w}. \quad (3-9)$$

Note que  $\gamma(t)$  é obtida de forma auto-consistente junto com a evoluço da EFP, sendo seu valor inicial determinado a partir da FDP inicial através da Eq. (3-9).

#### 3.3.2

##### Esquema II (redistribuiço modulada)

Neste caso, o arrasto é

$$f_{II}(w, t) = \chi(\beta(t)\bar{w} - g(w)), \quad (3-10)$$

tendo considerado  $\gamma = 1$  na Eq. (3-2). Assim, a EFP Eq. (3-1) torna-se

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} ([w^2 A + B] P) - \chi \frac{\partial}{\partial w} ([\beta(t)\bar{w} - g(w)] P), \quad (3-11)$$

com a condiço dada pela Eq. (3-6).

$$\beta(t)\bar{w} = \int_0^\infty g(w)P(w,t)dw, \quad (3-12)$$

que novamente fornece  $\beta(t)$  de forma auto-consistente com a evoluço de da PDF.

### 3.3.3 Estado estacionário

Junto com a relaxaço da FDP para o estado estacionário, concomitantemente, as funçoes  $\gamma(t)$  no esquema I e  $\beta(t)$  no esquema II também atingem valores estacionários. Uma mesma distribuço estacionária pode ser alcançada através dos dois esquemas, com coeficientes estacionários relacionados da forma

$$\begin{aligned} \beta_s^{II} &= 1/\gamma_s^I, \\ \chi^{II} &= \chi^I \gamma_s^I. \end{aligned} \quad (3-13)$$

Entretanto a evoluço temporal de uma dada condiço inicial é diferente quando a EFP é modulada por cada esquema I ou II, devido a que a equaço integro-diferencial possui coeficientes dependentes do tempo,  $\gamma(t)$  e  $\beta(t)$ , associados a diferentes termos (compare as Eqs. 3-8 e 3-11).

No caso da arrecadaço linear, não é necessário um ajuste dos coeficientes para conservar a riqueza, dado que a condiço 3-6, se reduz a  $\beta(t) = \gamma(t) = 1$  para todo  $t$ , porque

$$\bar{w} = \int_0^\infty wP(w,t)dw. \quad (3-14)$$

Nesse caso ambos esquemas coincidem.

Para observar o comportamento da evoluço temporal de  $P(w,t)$ , foi realizada a integraço numérica da Eq. (3-1). A distribuço estacionária foi obtida de forma direta e posteriormente comparada com a soluço da evoluço temporal para tempos suficientemente grandes, mostrando excelente concordância. Os métodos utilizados serão descritos no Capítulo 5.

## 4

### Resultados para a EFP com taxaço não linear

#### 4.1

##### Taxação linear por partes

A evolução temporal da Eq. (3-1) no esquema I, com taxaço linear por partes, pode ser vista na Fig. 4.1 para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$ . A FDP inicial possui  $G \approx 0,59$  e foi construída a partir da evolução da Eq. (2-1) até o instante  $t = 2,5$ .

Percebe-se a influência do parâmetro  $\chi$  no estreitamento das curvas, a exemplo do que foi observado no caso linear, que é retomado quando fazemos  $w_0 = 0$ . Assim como esperado, além de não haver condensação em  $w = 0$ , há diminuição significativa da pobreza. A Tab. 4.1 mostra que a riqueza dos mais pobres mais do que dobra quando comparamos os casos das Figs 4.1a e 4.1f, atingindo 7,3% do total para o 1º decil e 15,8% até o 2º decil. Para os mais ricos o fluxo é oposto, reduzindo a riqueza do último decil de 21,6% para 9,8% do total. Considerando os 20% mais ricos observamos queda proporcional semelhante.

parâmetros		mais pobres		classe média	mais ricos	
$\chi$	$w_0$	10%	20%	20%	20%	10%
0,5	0,5	2,9	7,3	17,4	37,6	21,6
0,5	1,0	3,0	7,8	19,4	33,4	18,2
1,0	0,5	4,2	9,9	18,8	32,3	17,8
1,0	1,0	4,6	11,2	20,0	27,5	14,1
4,0	0,5	6,4	13,7	19,0	25,4	13,5
4,0	1,0	7,3	15,8	19,6	20,8	9,8

Tabela 4.1: Percentual da riqueza total por classe econômica para o estado estacionário do caso linear por partes, de acordo com os parâmetros  $\chi$  e  $w_0$ .

As diferenças em relação ao caso linear começam a ficar mais claras com o aumento do parâmetro  $w_0$ . Para  $\chi = 0,5$  (Figs. 4.1a e 4.1b) nota-se a formação de uma região de platô (Fig. 4.1b), onde a distribuição da riqueza é aproximadamente uniforme. As Figs. 4.1c e 4.1e possuem assimetria positiva, enquanto que nas Figs. 4.1d e 4.1f a assimetria é negativa. Observando-se a cauda nos gráficos inseridos, nota-se uma queda no número de ricos cada vez

mais abrupta à medida que se aumenta o limite inferior de tributação  $w_0$ . Resultados complementares para outros valores de  $\chi$  e  $w_0$  podem ser observados na Fig. B.4.

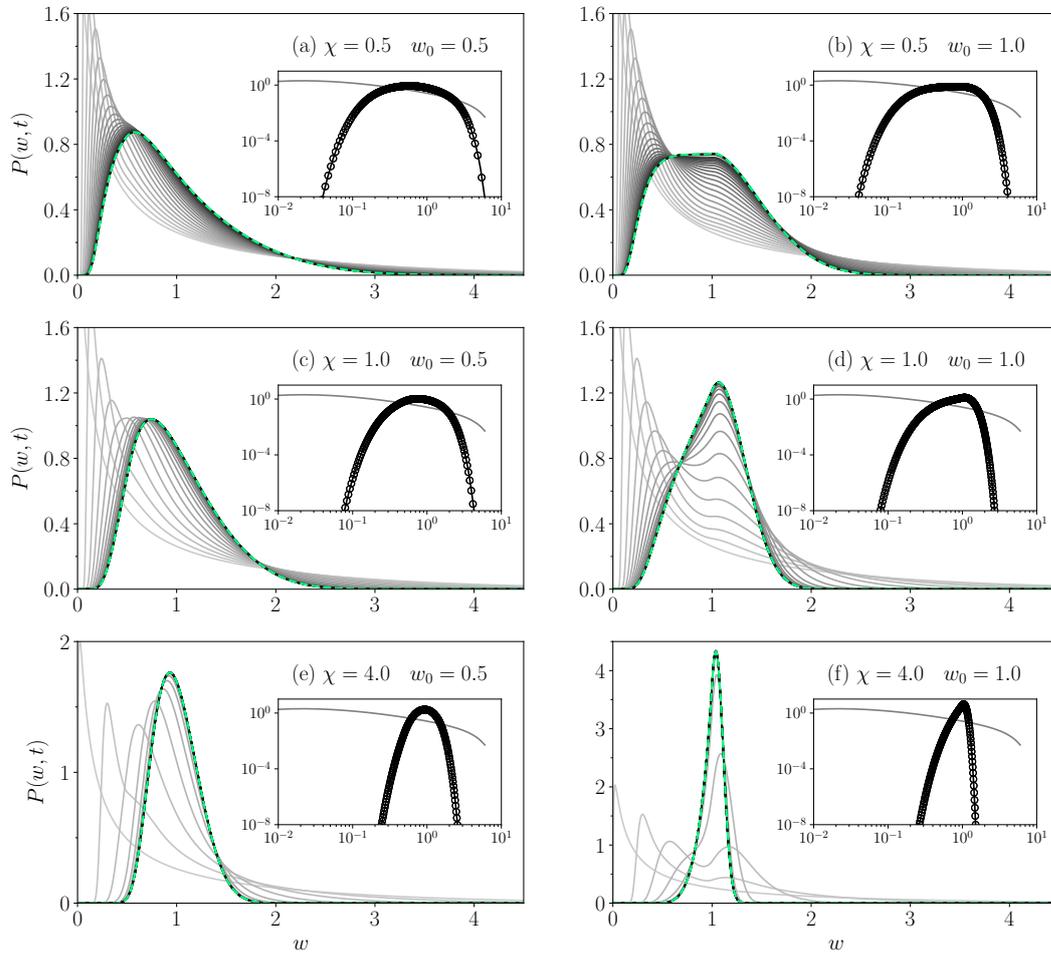


Figura 4.1: **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$** , da integração numérica da Eq. (3-1). As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1), conforme detalhado no Capítulo 5. No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à solução estacionária da Eq. (3-1).

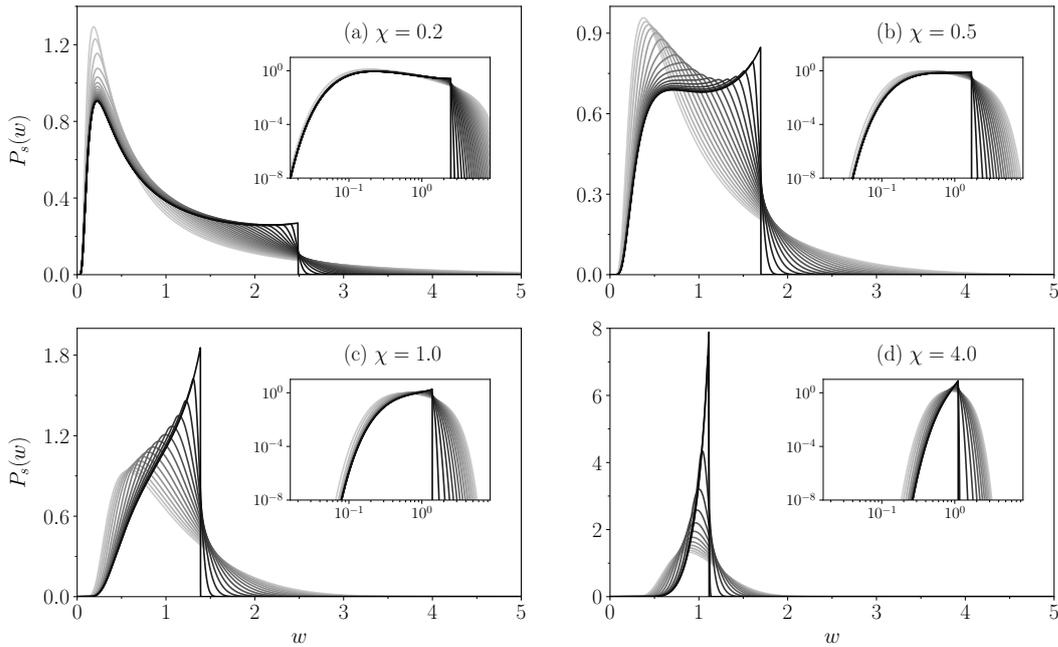


Figura 4.2: **Distribuições estacionárias da Eq. (3-1) no caso  $g(w)$  linear por partes para diferentes valores de  $\chi$ .** Partindo de  $w_0 = 0$ , o limite mínimo de tributação cresce a cada  $\Delta w_0 = 0,1$  da curva mais clara para a mais escura, onde  $w_0 \approx 2,5$  (a),  $w_0 \approx 1,7$  (b),  $w_0 \approx 1,4$  (c) e  $w_0 \approx 1,1$  (d).

A Fig. 4.2 apresenta as curvas estacionárias para  $\chi$  fixo e diversos valores de  $w_0$ . Outros casos semelhantes analisados podem ser encontrados na Fig. B.5. O aumento na taxa  $\chi$  produz estreitamento da FDP em torno da média, particularmente, o limite mínimo de riqueza é deslocado de modo a eliminar faixas mais amplas de pobreza. Tal comportamento também pode ser observado no caso linear e não é afetado de modo perceptível por  $w_0$  [30]. O limite mínimo de taxação  $w_0$  tem maior efeito nas faixas de riqueza intermediárias e altas. A FDP pode tornar-se bimodal (e.g., Fig. 4.2b), indicando classes com nível de riqueza definido. A inversão do sinal da assimetria ocorre para  $0,2 < \chi < 0,5$  e é mantida para valores maiores de  $\chi$  (Figs. 4.2b-d). Além disso, em geral, um aumento no limite de tributação  $w_0$  tende a criar um nítido limiar acima do qual  $P(w, t) \rightarrow 0$ . Essa tendência ocorre devido ao fluxo da riqueza ocorrer no sentido da população com menor nível de ativos, diminuindo a população mais rica da cauda.

O valor  $G_s$  do índice de Gini para as FDPs para tempos longos e diferentes valores de  $\chi$  pode ser observado na Fig. 4.3a. O Gini diminui quando  $w_0$  aumenta, como se esperaria, porém, um valor finito mínimo é atingido no valor limite de  $w_0$ . Quanto maior for  $\chi$ , maior a sensibilidade de  $G_s$  ao valor de  $w_0$ . A fim de possibilitar uma visão global, considerou-se o espectro total de valores, apesar de alguns intervalos possivelmente não serem realistas. Por

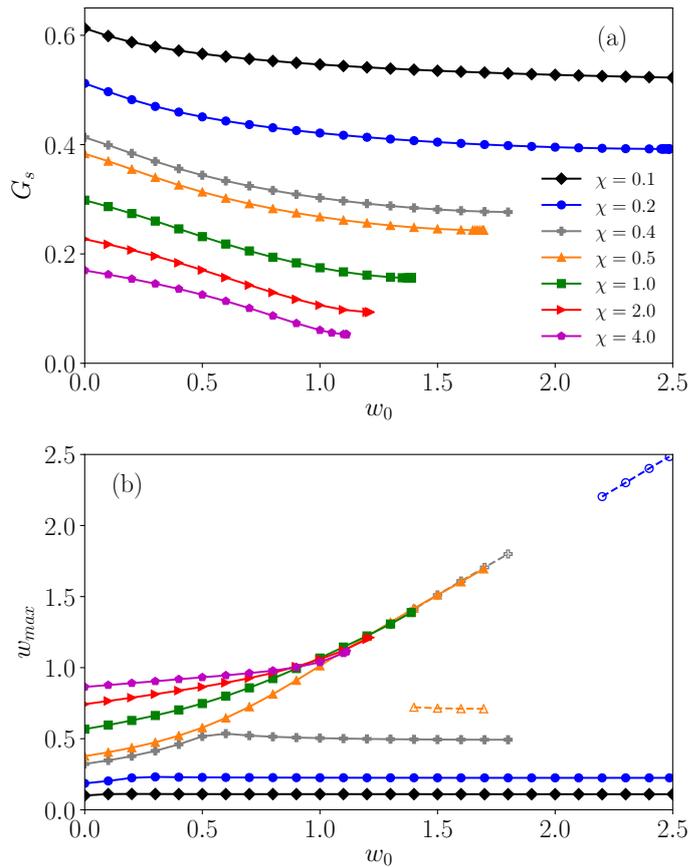


Figura 4.3: (a) **Índice de Gini Estacionário** para diferentes  $\chi$  em função de  $w_0$ . (b) **Moda de  $P(w, t)$**  (símbolos cheios) vs.  $w_0$ . O segundo máximo, caso exista, é mostrado em símbolos ocios. As linhas são apenas um guia para a visão.

exemplo, no valor limite de  $w_0$ , o salto  $\Delta\gamma_s$  diverge, a fim de preservar a média  $\bar{w}$  fixa, e a FDP torna-se truncada como se pode observar na Fig. 4.2 (este resultado será justificado no Capítulo 5).

A Fig. 4.3b apresenta a moda,  $w_{max}$  (símbolos cheios), assim como o segundo máximo (símbolos ocios), quando existem. Para valores menores de  $\chi$ , a moda é fracamente afetada por  $w_0$ , mantendo-se abaixo de  $\bar{w}$  (e.g., caso  $\chi = 0,2$ ), produzindo distribuições com assimetria positiva. Quando  $\chi$  é maior, a moda é deslocada no sentido da linha  $w_{max} = w_0$ , podendo exceder o valor da média  $\bar{w}$ , que nos exemplos aqui descritos é unitária. Em determinados casos, para valores maiores de  $\chi$ , desenvolve-se um segundo pico, que pode se tornar a moda conforme  $w_0$  aumenta (e.g., para  $\chi = 0,5$  nas Fig. 4.2b e 4.3b).

## 4.2

### Taxação por lei de potência

O comportamento da FDP com arrasto por lei de potência, ao longo do tempo, consta na Fig. 4.4, com casos complementares na Fig. B.6. Utilizou-se

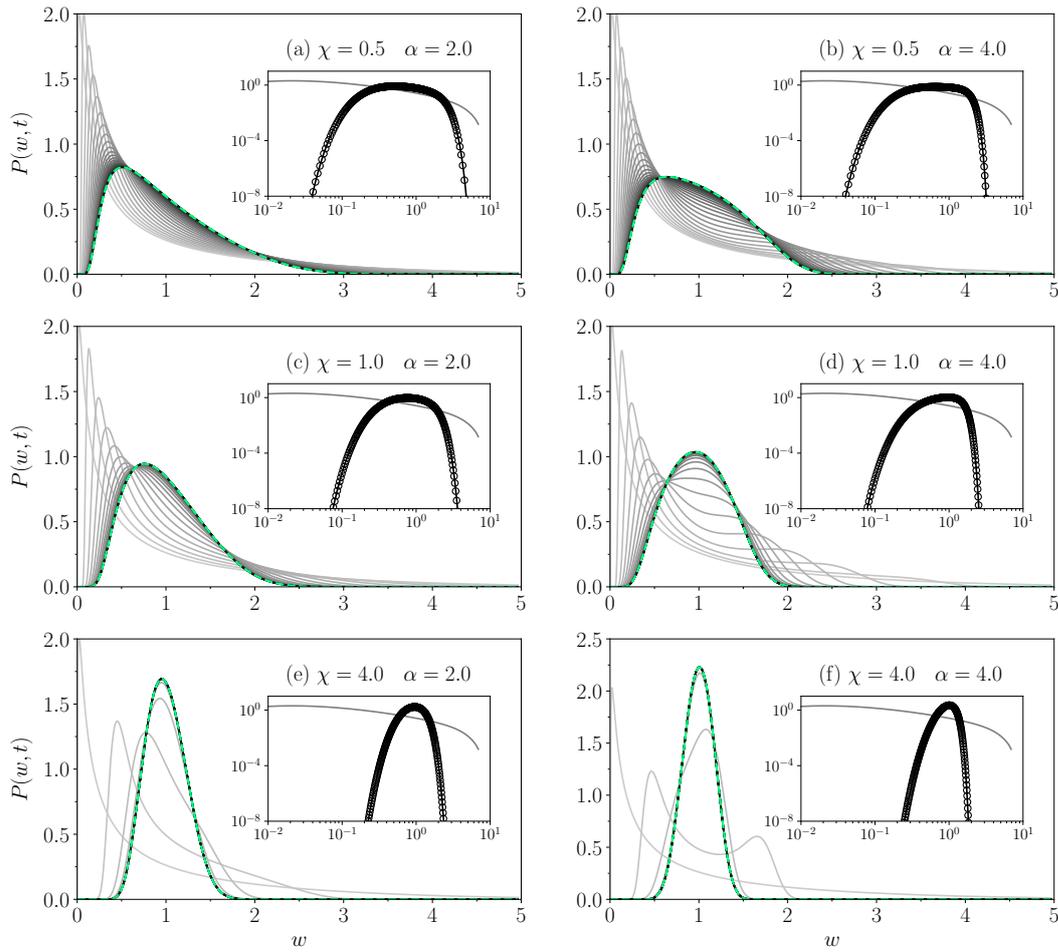


Figura 4.4: **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $\alpha$ .** As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1). No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos referem-se à distribuição estacionária da Eq. (3-1) obtida diretamente.

aqui a mesma distribuição inicial do caso linear por partes, além dos mesmos instantes de tempo. De forma geral, o padrão obtido é muito semelhante ao do caso linear por partes, o que se pode verificar, por exemplo, comparando-se as evoluções para  $\alpha = 2,0$  com aquelas para  $w_0 = 0,5$  (Fig. 4.1). Apesar de pouco perceptível nesses casos, as curvas do caso lei de potência são mais suaves. Essa característica fica mais evidente comparando-se casos com valores maiores de  $w_0$  e  $\alpha$  (coluna da direita das Fig. 4.1 e 4.4). Assim como no caso linear por partes, podem ocorrer distribuições bimodais, e de assimetria negativa (Fig 4.4f). Um aumento do parâmetro  $\chi$  reduz a cauda, mais acentuadamente no lado de maior riqueza, concentrando a FDP em torno de  $\bar{w}$ .

Nas Fig. 4.5, complementada pela Fig. B.7, podemos observar o compor-

tamento estacionário das FDP com taxaço do por lei de potência. É possível verificar diversas semelhanças com os casos de mesmo  $\chi$  na Fig. 4.2. Estreitamento em torno da média, regiões de platô, ocorrência de dois picos e ocorrência de um limiar a acima do qual  $P_s(w) \rightarrow 0$ , além de inversão da assimetria, são efeitos que também podem ocorrer quando  $\alpha > 1$ , com a diferença de se apresentarem em curvas mais suaves em comparação com os casos da Fig. 4.2.

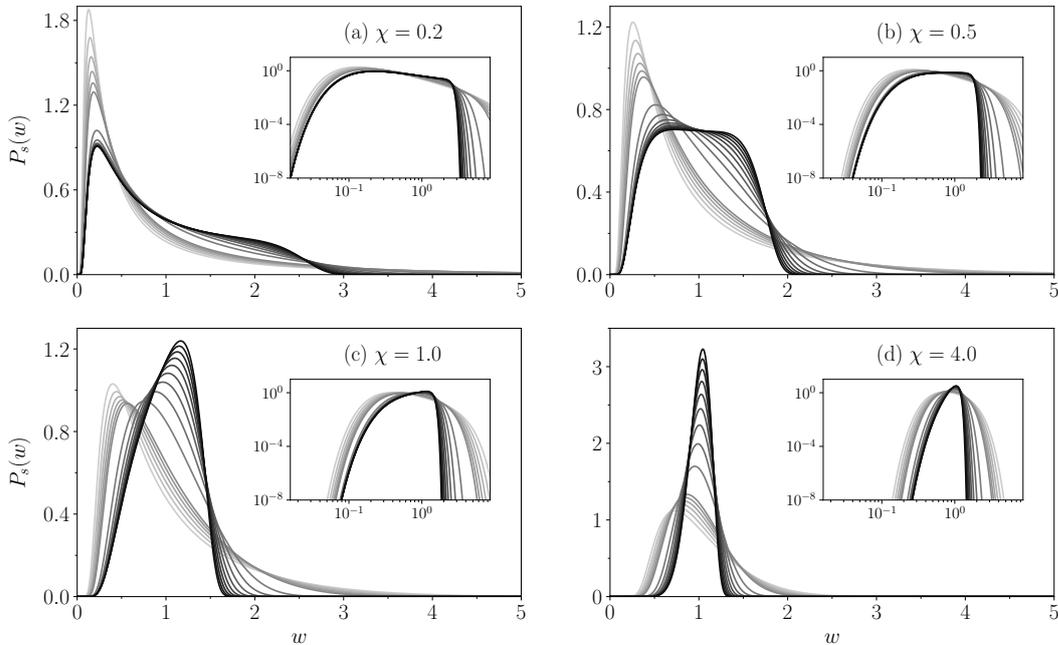


Figura 4.5: Distribuições estacionárias da Eq. (3-1) com arrecadação  $g(w) = w^\alpha$  para diferentes valores de  $\chi$ . Os valores de  $\alpha$  crescem da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta\alpha = 0,1$  para  $0,5 \leq \alpha \leq 0,9$  e  $\Delta\alpha = 1$  para  $1 \leq \alpha \leq 10$ .

parâmetros		mais pobres		classe média	mais ricos	
$\chi$	$\alpha$	10%	20%	20%	20%	10%
0,5	2,0	2,8	7,1	17,8	37,6	21,2
0,5	4,0	3,0	7,8	19,1	33,9	18,3
1,0	2,0	4,0	9,6	19,0	32,5	17,8
1,0	4,0	4,5	10,7	19,9	29,4	15,5
2,0	2,0	6,4	13,9	19,7	26,0	13,7
2,0	4,0	7,0	15,2	19,9	24,4	12,4

Tabela 4.2: Percentual da riqueza total por classe econômica para o estado estacionário da EFP com taxaço tipo lei de potência, de acordo com os parâmetros  $\chi$  e  $\alpha$ .

De fato, as Tabs. 4.1 e 4.2 mostram variações proporcionais parecidas em todas as classes comparando-se casos com mesmo valor de  $\chi$ , porém o caso lei de potência apresenta uma redução de riqueza mais branda entre os 10% mais

ricos, para valores maiores de  $\chi$ . Na Tab. 4.2 quando  $\chi = 1$ , o aumento de  $\alpha$  leva a uma queda de 13% na riqueza dos mais ricos, porém quando  $\chi = 4$  essa queda passa a ser de 9,5%. Olhando para os dados do caso linear por partes (Tab. 4.1) para  $\chi = 1$ , percebemos uma queda de 20,8% no montante dos mais ricos com o aumento de  $w_0$ , ao passo que para  $\chi = 4$  a queda é proporcionalmente maior, alcançando 27,4%.

Os valores estacionários de Gini vs  $\alpha$  para valores de  $\chi$  fixos são apresentados na Fig. 4.6.

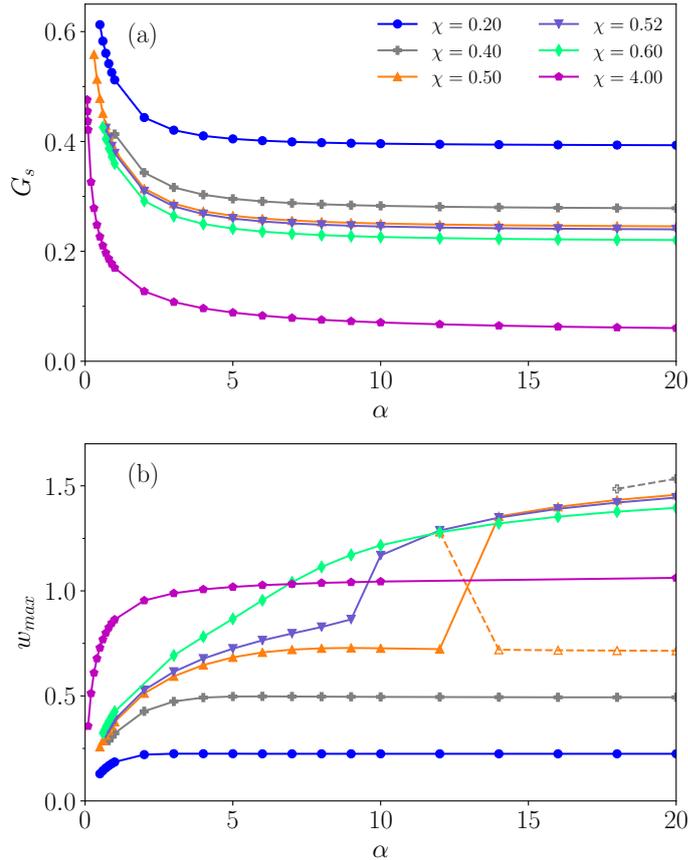


Figura 4.6: (a) **Índice de Gini Estacionário** para diferentes  $\chi$  em função de  $\alpha$ . (b) **Moda de  $P(w, t)$**  (símbolos cheios) vs.  $\alpha$ . O segundo máximo, quando existe, é mostrado em símbolos ocios. As linhas são apenas um guia para a visão.

Comparando essas curvas com os seus similares da Fig. 4.3 é possível notar a relação  $\alpha \simeq 4w_0 \gtrsim 1$ . Enquanto a taxação progressiva (com  $\alpha > 1$ ) mais se assemelha ao caso linear por partes  $w_0$ , as principais diferenças ocorrem para  $\alpha < 1$ , devido ao seu caráter regressivo.

No limite  $\alpha \rightarrow 0$  dos casos regressivos, respeitando a imposição de conservação da riqueza, a partir da Eq. (3-1), temos

$$\int_0^\infty wP(w, t)dw = \gamma \int_0^\infty P(w, t)dw, \quad (4-1)$$

o que resulta em uma constante  $\gamma = \bar{w}$ . Logo

$$f(w) = \chi(\bar{w} - \gamma) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w}[fP] = 0, \quad (4-2)$$

levando o termo de arrasto da EFP a zero quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Conseqüentemente, retorna-se ao caso sem taxaço, onde a curva apresenta condensação e cauda alongada. Ainda assim, o esquema impositivo para  $\alpha < 0$  produz valores relativamente baixos do índice de Gini para  $\chi$  suficientemente grande. De fato,  $G_s$  cai rapidamente com  $\alpha$  no caso regressivo. A respeito do que é mostrado na Fig. 4.6, a moda ultrapassa a média  $\bar{w}$  e um segundo máximo pode aparecer somente para  $\alpha$  muito alto.

### 4.3

#### Esquema II - redistribuição modulada

Até aqui, estudou-se o comportamento da distribuição de riqueza no esquema I, onde a constância do montante distribuído decorre de fixar  $\beta = 1$ , enquanto o coeficiente  $\gamma$  varia em função do tempo de modo a respeitar a condição de conservação da riqueza média. Passa-se agora a analisar o esquema II, onde  $\gamma = 1$  e  $\beta$  é ajustado. Quando o arrasto no estado estacionário coincide nos dois esquemas, ou seja  $f_I(w) = f_{II}(w)$ , então as respectivas soluções para  $P(w)$  também coincidem, o que ocorre para valores assintóticos das funções de modulação relacionados mediante a Eq. (3-13).

A fim de observar a validade das relações acima, seguiu-se a evolução do esquema II, usando parâmetros que permitem sua correspondência com o esquema I. Enquanto os estados estacionários coincidem (veja Fig. B.8) as evoluções temporais diferem. Essa diferença também pode ser observada através do índice de Gini em função do tempo, na Fig. 4.7b. O estado estacionário é atingido mais rapidamente no caso II.

Em contraste com o caso I, onde um aumento no limite  $w_0$  reduz a desigualdade medida por  $G_s$ , no caso II, surge uma dependência oposta em  $w_0$ , para os valores  $\chi$  estudados, como mostra a Fig. 4.9a. Para valores baixos de  $w_0$ , pode ser observado que o valor estacionário do Gini é quase insensível à variação de  $w_0$ , entretanto acima de certo valor do limiar, o índice de Gini aumenta sensivelmente com  $w_0$ . Quando é ampliada a faixa de isenção (aumentando-se  $w_0$ ) a arrecadação total é menor. Note-se que, no caso II, o prefator  $\gamma$  do termo de arrecadação contendo  $g(w)$  no arrasto da EFP não depende explicitamente do tempo ( $\gamma = 1$ ), desse modo a arrecadação decresce no tempo, à medida que a regulação trunca cada vez mais a cauda da distribuição. Concomitantemente, a devolução, modulada por  $\beta(t)$  que resulta ser uma função decrescente do tempo, também decresce. Diferentemente, no

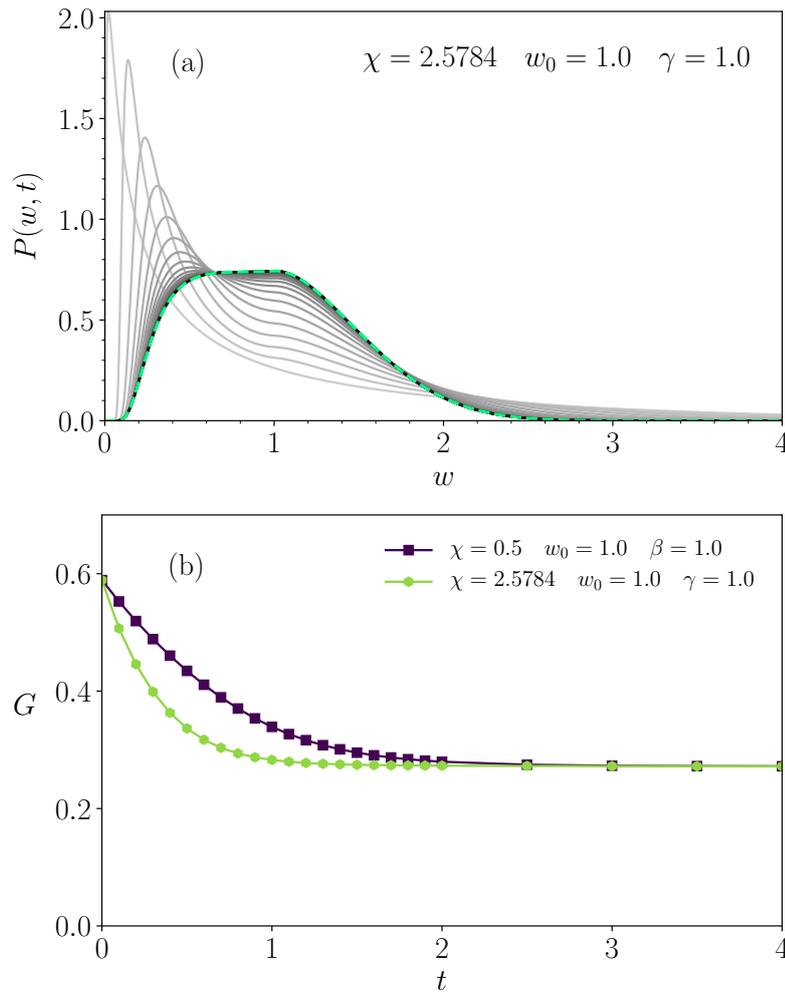


Figura 4.7: **Esquema II: evolução temporal para o caso linear por partes.** (a) FDP da riqueza,  $P(w, t)$  vs.  $w$ , com  $\beta$  variável, para os mesmos tempos usados na Fig. 4.1. (b) Índice de Gini vs. tempo para os esquemas I (preto) e II (verde-claro), com parâmetros que verificam as Eqs. (3-13) levando ao mesmo estado estacionário.

caso I, o fator  $\gamma(t)$ , que cresce com o tempo, garante a diminuição de  $G$ . Assim sendo, seria melhor remover o limite  $w_0$  no esquema II para produzir menor desigualdade.

As FDPs estacionárias, para diferentes valores de  $w_0$  valores correspondentes constam na Fig. 4.8.

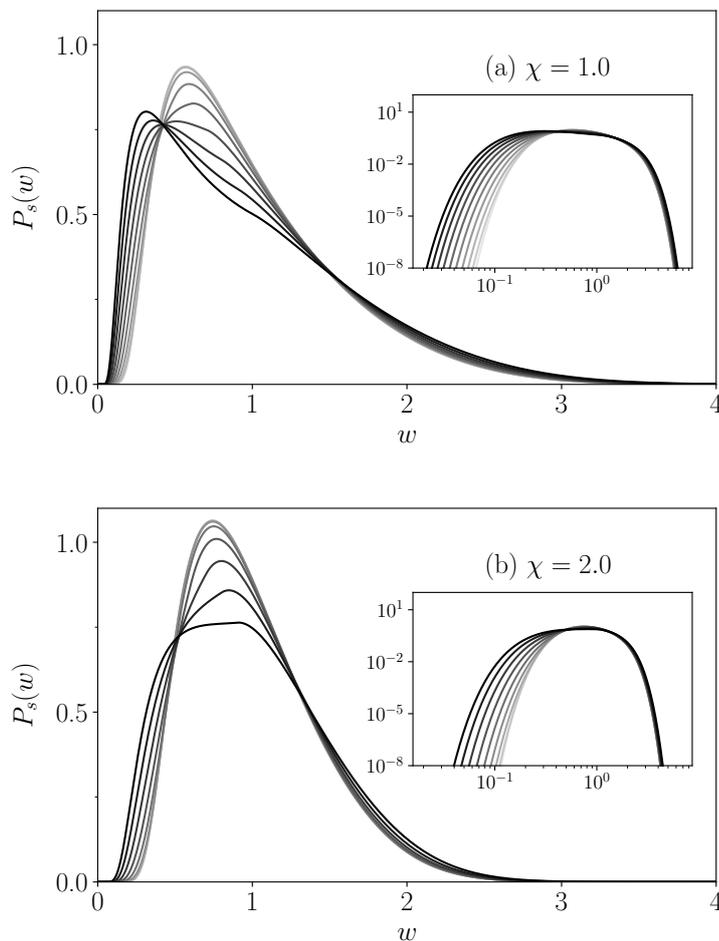
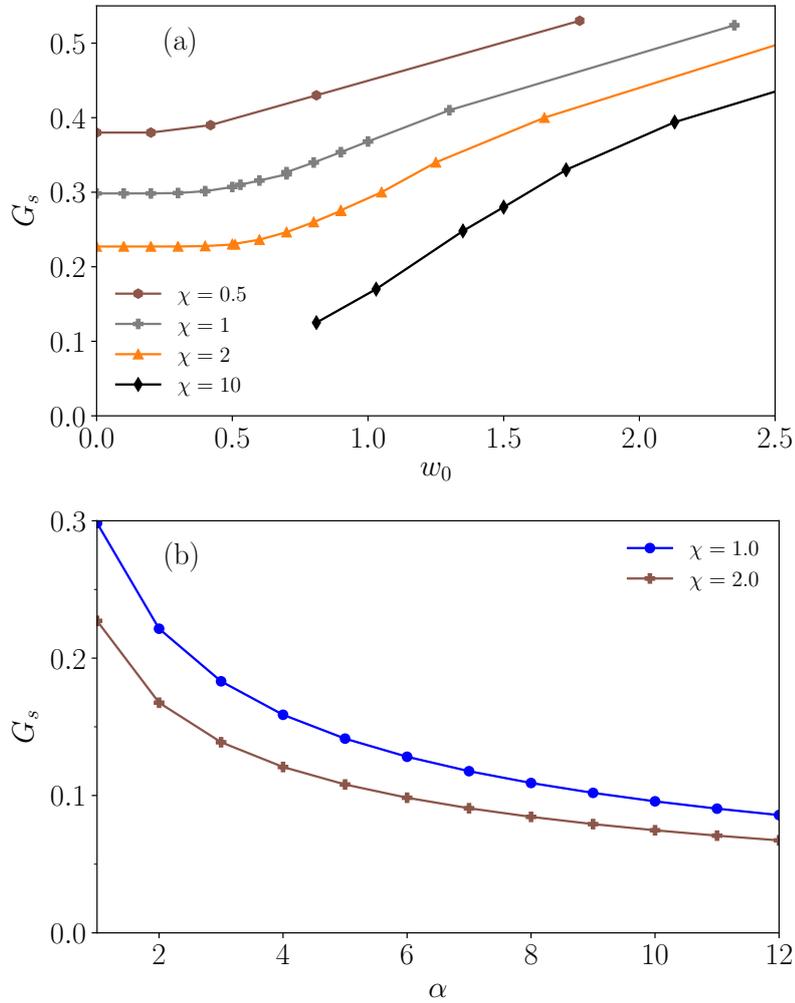


Figura 4.8: **Esquema II: FDP estacionária para riqueza no caso de arrasto linear por partes**, para  $\chi$  fixo, de acordo com a legenda, e diferentes valores de  $w_0$  variando (da linha mais clara para a mais escura) a cada  $\Delta w_0 = 0,1$  de 0,0 até 1,0 em (a) e de 0,0 até 0,9 em (b). gráfico inserido: mesmos dados em escala log-log a fim de exibir os extremos.

Para a taxaço por lei de potência, o índice de Gini diminui com  $\alpha$  (Fig. 4.9b), também no esquema II.



PUC-Rio - Certificação Digital N° 1812662/CA

Figura 4.9: Índice de Gini estacionário para o esquema II em função de  $w_0$  (a) e  $\alpha$  (b). As linhas funcionam como guia para a visão.

Obviamente, nos limites  $w_0 \rightarrow 0$  ou  $\alpha \rightarrow 1$ , retorna-se ao caso linear, onde os dois esquemas coincidem.

## 5

### Sobre as estratégias de integração numérica da EFP

#### 5.1

##### Evolução temporal

A fim de obter a evolução temporal da função densidade de probabilidade  $P(w, t)$ , foi feita a integração numérica da EFP (3-1) usando o método das diferenças finitas conhecido como Progressivo no Tempo e Centrado no Espaço (PTCE) (*Forward-Time Centered-Space (FTCS)* em inglês) [32], muito utilizado em problemas de difusão. Foi utilizado um algoritmo de primeira ordem. Tratando-se de uma equação integro-diferencial, as integrais foram estimadas usando a regra dos trapézios. Algumas adaptações do procedimento padrão foram feitas para este tipo particular de equação.

Para uma função genérica  $u(x, t)$ , primeiramente definimos os pontos  $0 < x_i < L$  e  $0 < t_n < M$  onde a função  $u(x, t)$  será avaliada, respeitando as seguintes relações:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x = \frac{L}{N}; \quad (5-1)$$

$$t_{n+1} - t_n = \Delta t = \frac{T}{M}, \quad (5-2)$$

onde  $N$  é o total de pontos para a variável  $x$  no intervalo  $[0, L]$  e  $M$  o número de pontos para  $t$  no intervalo  $[0, T]$ . A partir do método de Euler explícito, aproximamos a derivada temporal, bem como as espaciais conforme as relações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (5-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (5-4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad (5-5)$$

com

$$u(x_i, t_n) \equiv u_i^n. \quad (5-6)$$

Dessa forma, é possível discretizar a EFP para a obtenção da solução aproximada numericamente.

Nos testes preliminares constantes do (Capítulo 2), a integração numérica

foi feita na variável  $w$ , enquanto que nos casos não lineares (Capítulo 4) optou-se por uma mudança de variáveis, a fim de diminuir o esforço computacional.

A partir da EFP descrita no Capítulo 3, podemos escrever todos os casos estudados com um ajuste apropriado dos parâmetros. Numa forma mais compacta, a Eq. (3-1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 D}{\partial w^2} - \frac{\partial C}{\partial w}, \quad (5-7)$$

onde  $C$  e  $D$  são:

$$C \equiv C(w, t) = f(w, t)P, \quad (5-8)$$

$$D \equiv D(w, t) = \frac{1}{2} (w^2 A + B) P. \quad (5-9)$$

com  $A$ ,  $B$  e  $f(w, t)$  definidos conforme as Eqs. (2-2), (2-3) e (3-2), respectivamente. A Eq. (5-7) discretizada tem a seguinte forma:

$$P_i^{n+1} = P_i^n + r_2 (D_{i+1}^n - 2D_i^n + D_{i-1}^n) - r_1 (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n), \quad (5-10)$$

onde

$$r_1 = \frac{\Delta t}{2\Delta w}, \quad (5-11)$$

$$r_2 = \frac{\Delta t}{\Delta w^2}. \quad (5-12)$$

Em todos os casos, as integrais acima foram estimadas numericamente usando o método do trapézio [32].

As expressões para os estudos preliminares mostrados no Capítulo 2 foram obtidas escolhendo apropriadamente  $f(w, t)$  na Eq. (5-8), para então usar o resultado na Eq. (5-10). No caso sem taxação  $f(w, t) = 0$ , enquanto que no caso linear  $f(w) = \chi(\bar{w} - w)$ .

Para os casos não lineares (Capítulo 4), foi feita inicialmente a seguinte mudança de variáveis:

$$w = -\ln(1 - y). \quad (5-13)$$

A qual leva univocamente o domínio do intervalo  $[0, +\infty)$  para o intervalo  $[0, 1)$  [30]. Dessa forma, as Equações (2-2), (2-3), (2-5) e (3-2) tornam-se,

respectivamente:

$$A(y, t) = \int_y^\infty \frac{P(w(x), t)}{1-x} dx, \quad (5-14)$$

$$B(y, t) = \int_0^y \frac{\ln^2(1-x)}{1-x} P(w(x), t) dx, \quad (5-15)$$

$$\bar{w} = - \int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{(1-y)} P(w(y), t) dy, \quad (5-16)$$

$$f(y, t) = \chi \left( \beta(t) \bar{w} - \gamma(t) g(w(y)) \right). \quad (5-17)$$

Lembre que,  $\gamma(t)$  (ou  $\beta(t)$ , dependendo do esquema utilizado) deve ser obtido usando a colortéal Eq. (3-9) (ou a Eq. (3-12)), para garantir a conservação da riqueza total. Esta etapa não existe no caso linear, em que o arrasto médio é nulo por definição.

Além disso, considerando a condição de normalização e sem perda de generalidade, a Eq. (2-4) torna-se:

$$\int_0^1 \frac{P(w(y), t)}{1-y} dy = 1. \quad (5-18)$$

Para uma função  $\hat{f} \equiv \hat{f}(w(y))$ , pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \omega} = \frac{\partial y}{\partial \omega} \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial \omega}{\partial y}} \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = (1-y) \frac{\partial \hat{f}}{\partial y}, \quad (5-19)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \omega} \right] = (1-y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-y) \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} \right] \quad (5-20)$$

$$= (1-y) \left[ -\frac{\partial \hat{f}}{\partial y} + (1-y) \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} \right]. \quad (5-21)$$

A partir dessas relações, podemos reescrever a Eq. (3-1) como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (1-y) \frac{\partial C}{\partial y} = (1-y) \left\{ (1-y) \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial y} \right\}, \quad (5-22)$$

com  $C$  e  $D$  da seguinte forma:

$$C \equiv C(y, t) = f(y, t) P, \quad (5-23)$$

$$D \equiv D(y, t) = \frac{1}{2} \left( \ln^2(1-y) A + B \right) P. \quad (5-24)$$

Com base nas Eqs. (5-3), (5-4) e (5-5), discretizamos a Eq. (5-22):

$$P_i^{n+1} = P_i^n - l(1-y_i)(E_{i+1}^n - E_{i-1}^n) + m(1-y_i)^2(D_{i+1}^n - 2D_i^n + D_{i-1}^n), \quad (5-25)$$

onde

$$E \equiv E(y, t) = C + D, \quad (5-26)$$

$$l = \frac{\Delta t}{2\Delta y}, \quad (5-27)$$

$$m = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}. \quad (5-28)$$

No caso linear por partes, a evolução temporal de  $\gamma$  no esquema I consta na Fig. 5.1a, enquanto que a Fig. 5.1b representa a evolução do índice de Gini. Na hipótese de não existir regulação ( $\chi = 0$ ), ocorreria uma condensação, levando a uma dramática desigualdade, onde  $G$  cresceria monotonicamente. Por outro lado, para  $\chi > 0$ , o índice de Gini se estabiliza. Dependendo da condição inicial, essa estabilidade pode ocorrer após um crescimento de  $G$  (por exemplo, para  $\chi = 0,05$ ), ou até mesmo após um grande decréscimo,

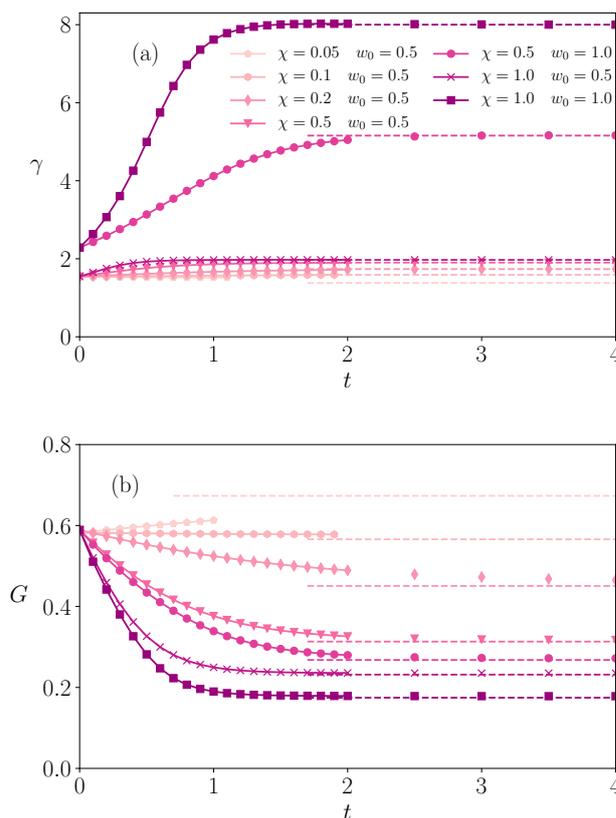


Figura 5.1: (a) **Evolução temporal de  $\gamma$** , a partir da integração numérica da Eq. (3-1), para valores de  $\chi$  e  $w_0$  conforme legenda. O valor de  $\gamma$  para tempos longos coincide com o obtido pela integração direta da Eq. (3-1) no estado estacionário. (b) **Evolução do índice de Gini  $G(t)$** . As linhas tracejadas representam os valores estacionários. O esforço computacional aumenta conforme se aproxima do limite sem arrasto  $\chi = 0$ .

quando  $P(w, t)$  se apresenta mais próxima de uma distribuição igualitária de riqueza para  $\chi$  grande o suficiente. Enquanto o decréscimo inicial depende mais fortemente de  $\chi$ , ao se aproximar do estado estacionário fica cada vez mais evidente a influência de  $w_0$ .

## 5.2

### Estado estacionário

No caso da taxação linear descrita na Seção 2.5, temos  $\beta = \gamma = 1$ , independentemente do valor que  $\chi > 0$  ou o tempo possam assumir, logo o valor estacionário é  $\gamma_s = 1$  (ou  $\beta_s = 1$ ). Nos demais casos, obteve-se o valor estacionário  $\gamma_s$  por meio da integração da forma estacionária da Eq. (3-1), a qual sob a condição de não haver fluxo apresenta-se da forma

$$\frac{1}{2}\mu' - fP = 0, \quad (5-29)$$

onde  $\mu \equiv \mu(w) = (w^2 A + B)P(w)$  e o símbolo “ $\prime$ ” indica a derivada em relação a  $w$ .

A fim de resolver a Eq. (5-29), generalizou-se o método numérico descrito na Ref. [30]. Esse método consiste em separar a Eq. (5-29) nas equações diferenciais acopladas

$$A' = -P = -\mu/(w^2 A + B), \quad (5-30)$$

$$B' = w^2 P = w^2 \mu/(w^2 A + B), \quad (5-31)$$

$$\mu' = 2fP = 2f\mu/(w^2 A + B), \quad (5-32)$$

com as condições iniciais  $A(0) = 1$ ,  $B(0) = \mu(0) = 0$ , em conjunto com a condição de normalização  $A_0 = \lim_{w \rightarrow \infty} A(w) = 0$ . Essa integração apresenta uma dificuldade adicional, devido ao comportamento singular de  $P(w)$  próximo da origem, o qual pode ser descrito como [28]:

$$P(w) \simeq \frac{C}{w^2} \exp\left(2 \int^w \frac{f(x)}{x^2} dx\right), \quad (5-33)$$

onde  $C$  é uma constante. Usa-se  $P(\delta w)$ ,  $A = 1$  e  $B = 0$ , integrando-se o conjunto de equações diferenciais (5-30), (5-31) e (5-32), no intervalo  $[\delta w, 1)$ , onde  $\delta w \ll 1$ . Ainda assim, essa condição inicial depende de  $C$ , que deve ser determinado a partir da condição de normalização  $A_0 = \lim_{w \rightarrow \infty} A(w) = 0$ . A partir do gráfico de  $A_0(C)$  vs.  $C$ , usando o método de Newton-Raphson (NR) dentro de um laço iterativo,  $C$  pode ser determinado, resolvendo-se  $A(C) = 0$ , que possui uma única raiz. Esse é, essencialmente, o procedimento descrito anteriormente para o caso linear [30].

No caso não linear, ainda é necessário determinar o valor de  $\gamma_s$  (esquema

I) ou  $\beta_s$  (esquema II) que define  $f(w)$ , com a condição de conservar a riqueza média  $\bar{w}$ . Então, um segundo laço NR deve ser realizado (além do usado no caso linear) para encontrar o valor correto de  $\gamma_s$  ou  $\beta_s$  para cada valor de  $C$  que entra no primeiro laço. Na integração numérica, utilizou-se a mesma mudança de variáveis descrita pela Eq. (5-13). As soluções estacionárias  $P_s(w)$  obtidas usando o procedimento aqui descrito coincidem com as soluções para instantes de tempo muito longos obtidas pela integração numérica da EFP dependente do tempo, como ilustram os gráfico inseridos das Figs. 4.1 e 4.4.

Na Fig. 5.2, é possível observar o valor estacionário  $\gamma_s$  para diversos valores de  $\chi$  com  $\beta = 1$  (esquema I), em função de  $w_0$  (a) e  $\alpha$  (b).

Em (a), a partir de  $w_0 = 0$  (caso linear) temos  $\gamma_s = 1$ , aumentando até divergir quando  $w_0$  atinge um valor crítico  $w_{0c}$ , indicado pelas linhas verticais tracejadas, de acordo com a escala  $\gamma_s \sim (w_{0c} - w_0)^{-2}$ . Essa divergência implica o truncamento de  $P(w, t)$  no valor crítico  $w_{0c}$ , como mostra a Fig. 4.2.

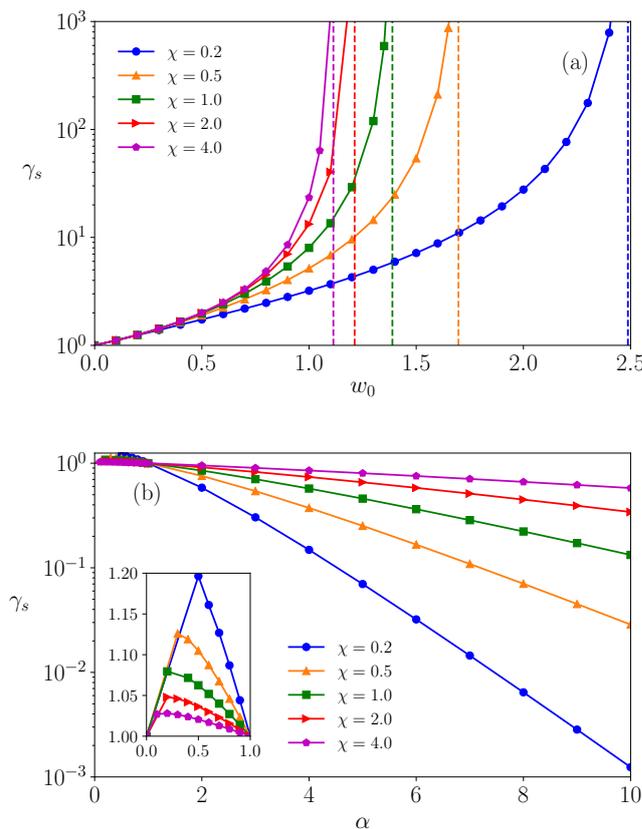


Figura 5.2: Valor estacionário de  $\gamma$  em função de  $w_0$  (a) e  $\alpha$  (b), para diferentes valores de  $\chi$  indicados na legenda. Em (a), as linhas verticais tracejadas indicam a assíntota. Em (b), a região próxima da origem aparece de forma ampliada no gráfico inserido. As linhas cheias servem apenas como guia.

Em (b), para o caso  $g(w) = w^\alpha$ , o coeficiente  $\gamma$  estacionário atua de forma diferente. Inicialmente a curva aumenta desde  $\gamma_s = 1$  até um valor máximo, para então cair exponencialmente até zero. Quando  $\alpha = 1$  (caso linear), então  $\gamma_s = 1$ .

No caso  $\alpha = 0$ , a partir da Eq. (4-2), temos  $\gamma = \bar{w}$  (= 1 nos casos estudados). Consequentemente, o termo de arrasto com o mecanismo redistributivo se anula, retornando a dinâmica ao caso sem taxaço, quando o sistema se torna uma oligarquia dos mais ricos para tempos muito longos, concomitantemente com uma fase condensada dos mais pobres (ver gráfico inserido da Fig. 5.2). O esforço computacional aumenta ao se aproximar do limite em que não há mais arrasto.

## 6

### Conclusões

Há diversas evidências mostrando que o livre mercado conduz a uma completa oligarquia dos mais ricos [11, 25, 26, 33]. Assim sendo, entende-se que a regulação da economia seja uma possível solução para o problema da desigualdade [25, 35]. De forma geral, os resultados aqui obtidos vão ao encontro dessa ideia, revelando também nuances ainda não descritas na literatura, diretamente relacionadas com o tipo de não linearidade incorporada na regulação.

No esquema I, constatamos que o parâmetro  $\chi$  tem relação direta com o estreitamento da FDP em torno da média, enquanto que o surgimento de FDPs bimodais, regiões de uniformidade e inversão de assimetria são características mais ligadas ao tipo de não linearidade expressa pela função de arrecadação  $g(w)$ . Nos estados estacionários, para valores extremos de  $w_0$ , formam-se máximos agudos seguidos de quedas abruptas em  $w \rightarrow w_0$  (Fig. 4.2), enquanto que as camadas de extrema pobreza são suprimidas, indicando um fluxo de riqueza dos mais ricos para os mais pobres. Obteve-se resultados similares para  $g(w) = w^\alpha$  com  $\alpha > 1$  (arrecadação progressiva), apesar disso, as curvas apresentaram maior suavidade em comparação com o caso linear por partes, principalmente quando se comparam FDPs para valores de  $w_0$  e  $\alpha$  relativamente grandes. Analisando os percentis correspondentes às classes econômicas (Tabelas 4.1 e 4.2) observa-se que a classe média é pouco afetada pelo aumento dos parâmetros  $\chi$ ,  $w_0$  e  $\alpha$ , enquanto que os mais pobres experimentam um aumento significativo e os mais ricos uma considerável queda em seus ativos. A diferença de suavidade entre as curvas nas duas formas de tributação fica mais pronunciada na faixa dos 10% mais ricos. Nessa faixa de riqueza em especial observamos que valores maiores de  $\chi$  potencializam o efeito do aumento do limiar de exceção tributária  $w_0$ , enquanto que para o caso da lei de potência o aumento de  $\chi$  torna a distribuição cada vez menos sensível ao aumento de  $\alpha$ . Devido ao elevado esforço computacional necessário (associado à tendência a concentrar a população na região de mais baixa riqueza), não foi possível obter as evoluções temporais para  $\alpha < 1$ , porém a partir dos casos estacionários, identificou-se também nessa faixa de valores, a semelhança com o caso linear por partes já descrita.

Para o esquema II, foram obtidas relações de correspondência com o esquema I, no caso estacionário, impondo-se igual arrasto  $f_I(w) = f_{II}(w)$ . A importância desse resultado reside na possibilidade de obtenção de um mesmo estado estacionário por dois caminhos distintos, optando-se pela rapidez de um processo com elevada carga tributária ou por uma lenta transição até o estado estacionário com tributação reduzida.

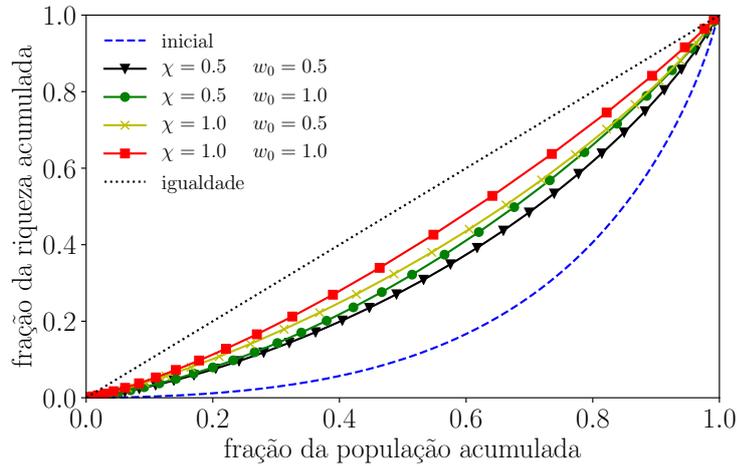


Figura 6.1: **Curvas de Lorenz para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$ .** A curva tracejada azul corresponde à distribuição inicial ( $G \approx 0.59$ ), enquanto a igualdade total é indicada pela linha pontilhada preta ( $G = 0$ ). Todos os casos se referem ao estado estacionário.

Observando-se o índice de Gini (Figs. 4.3a e 4.6a), bem como as curvas de Lorenz (Fig. 6.1) do esquema I, é possível concluir que a desigualdade diminui com o aumento dos parâmetros  $\chi$ ,  $w_0$  e  $\alpha$ . Por outro lado, os resultados obtidos no esquema II para taxaço linear por partes indicam que a modula o do montante distribuído, além de não promover redu o da desigualdade, pode elevar o índice de Gini quando consideramos valores suficientemente grandes de  $w_0$  (Fig. 4.9a). Já no caso lei de potência (Fig. 4.9b) os resultados são semelhantes aos obtidos no esquema I.

Trabalhos futuros podem contemplar mais generaliza es, usando por exemplo, uma fun o de redistribuiço dependente de  $w$ . Sistemas que não conservam  $W$  poderiam refletir o efeito de fuga de capital quando a parcela mais rica da popula o sofre tribut o em excesso, ou entrada e saída de capital estrangeiro de acordo com a atratividade da economia. Riqueza total variável pode ter também origem interna, como na produ o de valor através do trabalho. Do mesmo modo, sistemas com  $N$  variável poderiam refletir processos de imigra o e emigra o, assim como a variabilidade demográfica. Apesar do modelo aqui utilizado servir como base para que se tenha um panorama da redistribuiço da riqueza, são necessárias adapta es mais precisas quando se

pretende reproduzir dados reais da economia. Nesse sentido de adaptações realistas, trabalhos como a Ref. [22] podem ser um bom ponto de partida, pois já mostram grande acurácia na reprodução de dados empíricos.

## Referências bibliográficas

- [1] ATKINSON, A. B.; BOURGUIGNON, F.. **Handbook of income distribution**, volumen 2. Elsevier, 2014.
- [2] PARETO, V.. **The mind and society [trattato di sociologia generale](4 vols)**, trans. A. Bongiorno and A. Livingston, London: Jonathan Cape, 1935.
- [3] HEGYI, G.; NÉDA, Z. ; AUGUSTA SANTOS, M.. **Wealth distribution and Pareto’s law in the hungarian medieval society**. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380:271 – 277, 2007.
- [4] JAGIELSKI, M.; CZYŻEWSKI, K.; KUTNER, R. ; STANLEY, H. E.. **Income and wealth distribution of the richest norwegian individuals: An inequality analysis**. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 474:330 – 333, 2017.
- [5] KLASS, O. S.; BIHAM, O.; LEVY, M.; MALCAI, O. ; SOLOMON, S.. **The forbes 400 and the Pareto wealth distribution**. *Economics Letters*, 90(2):290 – 295, 2006.
- [6] NEWMAN, M.. **Power laws, pareto distributions and zipf’s law**. *Contemporary Physics*, 46(5):323–351, 2005.
- [7] MUNDIAL, B.. **Poverty and shared prosperity 2018: piecing together the poverty puzzle**. <https://www.worldbank.org/en/publication/poverty-and-shared-prosperity>, 2018. acessado em 11/09/2020.
- [8] CONCEIÇÃO, P.. **Human Development Report 2019: Beyond Income, Beyond Averages, Beyond Today: Inequalities in Human Development in the 21st Century**. United Nations Development Programme, 2019.
- [9] SUISSE, C.. **Global wealth report 2019, Credit Suisse Research Institute**. <https://www.credit-suisse.com/about-us/en/reports-research/global-wealth-report.html>, 2019. Acessado em 11/09/2020.

- [10] **List of countries by wealth equality.** [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_countries\\_by\\_wealth\\_equality](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_wealth_equality), Aug 2020. Acessado em 11/10/2020.
- [11] BOGHOSIAN, B. M.. **Is inequality inevitable?** <https://www.scientificamerican.com/article/is-inequality-inevitable/>, Nov 2019. Acessado em 12/09/2020.
- [12] PIKETTY, T.. **Le capital au XXIe siècle.** Le Seuil, 2013.
- [13] ANGLE, J.. **The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth.** *Social Forces*, 65(2):293–326, 1986.
- [14] PATRIARCA, M.; HEINSALU, E. ; CHAKRABORTI, A.. **Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems.** *The European Physical Journal B*, 73(1):145–153, 2010.
- [15] CHATTERJEE, A.; YARLAGADDA, S. ; CHAKRABARTI, B. K.. **Econophysics of wealth distributions: Econophys-Kolkata I.** Springer Science & Business Media, 2007.
- [16] ISPOLATOV, S.; KRAPIVSKY, P. L. ; REDNER, S.. **Wealth distributions in asset exchange models.** *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 2(2):267–276, 1998.
- [17] BURDA, Z.; WOJCIESZAK, P. ; ZUCHNIAK, K.. **Dynamics of wealth inequality.** *Comptes Rendus Physique*, 20(4):349–363, 2019.
- [18] CARDOSO, B.-H. F.; GONÇALVES, S. ; IGLESIAS, J. R.. **Wealth distribution models with regulations: Dynamics and equilibria.** *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 551:124201, Aug 2020.
- [19] DE OLIVEIRA, P. M. C.. **Rich or poor: Who should pay higher tax rates?** *EPL (Europhysics Letters)*, 119(4):40007, aug 2017.
- [20] DE ALMEIDA, J. R. I. R. M. C.. **Entropy and equilibrium state of free market models.** *The European Physical Journal B / Condensed Matter and Complex Systems*, 85, 03 2012.
- [21] MOUKARZEL, C.-F.; GONÇALVES, S.; IGLESIAS, J.-R.; RODRÍGUEZ-ACHACH, M. ; HUERTA-QUINTANILLA, R.. **Wealth condensation in a multiplicative random asset exchange model.** *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):75–79, 2007.

- [22] LI, J.; BOGHOSIAN, B. M. ; LI, C.. **The affine wealth model: An agent-based model of asset exchange that allows for negative-wealth agents and its empirical validation.** *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 516:423–442, 2019.
- [23] DRAGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M.. **Statistical mechanics of money.** *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 17(4):723–729, 2000.
- [24] CHORRO, C.. **A simple probabilistic approach of the yard-sale model.** *Statistics & Probability Letters*, 112:35–40, 2016.
- [25] FERNHOLZ, R.; FERNHOLZ, R.. **Instability and concentration in the distribution of wealth.** *Journal of economic Dynamics and Control*, 44:251–269, 2014.
- [26] CHAKRABORTI, A.. **Distributions of money in model markets of economy.** *International Journal of Modern Physics C*, 13(10):1315–1321, 2002.
- [27] HAYES, B.. **Computing science: Follow the money.** *American Scientist*, 90(5):400–405, 2002.
- [28] BOGHOSIAN, B. M.. **Kinetics of wealth and the Pareto law.** *Physical Review E*, 89(4):042804, 2014.
- [29] BOGHOSIAN, B.. **Fokker–Planck description of wealth dynamics and the origin of Pareto’s law.** *International Journal of Modern Physics C*, 25(12):1441008, 2014.
- [30] BOGHOSIAN, B. M.; DEVITT-LEE, A.; JOHNSON, M.; LI, J.; MARCQ, J. A. ; WANG, H.. **Oligarchy as a phase transition: The effect of wealth-attained advantage in a Fokker–Planck description of asset exchange.** *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 476:15–37, 2017.
- [31] LI, J.; BOGHOSIAN, B. M.. **Duality in an asset exchange model for wealth distribution.** *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 497:154 – 165, 2018.
- [32] TEUKOLSKY, S. A.; FLANNERY, B. P.; PRESS, W. ; VETTERLING, W.. **Numerical recipes in c.** *SMR*, 693(1):59–70, 1992.

- [33] BOGHOSIAN, B. M.; JOHNSON, M. ; MARCQ, J. A.. **An h theorem for Boltzmann's equation for the yard-sale model of asset exchange.** *Journal of Statistical Physics*, 161(6):1339–1350, 2015.
- [34] LIMA, H.; VIEIRA, A. R. ; ANTENEODO, C.. **Nonlinear redistribution of wealth from a Fokker-Planck description.** arXiv preprint arXiv:2007.11680, 2020.
- [35] NGUYEN, T. V.; KHIEU, H.. **Does a global wealth tax reduce inequality? when Piketty meets Mankiw.** *Research in Economics*, 74(2):119 – 130, 2020.
- [36] RISKEN, H.. **The Fokker Planck Equation: Methods of solution and applications**, ser. Springer series in synergetics, 16, 1996.

## A

### Derivação da equação de Fokker-Planck a partir do MVQ

Podemos encontrar em alguns trabalhos de Boghosian [28, 29] descrições detalhadas da obtenção da EFP para o MVQ por diferentes abordagens. Uma reprodução de uma dessas descrições [29] será apresentada a seguir, com pequenas adaptações para este trabalho.

No MVQ, assume-se que a riqueza trocada em cada negociação seja uma fração  $\varepsilon \ll 1$  do montante do mais pobre (limite de pequenas transações) [28]. Então, o valor trocado entre dois agentes, com riquezas  $w$  e  $w'$ , pode ser definido assim:

$$\Delta(w, w', r) = \varepsilon r \min(w, w'), \quad (\text{A-1})$$

onde a função  $\min(w, w')$  representa a riqueza do mais pobre dos dois agentes que negociam. A variável aleatória  $r$  somente pode assumir os valores -1 e 1, com probabilidade 1/2. Podemos reescrever a Eq. A-1 como:

$$\Delta(w, w', r) = \varepsilon r [w\Theta(w' - w) + w'\Theta(w - w')], \quad (\text{A-2})$$

onde  $\Theta$  é a função degrau de Heaviside (Eq. 3-4).

Quando a quantidade  $w$  varia em pequenos passos aleatórios  $\Delta$  (aproximado como um ruído branco gaussiano), sua FDP,  $P(w, t)$ , obedece uma EFP [36],

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w} [M_1 P] + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[ \frac{M_2}{2} P \right], \quad (\text{A-3})$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são o primeiro e o segundo momentos da distribuição dos passos  $\Delta$ , respectivamente. O primeiro termo à direita da Eq. A-3 refere-se ao arrasto, ao passo que o segundo está relacionado à difusão. A riqueza  $w$  de um agente após uma transação possui duas fontes de estocasticidade. Uma delas, a riqueza  $w'$  do outro agente envolvido, é sorteada através da FDP  $P(w')$ , enquanto que a outra é a variável aleatória  $r$ , para a qual definimos a FDP

$$\eta(r) = \frac{\delta(r - 1) + \delta(r + 1)}{2}, \quad (\text{A-4})$$

onde  $\delta$  refere-se à distribuição delta de Dirac, de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(r) dr = 1. \quad (\text{A-5})$$

Definimos ainda o primeiro momento de uma função  $h(w', r)$  sobre essas duas fontes de estocasticidade como

$$\langle h \rangle = \int_0^\infty dw' P(w') \int_{-\infty}^{+\infty} h(w', r) \eta(r) dr. \quad (\text{A-6})$$

A partir da Eq. A-6, podemos obter os valores de  $M_1$  e  $M_2$ :

$$M_1 = \int_0^\infty dw' P(w') \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(w, w', r) \eta(r) dr \quad (\text{A-7})$$

$$= \int_0^\infty dw' P(w') \frac{\Delta(w, w', +1) + \Delta(w, w', -1)}{2} = 0, \quad (\text{A-8})$$

$$M_2 = \int_0^\infty dw' P(w') \int_{-\infty}^{+\infty} [\Delta(w, w', r)]^2 \eta(r) dr \quad (\text{A-9})$$

$$= \int_0^\infty dw' P(w') \frac{[\Delta(w, w', -1)]^2 + [\Delta(w, w', +1)]^2}{2} \quad (\text{A-10})$$

$$= \varepsilon^2 \int_0^\infty dw' P(w') [w\Theta(w' - w) + w'\Theta(w - w')]^2 \quad (\text{A-11})$$

$$= \varepsilon^2 \int_0^\infty dw' P(w') [w^2\Theta(w' - w) + w'^2\Theta(w - w')] \quad (\text{A-12})$$

$$= \varepsilon^2 \int_w^\infty dw' P(w') w^2 + \varepsilon^2 \int_0^w dw' P(w') w'^2 \quad (\text{A-13})$$

$$= \varepsilon [w^2 A(w) + B(w)], \quad (\text{A-14})$$

onde  $A(w)$  e  $B(w)$  são integrais definidas a seguir.

$$A(w) \equiv \int_w^\infty dw' P(w') \quad (\text{A-15})$$

é a densidade acumulada complementar, ou seja a densidade para a riqueza maior ou igual a  $w$ , sendo

$$\int_0^\infty dw' P(w') = 1 \quad (\text{A-16})$$

a condição de normalização.

$B(w)$  representa o segundo momento incompleto, definido como

$$B(w) \equiv \int_0^w dw' P(w') w'^2. \quad (\text{A-17})$$

Assim, finalmente, podemos reescrever a Eq. A-3 da forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} [(w^2 A + B) P]. \quad (\text{A-18})$$

Essa equação é idêntica à Eq. 2-1, a menos de um fator  $\varepsilon^2$ , o qual pode ser absorvido na escala de tempo.

A Eq. A-18 pode ser modificada incluindo-se um termo de arrasto, a fim de representar o modelo com redistribuição. Para isso, primeiramente definiremos a função  $\tilde{f}(w)$ , similar à Eq. 3-2:

$$\tilde{f}(w) = \tau (\beta \bar{w} - \gamma g(w)), \quad (\text{A-19})$$

onde  $\tau$  é a alíquota aplicada e os demais parâmetros são os mesmos da Eq. 3-2. Sua contribuição aparece apenas no termo de arrasto da EFP, obtendo

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w} [\tilde{f}P] + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} [(w^2 A + B) P]. \quad (\text{A-20})$$

Absorvendo  $\varepsilon^2$  na escala de tempo e definindo a alíquota por unidade de tempo na nova escala como

$$\chi = \frac{\tau}{\varepsilon^2}, \quad (\text{A-21})$$

podemos finalmente reescrever a Eq. A-3, obtendo-se

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial w} [fP] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} [(w^2 A + B) P], \quad (\text{A-22})$$

que de fato é a Eq. 3-1.

## B

### Gráficos complementares

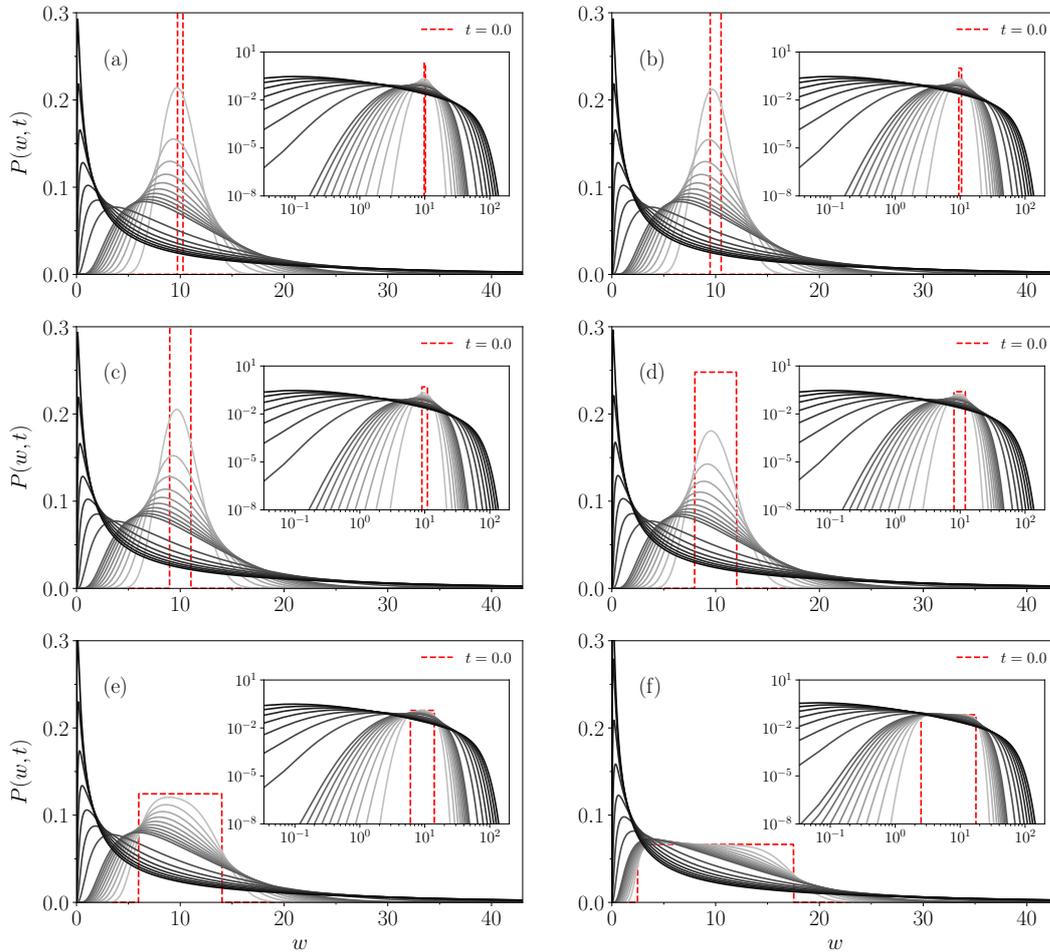
#### B.1

##### MVQ sem taxaço

Na Fig. B.1 são apresentados os resultados da evoluço temporal do MVQ sem taxaço, considerando diferentes distribuçoes iniciais  $P_0(w)$ , desde distribuçoes de riqueza prximas da igualdade (Fig. B.1a), até casos com uma ampla regiao de uniformidade (Fig. B.1f). Os casos descritos são testes complementares àqueles da Fig. 2.7, executados com a finalidade de verificar como uma FDP  $P_0(w)$  poderia afetar a evoluço de  $P(w, t)$ .

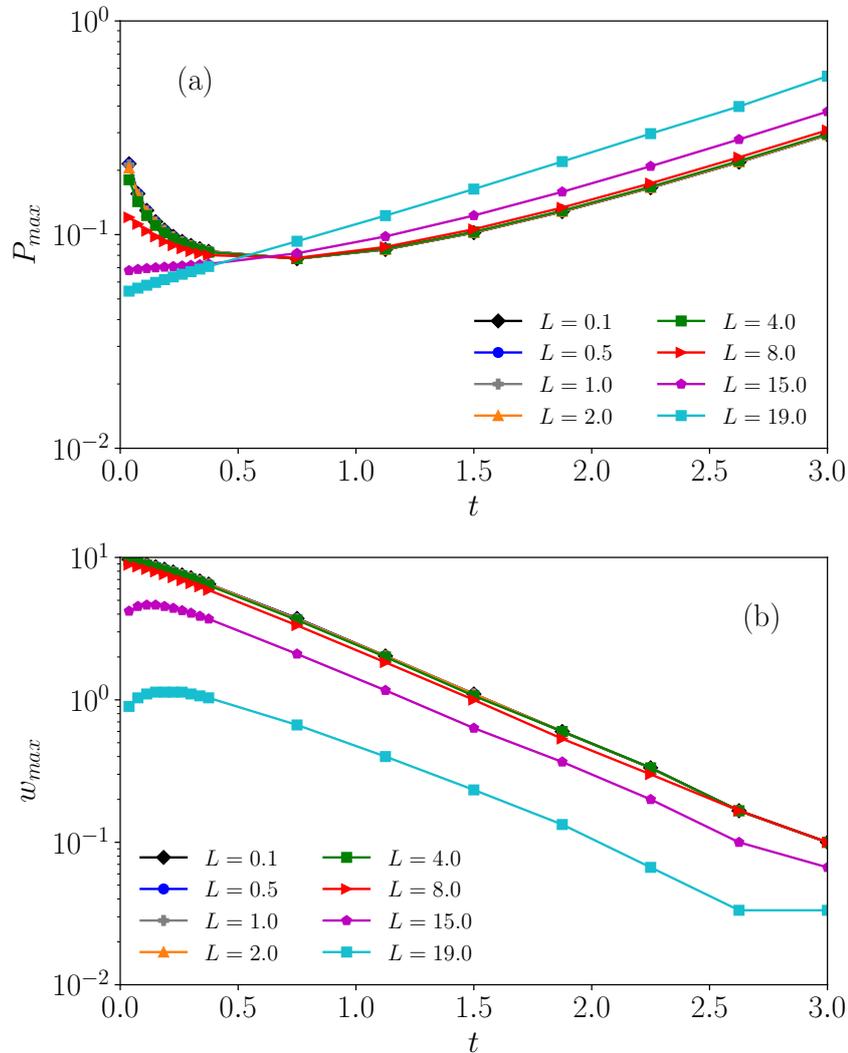
Observando as curvas da Fig. B.1 percebe-se uma tendéncia à concentraço de  $P(w, t)$  prxima à origem, independentemente da distribuço inicial  $P_0(w)$ . Tal comportamento fica ainda mais claro quando verificamos o aumento exponencial dos máximos  $P_{max}$  para diversos valores de  $L$  e  $t > 1$  (Fig. B.2a), juntamente com uma queda também exponencial da moda  $w_{max}$  (Fig. B.2b). Em geral pode-se dizer que a variaço do parâmetro  $L$  tem pouca influência no comportamento de  $P(w, t)$ . Apenas nos casos em que a regiao de uniformidade se inicia prxima da origem (e.g.,  $L = 15$  e  $L = 19$ ), a moda assume sempre valores notadamente menores em comparaço ao que ocorre para os demais valores de  $L$ .

Em todos esses casos (Figs. 2.7 e B.1), a integraço numérica foi truncada num limite máximo  $w = w_{max}$ , uma vez que o limite superior é no infinito. O valor de  $w_{max}$  foi estabelecido de forma que, respeitando-se a relação  $\lim_{w \rightarrow \infty} A(w) = 0$ , fosse possível obter resultados com menor esforço computacional. Nos estudos subsequentes foi usada uma mudanço de variável adequada para tratar o tamanho infinito da faixa de integraço.



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1812662/CA

Figura B.1: **Evolução temporal da FDP da riqueza  $P(w, t)$  da Eq. (2-1) para diferentes tipos de distribuições iniciais  $P_0(w)$ .** Após  $t = 0$ , a evolução ocorre da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta t = 3/80$  para  $3/80 \leq t \leq 27/80$  e a cada  $\Delta t = 3/8$  para  $3/8 \leq t \leq 3$ . Em todos os casos  $P_0(w) = 0$  exceto na região  $w_c - \frac{L}{2} < w < w_c + \frac{L}{2}$ , onde  $w_c = 10$  e  $L = 0,5$  (a), 1 (b), 2 (c), 4 (d), 8 (e) e 15 (f). Nos gráficos inseridos são representadas as mesmas curvas em escala log-log.

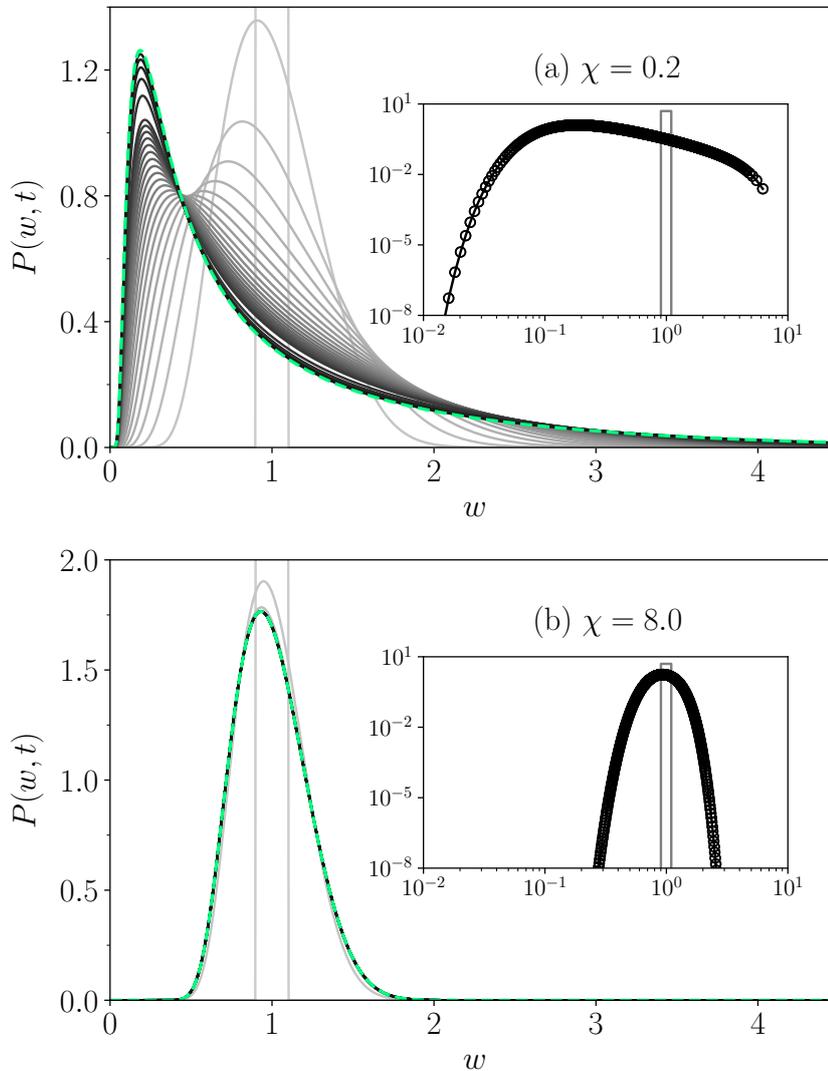


PUC-Rio - Certificação Digital N° 1812662/CA

Figura B.2: **Efeito da mudança do parâmetro  $L$  das FDPs iniciais  $P_0(w)$  para o MVQ sem taxaço.** As figuras mostram a evolução do valor máximo de  $P(w, t)$  (a) e da moda (b) para diferentes valores de  $L$ . Assim como nas Figs. B.1 e 2.7,  $L$  representa o tamanho da região de uniformidade da distribuição inicial  $P_0(w)$ . As PDFs para  $L = 0,1$  e  $L = 19$  constam nas Figs. 2.7a e 2.7b, respectivamente. As Figs. (a) e (b) apresentam os mesmos instantes de tempo das Figs. B.1 e 2.7, exceto  $t = 0$ , onde não há um único ponto de máximo.

**B.2**  
**MVQ com taxação linear**

No Cap. 2, foram apresentados diversos testes para o MVQ com taxação linear. Como dito anteriormente, o objetivo de tais testes era tão somente aferir o método utilizado por meio da reprodução de resultados já descritos na literatura [30], como controle.



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1812662/CA

Figura B.3: **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  com taxação linear**, integrando numericamente a Eq. (2-15) partindo de uma FDP inicial  $P_0(w)$  aproximadamente igualitária. As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (2-15). No gráfico inserido, em escala logarítmica, a linha mais clara corresponde ao instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura a  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à distribuição estacionária da Eq. (2-15) obtida diretamente.

A fim de obter os dados de forma mais eficiente, verificou-se primeiramente a validade do método comparando resultados estacionários obtidos diretamente com seus correspondentes constantes no trabalho de Boghosian [30], uma vez que, de modo geral, a obtenção direta dos dados para os estados estacionários demanda menor esforço computacional se comparada com a curva para tempos longos, seguindo a evolução temporal. Os testes reproduziram os resultados esperados, validando o modelo para obtenção dos estados estacionários.

Num segundo momento, objetivou-se verificar a validade do método para obtenção da evolução temporal, comparando as curvas para tempos suficientemente longos com aquelas obtidas por integração direta dos casos estacionários. A Fig. B.3 comprova a validade do método de obtenção da evolução temporal, onde em todos os casos analisados, as curvas para tempos longos concordam perfeitamente com as correspondentes estacionárias fruto da integração direta.

### B.3 MVQ com taxação não linear

Após a validação dos métodos para obtenção dos casos estacionários e das evoluções temporais no caso linear, foram feitos ajustes pontuais para adequação aos casos não lineares. Em todos os testes, verificou-se a equivalência das soluções estacionárias com as obtidas para tempos longos. Na Fig. B.4 temos

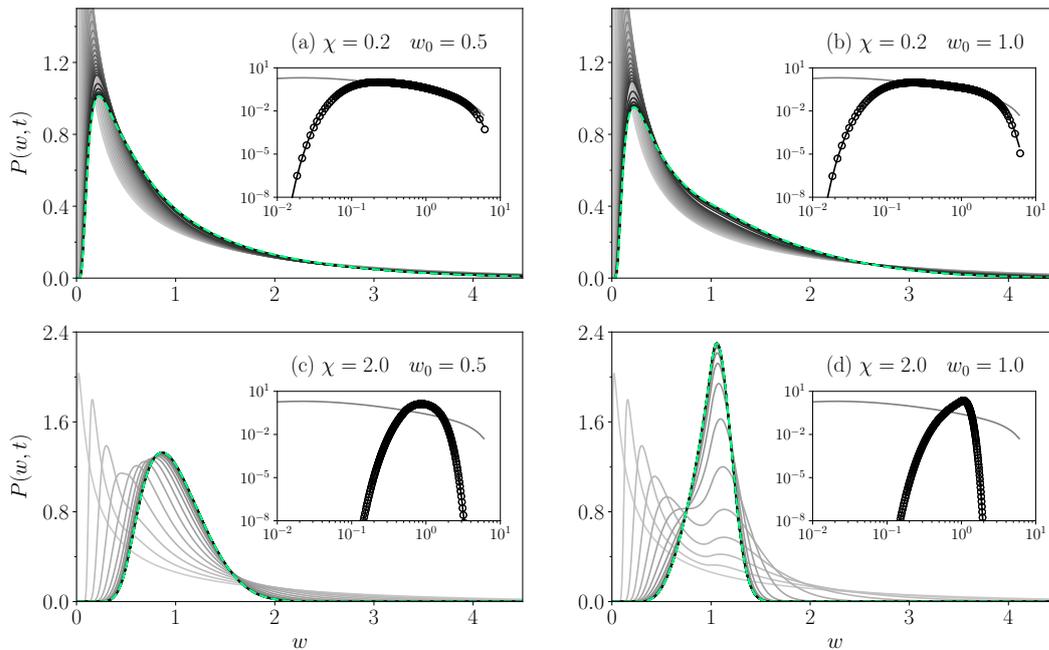


Figura B.4: **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $w_0$** , integrando a Eq. (3-1). As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1). No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocios referem-se à distribuição estacionária da Eq. (3-1).

os resultados complementares para o caso linear por partes. As características já observadas no Capítulo 2 se repetem aqui. Ainda assim, podemos destacar a proximidade entre as curvas a cada instante de tempo quando  $\chi = 0,2$  (Figs. B.4a e B.4b), que significa uma evolução mais lenta até o estado estacionário, em comparação com os casos onde  $\chi$  é 10 vezes maior (Figs. B.4c e B.4d), os quais apresentam curvas mais espaçadas. Nas as distribuições estacionárias para  $\chi = 0,1$  (Fig. B.5a), apesar de não haver  $w_0$  capaz de eliminar as camadas de extrema pobreza, nota-se uma gradativa redução das caudas até o limite onde  $w_0 = 3,6$ , no qual a cauda é eliminada e a FDP truncada em  $w = w_0$ . Nas Figs. B.5b, B.5c e B.5d também ocorre supres-

são gradativa da cauda, porém nesses casos já é possível observar a redução das camadas mais pobres. A assimetria é reduzida gradativamente em termos absolutos (Figs. B.5a-B.5c), até a inversão de sinal (Fig. B.5d).

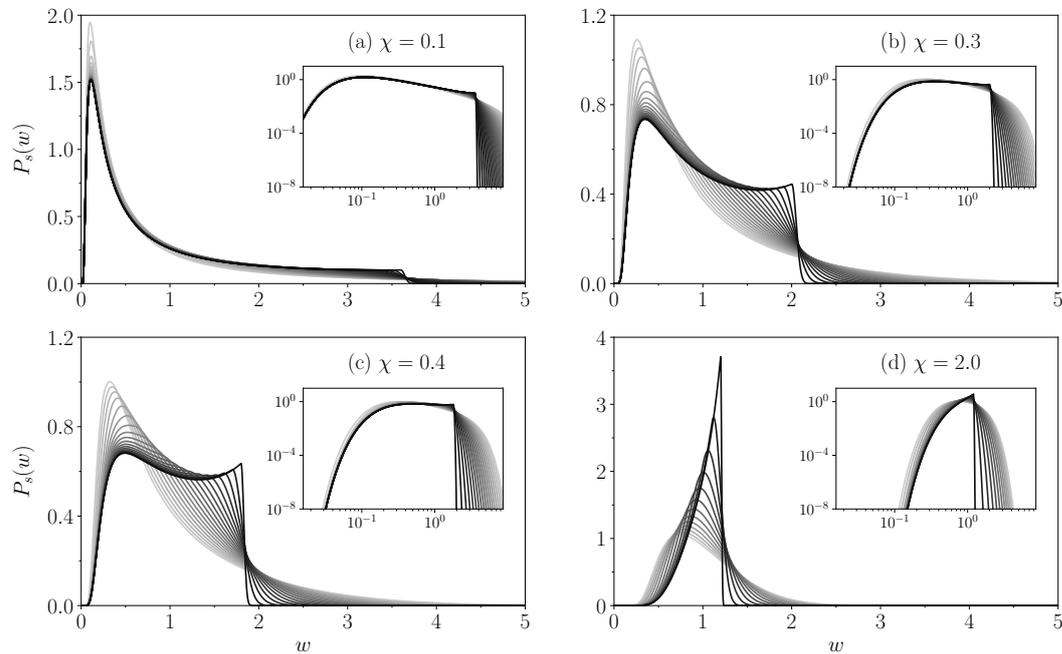


Figura B.5: **Distribuições estacionárias para a Eq. (3-1) no caso  $g(w)$  linear por partes para diferentes valores de  $\chi$ .** Partindo de  $w_0 = 0$ , o limite mínimo de tributação cresce a cada  $\Delta w_0 = 0,1$  da curva mais clara para a mais escura, onde  $w_0 = 3,6$  (a),  $2,0$  (b),  $1,8$  (c) e  $1,2$  (d).

O segundo modelo de taxaço não linear discutido no Capítulo 3 foi o caso lei de potência, para o qual quando  $\alpha > 1$  (caso progressivo) foram obtidos resultados qualitativamente similares aos do caso linear por partes, porém com curvas mais suaves. A Fig. B.6 mostra as evoluções temporais complementares aos casos já vistos no Capítulo 4. Analisando sequencialmente as distribuições estacionárias para  $\alpha = 10$  nas Figs. B.7a-B.7d, podemos observar uma tendência de diminuição do valor absoluto da assimetria, seguida da formação de um platô bem definido para  $0,5 < \chi < 0,6$  (ver Figs. 4.5b e B.7b) e inversão de assimetria (Fig. B.7d).

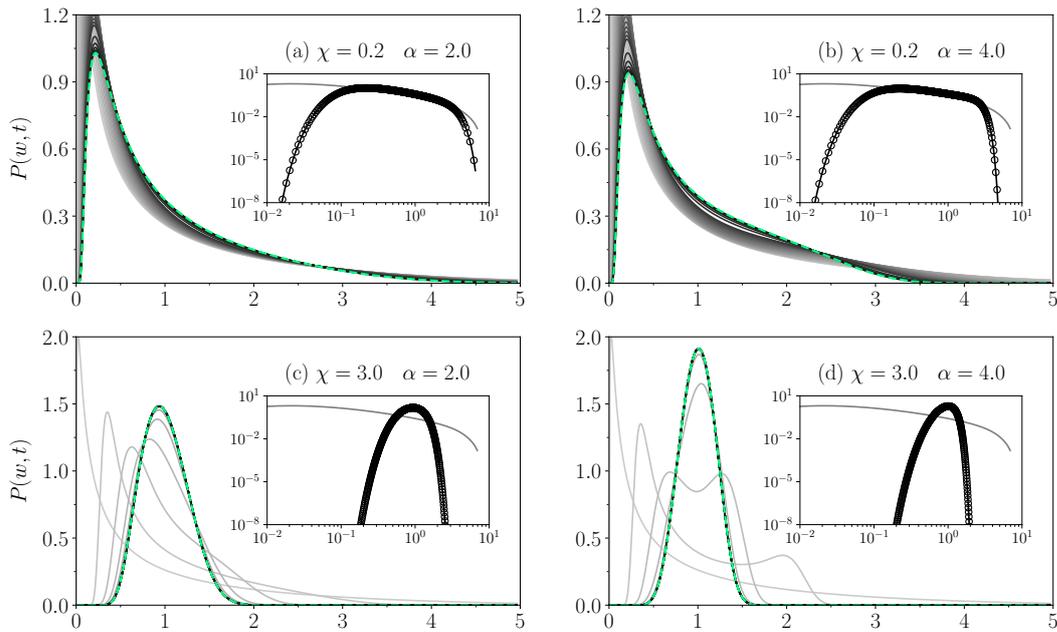


Figura B.6: **Evolução temporal de  $P(w, t)$  para diferentes valores de  $\chi$  e  $\alpha$** , integrando a Eq. (3-1). As distribuições são representadas da curva mais clara para a mais escura, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1$ , para  $0,0 \leq t \leq 2,0$  e a cada  $\Delta t = 0,5$ , para  $2,0 < t < 5,0$ . A curva mais escura corresponde a  $t = 5,0$  que coincide com a solução estacionária (linha verde tracejada) obtida diretamente da Eq. (3-1). No gráfico inserido, temos em escala logarítmica a linha mais clara para o instante inicial  $t = 0,0$  e a mais escura para  $t = 5,0$ . Os círculos ocos referem-se à distribuição estacionária da Eq. (3-1) obtida diretamente.

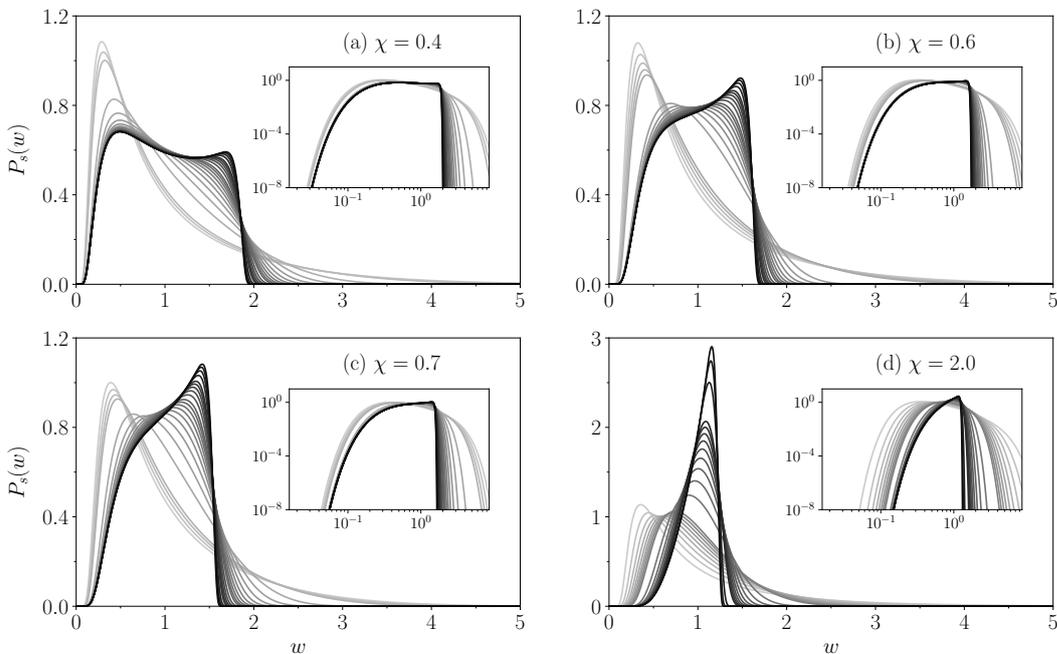


Figura B.7: **Distribuições estacionárias da Eq 3-1 com  $g(w) = w^\alpha$  para diferentes valores de  $\chi$** . Os valores de  $\alpha$  crescem da curva mais clara para a mais escura, a cada  $\Delta\alpha = 0,1$  para  $0,5 \leq \alpha \leq 0,9$  e  $\Delta\alpha = 1$  para  $1 \leq \alpha \leq 10$ .

**B.4****Comparação entre os esquemas I e II**

No Capítulo 3, mostrou-se a relação de equivalência entre casos estacionários dos esquemas I e II. Na Fig. B.8 temos as curvas estacionárias para os esquemas I e II constantes nas Figs. 4.2b e 4.7a, respectivamente. As curvas coincidem perfeitamente, atestando graficamente a validade das Eqs. (3-13), impondo igual arrasto nos dois esquemas.

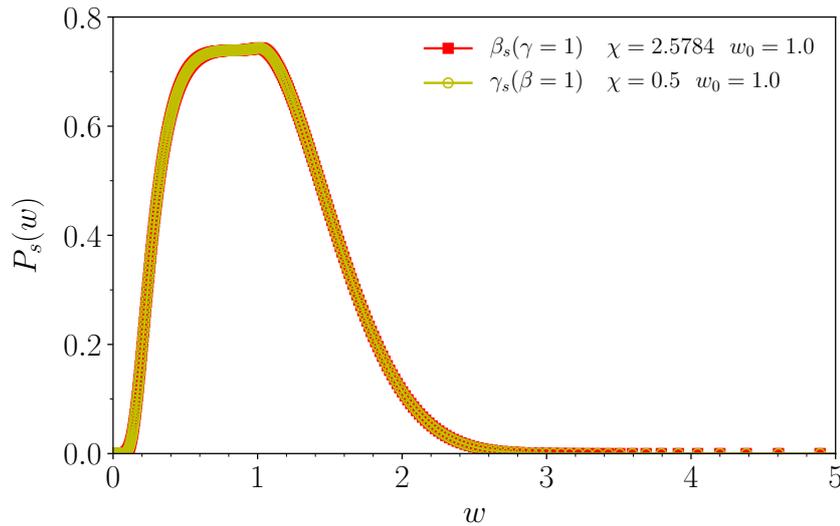


Figura B.8: **Comparação entre os esquemas I e II**, para valores dos parâmetros estacionários, indicados na legenda, seguindo as relações de correspondência na Eq. (3-13).