

**Fernando Alves Rodrigues**

**Comunicação Óptica Adaptativa Baseada em  
Modulação de Polarização**

**Análise de Sistemas Digitais Coerentes**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Guilherme Penello Temporão  
Co-orientador: Prof. Jean Pierre von der Weid

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2020



**Fernando Alves Rodrigues**

**Comunicação Óptica Adaptativa Baseada em  
Modulação de Polarização**

**Análise de Sistemas Digitais Coerentes**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

**Prof. Guilherme Penello Temporão**

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Jean Pierre von der Weid**

Co-orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Jair Adriano Lima Silva**

UFES

**Prof. Sueli Irene Rodrigues Costa**

Unicamp

**Dr. Giancarlo Vilela de Faria**

Ouro Negro Tecnologias

**Dr. Rogerio Passy**

MLS Wireless

Rio de Janeiro, 03 de Fevereiro de 2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Fernando Alves Rodrigues**

Graduou-se em Engenharia Elétrica com Ênfase em Telecomunicações pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro (2003), Especializou-se em Automação e Instrumentação pelo ISES - Instituto Senai de Ensino Superior (2008), Possui Mestrado em Eletromagnetismo Aplicado na área de Comunicações Ópticas pela Pontífice Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio (2010). Atuou como Agente de Fiscalização de Serviços de Telecomunicações da ANATEL (Agência Nacional de Telecomunicações) e atualmente trabalha como Pesquisador Tecnologista em Sistemas de Comunicações do Laboratório de Tempo e Frequência, da DIMCI (Diretoria de Metrologia Científica) do INMETRO.

### Ficha Catalográfica

Rodrigues, Fernando Alves

Comunicação Óptica Adaptativa Baseada em Modulação de Polarização / Fernando Alves Rodrigues; orientador: Guilherme Penello Temporão; co-orientador: Jean Pierre von der Weid. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2020.

v., 263 f: il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontífice Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Fibra Óptica; 3. Luz Polarizada; 4. Modulação de Alta Ordem; 5. Eficiência Espectral; 6. Eficiência Energética; 7. Transmissão Coerente Digital; 8. Taxa Adaptativa; 9. Fibrados de Hopf; 10. Mapeamento de Cascas Esféricas. I. Temporão, Guilherme Penello. II. von der Weid, Jean Pierre. III. Pontífice Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Aos meus orientadores, Professores Guilherme Temporão e Jean Pierre von der Weid pelo apoio, e incentivo para a realização deste trabalho.

Ao Inmetro, representado pela equipe da Divisão de Metrologia em Tecnologia da Informação e Telecomunicações e em particular ao Dr. Rodolfo Saboia pelo apoio fundamental.

Ao Prof. Darli Mello e sua equipe do Laboratório de Comunicações da Unicamp pelo apoio e pela contribuição em relação aos cálculos da informação mútua num canal 4D. É importante creditar que: o método de Monte Carlo que utilizou-se para avaliação da informação mútua foi gentilmente cedido pelo pesquisador Omar Darwiche Domingues.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu pai (in memorian), minha mãe e irmãs.

A minha esposa Claudia, meus filhos Gabriela, Allan e Arthur e meus netos Noah e Gael.

Aos meus colegas da PUC-Rio.

Ao pessoal do departamento de Engenharia Elétrica.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001



## Resumo

Rodrigues, Fernando Alves; Temporão, Guilherme Penello; von der Weid, Jean Pierre. **Comunicação Óptica Adaptativa Baseada em Modulação de Polarização - Análise de Sistemas Digitais Coerentes**. Rio de Janeiro, 2020. 263p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A comunicação por fibras ópticas utiliza diversos modelos herdados dos sistemas de telecomunicações tradicionais. Recentemente, a necessidade de maior controle sobre o fluxo de dados tem atraído muita atenção para as vantagens da comunicação óptica adaptativa. Num sistema de comunicação adaptativo, o fluxo de dados pode ser alterado em função de variações na qualidade do canal ou simplesmente pela necessidade de racionalizar a utilização dos recursos disponíveis. A interoperação entre redes pressiona pela necessidade de uma rede elástica e a expectativa é que este tipo de rede permita o controle sobre vários níveis da estrutura de comunicação. Nesta tese, a análise deste tema se concentra na camada física da rede óptica, em que a elasticidade pode ser obtida através de diferentes técnicas de modulação e multiplexação. A camada física de uma rede óptica adaptativa deve responder a variações e restrições do meio de transmissão. O consumo de energia, por exemplo, é um requisito cada vez mais presente nos projetos das redes de comunicação e a relevância deste requisito tende a aumentar na medida em que as redes ópticas aumentam sua capilaridade. O principal objetivo desta tese é analisar uma solução de comunicação óptica adaptativa que atenda aos requisitos básicos de uma rede elástica. O sistema de comunicação em análise é baseado em modulações realizadas no espaço de sinais de quatro dimensões, também conhecidas como modulações 4D. A perspectiva adotada privilegia a polarização da portadora óptica. A vantagem em adotar esta perspectiva, reside no fato de que ela permite a construção de modulações multidimensionais utilizando os fibrados de Hopf. Conforme será observado, o uso dos fibrados de Hopf em conjunto com o conceito matemático denominado "vértice embutido de politopos", potencializa as soluções de engenharia para o problema da comunicação óptica adaptativa.

## Palavras-chave

Fibra Óptica; Luz Polarizada; Modulação de Alta Ordem; Eficiência Espectral; Eficiência Energética; Transmissão Coerente Digital; Taxa Adaptativa; Fibrados de Hopf; Mapeamento de Cascas Esféricas.

## Abstract

Rodrigues, Fernando Alves; Temporão, Guilherme Penello (Advisor); von der Weid, Jean Pierre (Co-Advisor). **Adaptative Optical Communication Based on Polarization Modulation - Analysis of Digital Coherent Systems**. Rio de Janeiro, 2020. 263p. Tese de doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Fiber-optic communications use several models inherited from traditional telecommunications systems. Recently, the need to improve the control over the data flow has attracted attention to the advantages of adaptive optical communication. In adaptive systems, the data flow can be altered due to changes in the channel quality or simply to rationalize the use of available resources. Interoperation between networks further presses on the need for an elastic network and the expectation is that this type of network will allow control over various levels of the communication structure. In this thesis, the analysis of this theme focuses on the physical layer of the optical network, where elasticity can be obtained through different modulation and multiplexing techniques. The physical layer of an adaptive optical network must respond to variations and restrictions of the transmission medium. Energy consumption, for example, is a requirement that is increasingly present in communication network projects and the relevance of this requirement tends to increase as optical networks expands in capillarity. The main objective of this thesis is to analyze an adaptive optical communication solution that meets the basic requirements of an elastic network. The communication system under analysis is based on the four-dimensional signal space modulations, also known as 4D modulations. The perspective adopted favors the polarization of the optical carrier. The advantage in adopting this perspective resides in the fact that it allows the construction of multidimensional modulations using Hopf bundles. As will be observed, the use of Hopf bundles in conjunction with the mathematical concept called "embedded vertex polytopes", improves the engineering solutions to the problem of adaptive optical communication.

## Keywords

Fiber Optic; Polarized Light; High Order Modulation; Spectral Efficiency; Energy Efficiency; Digital Coherent Transmission; Rate Adaptive; Hopf Fibration; Shell Mapping.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>22</b>
1.1	Princípios das comunicações ópticas adaptativas	23
1.1.1	Fenômenos físicos na propagação de sinais ópticos	23
1.1.2	Modulação óptica e seus componentes	25
1.1.3	Modulações de Alta Ordem e Eficiência Espectral	32
1.1.4	O conceito do vértice embutido	35
1.2	Efeitos de Propagação no Canal Óptico e os Transceptores Adaptativos	37
1.3	Deteção Coerente em Fibras Ópticas	39
1.3.1	Receptores Coerentes Digitais	44
1.3.1.1	Bloco lógico para compensação de perdas e dispersão	44
1.3.2	Variáveis e requisitos de desempenho do sistema de comunicação adaptativa	45
1.3.2.1	Relação sinal-ruído Óptico - OSNR	45
1.3.2.2	Ruído de Fase	47
1.3.2.3	Efeitos de Dispersão	48
1.3.2.4	Perda dependente de polarização - PDL	54
1.3.2.5	Efeitos não lineares	55
<b>2</b>	<b>Óptica estatística, coerência e polarização da luz</b>	<b>56</b>
2.1	Largura espectral da luz	59
2.1.1	Requisitos de largura de linha do laser	62
2.2	Formalismo para representação da polarização da luz	64
2.2.1	Métodos matriciais na descrição da polarização da luz	71
2.2.1.1	Cálculo da intensidade óptica	72
2.2.2	Estados de polarização ortogonais	72
2.2.3	Parâmetros de Stokes e a esfera de Poincaré	75
2.2.3.1	A esfera de Poincaré e o espaço de Stokes	77
2.2.4	Polarização parcial da luz	78
2.2.4.1	A teoria unificada da polarização e coerência da luz	81
2.2.4.2	O tempo de polarização	82
2.3	Propagação não linear da luz polarizada em fibras ópticas	83
2.3.1	A equação de Schrödinger não linear acoplada	84
2.4	O modelo GN-EGN para propagação não linear	86
<b>3</b>	<b>Teoria da informação e códigos esféricos nas comunicações</b>	<b>88</b>
3.1	Códigos em espaços multidimensionais	88
3.1.1	O problema do empacotamento de esferas	91
3.1.2	Codificação no canal Gaussiano n-dimensional	95

3.2	Métricas de desempenho de constelações	97
3.2.1	Informação mútua e capacidade do canal AWGN	98
3.3	Sequências De Bruijn e caminhos cíclicos	102
<b>4</b>	<b>Métodos construtivos para o projeto de Modulações 4D</b>	<b>104</b>
4.1	O formalismo dos fibrados de Hopf	105
4.1.1	A fibração de Hopf como uma ferramenta de Engenharia	106
4.2	Partições QAM e a representação de Cayley-Dickson para quatérnios	110
4.3	Rotulagem e particionamento de códigos nos espaços de $S^2$ e $S^3$ .	113
4.3.1	Distância euclidiana e distância de Hamming como métricas	113
4.3.2	Construção dos códigos de rotulagem utilizando apenas sequências de Bruijn	114
4.3.3	Códigos em 16 dimensões a partir de estruturas 4D	117
4.4	Métodos teóricos propostos	121
4.4.1	Método proposto 1 - Construção de constelações nPolSK-mPSK de norma constante usando fibração Hopf discreta	121
4.4.2	Método proposto 2 - Construção de constelações $(n_1 \text{PolSK}-m_1 \text{PSK}) + (n_2 \text{PolSK}-m_2 \text{PSK})$ usando fibração Hopf discreta fatorada	124
4.4.2.1	Constelações de norma única <i>versus</i> constelações multinorma	126
4.4.3	Método proposto 3 - O mapa inverso de Hopf e o vetor inicial de um arranjo de coordenadas	127
4.5	O método do mapeamento discreto de cascas esféricas	132
4.5.1	Descrição do mapeamento discreto de cascas esféricas	133
4.5.2	O Índice Acumulado de Informação Mútua (IMA)	138
4.6	Avaliação de capacidade das constelações ópticas	139
4.6.1	Orientação para interpretação dos resultados	140
4.6.2	Terminologia	141
<b>5</b>	<b>Resultados Obtidos</b>	<b>142</b>
5.1.1	Avaliação de capacidade de constelações com 8 símbolos	144
5.1.2	Avaliação de capacidade de constelações com 16 símbolos	148
5.1.3	Avaliação de capacidade de constelações com 32 símbolos	153
5.1.4	Avaliação de capacidade de constelações com 64 símbolos	159
5.1.5	Avaliação de capacidade de constelações com 128 símbolos	166
5.1.6	Avaliação de capacidade de constelações com 256 símbolos	172
5.1.7	Avaliação de capacidade de constelações com 512 símbolos	177
5.1.8	Avaliação de capacidade de constelações com 1024 símbolos	182
5.2	Avaliação de capacidade de constelações densas com 2048 e 4096 símbolos	187
5.2.1	Capacidade de constelações com 4096 símbolos	191
5.2.2	Capacidade de constelações com 16384 símbolos	196
5.2.3	Comentários e discussões sobre a função HQ	198

5.3	Teste de plausibilidade em ambiente com interferência não linear	199
5.3.1	Teste SPM-XPM para constelações de 32 símbolos	200
5.3.2	Teste SPM-XPM para constelações de 64 símbolos	200
5.3.3	Teste SPM-XPM para constelações de 256 símbolos	201
5.4	Avaliação de Requisitos para Construção de um arranjo de constelações adaptativas	202
5.4.1	Proposta de controle adaptativo	206
5.5	Lista de publicações com resultados da tese	211
<b>6</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>212</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>218</b>
A	Projeto de um Transceptor Experimental para Comunicação em Fibras Ópticas	218
A.1	O hardware do transmissor óptico	218
A.1.1	Modulador Óptico FTM7977HQA	218
A.1.2	Projeto do <i>driver</i> do Modulador Óptico	220
A.1.3	O controlador de polarização do modulador óptico	224
A.1.4	O conversor Digital Analógico R-2R	225
A.1.5	Projeto e desenvolvimento do circuito	226
A.1.6	Caracterização do DAC	228
A.1.7	Medição da linearidade <i>versus</i> não linearidade integral (INL)	229
A.1.8	Medição do efeito glitch	231
A.1.9	Medição da resposta em frequência	232
A.1.10	Medição da faixa dinâmica livre de espúrios (SFDR)	233
A.1.11	O conversor de interface para o conector FMC	234
A.2	Desenvolvimento do Software e Programação FPGA	237
B	A conexão entre $SU(2)$ , $SO(3)$ e quatérnios	239
B.1	Diferentes formas do mapa de Hopf	241
C	Grandes círculos sobre a esfera	242
C.1	O cálculo da distância do cosseno	242
D	Códigos numéricos usados na tese	244
D.1	Códigos Matlab	244
D.1.1	Função de transferência do Mach-Zehnder	244
D.1.2	Função de transferência do QPMZM	244
D.2	Códigos Mathematica (software versão 11.2)	245
D.2.1	Mapa direto de Hopf (à direita)	245
D.2.2	Mapa inverso de Hopf (modificado conforme a regra da Equação (4-11))	245
D.2.3	Conversão dos vetores de Stokes para a forma angular	246
D.2.4	Projeção stereográfica	247
D.2.5	Função de quantização do DAC - HQ (Ver Equação (4-27))	247
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>248</b>

## Lista de Figuras

1.1	Diagrama de blocos funcionais de um modulador Mach-Zehnder.	25
1.2	Funções de transferência de um modulador Mach-zehnder simples com diferentes modos de <i>bias</i> e diferentes formas de distribuição das voltagens.	27
1.3	Diagrama em blocos de um modulador PMQ-MZM.	28
1.4	Evolução das modulações nas comunicações ópticas. Fonte: NTT Review - "Optical Device Technologies for Future Network Evolution"	32
1.5	Diagrama obtido a partir da transmissão experimental de uma constelação 6PolSK-QPSK. Fonte:[24]	34
1.6	Mapa de Hopf de um arranjo hierárquico (com vértices embutidos) utilizando as constelações PS-QPSK, PDM-QPSK e 6PolSK-QPSK.	35
1.7	Representação na esfera de Poincaré dos 42 vértices do <i>icosidodecaedro pentakis</i> .	36
1.8	Diagrama em blocos da estrutura básica de um transceptor óptico adaptativo.	37
1.9	Representação das bandas de frequência para diferentes técnicas de detecção coerente.	39
1.10	Diagrama de um enlace com detecção coerente simples.	40
1.11	Ilustração da estrutura interna de uma híbrida de 90°.	41
1.12	Representação esquemática de um detector coerente comercial com a incorporação de (TIA). Fonte: www.finisar.com	42
1.13	Visão geral dos blocos funcionais de um receptor digital coerente.	44
1.14	Diagrama de blocos e encapsulamento extraídos da documentação de um receptor coerente integrado comercial.	47
1.15	Efeito da dispersão em função da distância de propagação para um pulso Gaussiano de ordem $m=5$ com $\beta_2=0$ e $\beta_3 = 1ps^3/km$ .	48
1.16	Diagrama de blocos simplificado do compensador de dispersão.	49
1.17	Acoplamento de modos numa fibra óptica de telecomunicações. Fonte: Testing Polarization Mode Dispersion (PMD) in the Field.	52
1.18	Diagrama de blocos simplificado do compensador de PMD integrado com a estimação de fase.	53
2.1	Ilustração da diferença entre amostragem temporal e espacial.	57
2.2	Simulação Matlab da largura de linha de um sinal modulado. Fonte: Software Optilux.	60

2.3	Representação gráfica de uma onda transversal eletromagnética.	64
2.4	Representação da Elipse de Polarização.	65
2.5	Representação geométrica da parametrização da elipse de polarização a partir de dois círculos concêntricos.	68
2.6	Representação geométrica da parametrização da elipse de polarização através de dois círculos concêntricos.	68
2.7	Representação na elipse de polarização das fases relativas das polarizações lineares.	69
2.8	Representação na elipse de polarização das fases relativas das polarizações elípticas.	70
2.9	Representação geométrica da esfera de Poincaré.	77
3.1	Divisão de um plano em regiões fundamentais.	92
3.2	Ilustração de células de Voronoi do reticulado hexagonal.	95
3.3	Sequência de Bruijn com tamanho 2 em um alfabeto binário.	102
3.4	Ilustração de caminhos hamiltonianos e exemplos de sequências de Bruijn de tamanhos 1, 2 e 3, para alfabeto binário sobre hipercubos.	103
4.1	(a) 36 pontos (fibras Hopf) sobre o equador de uma esfera $S^2$ (b) Projeção estereográfica da fibração de Hopf ( <i>toro de Hopf</i> ) sobre a esfera $S^3$ .	106
4.2	Partição QAM da constelação 14PolSK-8PSK obtida diretamente da representação de Cayley-Dickson dos quatérnios unitários.	110
4.3	Diagrama hierárquico de constelações conhecidas embutidas no arranjo 14PolSK-8PSK, organizadas de acordo com o número de símbolos.	111
4.4	Exemplo de código de cobertura perfeito de ordem $n = 3$ , aplicado sobre um hipercubo-3.	113
4.5	Ilustração do processo de rotulagem da fibra de Hopf de forma análoga a um anel PSK. A rotulagem de 08 símbolos utilizou um código de cobertura de ordem $n = 3$ .	115
4.6	(a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 64 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC.	116
4.7	Estrutura tórica com 64 nós associados aos rótulos da Tabela (4.2).	116
4.8	Representação do icosaedro como base de uma fibração Hopf para o 600-Cell.	117
4.9	Hélice de Coxeter, também conhecida com Hélice Boerdijk-Coxeter vista como um empacotamento (cadeia) de tetraedros.	118

4.10	Representação do reticulado formado pela fibração Hopf do 600-Cell com hélices Boerdijk-Coxeter.	118
4.11	(a) Partições e (b) histogramas QAM da 12PolSK-10PSK.	118
4.12	(a) Mapa direto de Hopf da 12PolSK-10PSK (b) Representação gráfica dos 17 Níveis de tensão do DAC na interface elétrica (c) Norma dos vetores 4D.	119
4.13	(a) Símbolos 6PolSK formam um <i>octaedro</i> na esfera de Poincaré (b) vértices de um Hexaedro podem ser acumulados, formando os (c) símbolos 14PolSK de um <i>Hexaedro Tetrakis</i> esfera de Poincaré.	121
4.14	(a) Constelação 14PolSK-8PSK na esfera de Poincaré e (b) Projeção estereográfica da Fibração Hopf discreta para 14 pontos (vetores de Stokes) com 8 amostras cada.	122
4.15	Partição QAM do arranjo (12PolSK-8PSK)+(2PolSK-16PSK) obtida da representação de Cayley-Dickson dos quatérnios unitários.	124
4.16	Histogramas da constelação 14PolSK-8PSK obtidos diretamente das partições QAM dos 112 quatérnios unitários.	125
4.17	Histogramas da constelação 12PolSK-8PSK+2PolSK-16PSK obtidos diretamente das partições QAM dos 128 quatérnios unitários.	125
4.18	(a) Pontos definidos por vértices do <i>hexaedro</i> na esfera de Poincaré (b) Projeção stereográfica dos quatérnios unitários para $\theta = \frac{\pi}{8}$ .	127
4.19	Quantizador do DAC obtido a partir do vetor inicial.	128
4.20	Distribuição das normas (raios das esferas concêntricas) para o arranjo obtido a partir do vetor inicial com o Hexaedro como base. A distribuição das normas descreve uma curva que tem correlação com a inversa da FDA de uma distribuição Riceana com parâmetros $s=1$ e $\sigma=0,33$ .	129
4.21	Projeção no $R^3$ de cascas esféricas concêntricas cujos raios são equivalentes a distribuição das normas dos vetores 4D obtido a partir do arranjo vetor inicial (hexaedro como base).	130
4.22	(a) Partições QAM. (b) Histogramas das partições QAM.	131
4.23	Politopos geodésicos: (a) <i>dodecaedro pentakis</i> e (b) <i>icosidodecaedro pentakis</i> com vértices inscritos na esfera $S^2$ .	132
4.24	Curvas paramétricas definidas pela função HQ para valores fixos de $v$ (mantidos dezesseis pontos uniformemente distribuídos). O eixo vertical define os níveis do DAC.	134
4.25	Representação gráfica do desvio padrão da distância entre normas QAM em função da excursão da função HQ para um DAC com 8 níveis.	135
4.26	(a) Representação gráfica do quantizador DAC com 8 níveis para o conjunto de parâmetros ( $\alpha = 0.671264, \beta = 0.299435$ ), $\Gamma = [-\pi, \pi]$ . (b) QAM resultante com distribuição maximizada de $\Delta d$ .	136



4.27	Exemplo de cálculo da IMA para uma constelação de 512 símbolos.	138
4.28	Cálculo da informação mútua das constelações de referência para 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 e 4096 símbolos. A constelação de 16384 símbolos foi construída através do método MDCE desenvolvido nesta tese.	139
4.29	Diagrama dos métodos utilizados para a construção de constelações 4D.	141
5.1	(a) Partições QAM da MDCE-256-4 (b) Histogramas das partições.	142
5.2	Distribuição dos símbolos QAM conforme a frequência estatística.	142
5.3	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PS-QPSK-1.	144
5.4	Cálculo da informação mútua de constelações com 8 símbolos.	145
5.5	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PARITY4-8-2.	145
5.6	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação C4-8-3.	146
5.7	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação BIORTH0-4-8-4.	146
5.8	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PDM-QPSK-2.	148
5.9	Cálculo da informação mútua de constelações com 16 símbolos.	149
5.10	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação C4-16-1.	149
5.11	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação TETRAEDRO-D-NC-4PSK-3.	150
5.12	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-16-4.	150
5.13	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-16-5.	151
5.14	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação DICYCLIC4-16-16-6.	151
5.15	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação SP-QAM4-32-6.	153
5.16	Cálculo da informação mútua de constelações com 32 símbolos.	154
5.17	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação C4-32-1.	154

5.18	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-32-2.	155
5.19	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação TETRAEDRO-D-NC-8PSK-3.	155
5.20	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-32-4.	156
5.21	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-32-5.	156
5.22	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-32-7.	157
5.23	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-32-8.	157
5.24	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PDM-SP-64QAM-9.	159
5.25	Cálculo da informação mútua de constelações com 64 símbolos.	160
5.26	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-64-1.	160
5.27	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação L4-64-2.	161
5.28	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-64-3.	161
5.29	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação 8PolSK-8PSK-4.	162
5.30	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-64-5.	162
5.31	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-64-6.	163
5.32	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação B4-64-64-7.	163
5.33	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-64-8.	164
5.34	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PDM-SP-128QAM-6.	166
5.35	Cálculo da informação mútua de constelações com 128 símbolos.	167
5.36	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-1.	167
5.37	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-2.	168

5.38	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-3.	168
5.39	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-4.	169
5.40	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-5.	169
5.41	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-7.	170
5.42	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-128-8.	170
5.43	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PDM-16QAM-5.	172
5.44	Cálculo da informação mútua de constelações com 256 símbolos.	173
5.45	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-256-1.	173
5.46	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-256-2.	174
5.47	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-256-3.	174
5.48	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-256-4.	175
5.49	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-256-6.	175
5.50	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação SP-QAM4-512-5.	177
5.51	Cálculo da informação mútua de constelações com 512 símbolos.	178
5.52	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-512-1.	178
5.53	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-512-2.	179
5.54	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-512-3.	179
5.55	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-512-4.	180
5.56	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-512-6.	180
5.57	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação PDM-32QAM-6.	182
5.58	Cálculo da informação mútua de constelações com 1024 símbolos.	183

5.59	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-1024-1.	183
5.60	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-1024-2.	184
5.61	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-1024-3.	184
5.62	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-1024-4.	185
5.63	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-1024-5.	185
5.64	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação SP-QAM4-2048-4.	187
5.65	Cálculo da informação mútua de constelações com 2048 símbolos.	188
5.66	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-2048-1.	188
5.67	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-2048-2.	189
5.68	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-2048-3.	189
5.69	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-2048-5.	190
5.70	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação QAM4-4096-6.	191
5.71	Cálculo da informação mútua de constelações com 4096 símbolos.	192
5.72	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação A4-4096-4096-1.	192
5.73	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-4096-2.	193
5.74	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-4096-3.	193
5.75	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-4096-4.	194
5.76	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-4096-5.	194
5.77	Cálculo da informação mútua de constelações com 16384 símbolos.	196
5.78	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-16384-1.	197
5.79	Histogramas, partições QAM, mapa de Hopf, distribuição de cascas esféricas e níveis do DAC para a constelação MDCE-16384-2.	197

5.80	Curva da IM para as constelações TETRAEDRO-D-NC-8PSK, MDCE-32-3 e SP-QAM4-32 com base no modelo SPM-XPM.	200
5.81	Curva da IM para as constelações MDCE-64-1 e PDM-SP-64QAM com base no modelo SPM-XPM.	200
5.82	Curva da IM para as constelações MDCE-256-1 e PDM-16QAM com base no modelo SPM-XPM.	201
5.83	Diagrama hierárquico de politopos embutidos no arranjo 14PolSK-mPSK.	203
5.84	Politopo de referência (base dos fibrados de Hopf) para constelações até 256 símbolos.	203
5.85	Ilustração da regra de decisão do sistema de controle.	207
5.86	Diagrama de blocos simplificado das funções lógicas da máquina de estados.	209
A.1	Modulador óptico FTM7977HQA utilizado para geração de sinais PDM-QPSK (Fonte: FUJITSU).	218
A.2	Curva de resposta em frequência e linearidade do FTM7977HQA (Fonte: FUJITSU).	219
A.3	Diagrama interno simplificado do <i>driver</i> GX62474.	220
A.4	Projeto PCB da placa de circuito do <i>driver</i> GX62474.	221
A.5	Foto da placa de circuito do <i>driver</i> GX62474 projetada e montada.	221
A.6	Projeto PCB dos circuitos de polarização elétrica DC ( <i>bias</i> ) do <i>driver</i> GX62474.	223
A.7	Projeto PCB do sequenciador de alimentação para as polarizações ( <i>bias</i> ) do <i>driver</i> GX62474.	224
A.8	Projeto PCB do controlador de polarização do modulador óptico.	224
A.9	Malha R-2R típica para uma taxa de conversão de $n$ bit.	225
A.10	Modelo elétrico típico para o desempenho de alta frequência de resistor comercial com valor nominal $R$ . Fonte: <i>Vishay Sfernice</i> .	226
A.11	Interface CML utilizada na construção da malha R-2R diferencial.	227
A.12	Visualização do projeto PCB do DAC R-2R 8-bit@800MHz.	227
A.13	Setup utilizado para caracterização do circuito DAC R-2R numa placa de circuito modular.	228
A.14	Captura de tela da medição com o osciloscópio MSO4104: 08 sinais digitais (relógio de 10MHz) e sinal diferencial analógico (saída). O sinal da rampa tem um período de $25\mu s$ .	229

A.15	Histórico dos valores da INL recuperados através de uma função interpolante. A função interpolante foi gerada a partir de valores medidos.	230
A.16	Representação gráfica da PDF e CDF dos valores da INL.	230
A.17	Captura de tela da medição: transição do sinal de saída ( <i>glitch</i> ) para o sinal em rampa com taxa de amostragem de 10MHz@960mVpp.	231
A.18	Captura de tela da medição: sinal triangular com período de 320 ns (800MHz@256 níveis).	232
A.19	Captura de tela da medição: sinal senoidal com período de 512 ns (500MHz@256 níveis).	233
A.20	Captura de tela da medição: transformada de Fourier do sinal diferencial analógico (saída) e medição da faixa dinâmica livre de espúrios.	234
A.21	Projeto PCB do adaptador de interface FMC-DAC.	235
A.22	Destaque da distribuição de pinagem do FMC para quatro conectores de borda definidos pelo projeto PCB do cartão mezanino.	235
A.23	Captura de tela da medição: três sinais analógicos com oito níveis arbitrários (clock de 10 MHz). O slot DAC restante foi usado para extrair os sinais digitais. Os valores de tensão são os níveis necessários para geração da MDCE-256-4.	236
A.24	Foto da placa NetFPGA-SUME.	237
A.25	Diagrama em blocos (interface do software Xilinx Vivado) do controlador de memória RAM.	238
C.1	Representação de uma calota esférica.	242
C.2	Calotas esféricas definidas na região limite dos 32 vértices do Dodecaedro Pentakis.	243

## Lista de Tabelas

2.1	Representações de estados de polarização ortogonais	74
4.1	Relação entre distância de Hamming e distância euclidiana em um hipercubo-3 rotulado com um código de cobertura perfeito.	114
4.2	Rotulagem binária da constelação 8PolSK-8PSK usando palavras de código concatenadas a partir de códigos de cobertura.	115
4.3	Fibração do hexaedro utilizando única amostra angular ( $\theta = \frac{\pi}{8}$ ).	128
4.4	Métricas estáticas para as constelações de referência.	140
5.1	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>8</b> símbolos.	147
5.2	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>16</b> símbolos.	152
5.3	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>32</b> símbolos.	158
5.4	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>64</b> símbolos.	165
5.5	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>128</b> símbolos.	171
5.6	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>256</b> símbolos.	176
5.7	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>512</b> símbolos.	181
5.8	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>1024</b> símbolos.	186
5.9	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>2048</b> símbolos.	190
5.10	Tabela comparativa dos principais resultados para <b>4096</b> símbolos.	195
5.11	Tabela comparativa dos resultados para <b>16384</b> símbolos.	198
5.12	Vértices do politopo base (vetores de Stokes).	204
5.13	Matriz de capacidade do transmissor composta por constelações compatíveis com o arranjo adaptativo	205
5.14	Matriz de capacidade do transmissor.	207
A.1	Tabela de polarização DC ( <i>bias</i> ) para o <i>driver</i> GX62474.	222
A.2	Ciclos de ativação e desligamento do circuito sequenciador.	223

## Lista de Abreviaturas

**ANSI** - American National Standards Institute  
**AWGN** - Additive White Gaussian Noise  
**BER** - Bit-Error Rate  
**CD** - Chromatic Dispersion  
**CFM** - Constellation Figure of Merit  
**CML** - Current Mode Logic  
**EVM** - Error Vector Measure  
**QPMZM** - Quad Parallel Mach-Zehnder  
**DGD** - Differential Group Delay  
**DBP** - Digital Back-Propagation  
**ENLAS** - Equação Não Linear Acoplada de Schrödinger  
**FPGA** - Field-Programmable Gate Array  
**FMC** - FPGA Mezzanine Card  
**FWHM** - Full Width at Half Maximum  
**FWM** - Four-Wave Mixing  
**GVD** - Group Velocity Dispersion  
**OSNR** - Optical Signal-to-Noise Ratio  
**MELF** - Metal Electrode Leadless Face  
**PAM** - Pulse Amplitude Modulation  
**PAPR** - Peak-to-Average Power Ratio  
**PDL** - Polarization Dependent Loss  
**PDM** - Polarization Division Multiplexing  
**POLSK** - Polarization Shift Keying  
**PMD** - Polarization Mode Dispersion  
**PMQ-MZM** - Polarization Multiplexed Quadrature Mach-Zehnder  
**PS-QPSK** - Polarization-Switched Quadrature Phase-Shift Keying  
**QAM** - Quadrature Amplitude Modulation  
**SDM** - Space Division Multiplexing  
**SPM** - Self Phase Modulation  
**TCM** - Trellis Coded Modulation  
**VHDL** - VHSIC Hardware Description Language  
**VHSIC** - Very High Speed Integrated Circuits  
**XPM** - Cross-Phase Modulation  
**WDM** - Wavelength-division Multiplexing



*"Faz-se ciência com os fatos, como se faz uma casa com pedras; mas uma acumulação de fatos não é ciência, assim como um monte de pedras não é uma casa."*

**Jules Henri Poincaré** , *Citação.*

# 1

## Introdução

A necessidade de exercer maior controle sobre o fluxo de dados tem atraído muita atenção para as vantagens da comunicação óptica adaptativa. Em um sistema de comunicação adaptativa, o fluxo de dados pode ser alterado em função de variações na qualidade do canal ou pela necessidade de racionalizar o uso dos recursos disponíveis. De modo geral, a comunicação adaptativa requer uma gama de opções que visam prover eficiência. Racionalizar a utilização da banda disponível e o consumo de energia são exemplos de abordagens que potencializam a eficiência das comunicações. Neste sentido, o presente trabalho se concentra em soluções para o problema de se transmitir mais informação usando uma dada quantidade de energia.

A abordagem utilizada está alinhada com a teoria de Shannon [123] e consiste em tirar proveito de características únicas do espaço geométrico de quatro dimensões (4D). Os métodos propostos permitem a construção de constelações 4D com base numa métrica interdimensional. Por métrica interdimensional entende-se as relações matemáticas providas pelas "Projeções conformes" ou "Mapas conformes". Na matemática, um mapa conforme é uma função que preserva a orientação e os ângulos localmente. Os fibrados de Hopf [21] são exemplos de mapas conformes. A fibração de Hopf  $S^2 \rightarrow S^3$  preserva a relação métrica entre uma esfera em três dimensões ( $S^2$ ) e uma esfera em quatro dimensões ( $S^3$ ). Em termos físicos, esta relação métrica permite construir constelações ópticas com geometrias conhecidas tanto no domínio óptico (representado em três dimensões) quanto no domínio elétrico (representado em quatro dimensões). Adicionalmente, um vetor representado em quatro dimensões pode ser projetado em dois planos ortogonais (2D + 2D). Esta projeção resulta na construção de modulações PDM (Polarization Division Multiplexing). O método de transmissão PDM é o atual padrão de comunicação por fibras ópticas.

A perspectiva adotada nesta tese privilegia a polarização da portadora óptica. Por este motivo, antes de apresentar as soluções propostas, é necessário definir diversos conceitos e propriedades da luz utilizada nas comunicações ópticas.

## 1.1

### Princípios das comunicações ópticas adaptativas

Os principais fatores que motivam a necessidade de uma comunicação óptica adaptativa, são analisados nesta seção. Esta análise envolve: os fenômenos físicos inerentes aos sistemas de comunicação, a evolução das modulações ópticas em termos de sua complexidade e eficiência, além dos principais dispositivos comerciais utilizados em comunicações ópticas coerentes. São abordadas, de forma sucinta, as estruturas básicas para a comunicação por fibras ópticas. Apresenta-se também um conceito matemático denominado *vértice embutido* cuja aplicação na construção de constelações adaptativas desempenha um papel chave no trabalho que é apresentado.

#### 1.1.1

##### Fenômenos físicos na propagação de sinais ópticos

Com base na teoria eletromagnética da luz, uma onda transversal que se propaga numa direção hipotética  $z$  pode ser representada, matematicamente, da seguinte forma:

$$E(z, t) = E_0 \exp^{-j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \quad (1-1)$$

A Equação (1-1) representa uma onda *monocromática*, em que  $E_0$  é o vetor campo elétrico unitário,  $\omega_0$  é a frequência da portadora e  $\beta_0$  é a constante de propagação. A velocidade de propagação dessa onda é denominada *velocidade de fase*. A velocidade de fase, denotada por  $v_f$  é uma quantidade que relaciona a frequência da portadora e a sua constante de propagação através da Equação (1-2):

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (1-2)$$

Após modular esta onda monocromática com um sinal de banda  $\Delta\omega$ , a onda resultante poderá ser representada matematicamente através da Equação (1-3):

$$E(z, t) = \underbrace{E_0 \exp(-j(\omega_0 t - \beta_0 z))}_{\text{portadora}} \times \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{envelope}} \quad (1-3)$$

A introdução da modulação produz um intervalo ( $\Delta\beta$ ) na constante de propagação em função de variações ( $\Delta\omega$ ) na frequência da portadora [1, 2]. Ao considerar que a quantidade ( $\Delta\omega t - \Delta\beta z$ ) tem valor constante, a velocidade do envelope equivale a *velocidade de grupo* da onda, na forma:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (1-4)$$

Sabe-se que a velocidade da luz é função do meio no qual ela se propaga e mais especificamente que a velocidade do sinal que se propaga através de uma fibra óptica depende do índice de refração do material com o qual a fibra foi produzida. Além disso, por questões construtivas, o índice de refração da sílica ( $\text{SiO}_2$ ) não é totalmente uniforme ao longo da fibra e na medida em que a luz se propaga, ocorre um descasamento entre a velocidade de fase ( $vf$ ) e a velocidade de grupo ( $vg$ ). Como consequência do descasamento, os comprimentos de onda que compõem o pulso se dispersam.

A constante de propagação  $\beta_0$  descrita na Equação (1-1) é válida para um valor fixo de comprimento de onda. Em linhas mais gerais, a dependência de  $\beta$  com a frequência conduz a uma função  $\beta(\omega)$  que pode ser expandida numa série de Taylor ao redor da frequência média  $\omega_0$  da portadora na forma:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \dots \quad (1-5)$$

Os termos da Equação (1-5) descrevem várias ordens do fenômeno denominado *dispersão cromática* na fibra óptica. A Equação (1-6) descreve estes termos numa notação resumida, em que:

$$\beta_m = \left( \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} ; \quad \text{para } m = (1, 2, \dots) \quad (1-6)$$

O termo  $\beta_1$ , representado na Equação (1-7), equaciona o *atraso de grupo*. Em termos físicos,  $\beta_1$  equivale ao atraso do *envelope da onda*.

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} \quad ps/km \quad (1-7)$$

Os termos  $\beta_2$  e  $\beta_3$  são os parâmetros de dispersão da *velocidade de grupo*, ou simplesmente *parâmetros de GVD*.

Nas fibras ópticas monomodo, o termo  $\beta_2$  (representado na Equação (1-8)), é definido em torno do comprimento de onda de dispersão nula  $\lambda_{D@(\beta_2=0)}$ . Este ponto também define os regimes de dispersão. Quando  $\beta_2 < 0$ , a propagação ocorre no regime de dispersão *anômala*. Quando  $\beta_2 > 0$  ocorre no regime de dispersão normal.

$$\beta_2 = \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \quad ps^2/km \quad (1-8)$$

Ao considerar uma transmissão pulsada em intervalos de tempo  $T_0$ . Para pulsos largos ( $T_0 \geq 1ps$ ), a contribuição de  $\beta_2$  para a dispersão é dominante e  $\beta_3$  (representado na Equação (1-9)) não apresenta magnitude relevante. Para pulsos estreitos ( $T_0 < 1ps$ ), é conveniente incluir a contribuição de  $\beta_3$  no cálculo da dispersão pois quando o comprimento de onda do pulso coincide com  $\lambda_D$ ,  $\beta_3$  se torna dominante [2].

$$\beta_3 = \frac{d\beta_2}{d\omega} = \frac{d^3\beta}{d\omega^3} \quad ps^3/km \quad (1-9)$$

Conclui-se que, o limiar de  $1ps$  a partir do qual o efeito de  $\beta_3$  deve ser considerado torna este parâmetro de dispersão praticamente onipresente nas redes de nova geração; nas quais a taxa (baud rate) supera facilmente 10G.

### 1.1.2

#### Modulação óptica e seus componentes

Uma configuração típica dos sistemas de comunicações ópticas de longa distância consiste em utilizar dispositivos eletroópticos para modular as características do sinal gerado por um laser CW (Continuous Wave). Esta comunicação ocorre com a inserção de símbolos (de alfabetos específicos) em pulsos de luz modulados em *amplitude*, *frequência*, *fase* ou *polarização*. Em alguns casos, a portadora é modulada através de múltiplas combinações destas propriedades da onda. Um dos dispositivos mais utilizados para esta finalidade é o modulador Mach-Zehnder (MZM), mostrado na Figura (1.1).

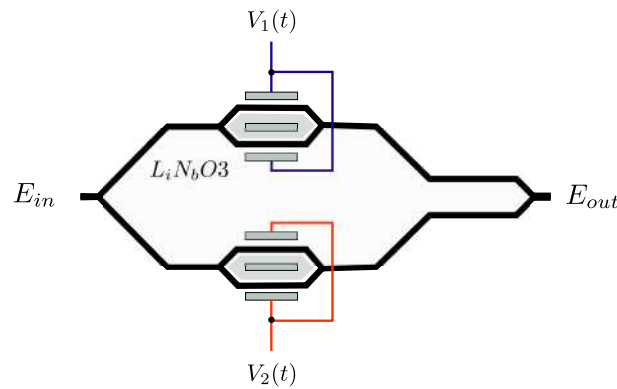


Figura 1.1: Diagrama de blocos funcionais de um modulador Mach-Zehnder.

Este modulador tem duas entradas de RF ( $V_1(t)$  e  $V_2(t)$ ), uma entrada para a luz CW e uma saída para a luz modulada. O MZM consiste basicamente de um interferômetro formado por dois acopladores ópticos e linhas de retardo. A função de transferência deste dispositivo mostra uma relação entre os sinais de dados no domínio *elétrico* e a portadora da comunicação no domínio *óptico*.

Dispositivos comerciais, fabricados em óptica integrada, apresentam boa estabilidade. Contudo, dependendo do material utilizado na fabricação, a função de transferência exibe particularidades por conta dos diferentes mecanismos do *efeito eletroóptico* [3]. Para um MZM fabricado em substrato de  $\text{LiNbO}_3$  (Niobato de Lítio), dado um campo elétrico de entrada  $E_{in}$ , pode-se calcular o campo elétrico  $E_{out}$  na saída através de uma função na forma [4]:

$$E_{out} = \frac{1}{2} \left[ \exp \left( j \frac{\pi}{V_\pi} V_1(t) \right) + \exp \left( j \frac{\pi}{V_\pi} V_2(t) \right) \right] E_{in} \quad (1-10)$$

em que  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  representam os sinais elétricos de controle,  $V_\pi$  representa a *voltagem diferencial de controle*, ou seja  $V_1(t) - V_2(t) = V_\pi$ .  $V_\pi$  é referida como a tensão que induz um deslocamento de fase  $\pi$  entre as componentes da luz em diferentes linhas de retardo do Mach-Zehnder.

A função de transferência de um Mach-Zehnder [3, 5] também pode ser escrita na forma da Equação (1-11):

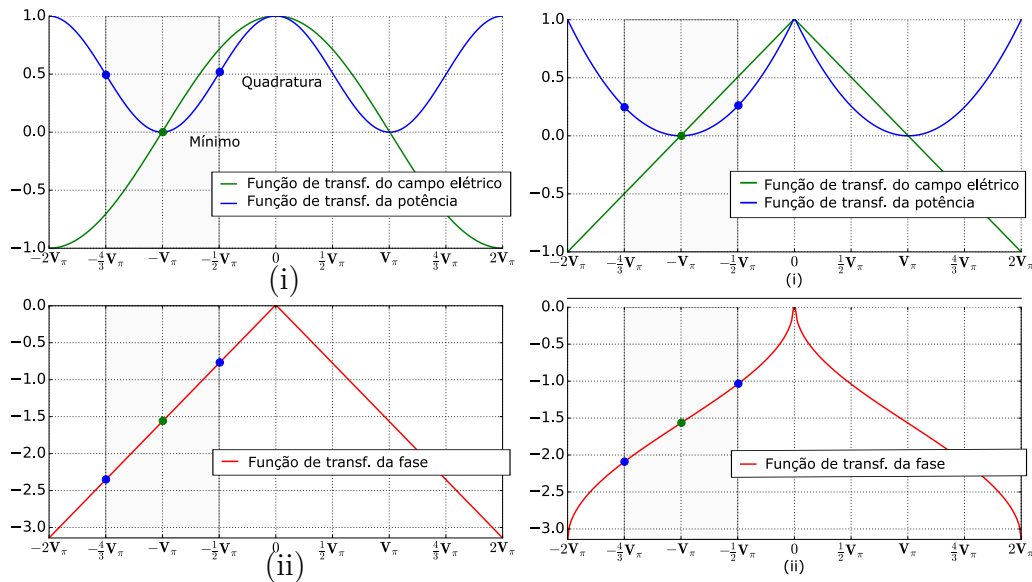
$$E_{out} = \frac{E_{in}}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{\exp \left( j \frac{\pi}{2V_\pi} (V_1(t) - V_{bias_1}) \right)}_{\text{Modulação de Amplitude}} + \underbrace{\exp \left( j \frac{\pi}{2V_\pi} (V_2(t) + V_{bias_2}) \right)}_{\text{Modulação de Fase}} \right] \quad (1-11)$$

A Equação (1-11), descreve que a amplitude do sinal óptico modulado ( $E_{out}$ ) é uma função cossenoidal da *diferença* entre os dois sinais de controle. Por sua vez, a fase deste sinal é uma função cossenoidal da *soma* entre os sinais de controle. Neste trabalho, considera-se especificamente que os sinais dinâmicos de controle  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  são gerados por conversores Digital/Analógico (DAC). Internamente ao dispositivo Mach-Zehnder, os sinais efetivos de controle resultam da combinação entre os sinais de dados  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  e as tensões DC de polarização  $V_{bias_1}$  e  $V_{bias_2}$ .

Dois tipos de configuração são comumente utilizados em moduladores Mach-Zehnder integrados e ambas as configurações são definidas em função da polaridade relativa entre as tensões  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$ . Na condição em que os sinais  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  têm a mesma polaridade, a configuração é denominada "push-push" e neste caso o Mach-Zehnder funciona como um modulador de *fase*. Quando  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  possuem sinais opostos com tensões  $V_1(t) = -V_2(t)$ , a configuração é denominada "push-pull" [6]. A configuração "push-pull" permite a modulação em *amplitude* do sinal óptico que, neste caso, é idealmente livre do chirp residual.

O valor de  $V_\pi$  é um parâmetro importante, pois está diretamente relacionado com o ganho e a potência necessários para realizar a comunicação. De modo geral, um baixo valor de  $V_\pi$  irá proporcionar maior economia de energia no transmissor. Além disso, amplificadores drivers são comumente utilizados para satisfazer a condição de ganho de potência numa transmissão em banda larga (Gain-Bandwidth Product). Um baixo valor de  $V_\pi$  permite a redução do ganho dos drivers e consequentemente melhora a linearidade nas tensões fornecidas ao modulador óptico.

Além da polaridade relativa entre as tensões de sinal, o ponto de operação (polarização DC) do Mach-Zehnder é determinante no tipo de modulação que será produzida no domínio óptico. A Figura (1.2) ilustra os dois principais pontos de operação que são denominados respectivamente de *ponto de transmissão mínima* e *ponto de quadratura* [6].



1.2(a): Funções de transferência para tensões de entrada uniformemente distribuídas. (i) campo elétrico e potência (ii) fase.

1.2(b): Funções de transferência para tensões de entrada não uniformes (função *arco-seno*). (i) campo elétrico e potência (ii) fase.

Figura 1.2: Funções de transferência de um modulador Mach-zehnder simples com diferentes modos de *bias* e diferentes formas de distribuição das voltagens.

Com a polarização DC (*bias*) centrada no ponto de quadratura, as tensões variam de  $(0$  a  $-V_\pi)$ . Ao fixar a polarização DC no ponto de mínimo, as tensões variam de  $(-\frac{V_\pi}{2}$  a  $-\frac{4V_\pi}{3})$ . A Figura (1.2) também ilustra o fato de que, com a polarização DC fixada no ponto de mínimo, uma distribuição de tensão *arco-seno* lineariza a resposta do Mach-Zehnder.

Para gerar sinais ópticos de formato arbitrário é necessário controlar a amplitude e a fase da portadora óptica. Ao utilizar um Mach-Zehnder, isto implica na necessidade de gerar a soma e a diferença dos sinais  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$ . Embora viável, esta forma de controle impõe desafios consideráveis quando deseja-se mapear o sinal óptico sobre todo o plano complexo, o principal motivo decorre do fato de que será necessário gerar sinais independentes com o dobro da amplitude de  $V_\pi$ . Uma solução para evitar a geração de sinais de grande amplitude, consiste na utilização de estruturas Mach-Zehnder agrupadas. O componente PMQ-MZM (Polarization-Multiplexed Quadrature Mach-Zehnder Modulator) [7], ilustrado na (Figura (1.3)), é um exemplo de uma estrutura composta por 5 Mach-Zehnders.

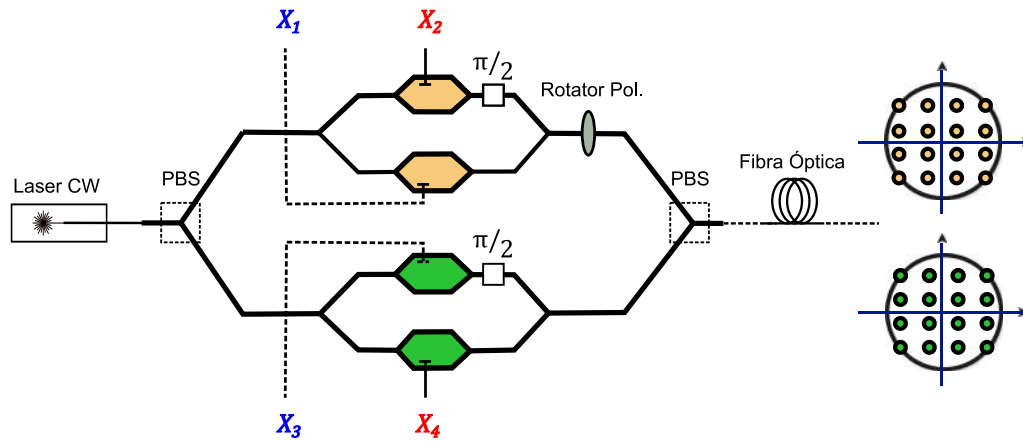


Figura 1.3: Diagrama em blocos de um modulador PMQ-MZM.

O uso destas estruturas permite a modulação de forma independente das partes real e imaginária do campo óptico, com um bom desempenho em comunicações de alta velocidade. Após harmonizar as notações utilizadas por [3] e [6], demonstra-se na Equação (1-12) a representação matemática para a função de transferência de um PMQ-MZM.

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (X_1 + iX_2) + [(X_3 + iX_4) \cdot e^{j\theta}] \right\}; \quad (1-12)$$

$$X_n = \cos \left[ \left( \frac{V_n(t) + V_{bias_n}}{2V_\pi} \right) \pi \right], \quad n = (1, 2, 3, 4)$$

Em que a função  $\cos$  realizada por  $X_n$  indica que os quatro Mach-Zehnder aninhados na estrutura PMQ-MZM funcionam como moduladores de amplitude, ou seja, no modo push-pull. As entradas de dados do modulador são representadas por  $V_n(t)$ ,  $V_{bias}$  é a tensão DC de controle e  $V_\pi$  é referida como a tensão que induz um deslocamento de fase  $\pi$  em cada Mach-Zehnder aninhado. A quantidade  $e^{j\theta}$  denota o rotator de polarização.



A Equação (1-12) é válida para saídas reais da função  $X_n$  e a condição de operação mais comum impõe que  $X_1$  e  $X_2$  sejam mantidas ortogonais. O mesmo se aplicando a  $X_3$  e  $X_4$ .

Durante a transmissão, pulsos elétricos de amplitude arbitrária são aplicados nos sinais de controle  $V_n(t)$  do Mach-Zehnder, produzindo como resultado pulsos ópticos modulados. Se estes pulsos forem medidos no domínio da frequência, será possível observar que eles são compostos por *pacotes de comprimentos de onda*, cuja largura espectral é inversamente proporcional à largura do pulso no domínio do tempo. Os pulsos são idealmente retangulares mas, por uma questão de praticidade, geralmente utiliza-se um modelo matemático de pulso Gaussiano. Uma forma mais geral é o pulso *super Gaussiano* que em [63], é representado pela Equação (1-13):

$$A(0, t) = A_0 \exp \left[ -\frac{1 + jC}{2} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{2m} \right] \quad (1-13)$$

Em que  $A_0$  é a amplitude de pico do pulso,  $T_0$  é a largura a meia altura,  $C$  é o parâmetro de chirp e  $m$  é um parâmetro que descreve a ordem Gaussiana do pulso.

Em termos físicos, a ordem Gaussiana determina os tempos de subida e descida (agudez dos cantos do pulso). Quando  $m = 1$  e  $C = 0$ , a Equação (1-13) denota um pulso Gaussiano puro. Ainda de acordo com [63], um dado interessante em relação ao parâmetro  $m$  é o fato de que ele pode ser estimado com base na medida experimental do tempo de subida do pulso. A forma deste cálculo é representada na Equação (1-14).

$$\begin{aligned} T_{r[10-90\%]} &\approx \frac{T_0}{m} \\ m &\approx \frac{T_0}{T_{r[10-90\%]}} \end{aligned} \quad (1-14)$$

Ao longo da fibra óptica, tanto os efeitos de dispersão quanto os efeitos não lineares serão determinantes para o espectro e o formato resultante destes pulsos. A escolha de pulsos Gaussianos decorre principalmente do fato de que a transformada de Fourier de uma função Gaussiana é também uma Gaussiana. Ao transmitir pulsos Gaussianos, espera-se maior previsibilidade em relação ao espectro resultante ao longo da fibra. Conforme detalhado na Seção (1.3.2.5) e (2.3.1), os efeitos não lineares nas fibras ópticas estão relacionados com a *polarização induzida* no material da fibra. Em consequência, o modelo de propagação utilizado nesta tese inclui os efeitos não lineares.

Com base na teoria eletromagnética da luz, a Equação Não Linear de Schrödinger (ENLS) é um modelo adequado para incluir os efeitos não lineares na propagação de sinais nas fibras ópticas. De acordo com [8], utilizando-se como referência um sistema de coordenadas cartesianas, a propagação de uma onda de luz com amplitude  $A$ , num guia de onda alinhado com a direção  $z$ , pode ser representada pela expressão matemática da ENLS, na forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (1-15)$$

Nessa equação,  $\gamma$  é o parâmetro de não linearidade,  $\alpha$  representa a atenuação e os valores  $\beta_n$  representam as diferentes ordens de dispersão. A amplitude  $A$  é normalizada de tal forma que  $|A|^2$  quantifique a potência óptica. O parâmetro de não linearidade  $\gamma$  é função do índice de refração ( $n_2$ ), da frequência óptica ( $\omega_0$ ) e da área efetiva da seção transversal da fibra ( $A_{eff}$ ):

$$\gamma = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0 A_{eff}}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (1-16)$$

Se o índice  $n_2$  for expresso com unidades  $m^2/W$ , então a parcela  $\gamma |A|^2$  do lado direito da Equação (1-16) terá dimensão  $m^{-1}$ . Além disso, conforme observado por [9], a unidade  $t$  na Equação (1-15) não está relacionada ao tempo absoluto e sim com a duração do envelope da portadora óptica.

A ENLS é uma equação geral que representa diversas propriedades do sinal óptico [10, 11]. Contudo, algumas premissas da ENLS não aderem ao equacionamento dos efeitos de propagação em um sinal modulado em *polarização*.

A seguir, são enumeradas as principais questões que devem ser consideradas:

1. A fibra óptica monomodo possui na verdade dois modos ortogonais de propagação;
2. A forma da Equação (1-15) não considera a birrefringência da fibra;
3. A suposição de que o estado de polarização se mantém *constante* não é válida para modulações de polarização;

Para adaptar o modelo matemático é necessário recorrer a versão vetorial da ENLS denominada de Equação Não Linear Acoplada de Schrödinger (ENLAS) [10, 12].

A ENLAS é uma equação que pode descrever a propagação do pulso para campos ópticos acoplados e que, além disso, permite o tratamento de *efeitos lineares* e *não lineares*. As equações acopladas permitem uma modelagem mais precisa da propagação de pulsos de luz numa fibra óptica monomodo, incluindo os efeitos de polarização, birrefringência, automodulação de fase (SPM) e polarização cruzada (XPM). A formalização do problema de propagação de pulsos de luz polarizada numa fibra padrão será tratada de forma sucinta na Seção (2.3.1), na qual reúne-se conceitos adicionais citados ao longo do texto. Conforme demonstrado em [11], estas equações tem um nível de complexidade elevado. Por este motivo, buscou-se nesta tese a utilização de soluções numéricas que pudessem ser realizadas tanto em software quanto em hardware [13].

## 1.1.3

## Modulações de Alta Ordem e Eficiência Espectral

Efeitos de atenuação e dispersão mudam as características do sinal óptico, levando a perdas de dados e a consequente redução na eficiência da comunicação. O impacto destes efeitos se tornam mais perceptíveis na medida em que a *taxa de sinalização* aumenta e isto motiva a busca por formas eficientes de codificar e recuperar a informação transmitida. Para sinais de dados binários, um número  $m = \log_2(M)$  de bit podem ser codificados e a relação entre o *número de bit*  $m$  e a *quantidade de símbolos*  $M$  determina a *ordem* da modulação. Esta relação também define a *eficiência espectral* em bit/s/Hz. Uma análise dimensional rápida revela que a eficiência espectral é uma medida da *taxa de bit* dentro de uma banda de frequência. A dimensão da modulação é determinada pelos graus de liberdade que o modulador provê. O modulador OOK (On-Off Keying), por exemplo, possui apenas o grau de liberdade para modificar a amplitude do sinal óptico, enquanto na modulação QPSK (Quadrature Phase Shift Keying), o sinal pode variar em fase e quadratura. Na modulação M-QAM (Multilevel Quadrature Amplitude Modulation), o sinal óptico pode ter  $M$  diferentes níveis de amplitude e assim a adição de um novo grau de liberdade resulta numa elevação da ordem em relação as modulações QPSK e OOK.

A Figura (1.4) ilustra a evolução e a complexidade dos moduladores ópticos em função da ordem da modulação.

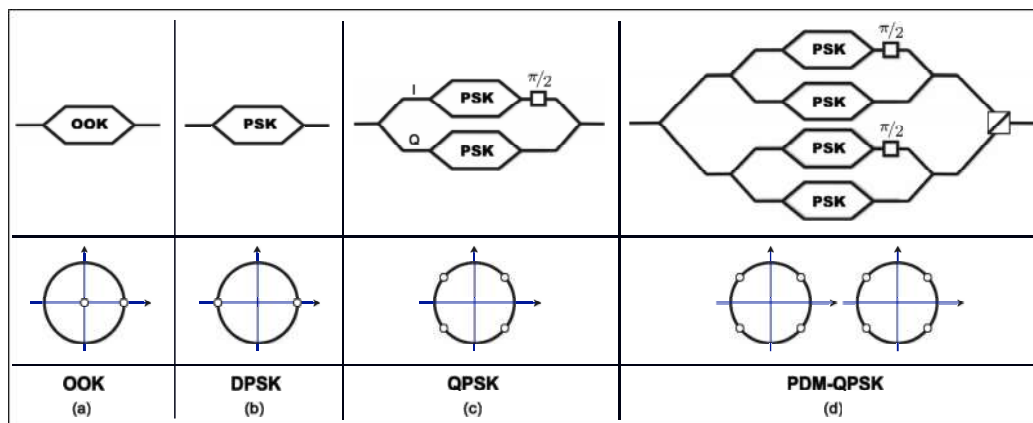


Figura 1.4: Evolução das modulações nas comunicações ópticas.

Fonte: NTT Review - "Optical Device Technologies for Future Network Evolution"

Estruturas com múltiplos moduladores podem gerar constelações de ordem elevada como 256-QAM e 1024-QAM óptico [14]. Apesar da considerável eficiência destes dispositivos, a taxa de extinção do modulador; a relação sinal-ruído requerida e o ruído de fase do canal ainda são limitantes que devem ser superados.

Para enfrentar estas limitações, os projetistas têm buscado a utilização de modulações em espaços de código 4D [15, 16, 17] e 8D [18]. Modulações em espaço de código 4D não são uma novidade conforme evidenciam [19] [1973] e [20] [1977], a novidade é que agora estas modulações de alta ordem podem ser transportadas em taxas também elevadas.

No ano de 2009, uma modulação 4D denominada PDM-QPSK (Polarization Division Multiplexing Quadrature Phase Shift Keying), foi escolhida para ser o padrão em enlaces ópticos 100G [7]. Essa modulação é considerada um exemplo de modulação 4D, porque o diagrama de sua constelação no espaço de código (binário  $\leftrightarrow$  esférico) forma 16 vértices de um cubo 4D [15].

Se os 16 símbolos da portadora PDM-QPSK forem medidos com auxílio de um polarímetro, apenas 04 estados de polarização serão observados no espaço de Stokes. Neste caso, os estados de polarização da PDM-QPSK residem no plano  $S_2$ - $S_3$  da esfera de Poincaré. A superposição de símbolos da constelação PDM-QPSK é uma asserção válida, quando considera-se que os parâmetros de Stokes são o resultado de médias amostrais tomadas sobre um intervalo de tempo que inclui diversos ciclos do sinal óptico. No Capítulo (4), será demonstrado que este efeito de superposição pode ser explicitamente descrito pela teoria dos *fibrados de Hopf* [21, 22].

Em uma transmissão PDM-QPSK típica, o canal óptico é dividido em duas polarizações ortogonais e cada polarização funciona como um subcanal modulado em QPSK, cada subcanal tem uma eficiência espectral de 2 bit/s/Hz. A transmissão simultânea de duas componentes de polarização (PDM) resulta na eficiência de 4 bit/s/Hz. O modulador PDM-QPSK típico possui na parte elétrica 04 pinos de entrada para sinais de dados simultâneos (ver Figura (1.4d)). Portanto, estes sinais elétricos são sinais binários com valores que variam entre os extremos  $[0, V_\pi]$ .

O padrão de 100G foi produto de um avanço considerável nas comunicações ópticas, apesar disso a eficiência de 4 bit/s/Hz ainda não era suficiente para suprir a demanda por banda de transmissão. Pesquisas resultaram numa melhoria de eficiência com a substituição da QPSK em cada componente de polarização por QAM multinível, resultando na modulação PDM-QAM.

Em [23], o termo POL-QAM  $x$ - $y$  é utilizado para descrever de forma generalizada as modulações que utilizam partições (componentes) de polarização. Nesta notação, o índice  $x$  descreve o número de estados de polarização e  $y$  descreve o número de símbolos da constelação em cada partição  $I$ - $Q$ . Ao utilizar esta notação, a modulação PDM-QPSK equivale a POL-QAM 4-4.

Por sua vez, a constelação 6PolSK-QPSK mostrada na Figura (1.5) e reportada em [16, 24], equivale a POL-QAM 6-4.

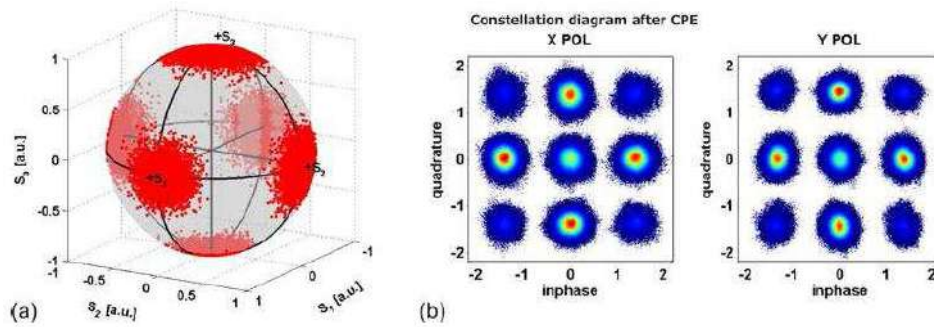


Figura 1.5: Diagrama obtido a partir da transmissão experimental de uma constelação 6PolSK-QPSK. Fonte:[24]

As modulações descritas até agora possuem em comum o fato de que todas podem ser facilmente mapeadas sobre estados de polarização da luz. Nesta tese, analisa-se novas constelações com geometrias de maior complexidade. A análise em questão considera diferentes perspectivas daquelas comumente encontradas na literatura. Por exemplo, a PS-QPSK (Polarization-Switched Quadrature Phase-Shift Keying), é considerada a modulação 4D com maior eficiência de potência da atualidade [25]. Contudo, apesar das qualidades que tornam adequada a utilização da PS-QPSK nas redes ópticas de nova geração, convém observar que, esta modulação utiliza um subgrupo de símbolos da PDM-QPSK e portanto tem *eficiência espectral* relativamente menor. A menor eficiência espectral da PS-QPSK é compensada pela excelente *eficiência energética*, tornando a relação de compromisso entre estas duas modulações adequada para utilização em comunicação óptica adaptativa. Conforme será mostrado nas próximas seções, utiliza-se no presente trabalho o conceito geométrico de *vértice embutido de politopos* [26] para descrever a PS-QPSK como um subgrupo de símbolos da PDM-QPSK.

Esta propriedade geométrica das constelações foi utilizada para construir arranjos de constelações adaptativas. Apesar de tratar especificamente de transceptores ópticos adaptativos que utilizam modulações 4D, convém ressaltar que os mesmos princípios podem ser aplicados para modulações 8D e, em tese, até 16D. A variável polarização é a perspectiva preferencial da análise aqui conduzida por conta das facilidades encontradas quando realiza-se a projeção das constelações 4D no espaço  $R^3$ . Com esta abordagem, também é possível, de forma inversa, mapear a esfera de Poincaré (imersa no  $R^3$ ) para esferas unitárias em 4D. Este recurso permite ainda o mapeamento de constelações 4D em partições QAM (2D) e sinais PAM (1D).

## 1.1.4

**O conceito do vértice embutido**

O termo politopo é uma generalização do nome poliedro e é comumente empregado para fazer referência às figuras geométricas em qualquer número de dimensões. O conceito do vértice embutido de politopo utilizado nesta tese é baseado no trabalho de [26] e um exemplo ilustrativo deste conceito ocorre com as constelações PS-QPSK (8 símbolos), PDM-QPSK (16 símbolos) e 6PolSK-QPSK (24 símbolos). No espaço 4D, a modulação 6PolSK-QPSK pode ser representada por 24 vértices de uma estrutura geométrica comumente conhecida como politopo 24-Cell [27]. No mesmo espaço 4D, a modulação PDM-QPSK pode ser representada por 16 vértices de outra estrutura geométrica comumente conhecida como *hipercubo-4* ou simplesmente, *tesseract*. Os dois politopos referidos estão relacionadas pelo fato de que a 24-Cell inclui entre seus vértices o tesseract. Se a portadora óptica, modulada com a 6PolSK-QPSK, for medida com auxílio de um polarímetro, será observado que os símbolos dessa constelação 4D descrevem um *octaedro* na esfera de Poincaré (ver Figura (1.6 c)).

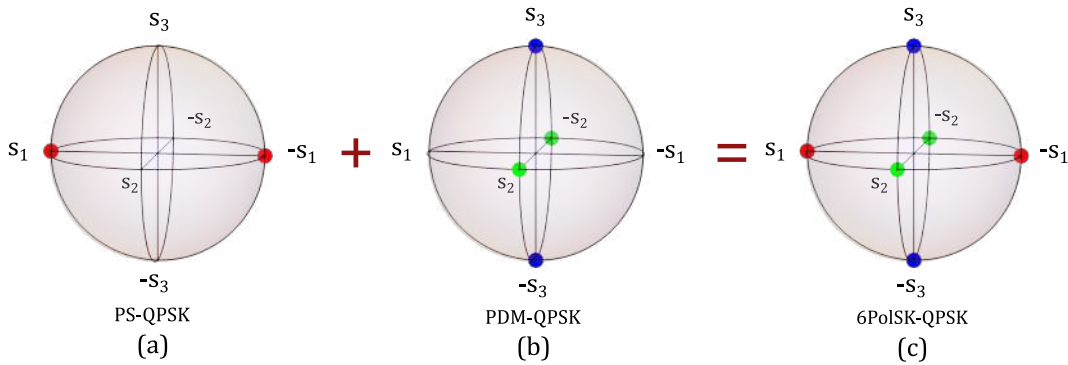


Figura 1.6: Mapa de Hopf de um arranjo hierárquico (com vértices embutidos) utilizando as constelações PS-QPSK, PDM-QPSK e 6PolSK-QPSK.

De forma análoga, a medição da modulação PDM-QPSK descreve um losango (*tetraedro plano*), que reside no plano  $s_2-s_3$  da mesma esfera (ver Figura (1.6 b)). Em termos geométricos, isto apenas confirma que o hipercubo-4 é um subpolitopo da 24-Cell, assim como o *tetraedro* plano é um subpolitopo do *octaedro*. Além disso, os vértices da modulação PS-QPSK também são subpolitopos da 6PolSK-QPSK e a medição de seus estados polarização descreve a linha que liga os vértices ( $-s_1 \leftrightarrow s_1$ ) na esfera de Poincaré (ver Figura (1.6 a)).

Convém ainda ressaltar que, nesse caso, o número de vértices das constelações 4D equivale ao número de polarizações multiplicado pelo número de fases (QPSK).



Nas comunicações ópticas coerentes, esta relação simples se torna relevante por conectar os parâmetros de Stokes, que são grandezas mensuráveis, com o espaço de fase geométrico da luz [22]. Na óptica clássica, o efeito de superposição dos estados de polarização é uma variedade clássica do fenômeno de emaranhamento na óptica quântica [22, 28]. A partir da extensão desse conceito, o politopo denominado *icosidodecaedro pentakis* [29, 30] é uma boa representação de estrutura geométrica que possui constelações de vértices (subpolitopos) embutidos:

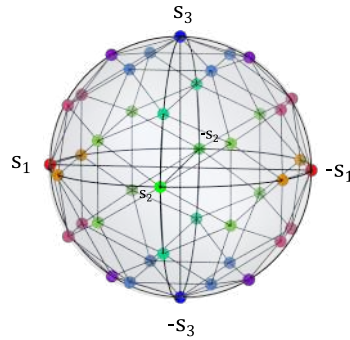


Figura 1.7: Representação na esfera de Poincaré dos 42 vértices do *icosidodecaedro pentakis*.

O *icosidodecaedro pentakis* é uma projeção ortogonal, centrada em vértices da 600-Cell. Esse politopo pode ser obtido pela subdivisão do *icosaedro*. Com essa forma de construção, o *icosidodecaedro pentakis* tem embutido entre seus vértices o próprio *icosaedro* [31].

Além disso, este politopo inclui outros subpolitopos regulares como, por exemplo, o *octaedro*. Ao estender este raciocínio, pode-se embutir o *icosidodecaedro pentakis* em outro politopo com maior número de vértices e assim por diante.

No Capítulo (4), são fornecidos maiores detalhes de como o uso simultâneo dos vértices embutidos e dos fibrados de Hopf permite a construção de constelações hierárquicas para uso em modulações adaptativas. Uma particularidade do método construtivo proposto nesta tese é que utiliza-se como ponto de partida os estados de polarização da portadora óptica.



## 1.2

**Efeitos de Propagação no Canal Óptico e os Transceptores Adaptativos**

Transceptores adaptativos são equipamentos de comunicação que podem alterar o fluxo de dados em função de variações na qualidade do canal. O uso destes transceptores nas comunicações por fibras ópticas ainda é uma relativa novidade e o atraso na adoção destes equipamentos decorreu de uma gama de limitações que foram impostas tanto pelos rigores do canal óptico quanto pela dificuldade em construir dispositivos optoeletrônicos integrados [32, 33, 34]. Tais fatores explicam, por exemplo, porque a adoção de transceptores adaptativos está atrelada principalmente ao uso dos recentes receptores coerentes integrados. Conforme observa-se em [35, 36], o uso de receptores coerentes integrados permite que o processamento de sinais seja realizado no domínio eletrônico. Esta característica motiva o uso de estruturas de controle baseadas em processamento digital de sinais (DSPs), ou ainda processamento misto de sinais. De qualquer forma, o grande mérito dos receptores coerentes integrados é permitir o processamento de sinais no domínio eletrônico.

A Figura (1.8) ilustra, conceitualmente, um exemplo de estrutura de um transceptor adaptativo.

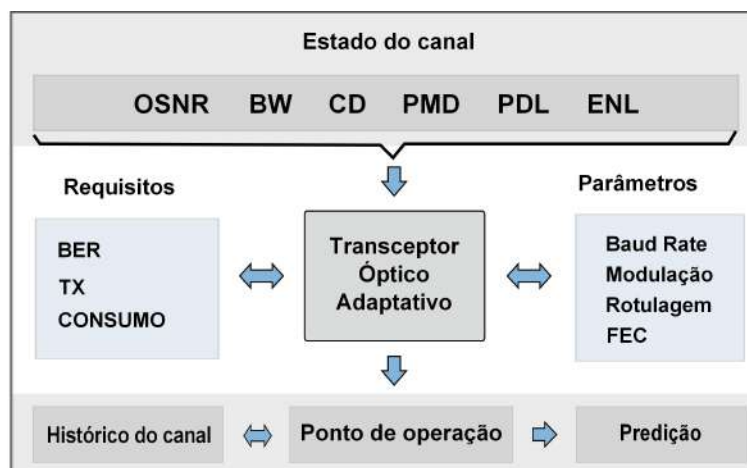


Figura 1.8: Diagrama em blocos da estrutura básica de um transceptor óptico adaptativo.

O diagrama em blocos ilustrado na Figura (1.8) é similar aquele demonstrado em [37]. A operação do transceptor adaptativo consiste na otimização de uma ou mais *funções de custo* e para tanto considera-se como entradas uma função que representa o *estado atual do canal*, os requisitos e os parâmetros da comunicação.

Ao utilizar como base a banda passante do canal, sucessivas medições ou estimativas de variáveis como a OSNR (Optical Signal-to-Noise Ratio), PN (Phase Noise), CD (Chromatic Dispersion), PMD (Polarization Mode Dispersion), PDL (Polarization Dependent Loss) e NLI (Nonlinear Interference), permitem determinar o estado de saída do canal, que será válido para cada ciclo de sensoriamento.

Na perspectiva utilizada neste trabalho, o *estado de saída* do canal consiste de um conjunto de informações. Estas informações são então utilizadas para a escolha de uma modulação óptica capaz de atender aos requisitos que foram especificados. O sensoriamento ou monitoramento do canal óptico consiste na medição em tempo hábil das variáveis de interesse que afetam o desempenho do sistema de comunicação. Este é um tema amplo que, na atualidade, está inserido inclusive dentro do contexto das *redes ópticas cognitivas* [38]. Para manter o escopo deste trabalho, a análise foi restrita às soluções de hardware que pudessem ser realizadas com a tecnologia FPGA (Field Programmable Gate Array) [39]. O sistema de controle que será trabalhado situa-se na camada intermediária da rede. Esta escolha foi realizada por conta da elevada quantidade de recursos que a realização de um sistema completo poderia requerer.

Para analisar o sistema coerente deve-se antes compreender os principais fenômenos que impactam a comunicação por fibras ópticas. Neste sentido, iniciou-se o fluxo de trabalho da tese, consultando um grande número de referências bibliográficas com vistas ao levantamento dos fenômenos e seus impactos no canal óptico de comunicação. Foi dada atenção especial para a relevância destes efeitos em arquiteturas PDM (Polarization Division Multiplexing). Buscou-se também obter informações sobre a forma com que as diferentes modulações ópticas são afetadas pelos fenômenos estudados. Na Seção (1.3), são demonstrados os contextos de alguns fenômenos que impactam a comunicação por fibras ópticas. As técnicas que utilizam detecção coerente, tiveram especial destaque.

## 1.3

**Deteccção Coerente em Fibras Ópticas**

A deteção coerente é uma técnica que transfere para o domínio elétrico informações de amplitude, fase, frequência e polarização de uma portadora óptica de sinal. O princípio de funcionamento do *detector coerente* é baseado na interferência entre o sinal recebido e um sinal de laser local. Nos circuitos comerciais de deteção coerente, a parte óptica e eletrônica são integradas no mesmo dispositivo como uma forma de reduzir a latência e a distorção dos sinais. Após a interferência, geralmente numa híbrida óptica de  $90^\circ$ , o batimento dos sinais ópticos resulta numa frequência intermediária (FI) que equivale a diferença entre a frequência da portadora e a frequência do laser local. Os sinais ópticos são então conduzidos através de *guias de onda* até fotodetetores balanceados, nos quais as variações no sinal óptico são convertidas em fotocorrentes elétricas. Existem basicamente 3 técnicas de deteção coerente: heteródina, intradina e homódina.

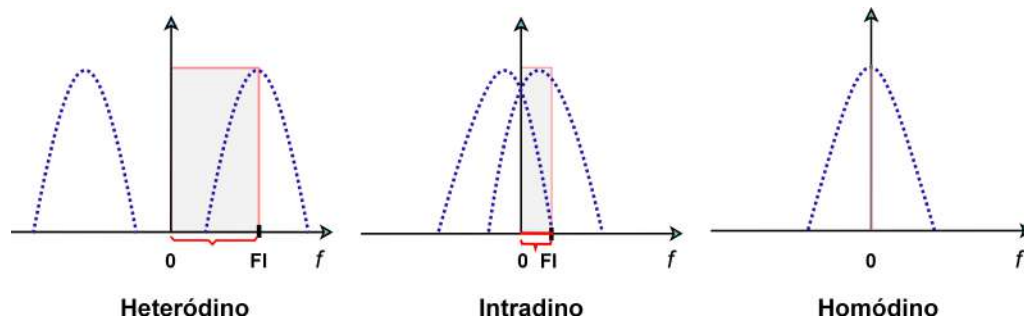


Figura 1.9: Representação das bandas de frequência para diferentes técnicas de deteção coerente.

Conforme ilustrado na Figura (1.9), as técnicas de deteção podem ser classificadas através da relação entre a banda de sinal  $B_S$  e a largura de FI  $B_{FI}$  [40]. A relação entre a  $B_S$  e a  $B_{FI}$  é determinante na escolha do método de deteção. Na deteção heteródina a FI é de faixa larga com  $B_{FI} \gg B_S$ , na homódina a FI é nula  $B_{FI} = B_S$  e na intradina a FI tem largura próxima do valor da banda de sinal  $B_{FI} \leq B_S$ . O padrão de deteção utilizado nos receptores PDM-QPSK de 100G é a deteção intradina (ver Figura (1.9b)). Este método de deteção foi escolhido por apresentar uma boa relação de compromisso entre a complexidade dos dispositivos optoeletrônicos e o desempenho oferecido. A conversão optoeletrônica de sinais pode ser caracterizada matematicamente e para tanto utiliza-se uma formalização apropriada para o campo elétrico da onda eletromagnética. Desenvolvimentos bem detalhados desse cálculo são realizados em [41, 42, 97].

Para o propósito desta tese, adotou-se principalmente o desenvolvimento de [41], com algumas alterações e observações necessárias para uniformizar a notação. A Figura (1.10) ilustra o diagrama de um detector coerente no qual o batimento de sinais ópticos é realizado por um simples combinador de 3 dB. Este diagrama é mostrado por questões didáticas, pois as estruturas mais complexas são, em geral, superposições desse módulo básico:

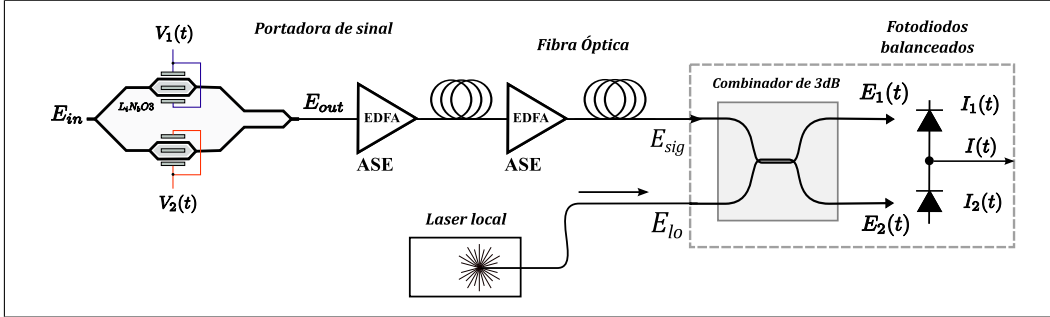


Figura 1.10: Diagrama de um enlace com detecção coerente simples.

Com base no diagrama da Figura (1.10), define-se o campo elétrico  $E_{sig}$  da onda portadora como:

$$E_{sig}(t) = \sqrt{P_{sig}} \cdot e^{j(\omega_{sig}t + \varphi_{sig})} \cdot n(t) e^{j\omega_{sig}t} \cdot a(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j\varphi_{n_{sig}}(t)} \cdot e_{sig} \quad (1-17)$$

Em que  $n(t) e^{j\omega_{sig}t}$  representa o ruído ASE dos amplificadores ópticos. De acordo com [41], o ruído ASE complexo pode ser particionado em duas componentes polarizadas em relação aos eixos de polarização da portadora óptica. Desta forma, a representação do ruído ASE em banda base é dada pela expressão:

$$n(t) = [n_x(t) e_x] + [n_y(t) e_y] \quad (1-18)$$

Em que as letras  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  denotam respectivamente as componentes *paralela* e *ortogonal* do ruído ASE. De forma semelhante à Equação (1-17), o campo elétrico do laser local é definido como  $E_{lo}$ :

$$E_{lo}(t) = \sqrt{P_{lo}} \cdot e^{j(\omega_{lo}t + \varphi_{lo})} \cdot e^{j\varphi_{n_{lo}}(t)} \cdot e_{lo} \quad (1-19)$$

Nas expressões (1-17) e (1-19),  $P_{sig}$  e  $P_{lo}$  denotam respectivamente as potências da portadora e do laser local,  $\omega_{sig}$  e  $\omega_{lo}$  são as frequências angulares,  $\varphi_{sig}$  e  $\varphi_{lo}$  são as fases de referência,  $\varphi_{n_{sig}}(t)$  e  $\varphi_{n_{lo}}(t)$  representam o ruído de fase e  $e_{sig}$  e  $e_{lo}$  são os vetores unitários de polarização. Os vetores unitários de polarização são uma ferramenta importante para representar o alinhamento entre o laser local e o sinal da portadora óptica.

Com a representação definida, os campos resultantes nas entradas dos fotodetetores são respectivamente:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [E_{sig}(t) + n(t) e^{j\varphi_{sig}t} + jE_{lo}(t)] \\ E_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [jE_{sig}(t) + jn(t) e^{j\varphi_{sig}t} + E_{lo}(t)] \end{aligned} \quad (1-20)$$

Conforme já mencionado, nos receptores coerentes comerciais, o batimento entre a portadora e o laser local é realizado em um dispositivo denominado *híbrida óptica*. Detalhes das conexões de uma híbrida 2 x 4 de 90° são mostrados na Figura (1.11):

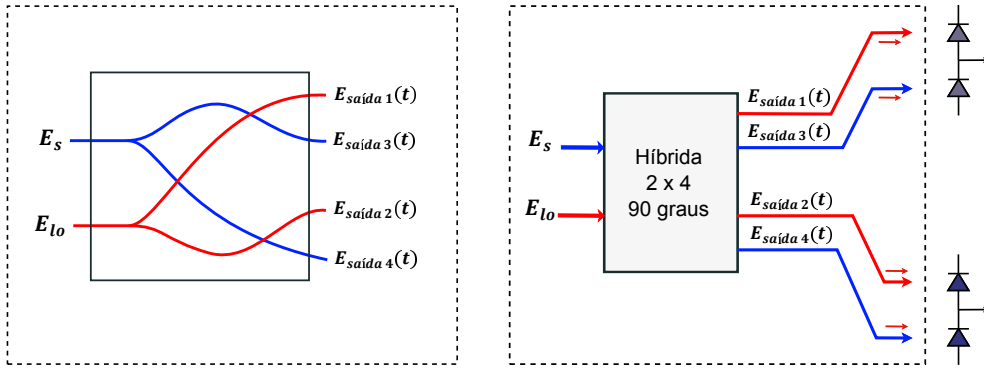


Figura 1.11: Ilustração da estrutura interna de uma híbrida de 90°.

As saídas da híbrida são *combinadas* em dois pares  $[E_1, E_3]$  e  $[E_2, E_4]$ . Deste modo, dado que os sinais de entrada são  $E_{sig}$  e  $E_{lo}$ , a função de transferência da híbrida óptica 2 x 4 é dada em notação matricial pela Equação (1-21):

$$\begin{bmatrix} E_{1_I}(t) \\ E_{2_Q}(t) \\ E_{3_I}(t) \\ E_{4_Q}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} E_{sig}(t) + E_{lo}(t) \\ E_{sig}(t) + jE_{lo}(t) \\ E_{sig}(t) - E_{lo}(t) \\ E_{sig}(t) - jE_{lo}(t) \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

Para realizar diversidade em polarização, os receptores comumente utilizam uma configuração de divisores de polarização e híbridas ópticas (estrutura 2 x 8). A maioria dos dispositivos comerciais de detecção coerente integram além das híbridas ópticas, amplificadores de transimpedância (TIA) em que as fotocorrentes são convertidas em níveis diferenciais de tensão elétrica, outros dispositivos fornecem diretamente saídas não-diferenciais das fotocorrentes.

A Figura (1.12) ilustra um *front-end* óptico com estrutura 2 x 8.

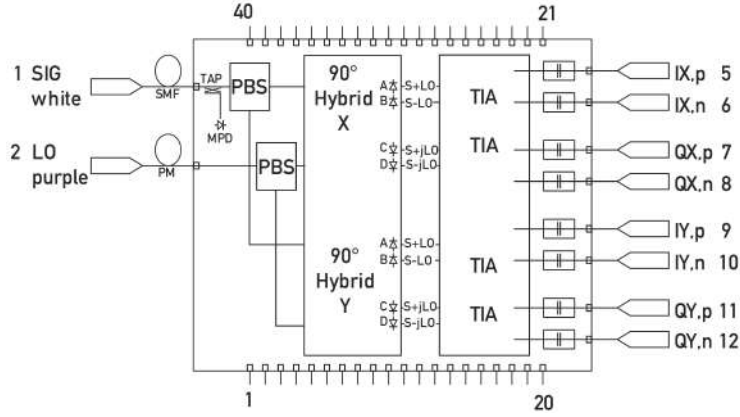


Figura 1.12: Representação esquemática de um detector coerente comercial com a incorporação de (TIA). Fonte: [www.finisar.com](http://www.finisar.com)

No *receptor coerente integrado* da Figura (1.12), observa-se que os divisores de polarização (PBS) fornecem diversidade para as componentes de polarização dos sinais  $e_{sig}$  e  $e_{lo}$ . Na entrada da híbrida superior, tem apenas componentes de sinal polarizadas na direção X. Na entrada da híbrida inferior, tem apenas componentes polarizadas na direção Y. Para a polarização X, a função de transferência em notação matricial da híbrida óptica superior tem a forma:

$$\begin{bmatrix} E_{1X}(t) \\ E_{2X}(t) \\ E_{3X}(t) \\ E_{4X}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} E_{sig}(t) + E_{lo}(t) \\ E_{sig}(t) + jE_{lo}(t) \\ E_{sig}(t) - E_{lo}(t) \\ E_{sig}(t) - jE_{lo}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{lo}(t) \cdot e_X \\ E_{sig}(t) \cdot e_X \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

Por sua vez, as correntes nos fotodetektors representadas por  $I_X(t)$  e  $Q_X(t)$  possuem a formulação matemática da Equação (1-23):

$$\begin{aligned} I_X(t) &= R \cdot E_1(t) \cdot E_1^*(t) - R \cdot E_3(t) \cdot E_3^*(t) \\ &= R\sqrt{P_s P_{lo}} \cdot a(t) \cdot [e_{PI_X}] \cdot \sin[\Delta\omega t + \varphi_n(t) + \varphi_0 + \varphi(t)] + i_{s_I} \end{aligned} \quad (1-23)$$

$$\begin{aligned} Q_X(t) &= R \cdot E_2(t) \cdot E_2^*(t) - R \cdot E_4(t) \cdot E_4^*(t) \\ &= R\sqrt{P_s P_{lo}} \cdot a(t) \cdot [e_{PI_X}] \cdot \sin[\Delta\omega t + \varphi_n(t) + \varphi_0 + \varphi(t)] + i_{s_Q} \end{aligned}$$

Em que  $e_{PI_x}$  é o *produto interno* entre as componentes de polarização  $\mathbf{x}$  [ $e_{sig_x} \cdot e_{lo_x}$ ]. Em [42], esta quantidade é representada na forma:

$$e_{PI_x} = \left| \frac{e_{sig_x} \cdot e_{lo_x}}{|e_{sig_x}| \cdot |e_{lo_x}|} \right| \quad (1-24)$$

É importante notar que, o alinhamento entre o feixe óptico local e cada híbrida óptica 2x4 deve ser de 45° [41]. Este requisito é importante e tem consequências que irão impactar tanto o domínio físico quanto o espaço de código. Essa importância decorre do fato de que o ângulo entre o laser de batimento estabelece uma *base vetorial* para a recepção das constelações ópticas. As quantidades  $i_{s_I}$  e  $i_{s_Q}$  representam o ruído *shot* dos fotodetetores balanceados. A FI é dada por  $\Delta\omega = |\omega_{\text{sig}} - \omega_{\text{lo}}|$ . O ruído de fase é dado  $\varphi_n(t) = (\varphi_{n_{\text{sig}}}(t) - \varphi_{n_{\text{lo}}}(t))$ . A diferença de fase entre a portadora e o laser local é dada  $\varphi_0 = (\varphi_s - \varphi_{\text{lo}})$ . As fases da portadora e do laser local variam aleatoriamente. Desta forma, tomando como referência um intervalo de tempo  $\tau$ , pode-se calcular a variância conjunta das fases com a Equação (1-25):

$$\langle \Delta\varphi_n^2(\tau) \rangle = 2\pi \Delta\nu_{\text{eff}}|\tau| \quad (1-25)$$

Em que a quantidade  $\Delta\nu_{\text{eff}}$  equivale ao comprimento de onda resultante do batimento entre a portadora e o laser local (ver Equação (1-26)).

$$\Delta\nu_{\text{eff}} = \Delta\nu_s + \Delta\nu_{\text{lo}} \quad (1-26)$$

A largura de linha efetiva  $\Delta\nu_{\text{eff}}$ , determina a *largura de linha da FI*, que é uma medida da variação em frequência da FI em função do ruído de fase dos sinais da portadora e do laser local. Consequentemente, essa variável é determinante para o cálculo do *tempo de coerência da banda de FI*. É importante notar que esse cálculo considera um valor instantâneo dentro do intervalo  $\tau$  dado pela Equação (1-25), logo a escolha do intervalo da amostra é de grande importância para a obtenção de uma medida válida da variação da fase e consequentemente do *ruído de fase*. De forma semelhante ao equacionamento realizado para a polarização **X**, a Equação (1-27) mostra a formulação para a polarização **Y**:

$$\begin{aligned} I_Y(t) &= R \cdot E_1(t) \cdot E_1^*(t) - R \cdot E_3(t) \cdot E_3^*(t) \\ &= R\sqrt{P_s P_{\text{lo}}} \cdot a(t) \cdot [\mathbf{e}_{PI_y}] \cdot \sin[\Delta\omega t + \varphi_n(t) + \varphi_0 + \varphi(t)] + i_{s_I} \\ Q_Y(t) &= R \cdot E_2(t) \cdot E_2^*(t) - R \cdot E_4(t) \cdot E_4^*(t) \\ &= R\sqrt{P_s P_{\text{lo}}} \cdot a(t) \cdot [\mathbf{e}_{PI_y}] \cdot \sin[\Delta\omega t + \varphi_n(t) + \varphi_0 + \varphi(t)] + i_{s_Q} \end{aligned} \quad (1-27)$$

Os amplificadores de transimpedância integrados ao detector coerente reduzem o ruído em modo comum do sinal. Eles também facilitam o casamento de impedâncias e o controle de deriva em temperatura. Por estas vantagens, estes detectores são utilizados nos *receptores coerentes digitais*. Na busca por padronização, alguns receptores coerentes aderem às especificações de MSA (Multi Source Agreement), do OIF (Optical Internetworking Forum) [43, 44].

### 1.3.1

#### Receptores Coerentes Digitais

Os receptores coerentes digitais são uma classe de receptores optoeletrônicos projetados para realizar diversas funções no domínio eletrônico. Mais especificamente, esses dispositivos realizam o processamento digital de sinais. A Figura (1.13) mostra um exemplo de arquitetura de receptor coerente digital. De modo geral, a partir da amostragem dos sinais do *front-end*, existe uma sequência de filtros digitais que realizam, de forma sequencial ou paralela, as funções de compensação da dispersão, equalização, recuperação de relógio e demodulação.

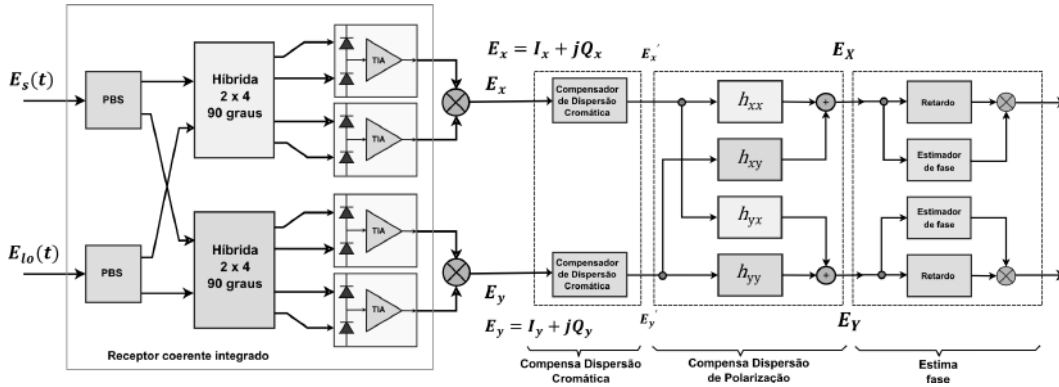


Figura 1.13: Visão geral dos blocos funcionais de um receptor digital coerente.

Algumas sequências de processamento de sinais são típicas da arquitetura. A compensação da dispersão, por exemplo, reduz o *jitter* para as funções de temporização e recuperação de relógio. Por este motivo, a compensação da dispersão é realizada nos primeiros estágios do receptor [45].

#### 1.3.1.1

##### Bloco lógico para compensação de perdas e dispersão

Nos receptores digitais coerentes é comum a utilização de estruturas de filtros FIR (Finite Impulse Response Filter) em uma configuração cruzada denominada de "equalizador MIMO". Esse arranjo, também conhecido como equalizador "butterfly", é descrito em detalhes por [46, 47]. De modo geral, o bloco lógico realiza funções de autocorrelação entre componentes de sinal  $x$  e  $y$ , na entrada do equalizador. Para amostragens em instantes de tempo  $k$ , o arranjo realiza a transformação matricial da Equação (1-28):

$$\begin{bmatrix} x'(k) \\ y'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

em que  $h_{xx}$ ,  $h_{xy}$ ,  $h_{yx}$  e  $h_{yy}$  são *taps* dos filtros digitais.



Os coeficientes dos filtros deverão ser atualizados continuamente para a realização de filtragem adaptativa. O equalizador modelado dessa forma permite a estimação de fenômenos físicos do canal óptico. Por exemplo:

- Na ausência de rotações de polarização a correlação cruzada (termos  $\mathbf{h}_{xy}$  e  $\mathbf{h}_{yx}$ ) é nula e as quantidades  $\mathbf{h}_{xx}$  e  $\mathbf{h}_{yy}$  que representam a autocorrelação tornam-se ortogonais. Com base nesta propriedade, é possível estimar a PMD durante uma fase inicial da transmissão em um processo denominado "treinamento".
- Quando a energia é conservada, as quantidades  $\mathbf{h}_{xy}$  e  $\mathbf{h}_{yx}$  são respectivos complexos conjugados. Logo, a não observância desta característica é um indicador da PDL do enlace;

A especificação do comprimento desses filtros é resultado de uma relação de compromisso entre o tempo de símbolo e o valor médio do *atraso diferencial de grupo*, considerando-se o comprimento máximo do enlace. Referências da literatura indicam, por exemplo, que para taxas de 100G numa transmissão PDM-QPSK, o comprimento do filtro situa-se entre 7 e 11 [46, 47]. Os filtros digitais devem ser capazes de processar as variáveis de interesse do sistema de transmissão. Dentro do escopo da tese, descreve-se a seguir algumas das principais variáveis relacionadas.

### 1.3.2

#### Variáveis e requisitos de desempenho do sistema de comunicação adaptativa

##### 1.3.2.1

##### Relação sinal-ruído Óptico - OSNR

Uma variável fundamental em sistemas de comunicação é o ruído ou, mais especificamente, a relação sinal-ruído. Em sistemas ópticos, a relação sinal-ruído óptico é frequentemente denotada pelo acrônimo da língua inglesa OSNR (Optical Signal to Noise Ratio). A OSNR é tipicamente definida como a taxa entre a potência total do sinal óptico livre de ruído e a densidade espectral de potência do ruído óptico [IEC61280-2-9] [48].

A densidade espectral de potência do ruído óptico é tipicamente a potência do ruído medida em uma banda de 0,1 nm (12,5 GHz) do espectro óptico. Matematicamente, a OSNR pode ser expressa na forma da Equação (1-29):

$$\text{OSNR}_{\text{ruído}} = \frac{P_{\text{TX}}}{P_{\text{ruído}}} \quad (1-29)$$

A potência de ruído descrita na Equação (1-29) é originada principalmente pelas *emissões espontâneas amplificadas* (ruído ASE). Esta equação permite uma boa medida da degradação do sinal causada pela ASE mas dependendo da potência de transmissão, a contribuição do ruído gerado pelas interferências não lineares deve ser considerada. Neste caso, se as distribuições dos ruídos puderem ser modeladas como processos Gaussianos, o ruído resultante será o somatório entre o ruído ASE e o ruído não linear. Quando considera-se o efeito conjunto destes ruídos, a OSNR continua sendo uma medida válida da degradação do sinal óptico e para fazer uso dos sinais medidos, é necessário conhecer os valores limites dentro dos quais o sistema de comunicação funciona adequadamente. No caso da OSNR, um parâmetro de análise que indica classicamente o limiar da potência de transmissão é reportado em [37] e é dado pela relação:

$$\frac{P_{\text{não linear}}}{P_{ASE}} \leq 0.5.$$

Contudo, essa relação não leva em conta efeitos como a PDL e a rotação dos estados de polarização que, no caso desta tese, são variáveis fundamentais do sistema de transmissão. Para incluir estes efeitos, buscou-se na literatura algumas referências. A abordagem realizada por [49], considera a medição intrabanda da OSNR com a inclusão das contribuições da PDL e das rotações dos estados de polarização. De outra forma, métodos baseados nos momentos estatísticos, reportados por [50], permitem explorar características de modulações PS-QPSK e PolSK que possuem módulo constante (no transmissor).

De acordo com [51], a SNR finita de um transceptor óptico coerente é uma propriedade inerente que não pode ser mitigada ou compensada e atualmente representa um obstáculo significativo para aumentar o rendimento dos sistemas de comunicações ópticas. O autor cita ainda que a SNR do transceptor que ele utiliza equivale ao estado da arte e possui uma SNR limite de **24 dB**.

### 1.3.2.2

#### Ruído de Fase

O ruído de fase é um fenômeno intrínseco das comunicações coerentes por fibras ópticas. Em receptores não-homódinos, o efeito do ruído de fase é ainda mais relevante pois o ruído está presente tanto no laser transmissor quanto no laser local. De acordo com algumas publicações, dependendo da estrutura de recepção e da taxa de transmissão, as modulações PolSK [52, 53, 54] e PS-QPSK [55, 56, 57] são relativamente insensíveis ao ruído de fase. Contudo, é fato que o ruído de fase aumenta a incerteza em relação a rotação dos estados de polarização quando utiliza-se modulações com alta densidade de símbolos. Em arquiteturas que utilizam receptores coerentes integrados, existe um problema adicional relacionado ao grau de liberdade para medir o ruído de fase. Isto ocorre, porque alguns pontos de conexão dos receptores integrados não estarão acessíveis externamente [43]. A Figura (1.14) mostra o diagrama de blocos e o encapsulamento de um circuito integrado optoeletrônico comercial utilizado como *receptor óptico coerente*.

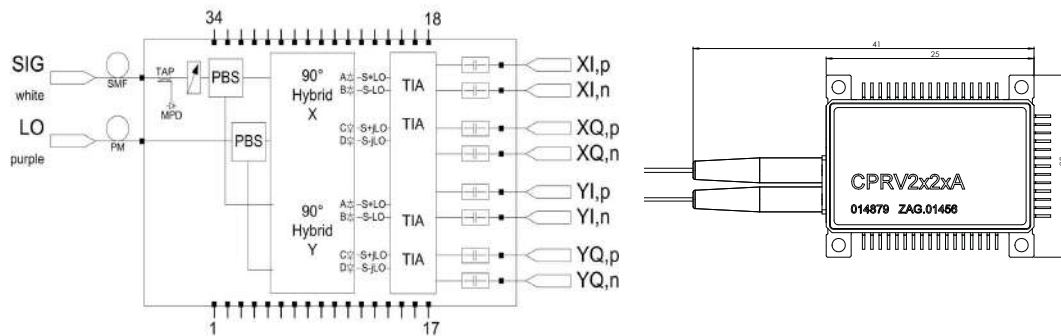


Figura 1.14: Diagrama de blocos e encapsulamento extraídos da documentação de um receptor coerente integrado comercial.

No receptor coerente da Figura (1.14), apenas os pinos dos sinais elétricos estão acessíveis. O processamento digital de sinais é então a forma disponível para mitigar o ruído de fase. Nesse contexto, o processamento de sinais utiliza diversas convenções. Por exemplo, ao assumir que a variação na taxa de erro (BER) de um sistema de comunicação é diretamente proporcional à variação na distância euclidiana entre os símbolos da constelação, pode-se calcular os limites de desempenho do sistema em função do ruído de fase. Métricas como EVM (Error Vector Magnitude) calculadas sobre os 4 sinais de saída do receptor auxiliam nesta tarefa [58].

### 1.3.2.3

#### Efeitos de Dispersão

Os circuitos de temporização são requisitos cada vez mais importantes nas telecomunicações. Neste aspecto, os efeitos de dispersão são ofensores ao desempenho dos sistemas de alta taxas. Reduzir ou compensar a dispersão equivale a reduzir a incerteza dos eventos que dependam da fase da onda eletromagnética. A Figura(1.15) ilustra a dispersão do espectro de um sinal óptico em função da distância percorrida [63]. O alargamento do espectro dificulta a definição do estado de polarização de um sinal com estas características.

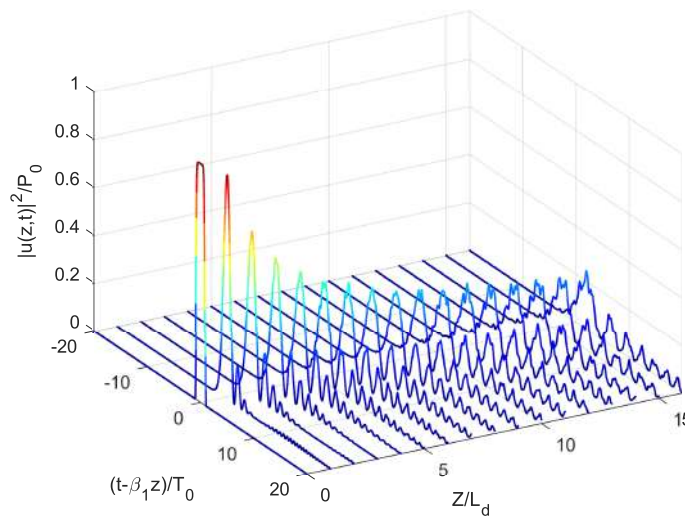


Figura 1.15: Efeito da dispersão em função da distância de propagação para um pulso Gaussiano de ordem  $m=5$  com  $\beta_2=0$  e  $\beta_3 = 1ps^3/km$ .

Na sequência desta seção, aborda-se os efeitos de dispersão com ênfase nas questões pertinentes aos sistemas coerentes.

**Dispersão Cromática** A dispersão cromática consiste basicamente no descasamento entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo da onda eletromagnética. O método mais utilizado para compensação eletrônica da dispersão cromática utiliza filtros que possuem uma resposta em frequência inversa à resposta ao impulso da fibra. Para tanto, calcula-se a resposta ao impulso da fibra, baseando-se na premissa de que a fibra se comporta como um *sistema linear* e que a dispersão cromática é um fenômeno relativamente estático. Com este modelo simplificado, os limites de contorno do problema de controle da dispersão é equacionado. A Figura (1.17) ilustra um exemplo de bloco funcional utilizado para compensar a dispersão.

Para agregar ao cálculo o efeito de outras variáveis associadas, é necessário analisar questões fundamentais sobre o fenômeno da dispersão.

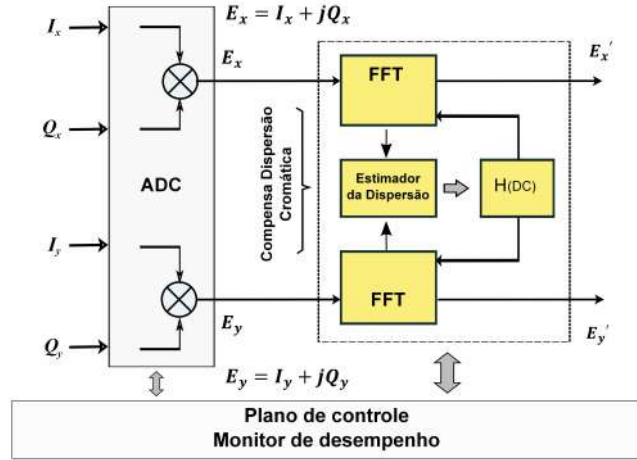


Figura 1.16: Diagrama de blocos simplificado do compensador de dispersão.

Quando a portadora óptica é modulada, a fração de informação que cada símbolo transporta é codificada nos pacotes de luz que são transmitidos. Esses pacotes de luz são transmitidos sequencialmente nas modulações temporais (TDM - Time Division Multiplexing) ou paralelamente nas modulações espaciais (SDM - Space Division Multiplexing). Para recuperar a informação contida no sinal disperso será necessário "esperar" que todas as componentes de frequência do sinal atinjam o receptor. Em outras palavras, a informação que chega ao receptor está contida em um pulso mais largo que aquele transmitido originalmente. Se o sinal recebido for amostrado em intervalos fixos, com base no *tempo de símbolo* do transmissor, haverá perda de informação no intervalo de interesse devido à adição de informação de intervalos adjacentes. Este fenômeno é conhecido como interferência intersimbólica (ISI) e, quando associado à dispersão, caracteriza a superposição de símbolos defasados no tempo.

O efeito da dispersão pode ser modelado como um *filtro passa tudo*. Com essa premissa, para uma fibra óptica de comprimento  $L$ , o equacionamento é comumente realizado pela seguinte função de transferência [59].

$$H_{DC}(\Omega) = \exp \left( -j \cdot \frac{\lambda_0^2}{4\pi c} \cdot D \cdot L \cdot \Omega^2 \right) \quad (1-30)$$

Em que  $\Omega$  é a frequência lateral em banda base e  $c$ ,  $\lambda_0$  e  $D$  são respectivamente a velocidade da luz, o comprimento de onda de operação e o parâmetro de dispersão da fibra que inclui a contribuição de todas ordens de dispersão.

A relação entre  $D$  e os parâmetros  $\beta_2$  e  $\beta_3$  é dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= -\frac{\lambda_0^2}{2\pi c} \times D \\ \beta_3 &= -\left(\frac{\lambda_0}{2\pi c}\right)^2 \times (2\lambda_0 D + \lambda_0^2 D')\end{aligned}\tag{1-31}$$

A forma discreta da Equação (1-30) quando amostrada no intervalo  $\omega \in [-\pi, \pi)$  é dada por:

$$H_{\text{DC}}(\omega) = \frac{1}{H_{\text{DC}}(\Omega)} = \exp(-j \times \alpha \times \omega^2)\tag{1-32}$$

Em que, considerando-se apenas o parâmetro  $\beta_2$ , a variável  $\alpha$  é igual a:

$$\begin{aligned}\alpha &= -j \times \frac{\lambda_0^2}{4\pi c} \times D \times L \\ &= -j \frac{\beta_2}{2} \times L\end{aligned}\tag{1-33}$$

De acordo com [60], a partir da Equação (1-32) podem ser observadas as seguintes características:

- A função  $H_{\text{DC}}(\omega)$  é contínua e tem uma resposta ao impulso infinita, o que dificulta a realização de filtros IIR;
- A Equação (1-32) define uma função complexa, logo o filtro para compensação da dispersão deverá ter uma resposta ao impulso igualmente complexa;
- A filtragem digital na forma da Equação (1-32) possui limitações intrínsecas e a quantidade de dispersão que pode ser compensada é limitada, porém suficiente para sistemas de comunicações coerentes;

De acordo com [61, 62], um transceptor adaptativo requer algumas relações de compromisso. A principal delas, diz respeito à eficiência dos filtros digitais realizáveis em função da banda de frequência. Em uma situação ideal, quanto maior a banda do filtro, maior será a capacidade deste filtro de compensar a dispersão. Ocorre que em um sistema DSP real, o custo computacional, o consumo de energia e o retardo gerado pelos filtros digitais são geralmente proporcionais ao número de *taps* e uma relação de compromisso entre a eficiência e a complexidade dos filtros se faz necessária. Importantes referências no trato matemático da dispersão cromática são dadas por [2, 63, 64]. Um tratamento mais completo dos efeitos de propagação em fibras ópticas pode ser encontrado em [9].

Em [65], foi reportada a realização em FPGA de um filtro (FIR) com 128 taps. O filtro em questão é próprio para a compensação da dispersão cromática em receptores coerentes digitais. Em [60], foi reportada uma técnica de compensação com boa eficiência energética utilizando filtros de meia banda.

**Dispersão dos modos de polarização - PMD** Sob a perspectiva da teoria dos modos acoplados [63], a fibra óptica monomodo é um guia de onda cilíndrico que possui dois modos ortogonais de propagação do sinal. Em termos físicos, isto significa que existem duas direções na qual os *dipolos* formados pelo material da fibra oferecem menor resistência ao movimento induzido pelo campo elétrico (efeito de polarização do material SiO<sub>2</sub> em fibras G.652).

Ao considerar a propagação de um sinal de luz sobre a fibra, os eixos de polarização descritos matematicamente pela equação de autovalores são idealmente ortogonais e as componentes do campo elétrico propagantes em cada eixo definem os *principais estados de polarização*. Em um sistema de coordenadas cartesianas, o fenômeno físico da ausência de birrefringência, é representado por dois modos ortogonais alinhados nas direções  $x$  e  $y$  de uma elipse. Neste caso, os modos são *degenerados*, significando que possuem a mesma constante de propagação. Essa condição indica que os índices de refração  $n_x$  e  $n_y$  são iguais e o estado de polarização de um pulso lançado na fibra não se altera em função do acoplamento dos modos. Na prática, a fibra padrão de telecomunicações do tipo G.652 exibe relevantes quantidades de *birrefringência modal*, na forma:

$$B_m = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{2\pi} \lambda = |n_x - n_y| \quad (1-34)$$

A birrefringência modal pode ser classificada em *birrefringência linear* e *birrefringência não linear*. Numa fibra com birrefringência linear a luz linearmente polarizada que se propaga ao longo dos eixos principais permanece linearmente polarizada [8]. A birrefringência linear pode ser do tipo *latente* ou *induzida* [66], a *birrefringência linear latente* decorre principalmente de imperfeições do processo de fabricação e instabilidades mecânicas entre o material do núcleo e da casca, enquanto a *birrefringência linear induzida* decorre de mudanças no índice de refração de cada eixo de polarização. Estas mudanças podem ser geradas por intervenções propositais através de deformações, tensões e mudanças de temperatura exercidas sobre fibra ou ainda por influência do próprio sinal propagante na fibra.

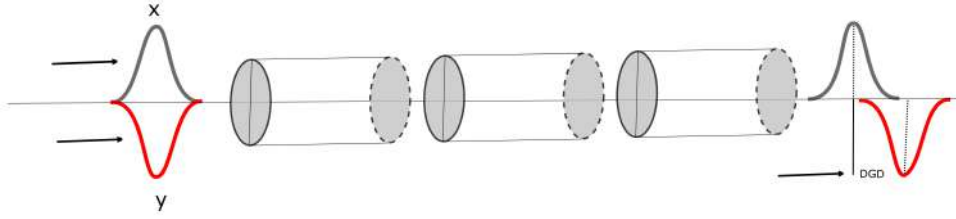


Figura 1.17: Acoplamento de modos numa fibra óptica de telecomunicações.  
 Fonte: Testing Polarization Mode Dispersion (PMD) in the Field.

Na medida em que a luz se propaga na fibra, a fase relativa entre os modos do campo varia aleatoriamente, induzindo um retardo de tempo  $\tau$  entre os modos. A representação matemática simplificada deste efeito é dada na forma:

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \quad (1-35)$$

Em que  $\varphi$  é a fase de polarização e  $\omega$  é a frequência angular da onda.

A derivada mostrada na Equação (1-35) é a própria definição da PMD de primeira ordem, que é uma quantidade vetorial definida na direção dos *principais estados de polarização*. O comprimento do vetor PMD é dado pelo atraso diferencial de grupo (DGD). Ao considerar a interferência intermodal que a fibra óptica exerce sobre a polarização do sinal, o principal estado de polarização é definido como o estado de polarização de entrada para o qual o estado de polarização de saída é independente da frequência sobre uma estreita faixa de frequências. A quantificação da faixa de frequência é dada pela estacionariedade estatística de primeira ordem do vetor (estado de polarização de saída) [67]. A consequência dessa definição é que um pulso de luz polarizada, limitado em banda de frequência, lançado na fibra na direção de um estado de polarização principal, deverá emergir da fibra óptica no mesmo estado de polarização da entrada.

Os principais estados de polarização são, portanto, autovetores da matriz de transferência (relacionada à propagação de sinal) da fibra óptica. Os autovetores da matriz de transferência em questão são definidos para um comprimento de fibra em que a função de transferência é linear. Em fibras com centenas ou milhares de quilômetros, a premissa de linearidade não é esperada e portanto novas variáveis devem ser consideradas. As primeiras variáveis que devem ser consideradas são o comprimento de batimento de polarização  $L_b$  e comprimento de correlação  $L_c$ .



O comprimento de batimento de polarização é calculado na forma da Equação (1-36):

$$L_b = \frac{\lambda_{ref}}{\Delta n_{eff}} \quad (1-36)$$

Em que  $\lambda_{ref}$  é o comprimento de onda central ou comprimento de onda médio e  $\Delta n_{eff}$  é o índice de refração efetivo da fibra óptica [66].  $L_b$  define portanto o comprimento em que a polarização exibe um ciclo completo ( $2\pi$ ) de rotação. A rotação de polarização em questão é um efeito *intrínseco*, resultante do acoplamento de *fase* entre os eixos *lento* e *rápido* (modos ortogonais) da fibra óptica. Ao considerar  $p_x$  e  $p_y$  modos ortogonais de polarização da fibra, o comprimento de correlação  $L_c$  é definido na forma:

$$L_c = E\langle p_x \rangle - E\langle p_y \rangle = \frac{1}{e^2} \quad (1-37)$$

O comprimento de correlação é também um efeito *intrínseco*, só que resultante do acoplamento de *energia* entre os eixos *lento* e *rápido* (modos ortogonais) da fibra óptica. As quantidades  $L_b$  e  $L_c$  são fundamentais para a aplicação das regras de concatenação da PMD. De modo geral, é necessário concatenar segmentos do enlace em comprimentos mínimos que exibam independência estatística. Em sistemas digitais, a recuperação de polarização é realizada com base em amostras temporais dos parâmetros de polarização. Ocorre que os parâmetros de polarização são determinados através de medidas da fase da portadora e da *intensidade óptica* (fotodetetores e ADC) e a partir destas medidas é possível determinar a *fase de polarização*  $\varphi$  entre as componentes do campo elétrico. A Figura (1.18) mostra um diagrama de blocos simplificado de um compensador de PMD integrado com a compensação da dispersão cromática e a estimação de fase.

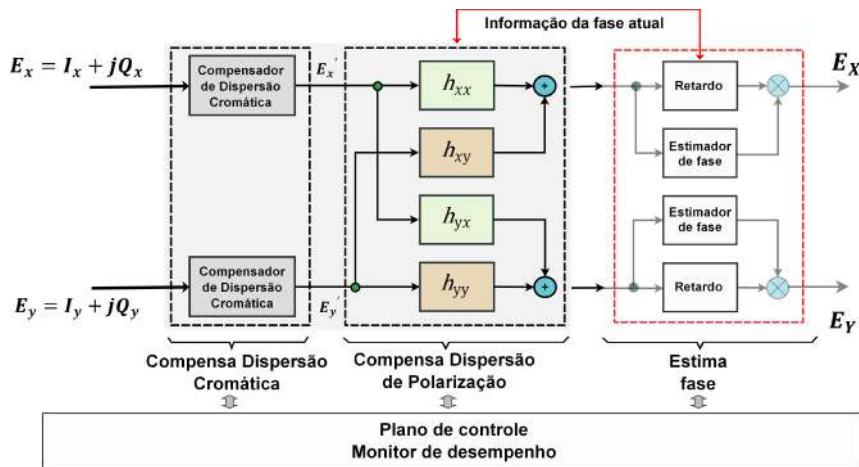


Figura 1.18: Diagrama de blocos simplificado do compensador de PMD integrado com a estimação de fase.

Embora a dispersão cromática não dependa da polarização [67, 68], a integração dos blocos de processamento de sinais permite que as informações comuns a respeito do *estado do canal* sejam compartilhadas de modo eficiente.

#### 1.3.2.4

##### **Perda dependente de polarização - PDL**

A PDL é tipicamente definida como a máxima variação do ganho ou perda de inserção em um enlace após a transmissão de todos os possíveis estados de polarização. Isto faz da PDL um efeito colateral das modulações ópticas em sistemas com multiplexação de polarização. Na presença da PDL, o sinal óptico modulado em polarização não possui a característica de *módulo constante* ao chegar no receptor. Conforme mostrado na Seção (4.6), todas as modulações têm um espectro de polarização que é resultado da transição entre os diferentes estados de polarização da portadora óptica. Alguns estudos relatam a existência de uma interação entre a PDL e os efeitos não lineares [70, 69]. Outros descrevem formas de mitigar a PDL, fazendo uso de códigos de polarização no tempo [71, 72]. Conforme demonstrado no Capítulo (4), a construção de constelações 4D, usando os fibrados de Hopf permite abordar o problema da PDL na definição de modulações ópticas com um espectro de polarização pré-definido. De modo geral, em um receptor digital coerente, a PDL é comumente compensada através de filtragem adaptativa.

### 1.3.2.5

#### Efeitos não lineares

Os efeitos não lineares nas fibras ópticas estão relacionados com a polarização induzida no material da fibra. De acordo com [82], quando um campo elétrico é aplicado em um material dielétrico, os elétrons e os núcleos dos átomos formam dipolos que tendem a se mover, seguindo o campo elétrico. Quando a potência transmitida através da fibra excede determinados limites (campo eletromagnético intenso), os efeitos não lineares se tornam mais pronunciados. Na maioria dos casos, estes efeitos estão relacionados com a dependência do índice de refração com a intensidade da luz (ver Equação (1-16)). Em enlaces de longa distância, os efeitos de dispersão e atenuação reduzem a potência útil dentro da banda de transmissão. Para manter a SNR dentro de uma faixa aceitável, uma solução imediata consiste em aumentar a potência de transmissão. Contudo, o aumento da potência de transmissão para acima da região linear implica em maior consumo de energia. Dado que, a fibra óptica tem uma seção transversal fixa, a elevação da densidade de potência óptica reforça a interferência não linear (INL), degradando ainda mais o canal. Em última análise, estas limitações determinam a capacidade de transmissão das modulações ópticas. Na Seção (2.3.1), recorre-se ao modelo matemático da ENLAS para representar os efeitos não lineares em sinais ópticos modulados.

Apesar do equacionamento analítico, os efeitos não lineares conduzem a uma imprevisibilidade sobre as condições do canal. Em consequência, alguns trabalhos apontam para técnicas de aprendizado de máquina para mitigação destes efeitos [73, 75]. Em termos práticos, pode-se calcular a capacidade de transmissão considerando o canal Gaussiano e em seguida, em função da severidade das não linearidades, aplicar correções que reduzam a capacidade efetiva do canal. Contudo, é importante notar que esta abordagem está longe de ser a ideal.

No Capítulo (4) demonstra-se métodos construtivos desenvolvidos nesta tese para o projeto de constelações ópticas de alta ordem. Os fibrados de Hopf permitiram a construção de modulações PolSK mapeadas diretamente sobre a esfera  $S^3$  unitária. Adicionalmente, propõe-se o método denominado **Mapeamento Discreto de Cascas Esféricas** (MDCE) para o projeto de modulações de alto desempenho. As constelações construídas, permitem uma relação de compromisso entre *linearidade*, *eficiência espectral* e *eficiência energética* com simultânea redução da PAPR (Peak-to-Average Power Ratio). É importante enfatizar que a relevância do método MDCE decorre do fato de prover eficiência energética sem prejuízo da eficiência espectral.

Em sistemas reais de comunicações ópticas o sinal transmitido sofre diversos tipos de variações desde a fonte emissora de luz, passando pelo meio de transporte até chegar ao receptor. A imprevisibilidade destas variações tornam os modelos determinísticos inadequados para a caracterização destes sistemas e deste modo uma abordagem estatística é comumente mais adequada. O estudo das propriedades estatísticas da luz faz parte do campo da *óptica estatística* [76, 77], que nos fornece os meios para caracterizar os sistemas de comunicações ópticas através de modelos matemáticos que se aproximam dos fenômenos físicos envolvidos.

As formulações da óptica estatística dependem de modelos apropriados para a luz. Dessa forma, várias asserções a respeito do comportamento físico e da natureza da luz são necessárias para o estabelecimento dos limites de contorno dos problemas tratados. Para o nosso estudo, as seguintes asserções são particularmente consideradas:

1. A onda eletromagnética que representa o sinal óptico será considerada *monocromática* quando aplicada em modelos matemáticos analíticos. Para sinais reais, com pouca quantidade de comprimentos de onda adjacentes, considera-se o modelo de uma onda *quasi-monocromática* [78]. Com estas premissas, os termos *onda monocromática* e *onda quasi-monocromática* poderão ser utilizados para diferenciar o tipo de sinal.
2. A onda eletromagnética que representa o sinal óptico poderá ser modelada por um processo *estatisticamente estacionário*;
3. A onda eletromagnética que representa o sinal óptico poderá ser modelada como um processo *ergódico*. Ou seja, a média temporal tomada sobre o intervalo  $-\infty < t < \infty$  será igual a média de um conjunto de (amostras) medidas [79]. Outra definição de ergodicidade diz que um sistema ergódico tem o mesmo comportamento médio no tempo e no espaço.

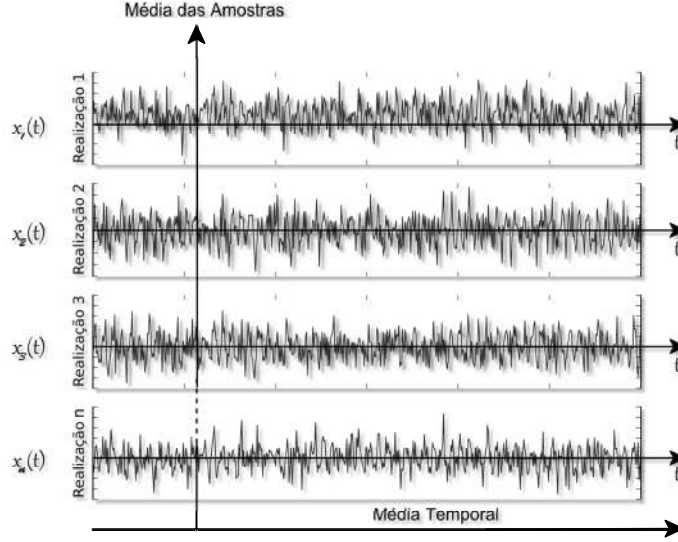


Figura 2.1: Ilustração da diferença entre amostragem temporal e espacial.

A condição de ergodicidade é de grande importância para a teoria unificada da polarização e coerência da luz [67, 80], pois a ergodicidade pode ser classificada tanto em relação a *média* quanto em relação a *autocorrelação* de uma função.

De modo geral, dada uma função  $x(t)$  representativa de um processo aleatório, o mesmo será caracterizado como ergódico se a *média* da função  $x(t)$  obedecer a formulação da Equação (2-1):

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \langle x(t) \rangle \quad (2-1)$$

De forma análoga, dada uma função  $x(t)$  representativa do mesmo processo, este será caracterizado como ergódico se a *função de correlação* da função  $x(t)$  nos instantes  $t$  e  $t + \tau$  obedecer a Equação (2-2):

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (2-2)$$

A partir destas asserções é possível definir os conceitos de *coerência temporal* e *coerência espacial* da luz. Os conceitos de coerência permitem a definição matemática de diversas propriedades físicas da luz utilizadas ao longo deste trabalho. De acordo com [81], considerando-se um ponto de referência denotado por  $\mathbf{r}$  e tomando-se as variações em função do tempo de uma onda estacionária neste ponto. Resulta que, a função aleatória estacionária  $E(r, t)$  que representa esse processo tem intensidade constante. A formulação desta propriedade é mostrada na Equação (2-3):

$$I(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |E(r, t)|^2 dt = \langle |E(r, t)|^2 \rangle \quad (2-3)$$

Para um ponto  $\mathbf{r}$  fixo, a intensidade do sinal óptico é:

$$I = |E(t)|^2 \quad (2-4)$$

As Equações (2-3) e (2-4) indicam que, em termos matemáticos, a *intensidade do sinal óptico* é uma função da média estatística dos valores assumidos pelo campo elétrico sobre *determinado* período de tempo. Resta então definir *quantitativamente* a escala de tempo para a qual os diversos valores assumidos pelo campo elétrico constituem amostras independentes. Para atingir esse propósito, define-se dois instantes de tempo separados por um atraso que denota-se por  $\tau$ . Feito isto, utiliza-se a função de autocorrelação denominada *função de coerência temporal*, que é definida como a média amostral do produto entre o *complexo conjugado* da função  $E(t)$  e uma versão da mesma função atrasada no tempo. Esta função é representada da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}(\tau) = \langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle \quad (2-5)$$

Na Equação (2-5), o produto entre o *complexo conjugado* da função  $E(t)$  e uma versão atrasada dela mesma resulta em uma quantidade vetorial cuja fase equivale ao ângulo entre os fasores  $E(t)$  e  $E(t + \tau)$ . A média estatística das diversas amostras deste ângulo nos fornece o grau de correlação da função  $E(t)$  nos instantes  $t$  e  $t + \tau$ . Quando os fasores estão descorrelacionados, as diversas variações do ângulo levará a média para um valor central nulo.

Assim, a medida que  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{G}(\tau) \rightarrow I$ , ou seja:

$$I = \mathcal{G}(0) = E(t)^* E(t) \quad (2-6)$$

Quando a dependência de  $\mathcal{G}(\tau)$  com a intensidade  $I$  é removida, obtém-se como resultado uma função denominada *grau complexo de coerência temporal*, denotada por  $g(\tau)$ .

$$g(\tau) = \frac{\mathcal{G}(\tau)}{\mathcal{G}(0)}; \quad 0 \leq |g(\tau)| \leq 1 \quad (2-7)$$

A variação da função  $|g(\tau)|$  permite o cálculo de um parâmetro muito útil para aplicações de engenharia denominado *tempo de coerência*. De forma resumida, o tempo de coerência denotado por  $\tau_c$  é o ponto limite, abaixo do qual a descorrelação entre os fasores  $E(t)$  e  $E(t + \tau)$  não preserva a memória das flutuações do sinal e as amostras da função  $|g(\tau)|$  já podem ser consideradas como estatisticamente independentes.

Para calcular o valor de  $\tau_c$ , é necessário conhecer a forma como a função decresce a partir de seu ponto de máximo. Ou seja, tomando o ponto  $|g(\tau)| = 1$  aumenta-se o valor de  $\tau$  e na medida em que a função decresce, estabelece um limite inferior representativo para a descorrelação, que pode ser, por exemplo,  $1/e$ . De modo geral, quando o tempo de coerência ( $\tau_c$ ) é muito maior que o atraso de propagação em um enlace óptico, pode se considerar que a luz na recepção é totalmente coerente. A partir dessa propriedade, define-se outro conceito particularmente útil em aplicações de engenharia denominado *comprimento de coerência*, denotado por  $L_c$  e cuja formulação é:

$$L_c = v_g \tau_c ; \quad (2-8)$$

Em que  $v_g$  denota a *velocidade de grupo* da onda. Para o caso específico das comunicações por fibras ópticas, o comprimento de coerência corresponde ao espaço percorrido pela luz na fibra óptica dentro do qual se mantém coerente. Ou seja, é o espaço percorrido pela luz no intervalo de tempo  $\tau_c$ .

## 2.1

### Largura espectral da luz

As larguras espectrais das fontes de luz utilizadas nas comunicações ópticas são parâmetros essenciais para o dimensionamento dos sistemas de transmissão e detecção de sinais. Nesta seção, são abordados alguns conceitos importantes para compreender melhor esta característica da luz. Para o trabalho em curso, é dada particular atenção aos conceitos relevantes para os sistemas de detecção óptica coerente. Frequentemente, para efeito de simplificação considera-se que a luz com a qual trabalhamos é *monocromática*. Contudo, essa asserção não é rigorosamente observada na prática cotidiana. Rigorosamente, o sinal óptico é composto de componentes adjacentes de frequência que estão presentes mesmo quando são utilizadas fontes laser de boa qualidade. Apesar das limitações das fontes ópticas reais, a idéia central por trás da largura espectral reside na densidade espectral de energia da luz. Uma quantidade que representa a *energia* por unidade de *área*, por unidade de *frequência*.

Sabe-se que uma onda monocromática estacionária, nos termos definidos até agora, se estende ao infinito e transporta uma quantidade de energia infinita. Logo, para tornar este objeto uma quantidade mensurável toma-se a densidade espectral de energia em um intervalo de tempo finito  $T$ . Fato este, que propicia calcular a transformada de Fourier da onda  $E(t)$  na forma da Equação (2-9):

$$V_T(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} E(t) \exp(-j2\pi\nu t) dt \quad (2-9)$$

A presumível ergodicidade do processo, faz com que a transformada de Fourier na janela de tempo  $T$  seja equivalente a *densidade espectral de energia*, definida na forma  $\langle |V_T(\nu)|^2 \rangle$ . Esta discretização no tempo da densidade espectral de energia, permite que a *densidade espectral de potência* seja calculada através do aumento da janela de tempo  $T$ :

$$\mathcal{S}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |V_T(\nu)|^2 \rangle \quad (W/cm^2 - Hz) \quad (2-10)$$

A função  $\mathcal{S}(\nu)$  na Equação (2-10) também representa a *densidade espectral de intensidade*. Consequentemente, quando esta função é integrada sobre o intervalo de frequências positivas, obtém-se uma quantidade *real* que equivale a intensidade da onda:

$$I = \int_0^\infty \mathcal{S}(\nu) d\nu \quad (2-11)$$

Com base nas formulações da Equação (2-5) e da Equação (2-10), o teorema de *Wiener-Khinchin* demonstra que a *densidade espectral de potência* pode ser escrita como um par de transformadas de Fourier na forma:

$$\mathcal{S}(\nu) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{G}(\tau) \exp(-j2\pi\nu\tau) d\tau \quad (2-12)$$

Esta formulação é particularmente importante, pois a função de auto correlação pode ser realizada fisicamente no domínio óptico [83]. Com o equacionamento da densidade espectral de potência  $\mathcal{S}(\nu)$ , a *largura espectral* do sinal óptico pode ser estimada. A largura de linha é definida como a largura da densidade espectral  $\mathcal{S}(\nu)$  ao redor de uma frequência central. A densidade tem seu valor máximo na frequência central e decai na medida em que se afasta em ambas as direções. De modo geral, a *largura espectral* de uma função do tempo é definida como a largura da transformada de Fourier da função [84]. A Figura (2.2) ilustra um contorno da largura de linha em função da frequência.

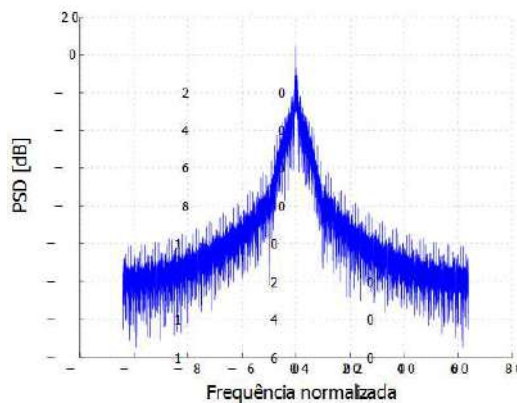


Figura 2.2: Simulação Matlab da largura de linha de um sinal modulado.  
Fonte: Software Optilux.



A largura espectral de uma fonte laser é comumente denominada de *largura de linha*. A partir da medida da largura de linha, uma questão surge: saber em qual altura a frequência de corte será considerada. Nas telecomunicações, o parâmetro mais aceito é o FWHM (Full Width at Half Maximum), que numa tradução livre significa *largura à meia altura*. Contudo, esta medida pode ser realizada com diferentes critérios como, por exemplo, a largura de 3 dB. Na maioria dos casos é considerada a medida de largura de linha a meia altura e as exceções são explicitamente identificadas. Um exemplo de exceção ocorre quando se realiza o dimensionamento de capacidade de um canal. Neste caso será necessário adicionar uma margem de segurança (extrapolar a largura de linha a meia altura) como garantia de que o *ruído de fase* será compensado pelo processamento de sinais [74]. O par de transformadas de Fourier  $\mathcal{S}(\nu)$  e  $\mathcal{G}(\tau)$  mostrado na Equação (2-12) permite concluir que a largura de linha de um laser pode ser calculada em função do tempo de coerência  $\tau_c$ .

Para uma condição em que a distribuição da frequência óptica é *Gaussiana*. A realização de um corte com base em  $\tau_c$  permite, através da Equação (2-13), calcular a largura de linha  $\Delta\nu$  do laser:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \quad (2-13)$$

Para uma distribuição *Lorentziana*, a Equação (2-14) é utilizada:

$$\Delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{1}{\pi\tau_c} \quad (2-14)$$

De modo geral, as formulações das Equações (2-13) e (2-14) ajudam a compreender os seguintes fenômenos:

1. O tempo de coerência e a largura espectral são inversamente proporcionais. Logo, uma fonte de luz com espectro estreito (ex: laser a fibra [85] ou laser de nanocavidade [86]) possui um tempo de coerência longo; enquanto uma fonte de luz com espectro amplo (ex: LED) possui um tempo de coerência relativamente curto;
2. Na medida em que a largura espectral  $\Delta\nu \rightarrow 0$ , o tempo de coerência  $\tau_c \rightarrow \infty$ . No limite, quando  $\Delta\nu = 0$  a onda se torna monocromática e a função de autocorrelação se torna uma versão da própria envoltória da onda. Ou seja  $\mathcal{G}(\tau) = I \exp(j2\pi\nu_0\tau) = A \exp(j2\pi\nu_0\tau)$ ;

### 2.1.1

#### Requisitos de largura de linha do laser

A largura de linha do laser é um parâmetro importante para o bom desempenho dos sistemas de comunicações ópticas. Conforme descrito na Seção (1.3), em um sistema com detecção coerente, a portadora que chega no receptor é misturada com um sinal gerado localmente, o *batimento* entre a portadora e o laser local gera uma *frequência intermediária*, comumente denominada *FI*. Sabe-se também da Seção (1.3) que, para um receptor *intradino*, a largura de linha da FI no domínio elétrico equivale a soma da largura de linha do laser da portadora com a largura de linha do laser local. Um parâmetro importante é a proporção entre a *largura de linha da FI* ( $\Delta f$ ) e a *banda de FI* ( $B_{FI}$ ). Análises detalhadas deste parâmetro são reportadas em [42, 87, 89], em que observa-se uma grande dependência com o tipo de modulação e constelação de símbolos utilizada. Uma forma de associar a largura de linha da FI com o desempenho do sistema de detecção é utilizar o produto  $\Delta f.T_s$ , em que  $T_s$  equivale ao *tempo de duração de símbolo*. O produto  $\Delta f.T_s$  descreve a proporção entre o *tempo de coerência da banda de FI* e o *tempo de símbolo*, esta proporção pode ser expressa na forma:

$$\Delta f.T_s = \frac{1}{T_{c_{FI}}}.T_s \quad (2-15)$$

Para o projeto do transceptor óptico adaptativo é necessário conhecer a capacidade limite do sistema em função da largura de linha da FI. Contudo, é importante notar que a definição clássica de largura de linha de 3dB pode não ser suficiente para um sistema de controle adaptativo. Deste modo, será necessário extrapolar a largura de linha para um valor FWHM dentro de uma faixa de potência mais ampla. Para extrapolar a largura de linha utiliza-se a OSNR como critério. Conforme o desenvolvimento utilizado por [81, 74], e assumindo uma distribuição Lorentziana, a densidade espectral de potência da FI poderá ser calculada através da expressão:

$$S_{FI}(f) = \frac{1}{1 + \left( \frac{f_{OSNR} - f_0}{\frac{\Delta_{3dB}}{2}} \right)^2} \quad (2-16)$$

Em que  $f_{OSNR}$  é a frequência na qual a largura de linha encontra o piso de ruído.

A Equação (2-16) demonstrada em [74] pode ser generalizada. Para um dado valor de OSNR (em dB) tem-se que:

$$1 + \left( \frac{f_{OSNR} - f_0}{\frac{\Delta_{3dB}}{2}} \right)^2 = 10^{\left( \frac{OSNR}{10} \right)} \quad (2-17)$$

Da Equação (2-17), pode-se reescrever a quantidade  $f_{\text{OSNR}} - f_0$  como  $\Delta_{\text{OSNR}}$ . Após esse passo, a largura de linha extrapolada da FI ( $\Delta_{\text{OSNR}}$ ) pode ser descrita em função da largura de linha de 3 dB. A Equação (2-18) representa essa quantidade.

$$\Delta_{3dB} = 2 \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{OSNR}}}{\sqrt{10^{\left(\frac{\text{OSNR}}{10}\right)} - 1}} \right) \quad (2-18)$$

O cálculo da *largura de linha extrapolada* com a Equação (2-18) fornece um valor extremo que será utilizado como parâmetro de cálculo para o sistema de controle. É importante notar que esta formulação é baseada na premissa utilizada na Seção (1.3) de que a largura de linha da portadora  $\Delta\nu_s$  e do laser local  $\Delta\nu_{lo}$  são iguais e que a largura de linha  $\Delta$  da FI equivale a soma  $\Delta\nu_s + \Delta\nu_{lo}$ .

## 2.2

### Formalismo para representação da polarização da luz

Na teoria eletromagnética da luz, a polarização é uma propriedade determinada pela direção do campo elétrico. Para representar matematicamente o fenômeno físico da polarização, o modelo comumente utilizado é o de uma onda transversal. Desta forma, as representações das equações de Maxwell para o fenômeno físico da luz [9, 64, 88] compõem um formalismo adequado. Em um sistema de coordenadas cartesianas, dada uma onda eletromagnética transversal, quasi-monocromática, com frequência  $\omega = 2\pi\nu$  e que se propaga na direção  $z$  com velocidade  $c$ , pode-se descrever a parte *real* do campo elétrico num plano  $xy$ , transversal a  $z$ , na forma:

$$\varepsilon(z, t) = \text{Re} \left\{ E \exp \left[ j\omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \right\} \quad (2-19)$$

Em que  $E = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$  e a representação gráfica do sistema em questão é ilustrada na Figura (2.3).

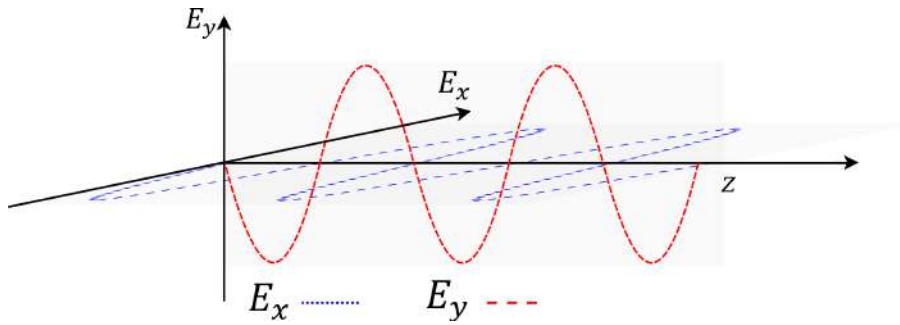


Figura 2.3: Representação gráfica de uma onda transversal eletromagnética.

Para uma frequência média  $\bar{\omega}$ , as componentes cartesianas  $E_x$  e  $E_y$  do vetor campo elétrico podem ser descritas na forma:

$$E_x(t) = A_x(t) \exp^{j[\phi_1(t) - \bar{\omega}t]} ; E_y(t) = A_y(t) \exp^{j[\phi_2(t) - \bar{\omega}t]} \quad (2-20)$$

$A_x$  e  $A_y$  representam as *magnitudes das componentes* do vetor campo elétrico, enquanto  $\phi_x$  e  $\phi_y$  representam as *fases* destas componentes em relação ao eixo  $z$ . Se a diferença de fase  $\varphi = \phi_y - \phi_x$  for observada como uma função do tempo  $f(A_x, A_y, \varphi, t)$ , as projeções das componentes do campo elétrico  $E_x$  e  $E_y$  residirão numa elipse, denominada *elipse de polarização*. O *estado de polarização* da onda é determinado pela orientação e formato da elipse de polarização. A elipse de polarização, contida no plano transversal à direção de propagação da onda (ver Figura (2.4)), é função de três variáveis independentes  $E_x$ ,  $E_y$  e  $\varphi$ .

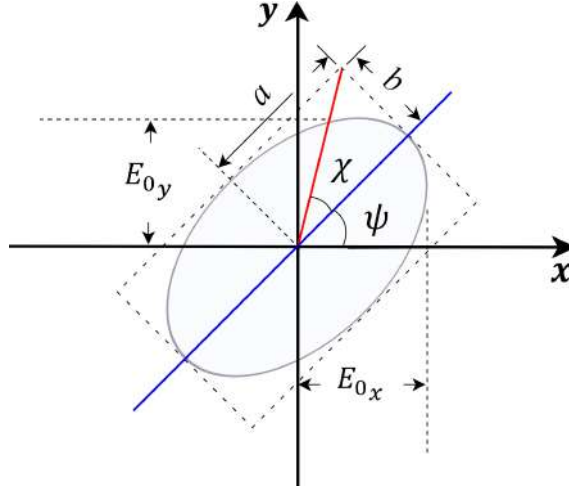


Figura 2.4: Representação da Elipse de Polarização.

Estas variáveis determinam as projeções das componentes do vetor campo elétrico [67]. Ao assumir que  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  representam os vetores unitários do plano  $xy$ , a equação do campo elétrico pode ser reescrita através de equações paramétricas na forma:

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t), \quad (2-21a)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2-21b)$$

$$E = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \quad (2-21c)$$

As equações de 2-21 estabelecem a relação entre a diferença de fase  $\varphi$  e as projeções  $E_x$  e  $E_y$  do vetor campo elétrico  $E(z, t)$ . Se as observações da onda transversal forem fixadas em um ponto específico, a *dependência espacial* proporcionada pela constante de propagação da Equação (2-19) e denotada por  $\omega(t - \frac{\omega z}{c})$ , pode ser removida. Uma vez removida a dependência espacial, pode-se reescrever a equação da elipse, tomando o quadrado das equações paramétricas na Equação (2-21). Uma demonstração detalhada deste procedimento é encontrada em [90]. Para o propósito dessa tese, alguns passos da parametrização mostrada naquele trabalho é reproduzida aqui com a finalidade de harmonizar a notação. O primeiro passo consiste em reescrever as Equações (2-21) na forma:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t), \quad (2-22a)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-22b)$$

Dado que,  $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)$ . Ao multiplicar a Equação (2-22a) por  $\sin(\varphi)$  e subtraindo 2-22b do resultado da multiplicação, obtém-se a Equação (2-23a).

Após multiplicar 2-22a por  $\cos(\varphi)$  tem-se a Equação (2-23b).

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin(\varphi) = \cos(\omega t) \sin(\varphi), \quad (2-23a)$$

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varphi) - \frac{E_y}{E_{0y}} \right) = \sin(\omega t) \sin(\varphi) \quad (2-23b)$$

No próximo passo, eleva-se a Equação (2-23a) e a Equação (2-23b) ao quadrado e então obtêm-se as expressões 2-24a e 2-24b.

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \sin^2(\varphi) = \cos^2(\omega t) \sin^2(\varphi), \quad (2-24a)$$

$$\left( \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \cos^2(\varphi) \right) - \left( \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\varphi) \right) + \left( \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \right) = \sin^2(\omega t) \sin^2(\varphi) \quad (2-24b)$$

Com base na relação dada na Equação (2-21c), realiza-se a soma dos parâmetros dados na Equação (2-24a) e na Equação (2-24b). Do lado esquerdo temos:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \left( \underbrace{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}_{=1} \right) - \left( \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\varphi) \right) + \left( \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \right) \quad (2-25)$$

Da lado direito aplica-se o mesmo princípio:

$$\sin^2(\varphi) \left( \underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{=1} \right) = \sin^2(\varphi) \quad (2-26)$$

Como resultado, tem-se a *equação da elipse de polarização*, na forma:

$$\frac{E_x^2}{(E_{0x})^2} + \frac{E_y^2}{(E_{0y})^2} - \frac{2E_x E_y}{(E_{0x})(E_{0y})} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (2-27)$$

Ao considerar o sistema de coordenadas Cartesianas em  $x$  e  $y$ , a elipse de polarização pode ser caracterizada em função de dois parâmetros angulares: o *ângulo de orientação*  $\psi$ , ( $0 \leq \psi \leq \pi$ ) e o *ângulo de elipsidade*  $\chi$ , ( $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$ ).

Da Equação (2-27), as expressões destes ângulos tem a seguinte forma:

$$\tan 2\psi = \frac{2E_x E_y \cos \varphi}{E_x^2 - E_y^2}; \quad 0 \leq \psi \leq \pi \quad (2-28a)$$

$$\sin 2\chi = \frac{2E_x E_y \sin \varphi}{E_x^2 + E_y^2}; \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \quad (2-28b)$$

O ângulo de orientação  $\psi$  também é chamado de *ângulo de rotação* e denota o eixo principal da elipse de polarização em relação ao eixo  $x$  do sistema de coordenadas. Este ângulo também relaciona a forma canônica da elipse de polarização com o polinômio quadrático com termo cruzado em  $xy$  que representa a mesma elipse. O ângulo de elipsidade  $\chi$  também é chamado de *ângulo de excentricidade*, sendo que a excentricidade é uma característica chave na definição de uma elipse. O cálculo do ângulo  $\chi$  toma como base a premissa de que existe uma relação definida entre  $E_x$  e  $E_y$  tal que:

$$\tan 2\chi = \pm \frac{E_y}{E_x} \quad (2-29)$$

As Equações (2-28a) e (2-28b) são compostas por termos algébricos e trigonométricos. De acordo com [91], para melhor concisão, é conveniente parametrizá-las em termos puramente trigonométricos. Uma das formas de realizar esta parametrização é através de um *ângulo auxiliar*  $\alpha$ , tal que:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{E_{0x}}{E_{0y}}; \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2-30)$$

Com base na notação de [77], reescreve-se a Equação (2-28a) e a Equação (2-28b) em função da quantidade  $R = E_x/E_y$ . A quantidade  $R$  é denominada por [88] de *razão axial*:

$$\tan 2\psi = \frac{2R}{1 - R^2} \cos \varphi; \quad R = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} \quad (2-31a)$$

$$\sin 2\chi = \frac{2R}{1 + R^2} \sin \varphi; \quad \varphi = \varphi_x - \varphi_y \quad (2-31b)$$

Através dos parâmetros 2-29, 2-30 e das identidades trigonométricas 2-32a e 2-32b:

$$\tan (2\alpha) = \frac{2 \tan (\alpha)}{1 - \tan^2 (\alpha)} \Rightarrow \frac{2R}{1 - R^2} \quad (2-32a)$$

$$\sin (2\alpha) = \frac{2 \tan (\alpha)}{1 + \tan^2 (\alpha)} \Rightarrow \frac{2R}{1 + R^2} \quad (2-32b)$$

Através de transformações aplicadas nas equações 2-28a e 2-28b, finalmente é possível expressá-las através de termos puramente trigonométricos, na forma:

$$\begin{cases} \tan 2\psi = (\tan 2\alpha) \cos \varphi, & 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin 2\chi = (\sin 2\alpha) \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (2-33)$$

Com base nas relações trigonométricas entre as componentes do campo elétrico definidas pelas Equações (2-33), é possível determinar a polarização da onda. O ângulo auxiliar  $\alpha$  também pode ser parametrizado geometricamente através de dois círculos concêntricos. Esta parametrização é ilustrada na Figura (2.5).

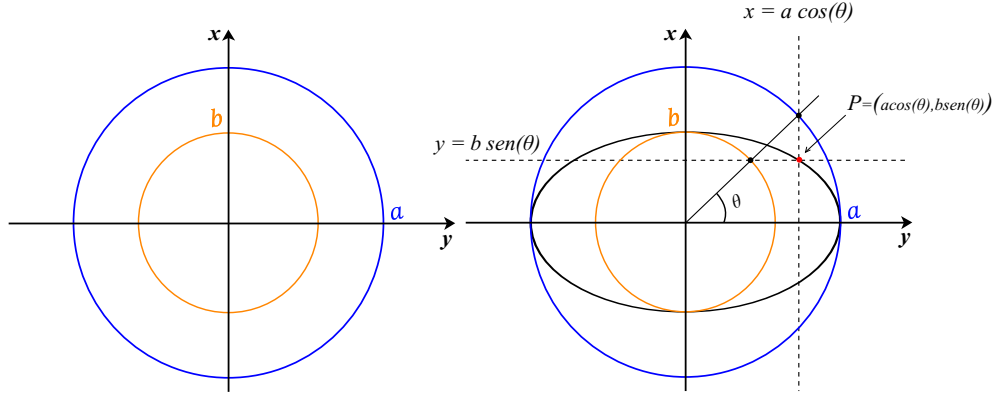


Figura 2.5: Representação geométrica da parametrização da elipse de polarização a partir de dois círculos concêntricos.

Na Figura (2.5), o ponto  $P = (a \cos(\theta), b \sin(\theta))$  é resultado da interseção entre duas retas paralelas aos eixos  $x$  e  $y$ . Consequentemente, este ponto reside numa elipse na forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

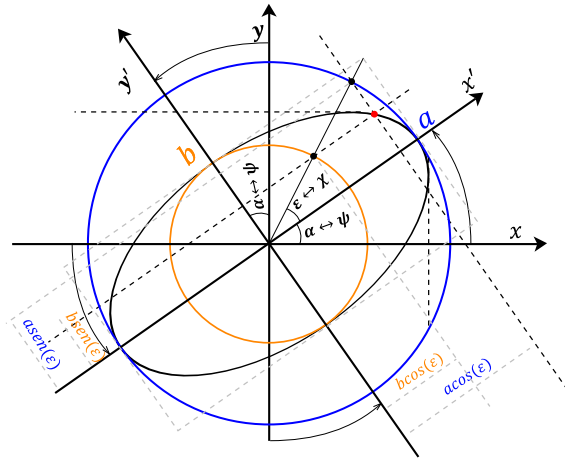
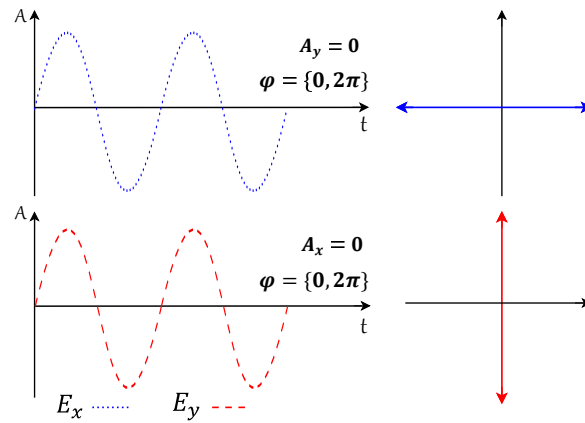


Figura 2.6: Representação geométrica da parametrização da elipse de polarização através de dois círculos concêntricos.

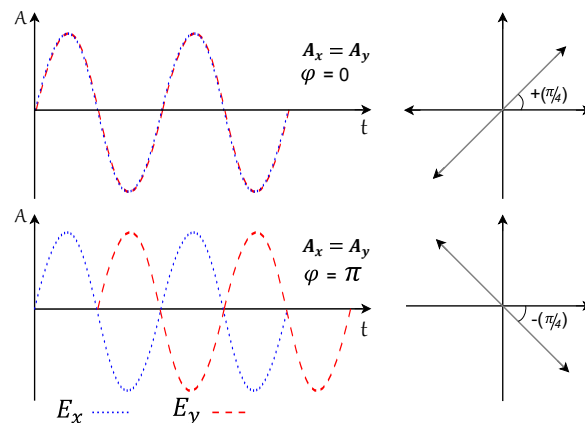
Com esta notação,  $b = 1$  é o raio do círculo unitário interno e  $a = |A_x|^2 + |A_y|^2$  é o raio do círculo externo. O ângulo  $\alpha$  permite a representação do estado de polarização numa elipse canônica, cujo eixo maior está alinhado com uma base formada pelos vetores  $x'$  e  $y'$  (representados na Figura (2.6)). A polarização de uma onda eletromagnética produz três padrões, *linear*, *circular* e *elíptico*, sendo que as polarizações linear e circular são ambos casos particulares das polarizações elípticas.



Matematicamente, isto pode ser explicado pelo fato de que a equação da elipse descreve um espaço vetorial no qual residem todas as resultantes entre as componentes do campo elétrico. Como resultado, a equação canônica da elipse recai nas equações da reta e do círculo ( para valores específicos dos parâmetros da elipse ). É importante notar que, conforme visto nas Equações (2-28a) e (2-28b), a determinação da elipse de polarização depende da representação de valores instantâneos do campo elétrico. Deste modo, para obter valores *mensuráveis* é necessário tomar a média temporal das variáveis, em um *ponto específico* da trajetória da onda de luz. A elipse de polarização permite uma representação simplificada da polarização da luz, pois quando nos referimos, por exemplo, a polarização circular à direita, estamos tomando como base as coordenadas da elipse. Apesar disso, e a despeito da sua utilidade, a representação dos estados de polarização através da elipse gera ambiguidades justamente por depender das suas coordenadas. A seguir, são ilustrados exemplos de estados de polarização para valores específicos de  $A_x$ ,  $A_y$  e  $\varphi$ .

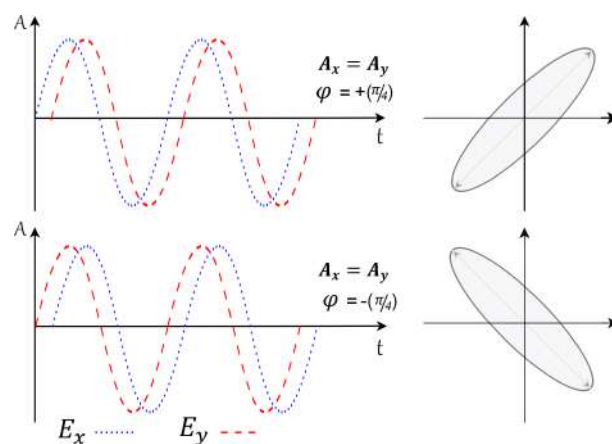
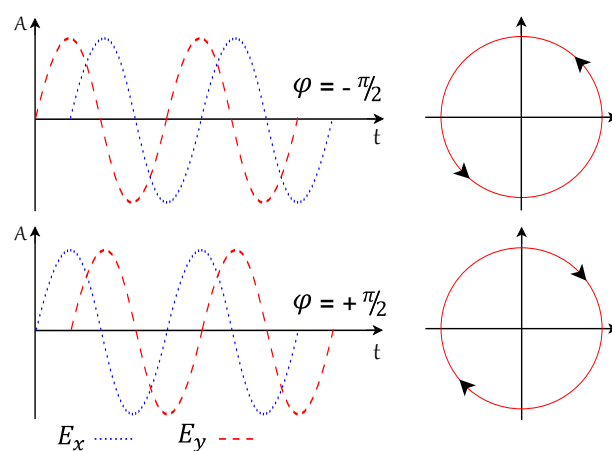


2.7(a): Polarizações lineares



2.7(b): Polarizações lineares a 45°

Figura 2.7: Representação na elipse de polarização das fases relativas das polarizações lineares.

2.8(a): Polarizações elípticas a  $45^\circ$ 

2.8(b): Polarizações circulares

Figura 2.8: Representação na elipse de polarização das fases relativas das polarizações elípticas.

### 2.2.1

#### Métodos matriciais na descrição da polarização da luz

Conforme mostrado na Seção (2.2), as três variáveis independentes  $E_x$ ,  $E_y$  e  $\varphi$  de uma onda de luz polarizada podem assumir diversas configurações e por este motivo dependem de uma forma de representação livre de ambiguidades. Cada configuração dessas variáveis é denominada de *estado de polarização* e diversos trabalhos foram realizados na busca por formas eficientes de representá-lo. Nesta seção, aborda-se de forma sucinta o cálculo matricial desenvolvido por R. Clark Jones [92] [1941]. O trabalho de Jones provê uma descrição matemática para os estados de polarização da luz através de matrizes. Esse formalismo, consiste numa ferramenta particularmente importante, porque adere a diversas teorias nesse campo de estudo. O cálculo matricial de Jones trata da luz totalmente polarizada. Por este motivo, as componentes do campo elétrico  $E_x$ ,  $E_y$  são, na sua forma geral, quantidades complexas. As componentes do campo descritas na Equação (2-20) podem então ser representadas como um vetor coluna complexo, na forma da Equação (2-34):

$$E = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \phi x)} \\ E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \phi y)} \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

Este vetor é conhecido como *vetor de Jones*. A norma unitária das projeções de  $E_x$  e  $E_y$  no plano Cartesiano é o resultado da soma do quadrado da norma de cada componente, de modo que  $|E_x|^2 + |E_y|^2 = 1$ . Este vetor pode, desta forma, ser normalizado com base na intensidade da onda. Dado que a intensidade é uma quantidade real e positiva, contida no intervalo entre 0 e 1, o fator de normalização é igual a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . O vetor de Jones descreve completamente uma onda polarizada. De outra forma, quando a luz é parcialmente polarizada este vetor só pode representar a porção polarizada da onda [93].

O cálculo de Jones permite a representação matricial de dispositivos polarizadores lineares. Consequentemente, dispositivos retardadores de fase, polarizadores lineares e polarizadores circulares podem ser representados por matrizes 2x2 denominadas *matrizes de Jones*. As *matrizes de Jones* são modeladas como funções de transferência para a polarização da luz. Desta forma, dado um feixe incidente, representado por um vetor de Jones  $J_i = (E_x, E_y)$ , é possível calcular a matriz de transferência de um dispositivo óptico linear, através da medição do vetor de saída  $J_s = (E'_x, E'_y)$ . Esta é uma propriedade importante, pois, toda matriz de Jones representa um dispositivo que, em tese, pode ser realizado fisicamente [94].

Alternativamente, se a matriz de Jones do dispositivo é conhecida, pode-se calcular o estado de polarização de saída a partir do vetor de entrada.

O cálculo através das matrizes de Jones tem a seguinte notação:

$$\begin{bmatrix} E_x' \\ E_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

Em relação aos métodos de Stokes e de Mueller, o método de Jones é recomendado em situações em que interferências entre feixes de luz são tratadas. Estas características tornam o cálculo de Jones uma eficiente ferramenta para a análise de luz proveniente de fontes coerentes, como laser. A seguir, são descritas duas operações particularmente importantes no cálculo de Jones.

### 2.2.1.1

#### Cálculo da intensidade óptica

Dado um vetor de Jones  $J$  na forma da Equação (2-34), o cálculo da intensidade óptica  $I$  é realizado através do produto entre o vetor  $J$  e o seu conjugado transposto  $J^*$  na forma:

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} E_x^* & E_y^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \\ &= E_x E_x^* + E_y E_y^* \end{aligned} \quad (2-36)$$

Alternativamente, a notação matricial pode ser simplificada para  $I = J^* \cdot J$ .

### 2.2.2

#### Estados de polarização ortogonais

Estados de polarização ortogonais representam uma parte importante do presente trabalho. Nas seções subsequentes, a construção de *constelações simétricas* na esfera de Poincaré remete a *estados ortogonais*. A simetria geométrica decorre do fato de que estados ortogonais são representados como *pontos antipodais* na esfera de Poincaré.

No cálculo de Jones, duas ondas cujos estados de polarização são representados pelos vetores  $J_1$  e  $J_2$ :

$$J_1 = \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix} \quad e \quad J_2 = \begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

São caracterizadas como ortogonalmente polarizadas se os vetores que as representam são geometricamente ortogonais. O conceito de ortogonalidade aqui utilizado é uma propriedade fundamental da álgebra linear, baseada numa extensão do teorema de Pitágoras no  $R^n$  [95]. A representação matemática, é na forma:

$$J_1 \perp J_2 \implies \|J_1 + J_2\|^2 = \|J_1\|^2 + \|J_2\|^2 \quad (2-38)$$

Logo, se dois vetores são ortogonais no espaço  $R^n$ , então a norma ao quadrado da soma destes vetores é igual a soma dos quadrados das respectivas normas. Ao considerar que os vetores de Jones são, na sua forma geral, vetores complexos, a solução deste teorema implica que:

$$\begin{aligned} \|J_1 + J_2\|^2 &= \|J_1\|^2 + [(J_1 \cdot J_2) + (J_2 \cdot J_1)] + \|J_2\|^2 \\ &= \|J_1\|^2 + \underbrace{Re(J_1 \cdot J_2)}_{=0} + \|J_2\|^2 \end{aligned} \quad (2-39)$$

Em que a quantidade  $(J_1 \cdot J_2)$  é realizada pelo *produto interno* entre os vetores  $J_1$  e  $J_2$ . Portanto, a condição de igualdade na Equação (2-38), ocorre se e somente se a parte real do produto interno entre os vetores  $J_1$  e  $J_2$  for zero.

Ao tomar como base a definição dos vetores de Jones na forma da Equação (2-37), esta condição implica em:

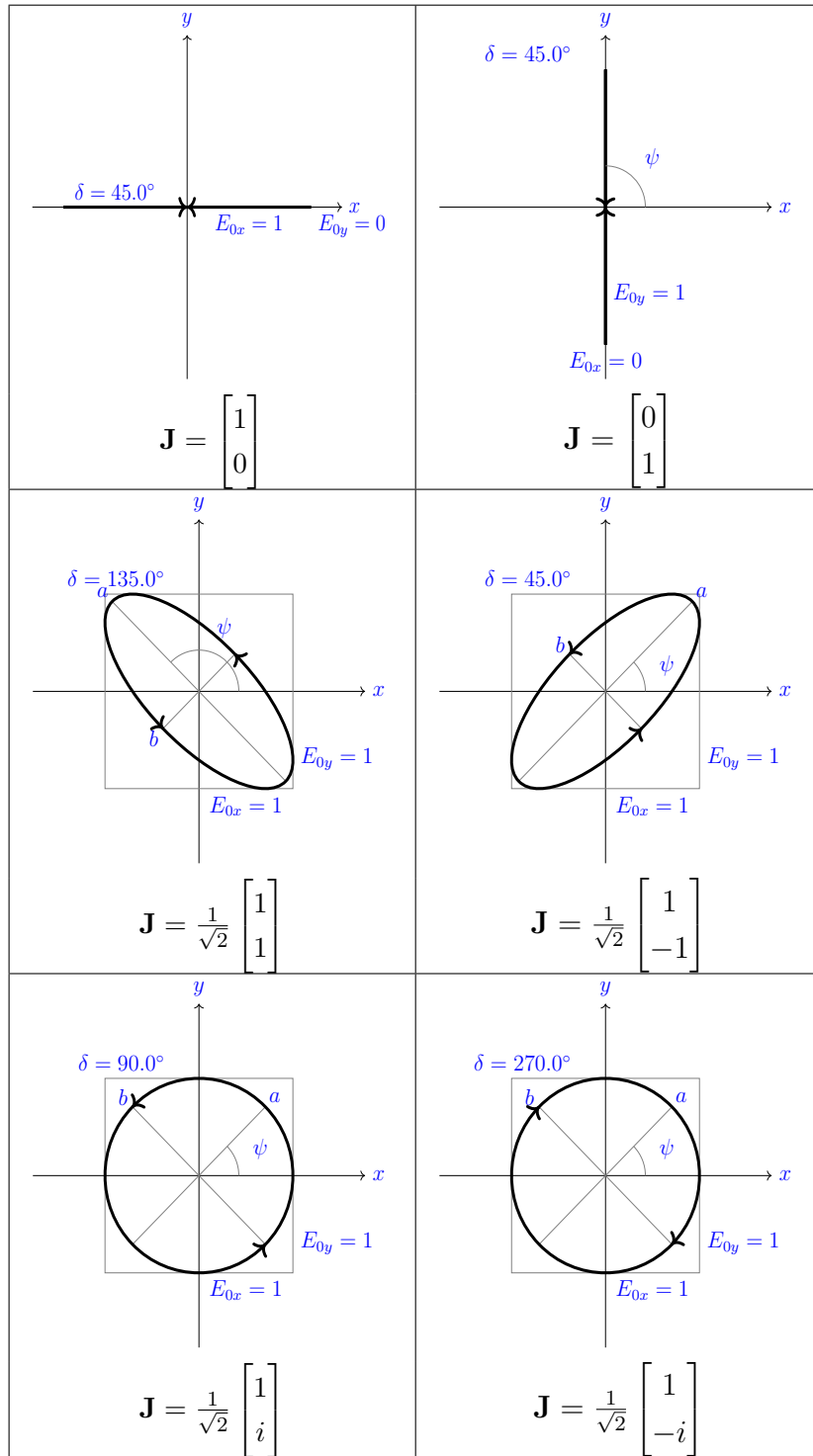
$$J_1 \cdot J_2 = E_{1x} \cdot E_{2x}^* + E_{1y} \cdot E_{2y}^* = 0 \quad (2-40)$$

em que o asterisco denota o conjugado complexo.

**Nota:** Trabalhos matemáticos recentes [108, 109] permitem diferentes interpretações dos vetores de Jones e da elipse de polarização [110].

A seguir, são ilustrados na Tabela (2.1) alguns pares de estados de polarização ortogonais e seus respectivos vetores de Jones.

Tabela 2.1: Representações de estados de polarização ortogonais



O cálculo de Jones é de grande utilidade quando dispositivos e canais dos sistemas de comunicações ópticas são modelados. Contudo, por basear-se no tratamento da luz totalmente polarizada, esta teoria é muito restritiva para a modelagem e medição de sinais em sistemas de telecomunicações. Na Seção (2.2.3) é realizada uma breve descrição de um método complementar ao de Jones e que foi publicado por Gabriel Stokes em 1852 [96].

### 2.2.3

#### Parâmetros de Stokes e a esfera de Poincaré

Diferente de Jones, o método de Stokes permite inclusive o tratamento da luz não polarizada [91, 94, 97]. A teoria de Stokes define relações entre as componentes do campo óptico agrupadas em 04 parâmetros, que juntos descrevem de maneira *inequívoca* todos os estados de polarização da luz. Esses parâmetros, que foram denominadas de *parâmetros de Stokes*, são quantidades *mensuráveis* que equivalem a médias temporais. Os parâmetros de Stokes podem ser interpretados como coordenadas geométricas, potencializando sua importância nas comunicações ópticas. Descreve-se a seguir, os princípios do cálculo de Stokes, com enfoque nas características pertinentes ao trabalho em curso.

Conforme visto na Seção (2.2), se tomados os valores médios das amplitudes  $A_x$  e  $A_y$  do envelope complexo e da diferença de fase  $\varphi = \phi_y - \phi_x$ , sobre um intervalo de tempo definido, quantidades *mensuráveis* que guardam relação direta com a polarização da luz [91] são obtidas. Em termos matemáticos, para transformar estas variações em quantidades reais, toma-se os valores quadráticos das amplitudes, de forma que:

$$\begin{aligned}\langle A_x^2(t) \rangle &= |E_x|^2 \\ \langle A_y^2(t) \rangle &= |E_y|^2\end{aligned}\tag{2-41}$$

Em um meio de transmissão com impedância característica  $\eta$ , as quantidades  $|E_x|^2$  e  $|E_y|^2$  somadas possuem equivalência com a *intensidade ótica*  $I$  da Equação (2-42):

$$I = \frac{(|E_x|^2 + |E_y|^2)}{2\eta}\tag{2-42}$$

Os parâmetros de Stokes ( $s_0, s_1, s_2, s_3$ ) têm uma formulação matemática que utiliza a fase relativa  $\varphi$  e as componentes do campo elétrico  $E_x$  e  $E_y$ :

$$\begin{aligned}s_0 &= |E_x|^2 + |E_y|^2, \\ s_1 &= |E_x|^2 - |E_y|^2, \\ s_2 &= 2\langle E_x(t)E_y(t) \cos[\varphi(t)] \rangle = 2\text{Re}\{E_x^*E_y\}, \\ s_3 &= 2\langle E_x(t)E_y(t) \sin[\varphi(t)] \rangle = 2\text{Im}\{E_x^*E_y\},\end{aligned}\tag{2-43}$$

Logo, a ocorrência de *qualquer parâmetro de Stokes não nulo* indica a *existência de uma componente da onda polarizada*.

De acordo com [91], cada parâmetro representa os seguintes mensuráveis:

- $s_0$  descreve a intensidade total do feixe óptico;
- $s_1$  descreve a preponderância da luz polarizada horizontal linear sobre a luz polarizada vertical linear;
- $s_2$  descreve a preponderância da luz polarizada a  $45^\circ$  à esquerda sobre a luz polarizada a  $45^\circ$  à direita;
- $s_3$  por sua vez descreve a preponderância da luz circularmente polarizada a direita sobre a luz circularmente polarizada a esquerda.

Os parâmetros de Stokes podem ser representados através da notação complexa das componentes do campo elétrico da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_0 &= E_x \cdot E_x^* + E_y \cdot E_y^*, \\ s_1 &= E_x \cdot E_x^* - E_y \cdot E_y^*, \\ s_2 &= E_x \cdot E_y^* + E_y \cdot E_x^*, \\ s_3 &= j(E_x \cdot E_x^* - E_y \cdot E_y^*) \end{aligned} \quad (2-44)$$

A notação de vetores complexos facilita a extração dos parâmetros de Stokes a partir das componentes de sinal das *híbridas ópticas* utilizadas nos sistemas de detecção coerente [98].

Dado que os parâmetros  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  têm dimensão de intensidade, estes podem ser normalizados em relação ao parâmetro  $s_0$ . Os parâmetros de Stokes normalizados são representados da seguinte forma:

$$\mathbf{s}_1 = \left( \frac{s_1}{s_0} \right); \mathbf{s}_2 = \left( \frac{s_2}{s_0} \right); \mathbf{s}_3 = \left( \frac{s_3}{s_0} \right); \quad (2-45)$$

Os parâmetros de Stokes normalizados também podem ser representados em função de outras variáveis [91]. Se, por exemplo, os ângulos de orientação  $\psi$  e excentricidade  $\chi$  são utilizados, tem-se como resultado uma formulação geométrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \cos(2\chi) \cos(2\psi), \\ \mathbf{s}_2 &= \cos(2\chi) \sin(2\psi), \\ \mathbf{s}_3 &= \sin(2\chi) \end{aligned} \quad (2-46)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_1} \right); 0 \leq \psi \leq \pi \\ \chi &= \frac{1}{2} \sin^{-1}(\mathbf{s}_3); -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



É importante notar que as quantidades  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  são funções de variáveis fundamentais como: a frequência  $\omega$  da onda, de variáveis indiretas como as coordenadas de polarização  $\chi$  e  $\varphi$ , que dependem das amplitudes de  $E_x$ ,  $E_y$  e da fase relativa  $\varphi$ .

### 2.2.3.1

#### A esfera de Poincaré e o espaço de Stokes

A esfera de Poincaré é um espaço geométrico no qual um estado de polarização é representado por um *ponto* localizado na esfera unitária. Para a luz totalmente polarizada os estados de polarização são representados na superfície da esfera ou numa *casca esférica* com coordenadas  $\{r=1, \theta=(\frac{\pi}{2}-2\chi), \phi=2\psi\}$  [88]. Ao utilizar este sistema de coordenadas, o vetor composto pelos parâmetros  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  é denominado de *vetor de Stokes*.

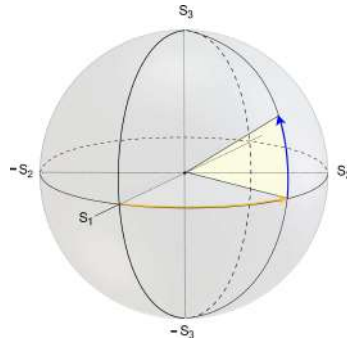


Figura 2.9: Representação geométrica da esfera de Poincaré.

Ao tomar com base a representação da Figura (2.9), o equador da esfera é o lugar geométrico das polarizações lineares. No pólo superior ( $\mathbf{s}_3$ ), representa-se a polarização circular à esquerda e no pólo inferior ( $-\mathbf{s}_3$ ), representa-se a polarização circular à direita. Em outros pontos da esfera são representadas as polarizações elípticas. Na esfera de Poincaré, a distância angular entre dois estados de polarização é representada por um arco que é igual ao dobro da distância angular na elipse de polarização. Desta forma, enquanto na esfera de Poincaré, os estados de polarização ortogonais são representados como pontos *antipodais* (separados de  $180^\circ$ ), na elipse de polarização estes mesmos estados são representados com uma separação angular de  $90^\circ$  [92]. Na perspectiva da óptica clássica, a esfera de Poincaré é o espaço geométrico em que residem todos os possíveis estados polarização e, por conseguinte, este espaço geométrico é comumente chamado de *espaço de Stokes*. A noção de espaço de Stokes é de grande importância para a construção de códigos baseados nas modulações de polarização da luz. O espaço de Stokes também está associado com algumas convenções utilizadas na construção de códigos esféricos [99].

## 2.2.4

**Polarização parcial da luz**

O fato de uma onda transversal eletromagnética possuir um campo elétrico estatisticamente isotrópico significa que este campo pode ter qualquer direção no plano  $xy$  da elipse e de forma análoga no espaço de Stokes. Desta forma, as diversas projeções do campo tendem a se anular, fato este que remove qualquer direção preferencial. Um sinal óptico com estas características é totalmente despolarizado. Nos casos em que as componentes isotrópicas não anulam completamente as componentes preferenciais, diz-se que a luz é *parcialmente polarizada*. Classicamente, o *grau de polarização* de uma onda em termos dos parâmetros de Stokes [91, 94], é dado na forma:

$$D = \frac{\sqrt{\langle s_1 \rangle^2 + \langle s_2 \rangle^2 + \langle s_3 \rangle^2}}{\langle s_0 \rangle} \quad (2-47)$$

É importante relembrar que, a notação  $\langle s(t) \rangle$  é utilizada para indicar que as quantidades  $\langle s_1 \rangle$ ,  $\langle s_2 \rangle$  e  $\langle s_3 \rangle$  são médias temporais obtidas em intervalos de tempo  $T$ . Ou seja:

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad (2-48)$$

O grau de polarização pode variar entre  $D=0$ , para a luz despolarizada e,  $D=1$  para a luz totalmente polarizada.

$$0 \leq D \leq 1 \quad (2-49)$$

A formulação da Equação (2-47), é uma quantidade *mensurável* importante. Contudo, de acordo com [100], o valor de  $D$  sozinho, não permite identificar a causa subjacente do grau de polarização, que pode ser resultante da decoerência ou da pseudo despolarização da onda. Neste aspecto, a matriz de coerência de Jones [100] ou matriz de polarização [102] é uma ferramenta matemática mais adequada para esse tipo de análise. Um exemplo de distinção da matriz de polarização, é o fato de que ela fornece as propriedades de correlação de segunda ordem do campo elétrico, em determinado ponto da trajetória. De forma resumida, é possível afirmar que a *matriz de polarização* consiste de uma matriz  $2 \times 2$  que caracteriza a polarização parcial de uma onda eletromagnética. Esta caracterização é realizada através de médias temporais "simultâneas" das correlações entre as componentes mutuamente ortogonais ( $E_x$  e  $E_y$ ) do campo elétrico. As médias temporais são tomadas em um determinado ponto da trajetória de propagação da onda.

A matriz de polarização tem a seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_x^*(t)E_y(t) \rangle \\ \langle E_y^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_y^*(t)E_y(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

Em que,  $J_{xx}$  e  $J_{yy}$  são funções de *autocorrelação* e  $J_{xy}$  e  $J_{yx}$  são funções de *correlação cruzada*, respectivamente.

É importante notar que: as funções de autocorrelação das componentes do campo elétrico são equivalentes às contribuições destas componentes para a intensidade da onda. Ou seja:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= I_x, \\ J_{yy} &= I_y \end{aligned} \quad (2-51)$$

A soma das componentes do campo na diagonal da matriz  $J$  é o *traço da matriz*, resultando na Equação (2-52):

$$Tr(J) = I_x + I_y = \bar{I} \quad (2-52)$$

Em resumo, o traço da matriz de polarização determina a intensidade do campo elétrico da onda. Ao considerar a mesma matriz  $J$ , com determinante  $det(J)$ , o grau de polarização de uma onda é dado na forma da Equação (2-53):

$$\mathcal{D} = \sqrt{1 - \frac{4[det(J)]}{[Tr(J)]^2}} \quad (2-53)$$

A formulação matemática de  $\mathcal{D}$ , na Equação (2-53), fornece importantes informações. Entre as quais, destaca-se:

- A medida do grau de polarização utilizando  $\mathcal{D}$  é invariante sob rotação do sistemas de coordenadas (mudança de base). Isto se aplica, pois  $Tr(J)$  e  $det(J)$  são invariantes sob transformações unitárias;
- A Equação (2-53) pode ser realizada numericamente, dado que é possível decompô-la em operações simples;

Os termos da *matriz de polarização* (Equação (2-50)) também podem ser expressos em função dos parâmetros de Stokes:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_0 + s_1 & s_2 + js_3 \\ s_2 - js_3 & s_0 - s_1 \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

De acordo com [103], coerência e polarização da luz são fenômenos semelhantes observados de formas diferentes. Esta é uma idéia base do conceito de coerência intrínseca da luz parcialmente polarizada que também é desenvolvido em [102].

Ainda de acordo com esses autores, as propriedades de coerência e polarização da luz podem ser definidas da seguinte forma:

- Coerência - É a medida da dependência estatística entre os valores de um campo de luz em dois pontos denotados por  $\mathbf{r1}$  e  $\mathbf{r2}$  e dois tempos denotados  $\mathbf{t1}$  e  $\mathbf{t2}$ ;
- Polarização - É a medida da dependência estatística dos valores de um campo de luz em um ponto  $\mathbf{r1}$  num tempo  $\mathbf{t1}$ .

Se a onda eletromagnética puder ser considerada como estatisticamente estacionária, as componentes do campo elétrico complexo dessa onda podem ser representadas por vetores aleatórios  $E_x$  e  $E_y$ . Neste caso, as propriedades de coerência entre os pontos  $\mathbf{r1}$  e  $\mathbf{r2}$  nos tempos  $t = t_1$  e  $(t + \tau) = t_2$ , podem ser caracterizadas através da *matriz de coerência mútua*.

Ao considerar que os vetores  $E_x$  e  $E_y$  são mutuamente ortogonais à direção de propagação  $z$  (em coordenadas cartesianas). A matriz de coerência mútua tem a formulação matemática da Equação (2-55):

$$\Gamma(\mathbf{r1}, \mathbf{r2}, \tau) = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(r_1, t) E_x(r_2, t + \tau) \rangle & \langle E_x^*(r_1, t) E_y(r_2, t + \tau) \rangle \\ \langle E_y^*(r_1, t) E_x(r_2, t + \tau) \rangle & \langle E_y^*(r_1, t) E_y(r_2, t + \tau) \rangle \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

Conforme já observado, a matriz de polarização descrita na Equação (2-50) é um caso particular da matriz de coerência mútua, dada na Equação (2-55), para os casos em que  $r2 = r1$  e  $t2 = t1$  ou seja, para  $\tau = 0$ .

A matriz de coerência mútua é uma ferramenta matemática que oferece bons recursos para o cálculo da polarização da luz no domínio do tempo. Contudo, era necessário o desenvolvimento de ferramentas que também pudessem ser utilizadas no domínio da frequência. Tal propósito foi alcançado com o desenvolvimento por [103] da *teoria unificada da polarização e coerência da luz*.

### 2.2.4.1

#### A teoria unificada da polarização e coerência da luz

A caracterização das propriedades da luz tem sido objeto de diversos estudos ao longo de séculos e na atualidade a teoria unificada da polarização e coerência [103] representa um considerável avanço neste campo. A teoria unificada utiliza *estatísticas de segunda ordem* (primeira ordem em óptica quântica) e ferramentas de cálculo provadamente eficientes. Entre as ferramentas desta teoria, a principal é a *matriz de densidade espectral cruzada* do campo elétrico que consiste basicamente na transformada de Fourier da *matriz de coerência mútua* do mesmo campo.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} W_{xx}(r_1, r_2, \omega) & W_{xy}(r_1, r_2, \omega) \\ W_{yx}(r_1, r_2, \omega) & W_{yy}(r_1, r_2, \omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-56)$$

A *matriz de coerência mútua* da Equação (2-55) é uma formulação no *espaço-tempo* da função de autocorrelação para campos ópticos estacionários, enquanto a matriz Equação (2-56) é uma formulação no *espaço-frequência* da função de densidade espectral cruzada.

A adição do ponto  $\mathbf{r}_2$  nas equações (2-55) e (2-56) permite uma generalização importante para o cálculo de características intrínsecas do feixe de luz.

Por exemplo, essa formulação permite calcular o grau de polarização da onda de luz como uma função da propagação do feixe, tanto no espaço livre quanto em meios confinados como fibras ópticas. Mais importante ainda, é o fato de que os fenômenos de coerência de segunda ordem podem ser descritos como funções de autocorrelação tanto no domínio espaço-temporal quanto no domínio espaço-frequência.

Por conta desta propriedade, a *matriz de densidade espectral cruzada* pode ser representada como uma matriz de autocorrelação na forma da Equação (2-57):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= [\mathbf{W}_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)] \\ &= \begin{bmatrix} \langle E_x^*(r_1, \omega) E_x(r_2, \omega) \rangle & \langle E_x^*(r_1, \omega) E_y(r_2, \omega) \rangle \\ \langle E_y^*(r_1, \omega) E_x(r_2, \omega) \rangle & \langle E_y^*(r_1, \omega) E_y(r_2, \omega) \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-57)$$

em que  $i$  e  $j$  são ambos função de  $x$  e  $y$ .

É importante notar que conforme descrito em [104, 105], não existe a priori equivalência entre o grau de polarização da luz no espaço-tempo (grau de polarização temporal) e o grau de polarização da luz no espaço-frequência (grau de polarização espectral). A equivalência entre os domínios temporal e espectral do grau de polarização é dependente da largura de linha do feixe óptico e de acordo com [105] apenas algumas propriedades de equivalência podem ser inferidas. Um sinal de luz totalmente polarizado no tempo, por exemplo, é necessariamente totalmente polarizado em cada componente de frequência deste sinal.

#### 2.2.4.2

##### O tempo de polarização

Os conceitos abordados até agora são a base para a definição de uma quantidade relacionada ao comportamento da polarização da luz. Conforme observado por [106, 107], mesmo uma onda despolarizada quando amostrada em um intervalo suficientemente curto pode apresentar determinado grau de polarização. Para capturar este aspecto da luz polarizada, faz-se necessário definir o *tempo de polarização*. Neste contexto, define-se o tempo de polarização como o tempo característico sobre o qual o estado de polarização da luz se mantém relativamente estável. O grau de similaridade do estado de polarização da luz em dois instantes de tempo é baseado em medidas consecutivas do grau de polarização. Quando várias medidas do grau de polarização são realizadas em intervalos fixos de tempo, tem-se o *grau médio de polarização*  $\langle \mathcal{D} \rangle$ , denotado na Equação (2-58):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D} \rangle = \mathcal{D}^2 &= 1 - \frac{4 [\det(J)]}{[Tr(J)]^2}; \\ &= 2 \frac{Tr(J)^2}{Tr^2(J)} - 1 \end{aligned} \quad (2-58)$$

As Equações (2-54), (2-55) e (2-58) definem quantidades obtidas de médias amostrais tomadas sobre uma escala de tempo muito maior que as flutuações do campo elétrico. A diferença na escala tempo entre estes dois fenômenos torna imprecisa a inferência da dinâmica da polarização a partir destas matrizes. Para calcular a dinâmica da polarização de uma onda parcialmente polarizada seria ideal que valores instantâneos dos vetores de Stokes fossem utilizados. Na prática, para um receptor coerente, o valor instantâneo do vetor de Stokes equivale ao cálculo de uma amostra tomada sobre o intervalo de tempo mais curto que o hardware pode realizar. A quantidade definida na Equação (2-58) revela, contudo, que a variação no grau de polarização é uma quantidade real.

Assim, a formulação da Equação (2-58) pode ser utilizada para calcular o *grau médio de polarização*. Com base no que foi exposto na Seção (2.2.3), conclui-se que para a correta representação dos parâmetros de Stokes, a média temporal desses parâmetros deve ser tomada em uma escala de tempo propriamente definida. Obviamente, o intervalo de cada amostra deve ser superior ao inverso da frequência angular  $\omega_m$  do sinal modulante (ou envelope da portadora), de tal forma que:

$$T \gg \frac{1}{\omega_m} \quad (2-59)$$

A escolha da taxa de amostragem é determinante na qualidade do cálculo dos parâmetros de Stokes. Adicionalmente, deve ser considerado que as transições entre diferentes estados de polarização estão relacionadas a um espectro de polarização [108] que é característico, inclusive, das comunicações ópticas coerentes. Conforme reportado em [53], e na teoria exposta até agora, os estados de polarização da luz quando transmitidos sequencialmente em um meio sem birrefringência guardam uma rigidez estrutural. Isto significa que constelações geométricas definidas através dos vetores de Stokes podem ser recuperadas no receptor coerente tomando como base as informações instantâneas contidas na fase e na amplitude da frequência intermediária (FI) [109, 110, 111]. A teoria exposta até agora também evidencia que: o limite para recuperar uma informação codificada em polarização é o tempo de polarização aplicado ao envelope da portadora.

## 2.3

### Propagação não linear da luz polarizada em fibras ópticas

No Capítulo (2), tratou-se das propriedades fundamentais da polarização do sinal óptico, no contexto das comunicações ópticas coerentes. No capítulo que segue, trata-se de forma breve da interação entre o sinal óptico e o meio de transmissão. Para incluir os efeitos de polarização e birrefringência num modelo de propagação em fibras ópticas, é conveniente reescrever a Equação (1-1) na forma:

$$A(z, t) = \hat{\mathbf{P}} \times E_0 \exp^{-j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \quad (2-60)$$

Em que  $\hat{\mathbf{P}}$  é um vetor de polarização unitário com uma componente linear  $P_L$  e uma componente não linear  $P_{NL}$ . A birrefringência não linear ocorre nas situações em que o índice de refração varia em função da intensidade do sinal [66].

O índice de refração de cada modo de propagação da fibra é composto por uma parte linear que denota-se por  $n_l$  e uma parte não linear que denota-se por  $n_{nl}$  (depende da intensidade do efeito Kerr):

$$n = n_l + n_{nl}|A|^2 \quad (2-61)$$

Conforme observado na Seção (2.2.1), o estado de polarização da luz é função de três variáveis aleatórias, que são: as amplitudes das componentes do campo elétrico  $A_x$  e  $A_y$  e a fase relativa  $\varphi$ . Quando um pulso de luz polarizada é transmitido através de uma fibra birrefringente, as variações resultantes da combinação dos diversos tipos de birrefringência produzem variações igualmente aleatórias dos estados de polarização. Para representar a dinâmica da evolução dos estados de polarização de um pulso óptico numa fibra birrefringente é necessário utilizar um modelo matemático capaz de equacionar os diversos aspectos dos fenômenos físicos envolvidos. A Equação Não Linear Acoplada de Schrödinger é um modelo adequado para representar a propagação de pulsos ópticos com as condições de contorno listadas.

### 2.3.1

#### A equação de Schrödinger não linear acoplada

A Equação Não Linear Acoplada de Schrödinger (ENLAS) é a versão vetorial da ENLS que descreve a propagação da luz em duas componentes ortogonais. Ao considerar que existem diversas notações para esta equação, convém observar que as formulações aqui utilizadas são aquelas desenvolvidas por [11, 63] e [112]. A seguir, representa-se a ENLAS na Equação (2-62):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{i\beta_{2x}}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\beta_{3x}}{6} \frac{\partial^3 A_x}{\partial t^3} + \frac{\alpha_x}{2} A_x &= -i\gamma_1 (|A_{xy}|) A_x \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{i\beta_{2y}}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - \frac{\beta_{3y}}{6} \frac{\partial^3 A_y}{\partial t^3} + \frac{\alpha_y}{2} A_y &= -i\gamma_2 (|A_{yx}|) A_y \end{aligned} \quad (2-62)$$

Em que o parâmetro de não linearidade  $\gamma_k$  é definido como:

$$\gamma_k = \frac{2\pi n_2}{\lambda_k A_{eff}}, \quad (k = 1, 2); \quad (2-63)$$

O cálculo numérico do coeficiente de não linearidade é uma tarefa extremamente complexa, reportada em [11]. Felizmente, dado que o trabalho mais difícil já foi realizado, a aplicação das equações pode ser facilitada. O termo  $|A_{xy}|$  na Equação (2-62) representa a contribuição dos efeitos não lineares SPM, XPM e FWM.



Desta forma, o termo  $-i\gamma_1 (|A_{xy}|) A_x$  pode ser reescrito com a Equação (2-64):

$$\underbrace{i\gamma_1 |A_x|^2 A_x}_{\text{SPM}} + \underbrace{i\gamma_1 (|A_x|^2 + B|A_y|^2)}_{\text{XPM}} + \underbrace{\frac{i\gamma_1}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)}_{\text{FWM}} \quad (2-64)$$

De forma similar, o termo  $-i\gamma_1 (|A_{yx}|) A_y$  representa as mesmas quantidades, agora relacionadas com a componente  $y$  da onda:

$$\underbrace{i\gamma_1 |A_y|^2 A_y}_{\text{SPM}} + \underbrace{i\gamma_1 (|A_y|^2 + B|A_x|^2)}_{\text{XPM}} + \underbrace{\frac{i\gamma_1}{3} A_y^* A_x^2 \exp(-2i\Delta\beta z)}_{\text{FWM}} \quad (2-65)$$

O efeito FWM é o resultado do acoplamento coerente entre as duas componentes de polarização e depende da relação entre o comprimento da fibra  $L$  e o comprimento de batimento  $L_B$  descrito na Seção (1.3.2.3). De acordo com [8], quando  $L \gg L_B$ , o efeito FWM muda de sinal e o efeito resultante tende a anular esta componente de não linearidade. O parâmetro  $B$  nas Equações (2-64) e (2-65) descreve a proporção entre os termos da modulação de fase cruzada (XPM) e a automodulação de fase (SPM), esta proporção é descrita pela Equação (2-66):

$$B = \frac{2 + 2 \sin^2 \epsilon}{2 + \cos^2 \epsilon} \quad (2-66)$$

em que  $\epsilon$  é o *ângulo de elipsidade* no intervalo  $[-\pi, +\pi]$ .

O ângulo de elipsidade é relacionado com a birrefringência da fibra. Na ocorrência de birrefringência linear,  $\chi = 0^\circ$  e, conseqüentemente  $B = 2/3$ . Para os casos em que ocorre a birrefringência circular,  $\chi = 90^\circ$  e  $B = 2$ .

O resultado deste cálculo simples informa que, na ocorrência de birrefringência circular, a XPM é duas vezes maior que a SPM.

Para modulações de polarização, a XPM representa um limitante e formas de mitigá-la devem estar disponíveis. A estimação de valores da XPM pode ser realizada pelo método da propagação digital reversa (DBP). Nesse método, a fibra é dividida em seções de comprimento nos quais considera-se alternadamente os efeitos lineares e não lineares. No método DBP, a alternância dos efeitos lineares e não lineares é baseada na propriedade matemática de que a função  $|\hat{A}(z, \omega)|$  não muda a forma do pulso quando considera-se apenas os efeitos lineares e de forma semelhante a função  $|A(z, t)|$  não muda a forma do pulso quando considera-se apenas os efeitos não lineares [9, 13].

## 2.4

### O modelo GN-EGN para propagação não linear

Quando a ENLAS é considerada suficiente precisa para representar os efeitos físicos da fibra óptica, é possível utilizar a Equação (2-62) para a construção de modelos analíticos aproximados para a propagação não linear. Atualmente, o modelo mais aceito é o GN (Gaussian Noise), que possui extensões denominadas EGN (**E**xtended **G**aussian **N**oise) [113]. O grau de aceitação desses modelos tem crescido continuamente, devido à grande quantidade de validações experimentais. Uma descrição detalhada do modelo GN pode ser encontrada em [114]. Um aspecto relevante do modelo EGN sobre o GN, é o fato de que com o EGN é possível fazer uma estimativa da contribuição da modulação para a interferência não linear (INL).

No caso do EGN, a presunção de gaussianidade da modulação é abandonada e a caracterização da contribuição da modulação para o INL é realizada com base em *momentos estatísticos padronizados*. Demonstrações das equações que modelam a dependência do INL com o tipo de modulação podem ser encontradas em [113, 115, 116, 117]. Para harmonização da notação reproduz-se a seguir o equacionamento dessas quantidades. O primeiro passo consiste em modelar as distribuições dos ruídos ASE e INL como processos estatísticos independentes. Neste caso, o ruído efetivo será o somatório entre o ruído ASE e o ruído não linear na forma da Equação (2-67).

$$\text{SNR}_{\text{efetiva}} = \frac{P_{\text{TX}}}{\sigma_{\text{ASE}}^2 + \sigma_{\text{INL}}^2} \quad (2-67)$$

em que  $P_{\text{TX}}$  é o valor da potência óptica lançada na fibra,  $\sigma_{\text{ASE}}^2$  representa o ruído das emissões espontâneas gerado pelos amplificadores e  $\sigma_{\text{INL}}^2$  representa a variância da interferência não linear, incluindo as distorções intra e entre canais.

Conforme observado em [117], após a realização de validações experimentais identificou-se que a imprecisão do modelo GN se originava na simplificação da estatística para a entrada do canal. O modelo GN foi então estendido (EGN) para incluir os impactos das constelações na modelagem dos efeitos não lineares. No contexto dessa tese, utilizou-se para o canal óptico o modelo SPM-XPM referenciado em [116, 117]. Consequentemente, representa-se a variância da interferência não linear na forma da Equação (2-68):

$$\sigma_{\text{INL}}^2 = P_{\text{TX}}^3 \left[ \chi_0 + (\hat{\mu}_4 - 2) \cdot \chi_4 + (\hat{\mu}_4 - 2)^2 \cdot \chi_4 + \hat{\mu}_6 \cdot \chi_6 \right] \quad (2-68)$$

Em que, dada uma constelação de entrada  $X$ ,  $\hat{\mu}_4$  e  $\hat{\mu}_6$  são os momentos (estatísticos) padronizados de ordem 4 e 6 respectivamente. As quantidades  $\chi_0$ ,  $\chi_4$ ,  $\chi'_4$  e  $\chi_6$  são coeficientes reais, que representam as contribuições da não linearidade da fibra.

Em [116], foi publicado um script numérico baseado no modelo EGN e com o qual é possível calcular essas quantidades.

O  $k$ -ésimo momento padronizado é definido como:

$$\hat{\mu}_k = \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^k]}{(\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2])^{\frac{k}{2}}} \quad (2-69)$$

O momento de ordem 4, denotado por  $\hat{\mu}_4$ , é comumente conhecido como **curtose**.

Ao considerar o modelo de uma transmissão WDM em que todos os canais utilizam o mesmo formato de modulação e transmitem na mesma potência média  $P_{TX}$ , é possível combinar as equações (2-67) e (2-68).

Com essas premissas, a variância efetiva do ruído é calculada com a Equação (2-70):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{efetiva}}^2 = & \sigma_{\text{ASE}}^2 + P_{\text{TX}}^3 \cdot \chi_0 \\ & + \underbrace{P_{\text{TX}}^3 \left[ \chi_0 + (\hat{\mu}_4 - 2) \cdot \chi_4 + (\hat{\mu}_4 - 2)^2 \cdot \chi'_4 + \hat{\mu}_6 \cdot \chi_6 \right]}_{\text{Depende da modulação}} \end{aligned} \quad (2-70)$$

Para uma transmissão de 64QAM, os seguintes coeficientes são apresentados em [117]:

$$\chi_0 = 3,09 \times 10^4 \text{ W}^{-2}, \quad \chi_4 = 1,05 \times 10^4 \text{ W}^{-2}, \quad \chi'_4 = -1,22 \times 10^4 \text{ W}^{-2}, \quad \chi_6 = 1,29 \times 10^4 \text{ W}^{-2}.$$

Nesta tese, utilizou-se uma implementação numérica do modelo EGN para cálculo da SNR e OSNR em função da potência lançada na fibra. Este cálculo foi particularmente importante na avaliação das constelações construídas como os métodos propostos no Capítulo (4). O cálculo numérico estabelece um modelo de enlace WDM com especificações diversas como dispersão cromática, atenuação, coeficiente de não linearidade, banda passante entre outras. O script Matlab foi adaptado para cálculo da IM.

Recentemente, com o aumento na capacidade computacional de hardware e o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes, diversos trabalhos de pesquisa em telecomunicações tem explorado formas de realizar códigos mapeados sobre espaços euclidianos em dimensões 3D, 4D, 8D e acima. A possibilidade de transmitir modulações complexas deu então grande relevância para a teoria da informação nas comunicações ópticas [118]. Com base neste cenário, aborda-se nesta seção os problemas dos códigos multidimensionais, através da teoria dos códigos esféricos. O tema códigos esféricos recebeu historicamente muitas contribuições, ainda assim o empacotamento de esferas na sua forma mais geral é um problema matemático não resolvido. Contudo, apesar de algumas restrições, é perfeitamente possível aplicar os resultados já conhecidos para a resolução de problemas com variáveis de contorno bem definidas. No desenvolvimento que segue, descreve-se de forma sucinta conceitos básicos dessa teoria que, conforme será observado, tem fortes interseções com a teoria da comunicação.

### 3.1

#### Códigos em espaços multidimensionais

Um código esférico é definido como um subconjunto discreto de uma esfera em um espaço com uma métrica [119, 120, 121]. Nesse contexto, de acordo com [119], uma esfera no  $R^n$ , centrada no ponto de coordenadas  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e com raio  $\rho$  consiste de todos os pontos que satisfazem a condição:

$$(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + \dots + (x_n - u_n)^2 = \rho^2 \quad (3-1)$$

Com base na Equação (3-1), se permutarmos as coordenadas do vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sua norma permanece constante. Em notação geométrica, a norma  $\rho$  delimita uma *casca esférica*. O comprimento, a dimensão e a distância mínima quadrática são os três principais parâmetros que caracterizam um código esférico no  $R^n$ .

Esses três parâmetros são definidos em [121] da seguinte forma:

- Comprimento – equivale ao número de palavras do código esférico;
- Dimensão – é a menor dimensão de qualquer espaço euclidiano em que o código esférico está contido;
- Distancia mínima quadrática – é a menor distância ao quadrado entre palavras código distintas.

O espaço de código multidimensional já era considerado por R.W. Hamming e C.E. Shannon em seus trabalhos seminais [122, 123, 124]. Nas próximas seções, utiliza-se como referência o trabalho desses autores para descrever a relação entre a teoria da informação e os códigos esféricos. Esses tópicos são a base para a compreensão de como algumas propriedades e métricas se aplicam nas comunicações ópticas.

Para referenciar o trabalho de Shannon com os códigos esféricos, utiliza-se a abordagem de [125]. Como consequência, será necessário rememorar o teorema da amostragem pois este teorema fundamental estabelece que se uma função  $f(t)$  representa um sinal e, se este sinal não contém componentes de frequência maiores que um valor  $W$  de ciclos por segundo, então  $f(t)$  é completamente especificada por suas amostras, realizadas em intervalos de  $1/(2W)$  segundos. Ao considerar que um sinal  $f(t)$  é transmitido através de um canal AWGN, pode-se representá-lo por um *ponto*, cujas coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  definem um vetor no espaço euclidiano de dimensão  $n$ . Para um sinal com duração de  $T$  segundos, necessita-se de um número de amostras igual a  $2TW$  para especificar o sinal. Portanto, a quantidade de amostras equivale a dimensão  $n$  do espaço de código, ou seja:

$$n = 2TW \quad (3-2)$$

A partir destas considerações, é possível concluir que se  $\mathbf{x} \in R^n$  e denota o ponto com  $n$  coordenadas, então a norma de  $\mathbf{x}$  é proporcional à energia de  $f(t)$ . Estas foram as considerações desenvolvidas e formalizadas por Shannon nos seus trabalhos [126].

Acerca das conclusões de Shannon, sabe-se ainda que a norma do vetor  $\mathbf{x}$  em um espaço euclidiano é calculada através do produto interno:

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 2W \int_0^T f(t)^2 dt = 2WTP = nP \quad (3-3)$$

em que  $P$  descreve a potência média de  $\mathbf{x}$ .

Mantidas as considerações de Shannon sobre o canal AWGN, o código que se deseja transmitir pode ser representado por uma coleção de pontos no  $R^n$ . Neste código, cada ponto representa um sinal de largura de banda  $W$  e duração  $T$  segundos. Para um número  $M$  de pontos, a taxa de transmissão ( $T_{\text{trans}}$ ) do código é definida na forma da Equação (3-4):

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{T} \log_2 M \quad \text{bit/segundos} \quad (3-4)$$

Após a transmissão do vetor  $\mathbf{x}$ , o dispositivo decodificador deve calcular o ponto do código mais próximo do vetor recebido e a partir desta operação reconstruir o sinal original. O problema da decodificação em um canal "AWGN puro" é complicado pelo fato de o ruído aditivo gerar uma incerteza em relação a posição exata do vetor transmitido. Na medida em que o ruído aumenta, a incerteza pode fazer com que o vetor recebido seja decodificado como pertencente a outro ponto do código, gerando deste modo *interferência intersimbólica*. Uma solução imediata para mitigar o efeito do ruído aditivo consiste na utilização de códigos que possuam pontos afastados entre si. Aumentar a amplitude dos sinais é uma forma de afastá-los. Contudo, isso vai resultar em sinais de grande energia (maior norma), o que leva a uma penalidade em termos de eficiência energética. Essa penalidade deve ser reduzida nos sistemas de comunicação reais, nos quais interessa a relação dimensional descrita na Equação (3-5):

$$\begin{aligned} \text{Eficiência}_{ee} &= \frac{\left(\frac{\text{bit}}{s}\right)}{(Watts)} = \frac{\left(\frac{\text{bit}}{s}\right)}{(J.Hz)} \\ &= \frac{\text{bit}.s^{-1}}{J.s^{-1}} \quad (\text{bit/joule}) \end{aligned} \quad (3-5)$$

A eficiência energética e espectral da Equação (3-5) é uma métrica que foi utilizada pela DARPA no seu projeto denominado Photonics in the Package for Extreme Scalability (PIPES) [127]. Para atingir esta eficiência, em que transporta-se mais *bit* por *joule* [128, 129], uma boa alternativa consiste em utilizar um espaço de código com a maior dimensão possível. Dessa forma, cada amostra de  $f(t)$  consistirá em um vetor  $\mathbf{x}$  com mais coordenadas e os graus de liberdade providos pelas coordenadas de  $\mathbf{x}$  possibilitarão, por sua vez, o transporte de mais informação no mesmo intervalo de  $T$  segundos. O cálculo da eficiência espectral pode ser realizado com diferentes abordagens e restrições. As principais abordagens são: canal *limitado em potência* e canal *limitado em banda*.

Para efeito deste trabalho, as duas abordagens serão utilizadas em relação ao canal de comunicação.

Adicionalmente, é necessário fazer as seguintes considerações:

1. O modelo do canal que será utilizado é limitado em potência. A potência de referência será o valor mínimo entre o limiar para a ocorrência de efeitos não lineares [130] e a saturação do ganho dos amplificadores do enlace [131];
2. O canal é limitado em banda e a limitação utilizará o critério clássico de que a banda útil é 99% da banda limite. É importante notar que, para os sistemas WDM atuais, são definidos espaçamentos de canais que variam entre 12,5 e 100 GHz [ITU-T G.694.1];
3. O limiar superior de potência impõe limites na distância do enlace, a distância do enlace por sua vez serve de parâmetro para os valores máximos admissíveis de PMD (Polarization Mode Dispersion) e PDL (Polarization Dependent Loss);

### 3.1.1

#### O problema do empacotamento de esferas

Uma vez definido o modelo do canal de comunicação, é possível estabelecer a conexão entre o teorema de Shannon e o problema do empacotamento de esferas. A formulação matemática do empacotamento de esferas relevante para esta tese é baseada na idéia de *reticulado* [119, 132].

Um reticulado é um conjunto discreto do espaço  $n$ -dimensional formado por combinação inteira de vetores independentes. Um reticulado gerado por um *sistema de raízes* é denominado de *reticulado raiz* e com base neste conceito é possível, através de repetidas ações de *translação* e *rotação*, ocupar um espaço de interesse com cópias de reticulados.

Numa notação matricial, define-se uma matriz geradora formada pelos vetores base na forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}, \quad m \geq n \quad (3-6)$$

Se: denotarmos o reticulado por  $\Lambda$  e uma matriz Gram para este reticulado por  $A$ , na forma da Equação (3-7):

$$A = M M^T; \quad (3-7)$$

Então:  $(\det \Lambda = \det A)$ .

Ou seja, o determinante do reticulado  $\Lambda$  é igual ao determinante da matriz  $A$ .

A Figura (3.1) mostra a representação da seção de um plano dividido em regiões de um reticulado bidimensional. A região destacada à direita da figura, formada pela projeção dos vetores  $v_1$  e  $v_2$ , é uma *região fundamental* deste plano. Uma região fundamental de um reticulado é uma região limitada, que "ladrilha" o espaço todo por translações de vetores do reticulado. Este subespaço do plano também é conhecido como *paralelolepípedo fundamental*.

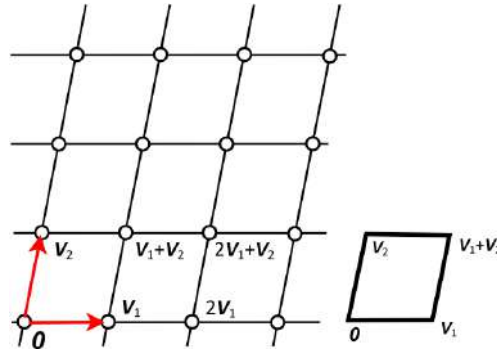


Figura 3.1: Divisão de um plano em regiões fundamentais.

Em notação matemática, cada entrada da matriz  $A$  é o produto interno  $(v_i \cdot v_j)$ . Como resultado, todos os pontos da Figura (3.1) são transformações realizadas na matriz de vetores que forma a região fundamental.

Um exemplo de região fundamental é a *região de Voronoi* da origem do reticulado. A região de Voronoi de um ponto  $p$  do reticulado é definida como o conjunto de pontos do espaço que é mais próximo deste ponto  $p$  do que qualquer outro ponto do reticulado. Na Seção (3.1.2), esta propriedade é utilizada para formalização do cálculo de probabilidade de erro em um canal Gaussiano. Contudo, antes de prosseguir, será necessário definir a relação entre o conceito do empacotamento de esferas e reticulados. No empacotamento de esferas, a proporção do espaço ocupado pelas esferas é chamada de *densidade de empacotamento de reticulados*.

A Equação (3-8) representa a densidade de empacotamento, denotada por  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\text{volume da esfera}}{\text{volume da região fundamental}} = \frac{\text{volume da esfera}}{(\det \Lambda)^{1/2}} \quad (3-8)$$



Para espaços multidimensionais,  $\Delta$  é representado pela Equação (3-9):

$$\Delta = \frac{V_n \rho^n}{(\det \Lambda)^{1/2}} \quad (3-9)$$

em que  $V_n \rho^n$  denota o volume de uma esfera de dimensão  $n$  com raio  $\rho$ .

Ao considerar o caso particular em que o raio  $\rho$  é igual a 1. Dado que  $n! = \Gamma(n+1)$ : resulta, para  $n=3$ , que  $V_n$  é o valor clássico do volume da esfera em 3 dimensões.

$$\begin{aligned} V_n \rho^n = V_n &= \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}\pi \end{aligned} \quad (3-10)$$

De acordo com [125], se os sinais  $\mathbf{x}$  na Equação (3-3) tiverem potência média menor ou igual a um valor de referência  $P$ , ou seja  $P_{\mathbf{x}} \leq P$ , então com base na referida equação, esses vetores estão situados numa esfera de raio  $\sqrt{nP}$  em torno da origem. Ao considerar que o vetor de ruído  $\mathbf{r}$  possui a mesma dimensão  $n$  do sinal, ou seja, que o ruído tem  $n$  graus de liberdade, pode-se estimar (com um erro de medição  $\epsilon$ ) que  $\mathbf{r}$  possui  $n$  componentes independentes de variância  $\sigma^2$  e que a sua norma é da forma:

$$\rho_{esfera(\mathbf{r})} = \|\mathbf{r}\| \leq n(\sigma^2 + \epsilon) \quad (3-11)$$

Portanto, a equação (3-11) estabelece uma importante definição:

a região de variância do ruído é delimitada por um *volume geométrico* de referência, cuja dimensão equivale aos graus de liberdade do ruído.

Para efeito de simplificação, considera-se que o erro  $\epsilon$  contribui pouco para a incerteza de  $\|\mathbf{r}\|$ . Com estes parâmetros de contorno, o vetor resultante  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  reside em um espaço delimitado pela esfera de raio  $\|\mathbf{r}\| \leq n(\sigma^2 + \epsilon)$ , centrada em  $\mathbf{x}$ . A potência média do vetor  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  recebido é  $P \leq [P + (\sigma^2 + \epsilon)]$ .

Estes desenvolvimentos levam à conclusão que: a interação entre o sinal transmitido e o ruído produzirá uma incerteza em relação ao lugar geométrico de  $\mathbf{x}$  ao redor de uma esfera de raio  $\rho_{esfera(\mathbf{x}+\mathbf{r})}$ .

$$\rho_{esfera(\mathbf{x}+\mathbf{r})} = \left\{ n[P + (\sigma^2 + \epsilon)] \right\}^2 \quad (3-12)$$

Consequentemente, a relação sinal-ruído (SNR) é calculada por:

$$\text{SNR} = \left( \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|} \right); \quad (3-13)$$

Supondo uma SNR favorável, se o código que se deseja transmitir for modelado como um conjunto de pontos centrados em esferas, o problema de comunicação pode ser tratado como o empacotamento de várias pequenas esferas com raio  $\rho_{\text{esfera}(\mathbf{r})}$  numa esfera maior com raio  $\rho_{\text{esfera}(\mathbf{x}+\mathbf{r})}$ .

Ainda de acordo com [125], espera-se que um vetor pertencente a um código com estas características, quando transmitido, seja decodificado com probabilidade de acerto próxima de 1.

Ao considerar as Equações (3-11) e (3-12), o número de pontos deste código que pode ser transmitido no espaço do canal AWGN é dado por:

$$M = \Delta \left( \frac{P + (\sigma^2 + \epsilon)}{\sigma^2 + \epsilon} \right)^{n/2} < \Delta \left( \frac{P + \sigma^2}{\sigma^2} \right)^{n/2} \quad (3-14)$$

Na Equação (3-14),  $\Delta$  denota a densidade do empacotamento de esferas e conforme pode ser observado, o número de pontos  $M$  é fortemente influenciado pela dimensão  $n$  do sinal.

Para uma constelação uniforme, o número de pontos é equivalente à proporção entre a região ocupada pela constelação e a região de Voronoi de cada símbolo. A taxa de símbolos ( $T_{\text{símbolos}}$ ) transmitidos do código é dada pela Equação (3-15):

$$T_{\text{símbolos}} \approx W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) + \frac{2W}{n} \log_2 \Delta \quad (3-15)$$

A partir dos resultados dos trabalhos de [133] e [134], as condições de contorno da Equação (3-15) permitem que ela seja reescrita na forma da Equação (3-16):

$$T_{\text{símbolos}} < W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) - \frac{2W}{n}; \quad (3-16)$$

A Equação (3-16) define a capacidade do canal sob a perspectiva dos códigos esféricos. Esta equação guarda grande semelhança com o cálculo de capacidade definido por Shannon [123].

### 3.1.2

#### Codificação no canal Gaussiano $n$ -dimensional

Para evidenciar uma comunicação livre de erros, na forma da Equação (3-16), é preciso modelar a probabilidade de erro da comunicação sobre o canal Gaussiano. Nessa abordagem, é comum a utilização de uma ferramenta geométrica denominada *célula de Voronoi* que, conforme já adiantado na Seção (3.1.1), é muito utilizada quando associada ao conceito de região fundamental.

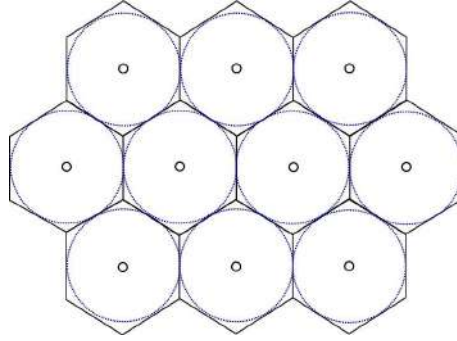


Figura 3.2: Ilustração de células de Voronoi do reticulado hexagonal.

Num espaço  $n$ -dimensional, a distância média quadrática de um ponto aleatório até o centróide (ponto mais fechado) de um reticulado regular pode ser calculada a partir do *segundo momento de inércia* de uma *célula de Voronoi* [119]. Quando células de Voronoi são associadas à distribuição espacial de uma coleção de pontos discretos  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$  no  $R^n$ , esferas de raio  $r$  centradas nos pontos da coleção  $P$  podem ser utilizadas para cobrir  $R^n$ , pois por definição nenhum raio menor poderá fazê-lo.

Ao supor que o código de referência consiste de um número  $M$  de pontos no  $R^n$  e que os volumes fundamentais são células  $V(P_k)$  de Voronoi, associadas à cada ponto do código transmitido. Então, a probabilidade de o decodificador fazer uma escolha correta é um evento com probabilidade dada pela Equação (3-17):

$$P_{sucesso} = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \int_{V(P_k)} \exp^{-x \cdot x / 2\sigma^2} dx; \quad (3-17)$$

Se nenhum dos pontos do código for preferencial, então a probabilidade de erro para este código pode ser calculada na forma da Equação (3-18):

$$P_e = 1 - \frac{1}{M} \left[ \sum_{k=1}^M \left( \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \int_{V(P_k)} \exp^{-x^2 / 2\sigma^2} dx \right) \right] \quad (3-18)$$

Com os conceitos teóricos apresentados até agora, é possível abordar o problema da codificação em um canal Gaussiano de duas formas:

1. **Constelação finita** - Dada uma dimensão  $n$ , uma constelação de  $M$  pontos e uma restrição de potência na forma  $N(P_k) \leq nP$ , com  $k$  assumindo valores inteiros de 1 até  $M$ . A solução consiste em encontrar um código que satisfaça estas condições de contorno e para o qual a probabilidade  $P_e$  dada pela Equação (3-18) seja minimizada.
2. **Constelação infinita** - Dado o valor de variância do ruído ( $\sigma$ ), deve-se encontrar um reticulado  $n$ -dimensional cujo determinante seja 1 e para o qual a probabilidade de erro seja minimizada [135]. A probabilidade de erro para este caso é representada na Equação (3-19), em que o politopo de volume unitário ( $\Pi$ ) é a célula de Voronoi do reticulado.

$$P_e = 1 - \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \int_{\Pi} \exp^{-x^2/2\sigma^2} dx \quad (3-19)$$

Ao considerar  $\Lambda$  um reticulado  $n$ -dimensional no  $R^n$ , as células de Voronoi ao redor dos pontos que formam este reticulado são *politopos congruentes*. Quando o reticulado é usado como um quantizador vetorial, para pontos uniformemente distribuídos. A quantidade  $G(V(0))$ , representada na Equação (3-20) é igual ao erro médio quadrático por símbolo:

$$\begin{aligned} G(V(0)) &= G(\Lambda) \\ &= \frac{1}{n} (\det \Lambda)^{-\left(\frac{n+2}{2n}\right)} \int_{(V(0))} (x \cdot x) dx \end{aligned} \quad (3-20)$$

Alguns problemas encontrados nas comunicações por fibras ópticas podem ser abordados a partir da teoria apresentada com uma expressiva vantagem.

Referências bibliográficas que fazem associação entre códigos esféricos e a representação da polarização da luz são encontradas em [99, 101]. Por sua vez, em [27] são demonstrados cálculos da probabilidade de erro de símbolo para constelações definidas sobre politopos. Os resultados apresentados no Capítulo (4) também evidenciam que constelações definidas sobre os fibrados de Hopf compartilham de diversas propriedades dos códigos esféricos.

### 3.2

#### Métricas de desempenho de constelações

Para uma transmissão com pulsos dentro do critério de Nyquist [136], se uma constelação com  $M$  pontos no espaço de dimensão  $n$  for transmitida, então, o cálculo da eficiência espectral dessa constelação pode ser descrito pela equação Equação (3-21):

$$\beta = \frac{\log_2(M)}{n/2} \quad \text{bit/s/Hz.} \quad (3-21)$$

Com base na propriedade de que a norma do símbolo de coordenadas  $\mathbf{x}$  é proporcional à energia de um sinal  $f(t)$  (ver Seção (3.1)). A constelação com símbolos  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_M)$ , tem energia média por símbolo  $E_s$  calculada através da Equação (3-22):

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{\mathbf{x} \in X} |\mathbf{x}|^2. \quad (3-22)$$

A energia máxima por símbolo  $E_{m\acute{a}x}$  é:

$$E_{m\acute{a}x} = \max_{\mathbf{x} \in X} |\mathbf{x}|^2. \quad (3-23)$$

De posse dos valores de  $E_{m\acute{a}x}$  e  $E_s$ , é possível calcular a PAPR da constelação na forma da Equação (3-24):

$$\text{PAPR} = 10 \log_{10} \left[ \frac{E_{m\acute{a}x}^2}{E_s^2} \right]. \quad (3-24)$$

e a energia média por bit  $E_b$  é:

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2(M)}. \quad (3-25)$$

No limite da relação sinal ruído: a razão entre a distância mínima ( $d_{min}$ ) entre símbolos da constelação e a densidade espectral de potência  $n_0$  permite o cálculo de um parâmetro adimensional na forma:

$$\gamma = \frac{M \times d_{min}^2}{4 E_s} = \frac{M \times d_{min}^2}{4 (M \times E_b)} = \frac{d_{min}^2}{4 E_b}. \quad (3-26)$$

O parâmetro  $\gamma$  mede o *ganho de potência* do sinal sobre a modulação BPSK quando as modulações comparadas possuem a *mesma taxa de bit*. Por ser uma medida relativa, o parâmetro  $\gamma$  também é denominado Eficiência em Potência (PE) e seu uso como métrica é adequado em canais limitados em potência.

Para comparar modulações sobre uma mesma banda de frequência, usa-se a Equação (3-27):

$$\begin{aligned} \frac{d_{min}^2}{4 n_0} &= \frac{E_b}{n_0} \times \frac{\beta}{4} \times \text{CFM} \\ &= \frac{\text{SNR} \times \text{CFM}}{4} \end{aligned} \quad (3-27)$$

A relação sinal-ruído é dada pela quantidade:

$$\text{SNR} = \frac{E_s}{n_0 \frac{n}{2}} \quad (3-28)$$

Enquanto o termo CFM define o parâmetro denominado *figura de mérito* da constelação, na forma da Equação (3-29).

$$\text{CFM} = \frac{d_{min}^2 \times n}{2 E_s} \quad (3-29)$$

A figura de mérito pode também ser expressa em decibéis (dB), na forma da Equação (3-30):

$$\text{CFM}_{\text{dB}} = 10 \log(\text{CFM}) \quad (3-30)$$

### 3.2.1

#### Informação mútua e capacidade do canal AWGN

As métricas de desempenho mostradas na Seção (3.2) são definidas no limite da SNR e, portanto, não permitem uma previsão da dinâmica das constelações. Para esta finalidade, a ferramenta mais aceita é a Informação Mútua (IM), também conhecida como Informação Mútua de Shannon.

Conforme definido em [137], um canal discreto sem memória pode ser especificado por uma densidade de transição  $p(y|x)$ . A densidade de transição  $p(y|x)$ , por sua vez, denota a distribuição condicional de uma saída  $\mathbf{y}$  uma vez que sinais com uma distribuição  $\mathbf{x}$  foram transmitidos.

Para  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  reais, um canal Gaussiano tem a densidade de transição descrita pela Equação (3-31):

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (3-31)$$

Por questões práticas, considera-se este modelo apenas para a transmissão de constelações finitas (*limitação em banda*). Além disso, os valores da entrada  $\mathbf{x}$  são restritos à energia média  $E_s$ , conforme definida na Seção (3.2) (*limitação em potência*).

Nos casos em que o canal é complexo (2D), com entrada  $\mathbf{x} = x_I + jx_Q$  e saída  $\mathbf{y} = y_I + jy_Q$ , a densidade de transição é formulada pela Equação (3-32):

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{e^{-\frac{(y_I-x_I)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{e^{-\frac{(y_Q-x_Q)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (3-32)$$

A definição de  $X$  como uma variável aleatória Gaussiana, com média  $m$  e variância  $v^2$ . Permite que a entropia diferencial dessa variável seja calculada através da Equação (3-33):

$$h(X) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e v^2) \quad (3-33)$$

Por conta dessas premissas, denota-se a informação mútua de um canal Gaussiano com entrada  $X$ , ruído  $\mathbf{r}$  e saída  $Y$  na forma da Equação (3-34):

$$I(X; Y) = h(Y) - h(\mathbf{r}) \quad (3-34)$$

A capacidade do canal Gaussiano especificado, é obtida pela maximização de  $I(X; Y)$ . Portanto, maximizar  $I(X; Y)$  equivale maximizar a entropia diferencial de  $Y$ , denotada por  $h(Y)$  na Equação (3-34). É possível demonstrar que a maximização de  $h(Y)$  é obtida quando a entrada  $X$  é uma variável Gaussiana de média zero. Consequentemente, quando  $X$  aproxima-se de uma distribuição Gaussiana com média zero e variância  $\Sigma_s$  independente do ruído, a saída  $Y$  aproxima-se de uma distribuição Gaussiana com média também nula e com variância  $\Sigma_s + \sigma^2$ .

Este resultado mostra a estreita relação entre o problema do empacotamento de esferas mostrado na Seção(3.1.1) e o cálculo de capacidade do canal Gaussiano com variáveis contínuas  $X, Y$  e  $R$  [118]. Quando recorre-se a expressão da entropia relativa da Equação (3-34), a relação entre o empacotamento de esferas e a capacidade do canal Gaussiano fica ainda mais explícita. Dado que:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \underbrace{\frac{1}{2} \times \log_2(2\pi e(\Sigma_s + \sigma^2))}_{\text{Volume do sinal}} - \underbrace{\frac{1}{2} \times \log_2(2\pi e\sigma^2)}_{\text{Volume do ruído}} \\ &= \frac{1}{2} \times \log_2\left(1 + \frac{\Sigma_s}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \log_2(1 + \text{SNR}) \end{aligned} \quad (3-35)$$

Quando  $X, Y$  e  $R$  são variáveis contínuas, pode-se de modo simplificado dizer que:

A diferença entre as entropias diferenciais equivale a razão entre o logaritmo do volume da esfera descrita pelo sinal de raio  $\Sigma_s + \sigma^2$  e o logaritmo do volume da esfera descrita pelo ruído de raio  $\sigma^2$  (variância).

O cálculo analítico da informação mútua é realizado através da solução de uma integral múltipla da forma:

$$I(X; Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\log_2(p(\mathbf{x}, \mathbf{y}))}{p(\mathbf{x}) p(\mathbf{y})} dy dx \quad (3-36)$$

Em termos matemáticos, os cálculos com integrais múltiplas são cálculos de *volumes geométricos* que, dependendo da dimensão dos sinais  $X$  e  $Y$ , podem ficar computacionalmente impraticáveis.

Com o uso de modulações 4D e 8D, uma abordagem mais prática é utilizar integração de Monte Carlo. Utilizou-se neste trabalho uma rotina de Monte Carlo realizada de forma independente nos softwares *Matlab* e *Mathematica*. Com a rotina de software, a informação mútua (IM) foi calculada conforme definida em [138]. O cálculo realizado foi rápido o suficiente para que centenas de milhares de constelações pudessem ser analisadas e selecionadas conforme seu desempenho.

Para os scripts Matlab/Mathematica utilizados no cálculo da IM foram definidos os seguintes parâmetros e variáveis:

#### Matriz de covariância do ruído

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_R^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_R^2}{4} \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

O traço da matriz de covariância do ruído na Equação (3-37) é uma forma matricial equivalente à forma analítica da variância do ruído definida na Equação (3-11).



**Densidade de probabilidade do ruído**

$$\begin{aligned}
f_R(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r}\right) \\
&= \frac{4}{(\pi \sigma_R^2)^2} \exp\left(-\frac{2}{\sigma_R^2} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)\right)
\end{aligned} \tag{3-38}$$

Em que  $r$  é o vetor Gaussiano de ruído com coordenadas  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$ .

Obs: o vetor de ruído tem 04 graus de liberdade em consequência de estar associado a um canal 4D (ver Seção (3.1.1)).

**Densidade condicional da saída  $\mathbf{y}$  dada a entrada  $\mathbf{x}$** 

$$f_{Y|X=\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f_R(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tag{3-39}$$

**Densidade da saída  $\mathbf{Y}$  (função  $\mathbf{Y}_{\text{densidade}}$ )**

$$\begin{aligned}
f_Y(\mathbf{y}) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f_R(\mathbf{y} - \mathbf{x}) P(X = \mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f_R(\mathbf{y} - \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3-40}$$

**Entropia da saída (integral da função  $\mathbf{Y}_{\text{entropia}}$ )**

$$H(Y) = - \int_{\mathbb{R}^4} f_Y(\mathbf{y}) \log_2 f_Y(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \tag{3-41}$$

**Entropia do ruído**

$$\begin{aligned}
H(r) &= \frac{1}{2} \log_2((2\pi e)^4 |\Sigma|) \\
&= 2 \log_2\left(\frac{1}{2} \pi e \sigma_r^2\right)
\end{aligned} \tag{3-42}$$

**Informação mútua**

$$\begin{aligned}
I(X, Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= H(Y) - H(r)
\end{aligned} \tag{3-43}$$

**SNR**

$$\text{SNR} = \frac{E[|X|^2]}{\sigma_R^2} = \frac{1}{\sigma_N^2} \left( \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} |\mathbf{x}|^2 \right) \tag{3-44}$$

### 3.3

#### Sequências De Bruijn e caminhos cíclicos

Os principais resultados teóricos dessa tese são apresentados no Capítulo (4). Antes disso, apresenta-se nesta seção "a sequência De Bruijn" [139], que é um conceito importante para a compreensão do texto. De acordo com [140], em matemática combinatória, uma sequência de Bruijn de ordem  $n$  em um alfabeto  $A$  de tamanho  $k$ , é uma sequência cíclica em que toda possível string de comprimento  $n$  que existe em  $A$  ocorre exatamente uma vez como uma substring.

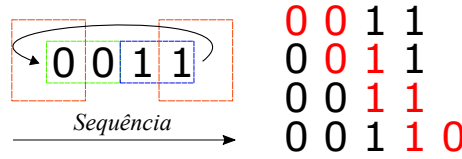


Figura 3.3: Sequência de Bruijn com tamanho 2 em um alfabeto binário.

De modo geral, as propriedades das sequências De Bruijn são impressionantes e suas aplicações podem ser simples ou extremamente avançadas [141]. No contexto desta tese, a sequência De Bruijn é utilizada, por exemplo, no processo de construção e rotulagem das constelações particionadas [142].

A seguir, destaca-se algumas características relevantes dessas sequências:

- Toda sequência de Bruijn corresponde a um ciclo euleriano em um grafo de Bruijn;
- As sequências de Bruijn podem ser geradas por hardware através de registradores de deslocamento (*shift registers*) [143];
- As sequências de Bruijn estão intrinsecamente relacionadas aos códigos de cobertura [140, 144];

A aplicação destas sequências no particionamento de modulações é relativamente simples. A modulação PDM-SP-128QAM, por exemplo, pode ser obtida de uma partição da PDM-16QAM. Esse processo é levado a efeito da seguinte forma: Considere os níveis de tensão  $V$ , necessários para gerar a PDM-16QAM:

$$V = \{-3, -1, +1, +3\} \quad (3-45)$$

Com esses quatro níveis, é possível gerar  $4^4 = 256$  símbolos de uma constelação 4D. Dado que o  $\log_2(4) = 2$ , uma sequência de Bruijn de tamanho 2 é suficiente para rotular todos os níveis de tensão descritos na Equação (3-45). Ao aplicar a sequência de Bruijn de tamanho 2 sobre estes níveis de tensão, tem-se o resultado descrito na Equação (3-46):

$$\left[ \underbrace{-3}_{00}, \underbrace{-1}_{01}, \underbrace{+1}_{11}, \underbrace{+3}_{10} \right] \quad (3-46)$$

→ sentido da sequência

Após este procedimento, um rótulo Gray (binário de 2 bit) é associado a cada um dos níveis de tensão. O produto cartesiano desses 04 níveis resulta em uma constelação 16QAM (2D) com rótulos do código Gray na forma:

$$\begin{aligned} (-3, -3) &\rightarrow \{0000\} & (-3, -1) &\rightarrow \{0001\} & (-3, +1) &\rightarrow \{0011\} & (-3, +3) &\rightarrow \{0010\} \\ (-1, -3) &\rightarrow \{0100\} & (-1, -1) &\rightarrow \{0101\} & (-1, +1) &\rightarrow \{0111\} & (-1, +3) &\rightarrow \{0110\} \\ (+1, -3) &\rightarrow \{1100\} & (+1, -1) &\rightarrow \{1101\} & (+1, +1) &\rightarrow \{1111\} & (+1, +3) &\rightarrow \{1110\} \\ (+3, -3) &\rightarrow \{1000\} & (+3, -1) &\rightarrow \{1001\} & (+3, +1) &\rightarrow \{1011\} & (+3, +3) &\rightarrow \{1010\} \end{aligned}$$

Ao tomar a matriz 2D formada pelos símbolos 16QAM e aplicar o produto cartesiano novamente, resulta uma constelação com 256 vetores 4D (e rótulos Gray de 8 bit). Por fim, basta aplicar um teste de paridade sobre os rótulos Gray da constelação para separar duas partições de 128 símbolos (uma partição com paridade par e outra com paridade ímpar).

A sequência de Bruijn também pode ser usada na rotulagem de vértices de um politopo. Quando a rotulagem é realizada sobre um caminho hamiltoniano, o resultado é um código de cobertura sobre os vértices do referido politopo. Um exemplo simples, e também muito conhecido, é a rotulagem de vértices de hipercubos mostrada na Figura (3.4), que ilustra as sequências para o hipercubo-1, o hipercubo-2, (tetraedro) e o (hipercubo-3) (hexaedro)

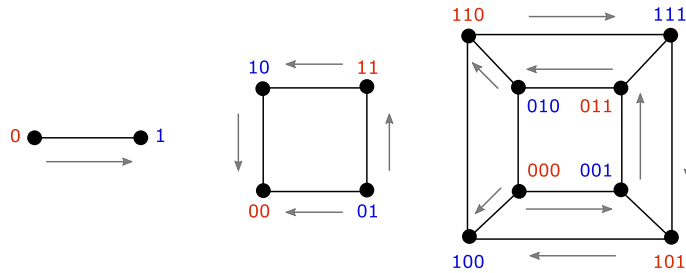


Figura 3.4: Ilustração de caminhos hamiltonianos e exemplos de sequências de Bruijn de tamanhos 1, 2 e 3, para alfabeto binário sobre hipercubos.

Nesta tese, utilizou-se sequências De Bruijn binárias de tamanho 2, 3 e 4:

- $(2,2)=\{0, 0, 1, 1\};$
- $(3,2)=\{0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1\}$  ou  $\{1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0\};$
- $(4,2)=\{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1\}.$

Adicionalmente, utilizou-se na Seção (4.3), a sequência:  $(3,4) = \{3, 2, 1, 4\}.$

A construção de um sistema de comunicação adaptativo depende da flexibilidade das modulações disponíveis. Conforme observado na Seção (1.1.3), a evolução das comunicações ópticas está fortemente relacionada com a utilização de modulações de ordens cada vez mais elevadas. Dentro desse contexto, os moduladores PMQ-MZM viabilizaram o desenvolvimento dos sistemas ópticos baseados em multiplexação de polarização [145, 146, 147, 148]. Estes sistemas PDM, por sua vez, alavancaram as modulações 4D baseadas na permutação de coordenadas de vetores. As modulações baseadas na permutação de coordenadas de vetores têm sido alvo de pesquisas por décadas [19, 20, 149] e relevantes avanços foram obtidos. Contudo, quando requisitos integrados nos domínios óptico e elétrico são especificados, os projetos destas constelações se tornam muito complexos.

Para fazer frente a estes desafios, apresenta-se neste trabalho propostas de métodos construtivos para o projeto de constelações 4D. A principal ferramenta dos métodos apresentados é o formalismo matemático dos *Fibrados de Hopf* [21, 150, 151]. A fibração de Hopf foi desenvolvida em 1931 por Heinz Hopf e pode ser considerada como uma decomposição do espaço geométrico em subespaços denominados *fibras de Hopf*. Nas Seções (4.1) e (4.1.1) são demonstradas propriedades básicas desse formalismo no contexto das comunicações ópticas coerentes clássicas [22, 208]. As exposições apresentadas evidenciam que fibrações Hopf são adequadas para a descrição de modulações de alta ordem. Vantagens adicionadas são obtidas quando requisitos integrados são especificados nos domínios óptico (polarização) e elétrico (amplitude e fase) dos sinais transmitidos.

Uma característica particularmente importante dos fibrados de Hopf, reside no fato de que eles permitem a construção de constelações, determinando *a priori* a geometria dos estados de polarização da portadora óptica. Esta abordagem contrasta com o método de permutação de coordenadas que é uma construção definida a partir dos sinais elétricos (sinal modulante). Conforme será observado nas próximas seções, o uso dos fibrados de Hopf sobre vértices embutidos de politopos amplia as opções para a construção de modulações.

Os métodos definidos pela aplicação dos fibrados Hopf em conjunto com vértices embutidos de politopos são uma forma estruturada de construir modulações adaptativas. Em tempos bem recentes, iniciativas análogas tem surgido como, por exemplo, pode ser observado em [152]. A favor dos métodos propostos nesta tese contam a robustez da teoria matemática utilizada, a praticidade de realização experimental e a forma estruturada e inovadora utilizada na construção das constelações.

#### 4.1

##### O formalismo dos fibrados de Hopf

Existem quatro fibrados de Hopf entre esferas (de raio unitário) que são largamente conhecidos [21, 153]:

$$\begin{aligned} S^0 &\rightarrow S^1 \xrightarrow{\pi} S^1; \\ S^1 &\rightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2; \\ S^3 &\rightarrow S^7 \xrightarrow{\pi} S^4; \\ S^7 &\rightarrow S^{15} \xrightarrow{\pi} S^8 \end{aligned} \tag{4-1}$$

No presente trabalho, será dado enfoque ao fibrado de Hopf denotado por:

$$S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2 \tag{4-2}$$

A notação da Equação (4-2) significa que o espaço  $S^3$  é *fibrado* por grandes círculos  $S^1$  e um espaço base  $S^2$  [21, 151]. Esta mesma interpretação se aplica para as demais expressões mostradas na Equação (4-1).

O espaço esférico  $S^3$  descrito pela equação  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$  é o local geométrico de vetores de quatro dimensões, em que  $x_i$  representa as coordenadas cartesianas e  $r$  é o raio da hipersfera. Para efeito desta tese, é também conveniente descrever o espaço  $S^3$  em coordenadas toroidais com três ângulos independentes  $\chi$ ,  $\psi$  e  $\theta$ . [154, 155], na forma da Equação (4-3).

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\chi) \cos(\psi); \\ x_2 &= r \cos(\chi) \sin(\psi); \\ x_3 &= r \sin(\chi) \cos(\theta); \\ x_4 &= r \sin(\chi) \sin(\theta); \end{aligned} \tag{4-3}$$

em que  $\chi \in [0, \pi/2]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\psi \in [0, 2\pi]$ .

Para valores fixos de  $\chi$ , a Equação (4-3) descreve a superfície de um toro [154].

Conforme descrito em [151], se uma relação linear for imposta entre os dois parâmetros  $\theta$  e  $\psi$ , restará apenas um valor independente, que irá parametrizar uma curva simples sobre o toro. Se esta relação for do tipo  $\theta = \psi + k$ , teremos que a anti-imagem pela aplicação de Hopf são grandes círculos disjuntos para diferentes  $k$  na esfera de  $R^4$ . Por conta destas propriedades, ao definir  $\chi$  como o ângulo de latitude de uma esfera  $S^2$ , a esfera  $S^3$  será *fibrada* por grandes círculos paralelos. Um exemplo da fibração descrita está ilustrado na Figura (4.1), em que uma projeção estereográfica foi usada para visualizar a pré-imagem da fibração de Hopf [150].

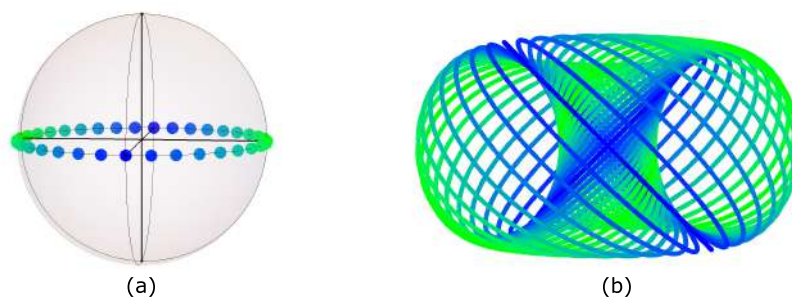


Figura 4.1: (a) 36 pontos (fibras Hopf) sobre o equador de uma esfera  $S^2$  (b) Projeção estereográfica da fibração de Hopf (*toro de Hopf*) sobre a esfera  $S^3$ .

A capacidade de preencher um espaço geométrico com subespaços definidos está relacionada ao problema do *empacotamento de esferas* já descrito na Seção (3.1.1). No caso específico da fibração  $S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ , as fibras de Hopf  $S^1$  são círculos (dimensão 1) que preenchem o espaço geométrico da hiperesfera de dimensão 3. Este *empacotamento de hiperesferas* estabelece uma relação entre as fibras de Hopf e a teoria da informação. Para reforçar este conceito, serão apresentadas na sequência algumas referências que contextualizam fibras de Hopf, polarização da luz e modulações 4D.

#### 4.1.1

##### A fibração de Hopf como uma ferramenta de Engenharia

A fibração do espaço  $S^3$  tem como objetivo a obtenção de vetores 4D com características próprias para comunicações eficientes. Ao restringir esse formalismo para esferas unitárias ( $r=1$ ), conclui-se que o espaço base  $S^2$  pode ser associado à esfera de Poincaré [156]. A restrição de norma unitária é necessária para evitar ambiguidades, uma vez que, vetores de Stokes no intervalo  $0 \leq r \leq 1$ , representam inclusive a *luz despolarizada*. Portanto, convém ressaltar que (salvo em manifestação contrária), o mapa de Hopf será utilizado exclusivamente para capturar a *direção* dos vetores de Stokes.

Além disso, com o objetivo de harmonizar a notação, os parâmetros de Stokes ( $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ ), serão associados a coordenadas esféricas na Equação (4-4), da mesma forma que na Equação (2-46):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= r \sin(2\chi) \cos(2\psi); \\ \mathbf{s}_2 &= r \sin(2\chi) \sin(2\psi); \quad \chi = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]; \quad 0 \leq \psi \leq \pi; \\ \mathbf{s}_3 &= r \cos(2\chi); \end{aligned} \quad (4-4)$$

em que  $r$  denota o raio da esfera e o par  $(\chi, \psi)$  representa, respectivamente, os ângulos de latitude e longitude na esfera unitária.

De posse dos parâmetros de Stokes ( $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ ) na forma da Equação (4-4), pode-se extrair os ângulos  $(\chi, \psi)$  utilizando as seguintes relações:

$$\chi = \frac{1}{2} \left[ \text{sgn}(\mathbf{s}_1) \arccos \left( \frac{\mathbf{s}_3}{r} \right) \right]; \quad \psi = \arctan \left( \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_1} \right); \quad (4-5)$$

em que  $\text{sgn}(s_1)$  indica o sinal do parâmetro  $s_1$ , para  $s_1 \neq 0$ .

Estabelecidas as convenções matemáticas para as diferentes representações de vetores na base  $S^2$ , pode-se agora introduzir o formalismo de Hopf no mapeamento da esfera  $S^2$  (Poincaré) para o espaço  $S^3$ . O objetivo é mapear vetores de Stokes, que representam o estado de polarização da luz para o *espaço geométrico de fase* clássico, em que residem os vetores 4D [22].

Para este propósito, a esfera  $S^3$  é definida em função de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , através da seguinte formulação:

$$S^3 = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \quad (4-6)$$

em que  $z_1$  e  $z_2$  tem a clássica forma:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 + ix_2); \\ z_2 &= (x_3 + ix_4) \end{aligned} \quad (4-7)$$

Com base na definição da Equação (4-6) e utilizando os parâmetros angulares descritos na Equação (4-3), as quantidades  $z_1$  e  $z_2$  podem ser expressas pelas seguintes equações trigonométricas:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\chi) \exp(i(\theta + \psi)); \\ z_2 &= \sin(\chi) \exp(i(\theta - \psi)) \end{aligned} \quad (4-8)$$

Ao expandir os termos complexos da Equação (4-8), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} z_1 &= [\cos(\chi) \cos(\theta + \psi), \cos(\chi) \sin(\theta + \psi)]; \\ z_2 &= [\sin(\chi) \cos(\theta - \psi), -\sin(\chi) \sin(\theta - \psi)] \end{aligned} \quad (4-9)$$

As Equações (4-7) e (4-9) conduzem ao *mapa inverso de Hopf* (MIH).

O MIH é uma formulação que permite o mapeamento entre a esfera  $S^2$  e a esfera  $S^3$ , ao mesmo tempo que preserva a métrica entre os espaços [157].

Este mapa é realizado através das seguintes equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\chi) \cos(\theta + \psi); & 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ x_2 &= \cos(\chi) \sin(\theta + \psi); & 0 \leq \psi \leq \pi; \\ x_3 &= \sin(\chi) \cos(\theta - \psi); & -\frac{\pi}{4} < \chi \leq \frac{\pi}{4} \\ x_4 &= -\sin(\chi) \sin(\theta - \psi); \end{aligned} \quad (4-10)$$

Em que  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  representam as coordenadas do vetor 4D.

Os parâmetros angulares  $(\chi, \psi)$  na Equação (4-10) são obtidos da Equação (4-5). O ângulo  $\theta$  define, para valores fixos de  $(\chi, \psi)$ , as coordenadas de um grande círculo. Por sua vez, esse grande círculo é o lugar geométrico da respectiva fibra de Hopf  $S^1$ .

Os pontos de latitude  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$  apresentam singularidades que requerem uma regra própria para  $\theta$ .

$$\theta \rightarrow \theta - \frac{\pi}{4}; \quad \text{para } [\chi = 0, \psi = \pm\pi] \quad (4-11)$$

Após estabelecer essas convenções, a função  $\text{MIH}(\chi, \psi, \theta)$ , permite identificar as coordenadas de todos os vetores 4D *coplanares* que residem em um grande círculo da esfera  $S^3$ . Portanto, esse procedimento é equivalente em amostrar os vetores 4D a partir dos círculos discretos de Hopf. É importante ressaltar, que o mapeamento depende da convenção de parametrização adotada. Ao utilizar as parametrizações da Equação (4-10), define-se um grupo de **n** pontos base na esfera de Poincaré e um grupo de **m** valores discretos do ângulo  $\theta$ . A referida parametrização permite a construção de modulações do tipo **nPolSK-mPSK** e conforme será detalhado na Seção (4.4.1) pode-se realizar, a partir deste mapeamento, operações equivalentes de rotação e escalonamento de arranjos de vetores.



Outro ponto forte dos fibrados de Hopf é que, de forma inversa ao procedimento da Equação (4-10), pode-se mapear a esfera  $S^3$  para a esfera  $S^2$ , utilizando o mesmo formalismo. De forma resumida, é possível afirmar que o mapa discreto  $S^2 \rightarrow S^3$  é um mapa de um para muitos pontos, enquanto o mapa  $S^3 \rightarrow S^2$  é um mapa de muitos pontos para um.

Para mapear  $S^3 \rightarrow S^2$  é conveniente seguir a notação utilizada por [22]. Isto significa, que de posse das coordenadas de quatérnios unitários  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  descritos na Equação (4-10), o mapa  $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$  relaciona os parâmetros de Stokes  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  por meio de uma formulação simples conhecida como *mapa de Hopf*:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \\ s_1 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2; \\ s_2 &= 2(x_1x_3 + x_2x_4); \\ s_3 &= 2(x_2x_3 - x_1x_4) \end{aligned} \tag{4-12}$$

Observa-se que a despeito de a Equação (4-12) ser uma expressão puramente matemática, ela se confunde com a própria definição dos parâmetros de Stokes representados na Equação (2-44).

Além disso, através de manipulações algébricas é possível relacionar a Equação (4-12) com a função de transferência simplificada de moduladores PMQ-MZM (Polarization Multiplexed Quadrature Mach-Zehnder) [158] descrita na Equação (1-12). Isto é particularmente interessante dado que os valores  $x_n$  naquela equação são variáveis reais. Esta característica dá um significado físico para a Equação (4-12), demonstrando sua pertinência no contexto das comunicações ópticas coerentes.

Assim, de posse das coordenadas  $x_n$  de vetores 4D (tensões do DAC) que modulam um dispositivo PMQ-MZM, pode-se utilizar o mapa de Hopf para calcular o estado de polarização do envelope da portadora óptica. Para essa finalidade, na Seção (4.5) generaliza-se o mapa de Hopf entre esferas unitárias para esferas de raio variável. Dessa forma, o mapa de Hopf permite conectar vetores definidos em  $R^4$  com o espaço  $R^3$ .

Nas seções seguintes demonstra-se algumas aplicações do formalismo já apresentado. Ao utilizar como exemplo a construção da modulação 14PolSK-8PSK, será demonstrado na Seção (4.4.1) que esta constelação reúne os símbolos da 6PolSK-8PSK e 8PolSK-8PSK no mesmo arranjo de modulação.

Uma característica particularmente interessante, que será evidenciada, é o fato de que o arranjo 6PolSK-8PSK construído desta forma é na verdade a união de dois arranjos 6PolSK-QPSK congruentes [157]. Isto significa que a concatenação da constelação 6PolSK-QPSK (vértices do politopo 24-Cell) com uma rotação rígida (rotação isoclínica) dela mesma gera a constelação 6PolSK-8PSK. Conforme demonstrado em [27, 159], o projeto de modulações de alta ordem pode ser otimizado através da rotação e translação de constelações definidas por politopos. Além disso, a abordagem matemática de [26], dá indícios de que a concatenação de politopos é uma forma viável de construir uma modulação adaptativa.

## 4.2

### Partições QAM e a representação de Cayley-Dickson para quatérnios

Quando um arranjo  $n$ PolSK- $m$ PSK forma uma constelação de norma unitária, os vetores  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  obtidos a partir da Equação (4-10) podem ser representados como dois números complexos da forma:

$$(x_1 + i x_2), (x_3 + i x_4)j \quad (4-13)$$

Esta representação, que também aparece na Equação (4-7), é conhecida como a forma de Cayley-Dickson dos quatérnios [160, 161] e através dela é possível realizar o mapeamento dos símbolos 4D em duas partições bidimensionais QAM. Este tipo de projeção é útil para avaliar o comportamento de uma constelação 4D numa transmissão PDM. No Capítulo (5), a forma de Cayley-Dickson dos quatérnios é generalizada para a projeção de constelações multinorma. Como exemplo de aplicação, representa-se na Figura (4.2), o particionamento da 14PolSK-8PSK em dois arranjos PDM-QAM.

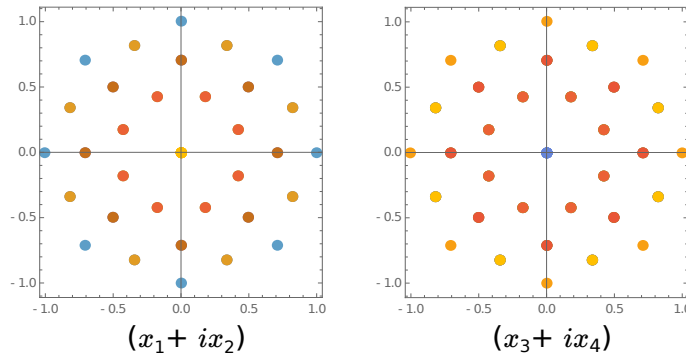


Figura 4.2: Partição QAM da constelação 14PolSK-8PSK obtida diretamente da representação de Cayley-Dickson dos quatérnios unitários.

Conforme a métrica de desempenho de constelações descrita em [15, 17], a eficiência espectral (SE) da 14PolSK-8PSK é 3,4 bit/s/Hz, a eficiência de potência (PE) é 0,4 e o valor de mérito (CFM) da constelação é 0,478.

Parte das contribuições desta tese reside na perspectiva de análise das constelações ópticas. Como exemplo, é possível demonstrar que as métricas de desempenho mostradas anteriormente podem ser vistas de uma maneira diferente se a 14PolSK-8PSK for considerada como um arranjo adaptativo de constelações disjuntas. O diagrama da Figura (5.4) ilustra algumas constelações conhecidas que estão incorporadas (embutidas) no arranjo 14PolSK-8PSK.

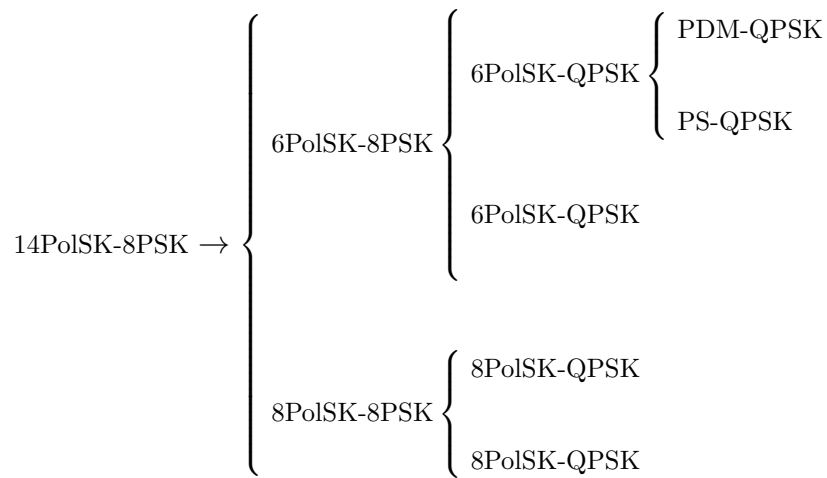


Figura 4.3: Diagrama hierárquico de constelações conhecidas embutidas no arranjo 14PolSK-8PSK, organizadas de acordo com o número de símbolos.

O diagrama em questão também ilustra as versões rotacionadas das constelações 6PolSK-QPSK e 8PolSK-QPSK.

Vista como um arranjo adaptativo, a 14PolSK-8PSK revela características importantes. Por exemplo:

- A constelação PS-QPSK embutida no arranjo 6PolSK-QPSK é considerada a modulação 4D com maior eficiência energética [25];
- A PDM-QPSK é a modulação utilizada no conhecido padrão de 100G [147];
- A 8PolSK-QPSK foi objeto de uma demonstração experimental reportada por [162];

Conforme notado por [20], a diferença entre esquemas de transmissão PolSK e PDM é definida com base na forma como as partições de polarização são transmitidas. Se transmitidas de forma alternada, tem-se um esquema PolSK, se transmitidas de forma simultânea tem-se um esquema PDM.

Portanto, conclui-se que a 14PolSK-8PSK pode ser utilizada como uma constelação adaptativa hierárquica. Esta constelação, pode ser organizada de várias formas, em modulações no tempo e no espaço. Por exemplo, o arranjo adaptativo pode incluir as seguintes modulações: PS-QPSK, PDM-QPSK, 6PolSK-QPSK, 6PolSK-8PSK, 8PolSK-QPSK, 8PolSK-8PSK e a própria 14PolSK-8PSK.

### 4.3

#### Rotulagem e particionamento de códigos nos espaços de $S^2$ e $S^3$ .

Em sequência ao fluxo de análise de um transceptor adaptativo, foi verificado que para garantir uma boa comunicação não seria suficiente dimensionar as constelações de símbolos no espaço geométrico. Isto acontece porque os símbolos extraídos de estruturas geométricas nem sempre podem ser mapeados de forma eficiente em nível de bit. Nesta seção, aborda-se técnicas de particionamento de códigos e rotulagem (*labeling*) de símbolos que permitem o uso simultâneo de diferentes métricas. O objetivo principal é demonstrar que técnicas tradicionais de rotulagem podem ser aplicadas aos métodos construtivos propostos na tese.

#### 4.3.1

##### Distância euclidiana e distância de Hamming como métricas

De acordo com [163], baixos valores da SNR em canais Gaussianos tornam inefetiva a utilização de uma única métrica para a distância entre símbolos. Após concordar com esta premissa, utiliza-se neste trabalho tanto a distância de Hamming quanto a distância euclidiana como métricas. A vantagem de uma abordagem híbrida é particularmente importante na comunicação adaptativa, pois, nesses casos existe a intenção de realizar uma comunicação livre de erros inclusive em canais com elevado nível de ruído. Além dos códigos TCM citados por [163], outra ferramenta que permite a métrica Hamming-Euclidiana são os *códigos de cobertura* [140, 144]. Um exemplo de código de cobertura é mostrado na Figura (4.4). O código  $\{000, 111\}$  é um código de cobertura perfeito pois todas as combinações binárias de 3 bits são através dele representadas. A distância de Hamming entre as palavras binárias  $\{000\}$  e  $\{111\}$  é 3, e além disso, este código tem duas partições  $a = \{000, 001, 010, 100\}$  e  $b = \{111, 011, 101, 110\}$ . A distância de Hamming entre os símbolos de cada partição é igual a 1 e a união dessas duas partições forma o conjunto do corpo finito  $\mathbb{F}_3^2$ .

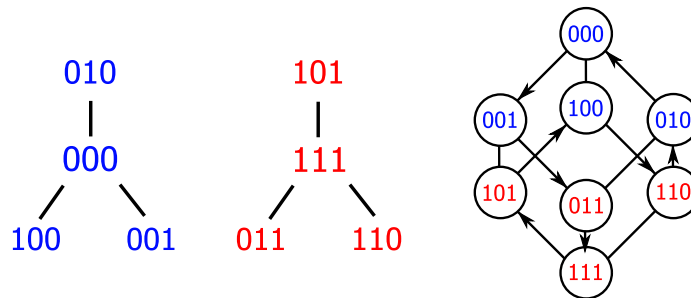


Figura 4.4: Exemplo de código de cobertura perfeito de ordem  $n = 3$ , aplicado sobre um hipercubo-3.

Ao considerar a rotulagem de constelações  $n\text{PolSK-}m\text{PSK}$  com base no código de cobertura  $\{000, 111\}$ , se as palavras código  $\{000\}$  e  $\{111\}$  forem utilizadas para rotular pontos *antipodais* (polarizações ortogonais) na esfera de Poincaré tem-se como resultado uma métrica Hamming-Euclidiana otimizada. Por exemplo, o grafo ilustrado na Figura (4.4) pode representar os vértices de um *hexaedro* (cubo). Nesse caso, a relação entre a distância euclidiana e a distância de Hamming das arestas deste *hexaedro* é mostrada na Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Relação entre distância de Hamming e distância euclidiana em um hipercubo-3 rotulado com um código de cobertura perfeito.

	Lado	Diagonal da Face	Diagonal do Cubo
Distância de Hamming	1	2	3
Distância euclidiana	$1 \cdot L$	$\sqrt{2} \cdot L$	$\sqrt{3} \cdot L$

Da Tabela (4.1) pode-se observar que, para uma distância de Hamming  $d$ , a distância euclidiana relacionada é  $\sqrt{d} \cdot L$ . Em que  $L$  é o comprimento da aresta do *hexaedro* inscrito na esfera unitária. Além disso, quando os vértices do referido *hexaedro* são usados como pontos de base de uma fibração  $8\text{PolSK-}8\text{PSK}$ , as palavras de código  $\{000\}$  e  $\{111\}$  podem ser usadas para identificar pontos antipodais na base  $S^2$ . Todo o processo pode ser feito usando um código de cobertura para os pontos de base e outro código semelhante para as fibras Hopf (ver Tabela (4.2) na próxima seção).

#### 4.3.2

##### Construção dos códigos de rotulagem utilizando apenas sequências de Bruijn

Uma constelação 4D de 64 símbolos foi construída utilizando os vértices de um *hexaedro* como base de uma fibração Hopf. Nessa constelação, que foi denominada  $8\text{PolSK-}8\text{PSK}$ , realizou-se a rotulagem binária dos 64 vértices. Para cada ponto base da fibração, associou-se um rótulo (label) gerado pelo código. Este procedimento foi levado a efeito em dois passos:

1. Percorreu-se os vértices do cubo (*hexaedro*) em um ciclo hamiltoniano. Para cada vértice, foi atribuído um rótulo com  $\log_2(8)=3$  bit originário de uma sequência de De Bruijn;
2. Percorreu-se de forma análoga as posições do ângulo  $\theta$  em cada fibra de Hopf (8 amostras num anel PSK). Para cada valor de  $\theta$ , foi atribuído um rótulo com  $\log_2(8)=3$  bit originário de uma sequência de De Bruijn;

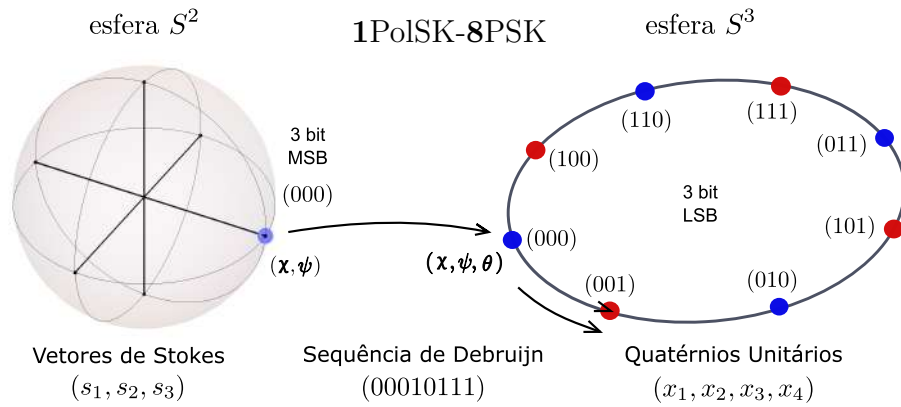


Figura 4.5: Ilustração do processo de rotulagem da fibra de Hopf de forma análoga a um anel PSK. A rotulagem de 08 símbolos utilizou um código de cobertura de ordem  $n = 3$ .

Como resultado desse processo, foi obtida uma matriz de rótulos, na qual cada vértice geométrico está agora associado a uma palavra binária de 6 bit. Os 3 bit mais significativos indexam a base da fibração e os 3 bit menos significativos indexam a posição angular dos vetores 4D em sua respectiva fibra de Hopf.

A matriz de rótulos resultante é ilustrada na Tabela (4.2), em que a distância de Hamming entre qualquer símbolo e seus vizinhos adjacentes (de mesma linha ou coluna) é 1.

Tabela 4.2: Rotulagem binária da constelação 8PolSK-8PSK usando palavras de código concatenadas a partir de códigos de cobertura.

		→ Fibras Hopf (LSB)						
Base $S^2$ (MSB) ←	000000	000001	000010	000101	000011	000111	000110	000100
	001000	001001	001010	001101	001011	001111	001110	001100
	101000	101001	101010	101101	101011	101111	101110	101100
	111000	111001	111010	111101	111011	111111	111110	111100
	011000	011001	011010	011101	011011	011111	011110	011100
	010000	010001	010010	010101	010011	010111	010110	010100
	110000	110001	110010	110101	110011	110111	110110	110100
	100000	100001	100010	100101	100011	100111	100110	100100

A matriz de rótulos construída sobre os fibrados de Hopf reduz a *penalidade* sobre a codificação Gray, em situações nas quais o número de níveis do DAC não é Base 2. A constelação mostrada na Figura (4.6) é um exemplo com esta característica. A MDCE-256-6 pode ser gerada por um DAC com 5 níveis de tensão.

Apesar do número ímpar de níveis do DAC, a MDCE-256-6 tem 256 símbolos distribuídos sobre 4 cascas esféricas e cujo mapa de Hopf tem 64 símbolos. Neste caso, basta que o número vetores em cada fibra Hopf seja Base 2, para utilizar uma matriz de rótulos.

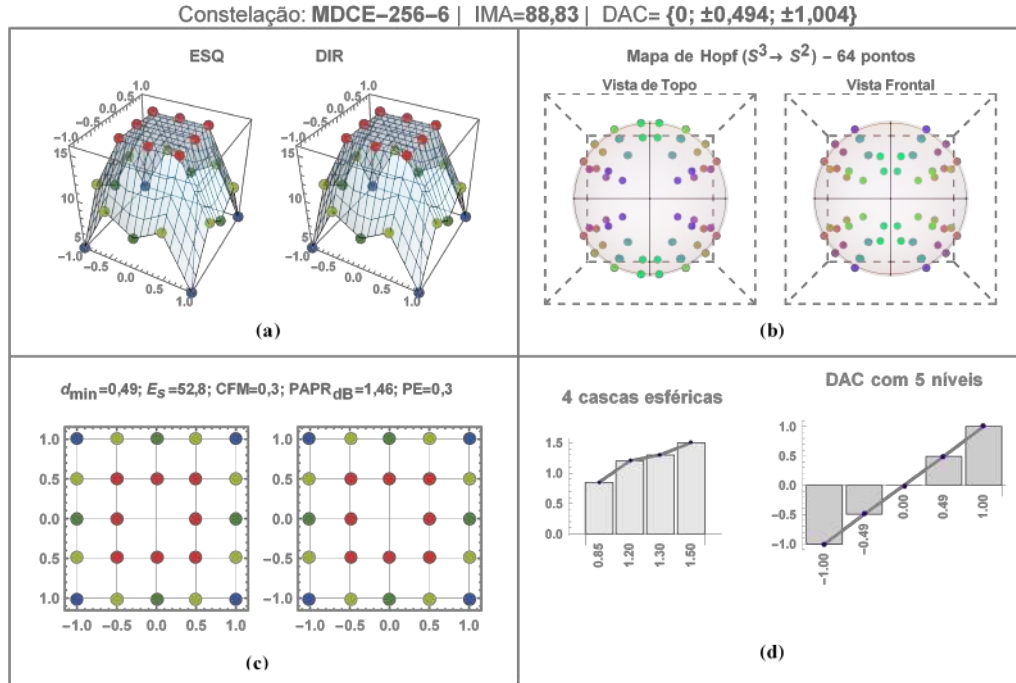


Figura 4.6: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 64 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC.

Também é importante notar que a matriz da Tabela (4.2) forma uma estrutura tórica com 64 nós. Essa estrutura, ilustrada na Figura (4.7), sugere que códigos de Debruijn tóricos podem encontrar aplicação na rotulagem de constelações nPolSK-mPSK.

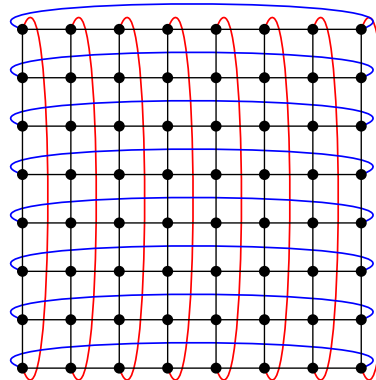


Figura 4.7: Estrutura tórica com 64 nós associados aos rótulos da Tabela (4.2).



### 4.3.3

#### Códigos em 16 dimensões a partir de estruturas 4D

Após aplicar as sequências de De Debruijn na constelação 8PolSK-8PSK. Investigou-se a viabilidade de utilizar este mesmo procedimento em constelações que não fossem Base 2. De forma positiva, foi verificado que é possível utilizar as propriedades dos fibrados de Hopf, em constelações de sinais baseadas em estruturas helicais [164, 165] em dimensão 4. Apesar de estas estruturas serem extensamente conhecidas em áreas como quasicristais, metalurgia, química e biologia, seu uso no problema do empacotamento de esferas em um canal de comunicação óptica é uma relativa novidade. Antes de demonstrar a rotulagem propriamente dita, é importante notar que o politopo icosaedro possui relações intrínsecas com estruturas geométricas em 4D.

De acordo com [164, 166], o icosaedro é a base de uma fibração Hopf sobre o politopo 600-Cell. Para evidenciar a importância do politopo 600-Cell nas comunicações ópticas, convém lembrar que as constelações PS-QPSK e PDM-QPSK podem ser representadas como subpolitopos do 600-Cell.

Ao utilizar como referência o icosaedro inscrito na esfera unitária  $S^2$ , *cada vértice do icosaedro é a projeção de uma fibra Hopf do 600-Cell*. Desse modo, em um arranjo cuja geometria é ilustrada na Figura (4.8), três fibras Hopf representadas por uma face triangular do icosaedro constituem a projeção de uma Hélice de Boerdijk-Coxeter mostrada na Figura (4.9).

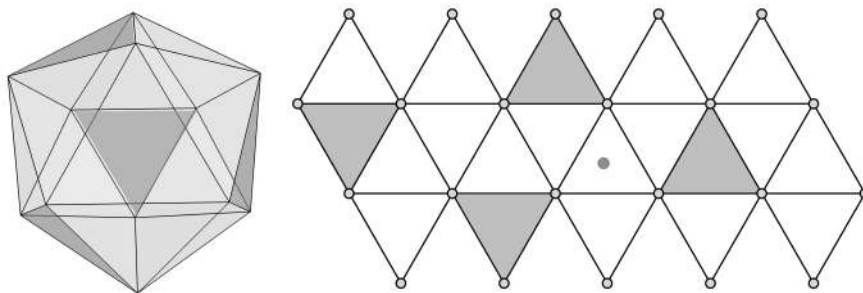


Figura 4.8: Representação do icosaedro como base de uma fibração Hopf para o 600-Cell.

Ainda de acordo com [164], quatro faces do icosaedro que não compartilham vértices representam a projeção integral do politopo 600-Cell. Isto significa dizer que o 600-cell é formado por 4 hélices de Boerdijk-Coxeter, cada hélice possui 30 vértices, somando em 120, o número de vértices desse politopo. De modo geral, este método de fibração do politopo 600-cell consiste na realização do mapa inverso de Hopf numa base icosaédrica do espaço  $S^2$  para o espaço  $S^3$ .

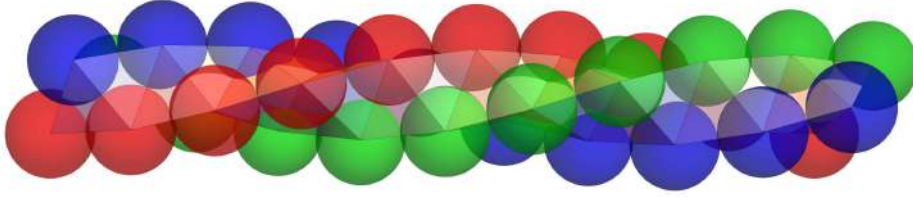


Figura 4.9: Hélice de Coxeter, também conhecida com Hélice Boerdijk-Coxeter vista como um empacotamento (cadeia) de tetraedros.

Conforme descrito em [166], os grandes círculos das fibras Hopf do 600-Cell são paralelos. Portanto, eles mantêm distância constante entre si. Além disso, os 10 vértices sobre estes grandes círculos também formam um decágono regular. Consequentemente, essas propriedades fazem da fibração do 600-Cell uma malha de pontos espaçados em distância regular.

A estrutura assim descrita, forma uma rede de vértices muito parecida com o reticulado  $A_2$ . Esta estrutura é ilustrada na Figura (4.10).

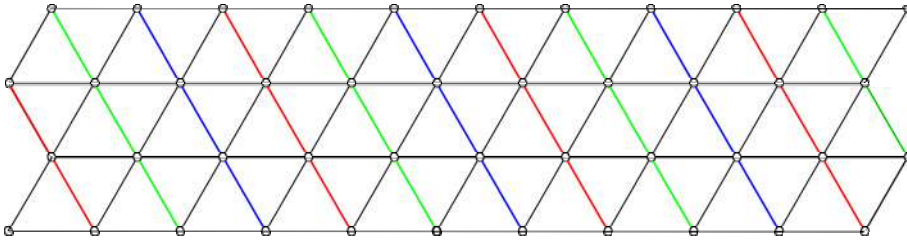


Figura 4.10: Representação do reticulado formado pela fibração Hopf do 600-Cell com hélices Boerdijk-Coxeter.

Em outras palavras, a Figura (4.10) é uma representação no plano da estrutura de vértices em hélice mostrada na Figura (4.9). Conforme a notação desta tese, a modulação gerada pela fibração do icosaedro sobre o 600-Cell é a 12PolSK-10PSK. A projeção da 12PolSK-10PSK resulta nos gráficos mostrados nas Figuras (4.11) e (4.12).

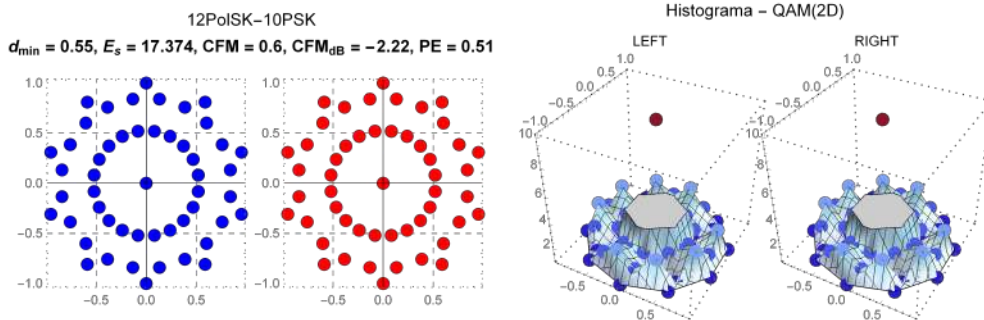


Figura 4.11: (a) Partições e (b) histogramas QAM da 12PolSK-10PSK.

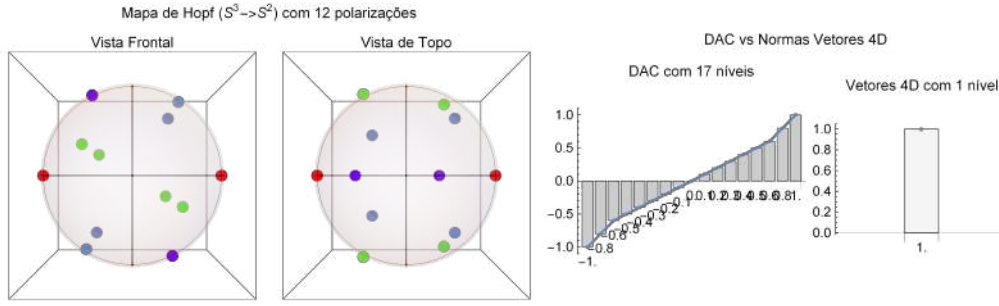


Figura 4.12: (a) Mapa direto de Hopf da 12PolSK-10PSK (b) Representação gráfica dos 17 Níveis de tensão do DAC na interface elétrica (c) Norma dos vetores 4D.

Os símbolos da constelação 12PolSK-10PSK são na verdade o próprio politopo 600-Cell visto de outra perspectiva. Infelizmente, apesar de toda a riqueza geométrica de sua estrutura, esta constelação não apresentou um desempenho ótimo para comunicações. Em termos de métricas estáticas, a SE é 3,453 bit/s/Hz, a CFM é 0,597 e a PE é 0,515. Esta constatação nos adverte para um fato já observado por [27] e por Coxeter [167], de que um bom empacotamento de esferas não produz necessariamente uma boa constelação.

Embora as métricas tradicionais não sejam muito favoráveis para a 12PolSK-10PSK, a exploração das propriedades combinatórias dos arranjos em hélice [167, 168, 169, 170, 171] podem modificar completamente a forma como esta constelação é avaliada. Por exemplo, é interessante a possibilidade de transmitir partições da constelação 12PolSK-10PSK em diferentes canais de comunicação. Isto é possível devido ao fato de que a hélice mostrada na Figura (4.9) pode ser construída em tempo de execução. Esta construção em tempo de execução é realizada através de sequências combinatórias [170].

Em um resultado preliminar foi possível gerar (por simulação) uma constelação em hélice utilizando uma sequência De Debruijn sobre tetraedros. A geração de uma constelação de tetraedros em cadeia simples foi reproduzida. Neste arranjo, cada tetraedro gerado é resultado da reflexão do tetraedro anterior e dessa forma, a construção da cadeia pode ser realizada através da multiplicação de matrizes.

Ao utilizar como ponto de partida, o tetraedro cujos vértices (coordenadas no  $R^3$ ) são os vetores linha da matriz  $T_1$  representada a seguir:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-14)$$

Considere as matrizes de rotação/translação M1, M2, M3 e M4 da forma:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & M_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-15)$$

Conforme ao procedimento matemático reportado por [170], a geração da constelação obedeceu a uma sequência em que cada matriz teve a sua posição definida em um arranjo lógico.

Ao realizar a multiplicação de T1 pelas matrizes  $\{M_3, M_2, M_1, M_4, M_3, M_2, M_1, M_4\}$  na sequência:

$$M_n \times \dots (M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times T1))) \quad (4-16)$$

produziu-se um arranjo de vetores em hélice e a ordem em que as multiplicações foram realizadas obedeceu a uma sequência estrutural  $\{3, 2, 1, 4\}$ .

A sequência estrutural, por sua vez, foi descrita por uma sequência de Bruijn de tamanho 3 em um alfabeto de tamanho 4 (número de matrizes).

$$\{3, 2, 1\}, \{2, 1, 4\}, \{4, 3, 2\} \dots \quad (4-17)$$

Estas sequências foram previamente definidas com base nas simetrias do tetraedro e as matrizes da Equação (4-15) carregam estas propriedades.

Conforme já mencionado na Seção (3.3), a operação descrita na Equação (4-17) pode ser realizada em hardware por registradores de deslocamento. Visto de outra forma, a capacidade de gerar quatro vértices de diferentes tetraedros, simultaneamente, é relevante em transmissões (Space Division Multiplexing (SDM)).

Nestes casos, 04 vetores 4D podem ser transmitidos simultaneamente, cada vetor em um subcanal do sistema. Os vetores (símbolos 4D) de cada subcanal são mapeados em paralelo sobre 4 hélices de Coxeter. Dessa forma, ainda que os vetores sejam transmitidos em canais diferentes, eles guardam entre si uma relação geométrica conhecida e estruturada numa modulação 16D.

## 4.4

### Métodos teóricos propostos

#### 4.4.1

#### Método proposto 1 - Construção de constelações nPolSK-mPSK de norma constante usando fibração Hopf discreta

Nesta seção apresenta-se um método construtivo para o projeto de modulações ópticas 4D utilizando a teoria dos fibrados de Hopf. As constelações resultantes possuem norma constante tal qual a 6PolSK-QPSK. Por este motivo, apresenta-se um exemplo baseado naquela modulação. Se a Equação (4-12) for utilizada para realizar o mapa de Hopf dos 24 símbolos da modulação 6PolSK-QPSK, será observado que os 24 vetores 4D (quatérnios) projetam um *octaedro* na esfera de Poincaré. Na esfera de Poincaré, os seis vértices desse *octaedro* (descritos na Equação (4-18)), são vetores de Stokes que representam os estados de polarização do envelope da portadora óptica.

$$s \in S^2 = [ (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (1, 0, 0), (-1, 0, 0) ] \quad (4-18)$$

Conforme ilustra a Figura (4.13 a), os vetores da Equação (4-18) podem ser representados como pontos na esfera de Poincaré. Com base no método de fibração Hopf apresentado, foi possível construir uma modulação adaptativa através da expansão da constelação 6PolSK-QPSK. A expansão foi realizada concatenando-se novos vértices ao octaedro ilustrado. Para esta finalidade, utilizou-se os vértices do politopo convexo denominado *Hexaedro Tetrakis* [172]. O Hexaedro Tetrakis, ilustrado na Figura (4.13 c), tem 14 vértices e 24 faces, suas 36 arestas formam 06 grandes círculos na esfera  $S^2$ . A forma geométrica padrão desse politopo pode ser representada como a união de dois subpolitopos disjuntos, um *octaedro* (Figura (4.13 a)) e um *hexaedro* (Figura (4.13 b)).

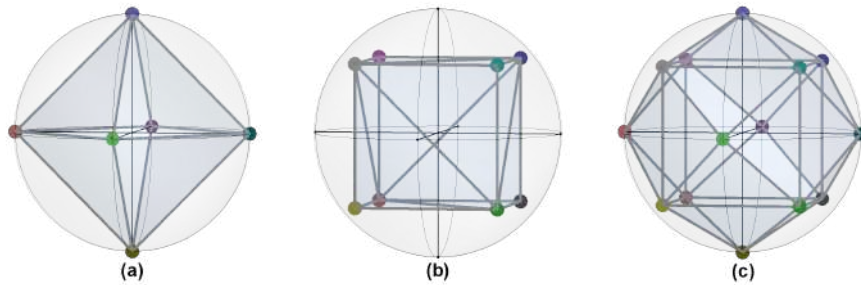


Figura 4.13: (a) Símbolos 6PolSK formam um *octaedro* na esfera de Poincaré (b) vértices de um Hexaedro podem ser acumulados, formando os (c) símbolos 14PolSK de um *Hexaedro Tetrakis* esfera de Poincaré.

Em outras palavras, concatenando-se 08 vértices de um Hexaedro regular aos 06 vértices resultantes da projeção da 6PolSK-QPSK gerou-se a estrutura geométrica do Hexaedro Tetrakis. A realização do mapa inverso de Hopf sobre os 14 vértices do Hexaedro Tetrakis projetou o arranjo da modulação 14PolSK-**m**PSK, em que **m** denota o número de amostras do ângulo  $\theta$  na Equação (4-10). Ao utilizar as equações (4-4, 4-5 e 4-10), fibrações Hopf discretas foram amostradas em 08 valores igualmente discretos do ângulo  $\theta$ . Por conta dessas características, este método foi denominado *fibração de Hopf amostrada* [209, 210]. O mapa de Hopf e a projeção estereográfica do arranjo 14PolSK-8PSK podem ser visualizados na Figura (4.14).

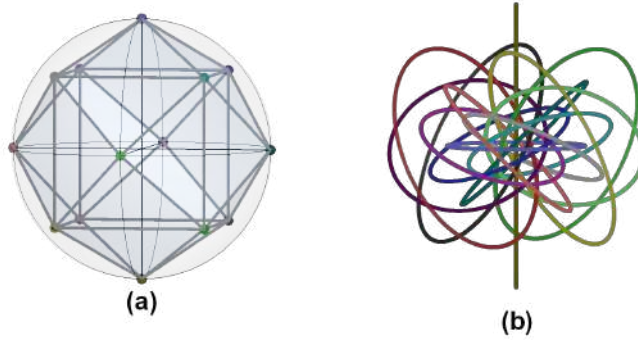


Figura 4.14: (a) Constelação 14PolSK-8PSK na esfera de Poincaré e (b) Projeção estereográfica da Fibração Hopf discreta para 14 pontos (vetores de Stokes) com 8 amostras cada.

A Equação (4-10) foi utilizada para a obtenção de amostras sobre dois conjuntos de  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\theta_{amostra_1} &= \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\} \\ \theta_{amostra_2} &= \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}\end{aligned}\tag{4-19}$$

Cada conjunto  $\theta_{amostra}$  produziu arranjos QPSK (4PSK) congruentes [157], a união desses conjuntos de amostras produziu arranjos 8PSK. O processo de concatenação (acumulação) de vértices na base dos fibrados de Hopf, demonstrou que a 14PolSK-8PSK é a união da 6PolSK-8PSK e da 8PolSK-8PSK. Seus 112 símbolos estão dispostos sobre 14 fibras de Hopf discretas e em cada fibra residem 8 símbolos 4D, numa *distribuição angular uniforme* (PSK). Se de outra forma, observar-se os subconjuntos obtidos a partir das amostras da Equação (4-19), ficará evidente que a 14PolSK-8PSK é a união de dois conjuntos 14PolSK-QPSK. As distâncias entre os grandes círculos mostrados na Figura (4.14 b) são definidas pelas distâncias entre os pontos de base mostrados na Figura (4.13 a).



Conforme antecipado na Seção (4.1.1), se apenas os símbolos 6PolSK-8PSK forem considerados e selecionar-se alternativamente os vetores obtidos do conjunto  $\theta_{amostra_1}$  e do conjunto  $\theta_{amostra_2}$ , ter-se-á como resultado dois arranjos 6PolSK-QPSK congruentes, rotacionados do ângulo  $\pi/4$ . Este ângulo de deslocamento entre os arranjos de amostras é equivalente ao ângulo de rotação da matriz da Equação (4-20), utilizada em [27] e [173].

Conclui-se que, com os parâmetros utilizados, o ato de rotacionar o fibrado de Hopf (deslocar o ângulo  $\theta$ ) equivale a uma *rotação isoclínica* da constelação 4D.

Do ponto de vista da eletrônica envolvida, as operações de rotação e escala têm consequências imediatas para especificação do DAC. No caso específico da 6PolSK-QPSK, a constelação definida pela forma canônica da 24-Cell precisa de 05 níveis de tensão para ser gerada, enquanto a versão rotacionada precisa de apenas 03 níveis. Uma comparação entre os dois conjuntos de tensão resultantes da ação da matriz  $M$  é representada a seguir:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}; M = \mathbb{I}_2 \otimes R_{2x2} \quad (4-20)$$

$$\text{Níveis de voltagem} = \begin{cases} \underbrace{\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}}_{\text{forma canônica}} \\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\{-1, 0, 1\}}_{\text{forma rotacionada}} \end{cases}$$

A constatação de que a Equação (4-20) é resultado do produto de Kronecker entre a matriz de identidade  $\mathbb{I}_2$  e a matriz de rotação (com traço nulo) denotada por  $R_{(2x2)}$ , explica o fato de  $M$  executar uma rotação *isoclínica* em torno da origem. A correspondência entre a rotação realizada por  $M$  e o particionamento angular da fibração Hopf confirma que a rotação de  $M$  incide sobre os grandes círculos nos quais residem as fibras Hopf ( $S^1$ ). Este resultado também indica que a parametrização utilizada para os fibrados de Hopf, pode-se estender para uma ampla gama de símbolos **n**PolSK-**m**PSK obtidos com o método construtivo apresentado.

#### 4.4.2

##### Método proposto 2 - Construção de constelações $(n_1\text{PolSK-}m_1\text{PSK}) + (n_2\text{PolSK-}m_2\text{PSK})$ usando fibração Hopf discreta fatorada

As características da constelação 14PolSK-8PSK construída na Seção (4.4.1) são relevantes por conta de sua granularidade. Contudo, o número de símbolos da 14PolSK-8PSK não é Base 2 e isto pode representar dificuldades de implementação em um sistema real. Nesta seção apresenta-se uma forma de construir constelações Base 2 realizando diferentes números de amostras sobre os grandes círculos originados pelos fibrados de Hopf. Para construir uma constelação de 128 símbolos procurou-se uma soma de fatores  $n_1$ ,  $m_1$ ,  $n_2$  e  $m_2$ . Em que:  $(n_1 \times m_1) + (n_2 \times m_2) = 128$ , na forma da Equação (4-21):

$$(n_1\text{PolSK-}m_1\text{PSK}) + (n_2\text{PolSK-}m_2\text{PSK}) \quad (4-21)$$

Ao utilizar a mesma base Hexaedro Tetrakis, o número de vértices desse politopo impôs a condição que  $n_1 + n_2 = 14$ , logo uma solução imediata foi  $n_1 = 12$ ,  $n_2 = 2$ ,  $m_1 = 8$  e  $m_2 = 16$ , de tal forma que:

$$(12 \times 8) + (2 \times 16) = 128 \quad (4-22)$$

Em resumo, 12 vértices do Hexaedro Tetrakis foram projetados no espaço 4D com 08 amostras angulares e os 02 vértices restantes foram projetados com 16 amostras angulares. A constelação resultante tem agora 128 símbolos, *mantendo a propriedade de norma unitária*. Na Figura (4.15) é mostrada a representação de Cayley-Dickson dos quatérnios unitários desta constelação.

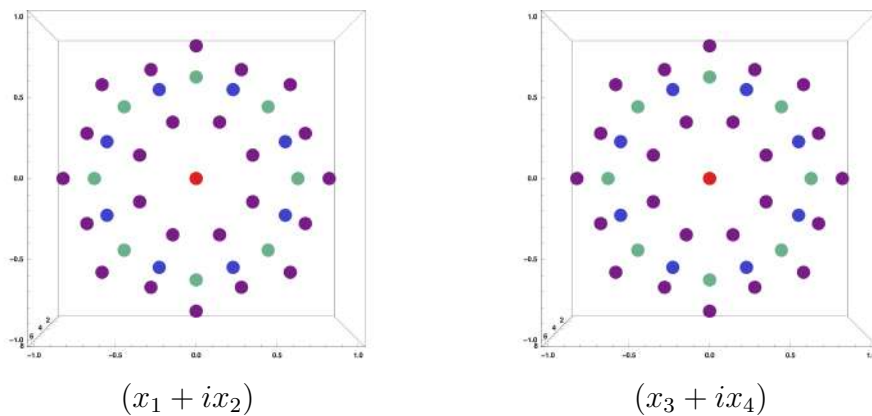


Figura 4.15: Partição QAM do arranjo  $(12\text{PolSK-}8\text{PSK})+(2\text{PolSK-}16\text{PSK})$  obtida da representação de Cayley-Dickson dos quatérnios unitários.

É importante notar que: o processo de fatoração demonstrado, pode ser realizado para obter constelações Base 2 com diferentes números de símbolos.



Por conta desse fato, observa-se que a projeção de Cayley-Dickson da constelação obtida pelo método de fatoração (ver Figura(4.15)) se confunde com a projeção da constelação obtida pela fibração direta (ver Figura (4.2)). Possíveis ambiguidades na representação QAM são resultado da superposição de símbolos. Esta superposição pode ser observada mesmo na projeção de apenas três vetores. Consideremos, por exemplo, os vetores 4D  $\{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ . Após a partição desses vetores, a projeção QAM referente às coordenadas  $(x_1 + ix_2)$  repete 3 vezes o símbolo  $(0, 0)$  enquanto a projeção referente às coordenadas  $(x_3 + ix_4)$  mapeia para 3 diferentes posições que são  $(1, 1), (0, 1)$  e  $(1, 0)$ . Embora esta ambiguidade seja apenas uma questão de representação, buscou-se uma forma de removê-la utilizando histogramas para contagem da ocorrência dos símbolos QAM.

Dois exemplos de histogramas utilizados são ilustrados nas Figuras (4.16) e (4.17). O histograma permite o cálculo e a visualização das características de *shaping* das constelações. Conforme será observado na Seção (4.6), estas características são similares aquelas obtidas tanto a partir do *probabilistic shaping* [174] quanto do *geometric shaping* [175].

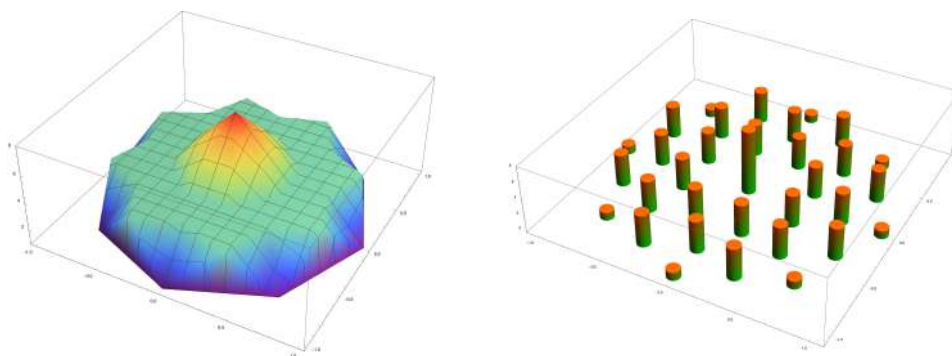


Figura 4.16: Histogramas da constelação 14PolSK-8PSK obtidos diretamente das partições QAM dos 112 quatérnios unitários.

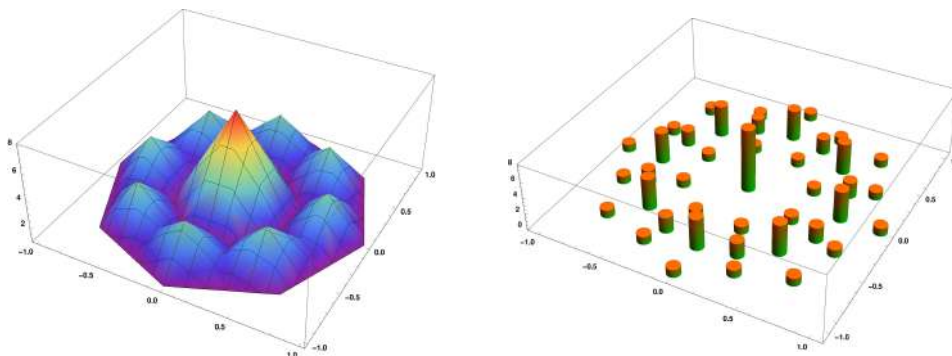


Figura 4.17: Histogramas da constelação 12PolSK-8PSK+2PolSK-16PSK obtidos diretamente das partições QAM dos 128 quatérnios unitários.

#### 4.4.2.1

##### Constelações de norma única *versus* constelações multinorma

Após os desenvolvimentos desta seção, os trabalhos da tese se voltaram para o fato de que, tanto a constelação 14PolSK-8PSK quanto a sua versão Base 2 com 128 símbolos, são modulações de norma constante. Embora seja comum a expectativa de que a característica de norma constante reduza os efeitos não lineares, cálculos preliminares de IM sobre canais Gaussianos demonstraram que algumas constelações multinorma apresentam melhor capacidade de transmissão. Este resultado é explicado pelo fato de que ao manter a amplitude constante confina-se o espaço geométrico da constelação a uma única casca esférica. Em geometria, isto equivale ao problema matemático denominado "cobertura de esferas".

Quando as constelações são pequenas e a distância entre pontos (símbolos) é grande, o critério da amplitude constante é válido. Contudo, na medida em que o número de símbolos aumenta, o espaço da casca esférica única se torna uma restrição prejudicial. A distância euclidiana reduz a um nível crítico, de forma que é necessário recorrer ao "empacotamento de esferas".

Compreender a transição entre a cobertura e o empacotamento de esferas equivale admitir que existe uma relação de compromisso entre o desempenho de constelações de norma simples e constelações multinorma. Por esse motivo, pareceu importante investigar a possibilidade de gerar constelações multinorma utilizando o método dos fibrados de Hopf. Uma solução imediata consistiu em utilizar o mesmo processo de fatoração descrito na Equação (4-21) para realizar o mapa inverso de Hopf sobre grandes círculos de diferentes normas. Outra solução que se mostrou mais eficiente é apresentada na Seção (4.4.3).

O método em questão utilizou o *mapa inverso de Hopf* para determinar as coordenadas de um vetor inicial que foi utilizado como base para um arranjo de coordenadas. O objetivo do método é transferir a simetria da base da fibração definida em  $S^2$  para um conjunto de vetores localizados sobre a esfera  $S^3$ .

A realização de um *arranjo combinatório* de coordenadas ao invés de *permutação* de coordenadas, gerou vetores 4D dispostos em cascas esféricas do espaço  $R^4$ . O método em questão foi utilizado para a geração de constelações multinível no espaço 4D.

Neste contexto, o *mapa direto de Hopf* precisou ser generalizado para correlacionar vetores definidos em  $R^4$  com vetores de referência definidos em  $S^2$ .

#### 4.4.3

##### Método proposto 3 - O mapa inverso de Hopf e o vetor inicial de um arranjo de coordenadas

Quando a base dos fibrados de Hopf é composta por um grupo de pontos definidos por vetores de Stokes *simétricos*, os parâmetros de Stokes ( $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ ) associados aos símbolos antipodais (ver Seção 2.2.2), repetem vários valores de suas coordenadas [207]. O método aqui proposto explora esta característica, baseando-se na premissa que a fibração Hopf preserva a métrica entre os espaços. Espera-se como resultado, que a simetria na esfera  $S^2$  seja transferida para a esfera  $S^3$ . Em termos numéricos, a expectativa ao utilizar o método é que os vetores 4D exibam várias coordenadas cujos valores também se repitam. Visto de outra forma, o fato de o mapa inverso de Hopf estabelecer uma relação entre o domínio óptico (vetores de Stokes 3D) e os sinais elétricos (4D), significa que a transferência da simetria entre  $S^2$  e  $S^3$  reduz a cardinalidade dos valores de tensão do DAC.

As características descritas formam a base para a geração de constelações 4D multinorma, utilizando DACs de baixa resolução. Para ilustrar a forma como o método do vetor inicial funciona, utiliza-se como exemplo a fibração do hexaedro cujos 08 vértices (estados de polarização) estão inscritos na esfera de Poincaré. Os vetores 4D, mapeados numa estrutura simétrica, definiram as coordenadas de um vetor inicial. Esse vetor, foi em seguida utilizado em um arranjo combinatório de 04 coordenadas. Os vértices do hexaedro base e os vetores correspondentes ao mapa inverso de Hopf são mostrados na Tabela (4.3). Conforme pode ser observado, o mapa inverso de Hopf foi, neste caso, gerado com uma única coordenada angular  $\theta$  (ver Equação (4-10)). Assim, o mapa em questão estabelece uma correspondência 1:1 entre os vértices do hexaedro em 3D e os vetores 4D.

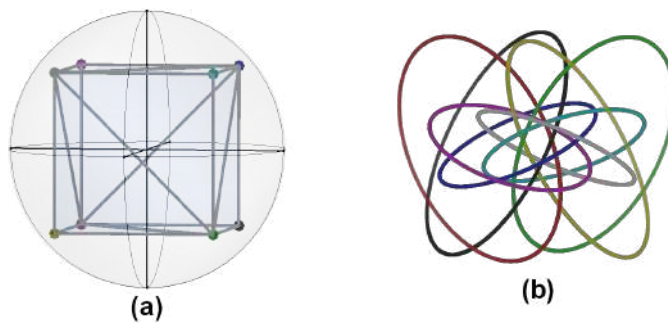


Figura 4.18: (a) Pontos definidos por vértices do *hexaedro* na esfera de Poincaré (b) Projeção stereográfica dos quatérnios unitários para  $\theta = \frac{\pi}{8}$ .

Tabela 4.3: Fibrção do hexaedro utilizando única amostra angular ( $\theta = \frac{\pi}{8}$ ).

Vetores de Stokes (pontos base)	Quatérnios Unitários (fibrados)
( 0.577, 0.577, 0.577)	(0.628, 0.628, 0.460, 0 )
(-0.577, 0.577, 0.577)	(0.888, 0 , -0.325,-0.325)
(-0.577, -0.577, 0.577)	(0.628, 0.628, -0.460, 0 )
( 0.577, -0.577, 0.577)	(0.888, 0 , 0.325, 0.325)
( 0.577, 0.577, -0.577)	(0.325, 0.325, 0.888, 0 )
(-0.577, 0.577, -0.577)	(0.460, 0 , -0.628,-0.628)
(-0.577, -0.577, -0.577)	(0.325, 0.325, -0.888, 0 )
( 0.577, -0.577, -0.577)	(0.460, 0 , 0.628, 0.628)

Conforme observa-se na Tabela (4.3), os vetores que definem os vértices do hexaedro foram escolhidos de forma que suas coordenadas apresentassem apenas dois valores distintos (-0,577 e 0,577). Quando, de forma análoga, tomou-se as coordenadas dos quatérnios unitários do lado direito da tabela, observou-se que todos os vetores eram definidos por coordenadas simétricas com apenas 04 valores absolutos distintos. Após isolar os valores absolutos únicos, obteve-se como resultado um vetor de coordenadas simétricas na forma:

$$(\pm 0.888, \pm 0.628, \pm 0.460, \pm 0.325) \quad (4-23)$$

O vetor em questão foi o ponto de partida do método proposto nesta seção. As coordenadas desse vetor definiram (*a priori*) os valores de tensão necessários para gerar a constelação 4D. Esses valores de tensão, por sua vez, definiram o quantizador do DAC ilustrado graficamente na Figura (4.19).

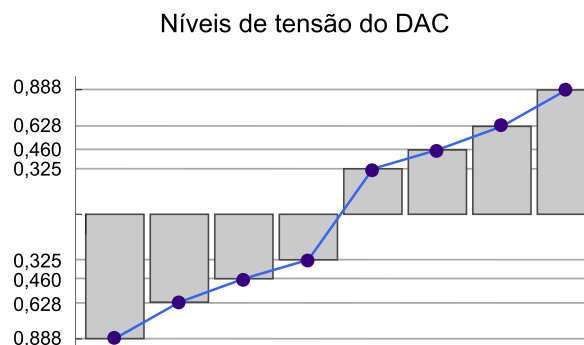


Figura 4.19: Quantizador do DAC obtido a partir do vetor inicial.

O objetivo a partir desse passo foi utilizar o vetor de 08 coordenadas da Equação (4-23) para obter vetores 4D através de *arranjos* de combinatória.

Um arranjo com repetição de  $n$  coordenadas dispostas  $p$  a  $p$  foi formalmente descrito através da expressão:

$$n^p \quad (4-24)$$

Com esta formulação, as coordenadas do vetor inicial ( $n=8$ ) foram arranjadas em quadruplas ( $p=4$ ). Para um ângulo  $\theta=\frac{\pi}{8}$  (ver Equação (4-10)), Este processo resultou em 4096 vetores que estavam situados em 70 cascas esféricas concêntricas no espaço 4D. A ilustração da distribuição das normas das cascas esféricas é mostrada na Figura (4.20). Para valores de  $\theta$  múltiplos de  $\frac{\pi}{8}$ , a distribuição dos valores das normas concêntricas, mostrada na Figura (4.20), teve forte correlação com a inversa da Função de Distribuição Acumulada (FDA) de uma Riceana com  $s=1$  e  $\sigma=0,33$ . Para fazer esta comparação, a inversa da FDA da Riceana foi discretizada em amostras iguais ao número de normas. De forma equivalente, foi possível correlacionar a curva de distribuição das normas com a inversa da FDA de uma distribuição normal com  $\mu=1,05$  e  $\sigma=0,33$ .

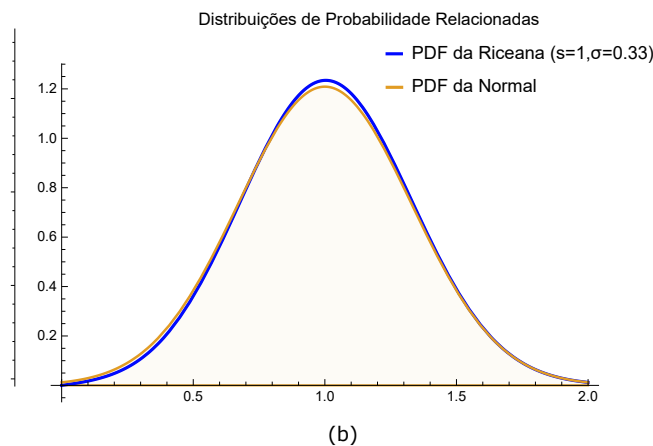
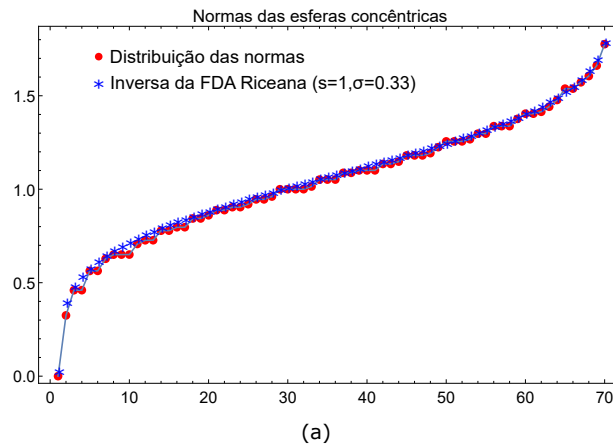


Figura 4.20: Distribuição das normas (raios das esferas concêntricas) para o arranjo obtido a partir do vetor inicial com o Hexaedro como base. A distribuição das normas descreve uma curva que tem correlação com a inversa da FDA de uma distribuição Riceana com parâmetros  $s=1$  e  $\sigma=0,33$ .

Além disso, as partições QAM dos vetores 4D resultantes projetaram círculos concêntricos típicos de distribuições multidimensionais multi-esféricas [176]. Na verdade, a projeção em 3D das 20 primeiras cascas esféricas permitiu a seguinte visualização:

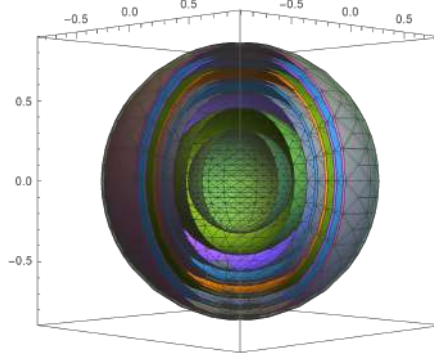


Figura 4.21: Projeção no  $R^3$  de cascas esféricas concêntricas cujos raios são equivalentes a distribuição das normas dos vetores 4D obtido a partir do arranjo vetor inicial (hexaedro como base).

Ao utilizar critérios específicos para a mínima distância euclidiana entre vetores, as combinações/conjuntos de cascas esféricas permitiram agrupar boas constelações. As cascas esféricas se originaram de produtos Cartesianos, logo elas continham, em sua maioria, um número par de vetores. Esse aspecto, facilitou a construção de constelações Base 2. No caso das 20 cascas esféricas ilustradas na Figura (4.21), a quantidade de vetores 4D em cada casca esférica foi a seguinte:

$$\{1, 8, 24, 8, 32, 48, 8, 16, 96, 24, 48, 64, 96, 96, 48, 96, 32, 64, 192, 64, \dots\} \quad (4-25)$$

O ajuste no ângulo inicial da fibração (denotado por  $\theta$ ), resultou em diferentes configurações na distribuição de vetores por casca esférica. Desse modo, a mudança no ângulo  $\theta$  pode ser utilizada para estabelecer uma correlação entre a distribuição de normas concêntricas e algumas FDA. É importante ressaltar que, o arranjo de cascas esféricas concêntricas, é uma forma determinística para a construção de modulações multinível. Nesse contexto, a casca esférica funciona como um cluster ou uma classe de vetores. É importante também notar que o mapeamento mostrado na Tabela (4.3) permitiu a construção direta de constelações PolSK simples [53]. Finalmente, é destacado que a correta determinação do ângulo  $\theta$  é de extrema importância para o sucesso dos procedimentos citados nesta seção. Na maioria dos casos observados neste trabalho, este ângulo era um múltiplo do número de fibras Hopf. A forma rigorosa de obter este ângulo está relacionada com a teoria de grupos e simetrias do politopo base.

Como resultado da aplicação desse método, diversas constelações de alto desempenho foram construídas através do agrupamento de 2 até 35 cascas esféricas. A métrica de desempenho utilizada foi a IM Seção (3.2.1). A Figura (4.22) ilustra as partições QAM e o mapa direto de Hopf de uma modulação de 64 símbolos obtida com este método. Trata-se de um arranjo simples que apresentou desempenho superior a PDM-SP-QAM.

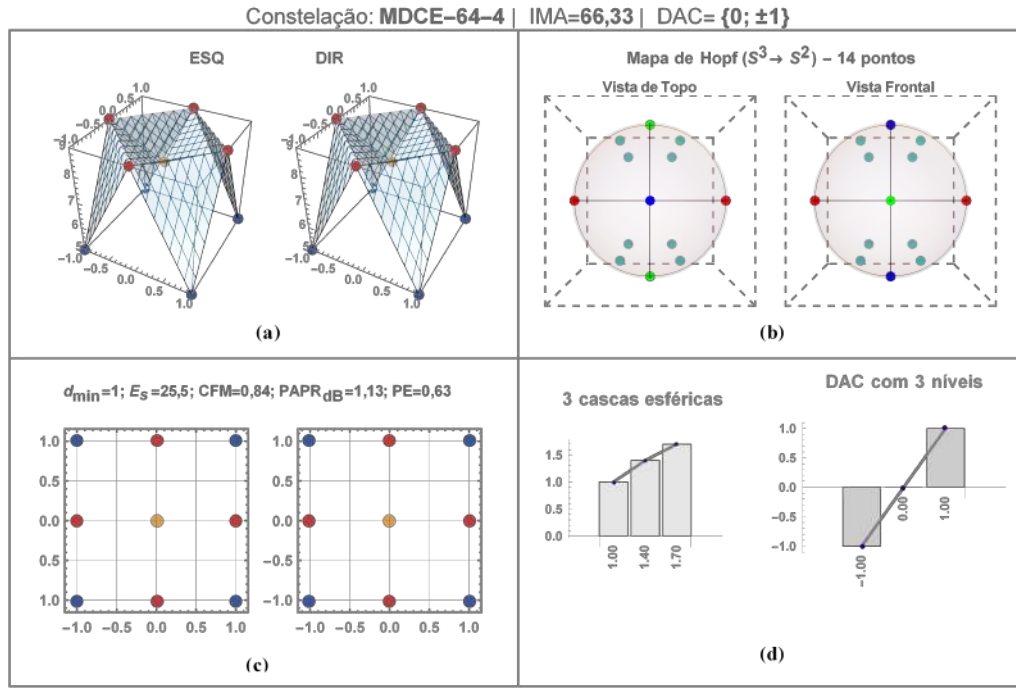


Figura 4.22: (a) Partições QAM. (b) Histogramas das partições QAM.

Em [177], são citadas duas constelações que possuem a mesma projeção da constelação ilustrada na Figura (4.22). Entretanto, as duas constelações citadas tem números de símbolos diferentes de 64. A observação de que diferentes constelações 4D projetam o mesmo mapa de Hopf será utilizada na Seção (4.5) na proposição de um método otimizado para geração de constelações multinível. O objetivo da otimização é obter ganho de desempenho mantendo a eficiência energética.



#### 4.5

##### O método do mapeamento discreto de cascas esféricas

Os estudos conduzidos nesta tese resultaram na consolidação de um método numérico para construção otimizada de constelações ópticas densas [211]. A base matemática do método apresentado nesta seção é descrita em [26, 151]. As semelhanças com o método de corte e projeção podem ser encontradas em [178]. O método em si é muito simples e pode ser implementado com algoritmos numéricos. Por exemplo, considere o poliedro regular *dodecaedro pentakis*, representado na Figura (4.23 a) com seus 32 vértices inscritos na esfera  $S^2$ :

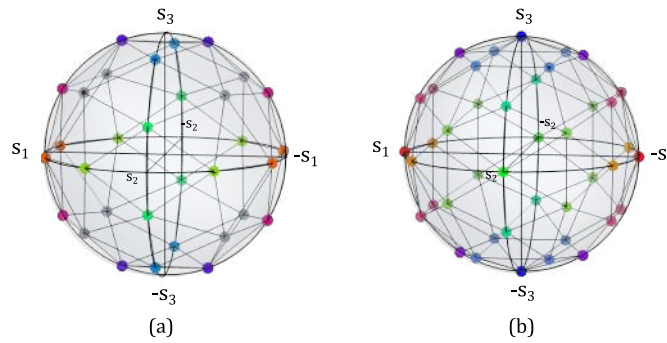


Figura 4.23: Politopos geodésicos: (a) *dodecaedro pentakis* e (b) *icosidodecaedro pentakis* com vértices inscritos na esfera  $S^2$ .

As coordenadas  $(s_1, s_2, s_3)$  do *dodecaedro pentakis* são uniformemente distribuídas sobre a esfera  $S^2$  (imersa no  $R^3$ ). Por conta dessa característica, ao realizar o mapa inverso de Hopf  $S^2 \rightarrow S^3$  de seus vértices, obtém-se um conjunto de vetores 4D de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , que reside na esfera  $S^3$  (imersa no  $R^4$ ) com simetria proporcional [157].

Inversamente, tomando-se um conjunto aleatório de vetores 4D cujo mapa direto de Hopf projeta sobre os vértices do *dodecaedro pentakis*, é razoável esperar que esse conjunto de vetores 4D compartilhe métricas comuns com a grade definida pelos vértices desse *poliedro de referência* [179]. A definição de esferas concêntricas de raio  $r$  no  $R^4$ , permite o mapeamento desse grupo de esferas sobre  $R^3$ , na forma:

$$S_r^3 \rightarrow S_{r/2}^2 \quad (4-26)$$

O resultado dessa generalização permite a construção de constelações multinível de grande eficiência. Um poliedro de referência foi definido sobre a esfera de Poincaré. Os vetores de Stokes desse poliedro (com norma unitária) foram então correlacionados com pontos no  $R^3$  por meio da similaridade do cosseno. Com esse recurso, vetores com diferentes normas (magnitudes) foram classificados, tomando como base apenas a similaridade de suas direções.



Uma característica relevante quando utiliza-se especificamente o *dodecaedro pentakis* como poliedro de referência é o fato de que o mapa de Hopf das constelações resultantes mantém com facilidade a proporção de 1:4 em relação ao tamanho da constelação. Esta proporção entre os símbolos 4D (espaço de amplitude-fase) e os vetores de Stokes (polarização), resulta do efeito de superposição descrito na Seção (1.1.4). Observou-se ainda que esta característica se repetiu quando icosaedros geodésicos e suas subdivisões foram utilizados. O *icosidodecaedro pentakis*, mostrado na Figura (4.23 b) é outro exemplo de icosaedro geodésico.

#### 4.5.1

##### Descrição do mapeamento discreto de cascas esféricas

O método que foi denominado mapeamento discreto de cascas esféricas (MDCE) é um processo geométrico de alto desempenho que se destina a ser realizado com baixo esforço computacional. Começa com a definição de uma constelação PAM que será utilizada para gerar um conjunto de vetores no espaço de duas dimensões formando uma QAM. Ao realizar de forma subsequente o produto Cartesiano da QAM, obtém-se um conjunto de vetores que reside em um hipercubo 4D. O quantizador DAC que gera os níveis PAM pode ser uniforme ou não uniforme. No entanto, usando resultados de experimentos anteriores, sabe-se que o quantizador não uniforme definido por uma função de compactação *sigmoidal* [180, 181, 182] permite controlar a geração de anéis concêntricos no espaço 2D. Além disso, esse recurso pode ser estendido para ser usado na geração de esferas concêntricas em espaços n-dimensionais. Como estamos interessados em um quantizador generalizado para uma constelação PAM, é conveniente definir uma função paramétrica. Para este propósito, escolheu-se amostrar o compander hiperbólico [182] descrito pela Equação (4-27).

$$HQ_{(v,\alpha,\beta)} = \frac{V_\pi}{4} \cdot \left[ \underbrace{\left( \frac{e^{\alpha v} - e^{-\alpha v}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} \right)}_{\sinh \alpha v / \sinh \alpha \pi} + \underbrace{\left( \frac{2}{1 + e^{2\beta v}} + 1 \right)}_{\tanh \beta v} \right] \quad (4-27)$$

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \Gamma = [-\pi, \pi]$$

em que  $V_\pi$  é a máxima tensão normalizada aplicada a um dispositivo QPMZM [3],  $\Gamma$  é o intervalo angular de HQ,  $v$  é uma matriz de posições angulares fixas (coordenadas), e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas (não nulas), que escalam a ação das funções *sinh* e *tanh* no intervalo angular dado. Um exemplo das curvas resultantes é mostrado na Figura (4.24).

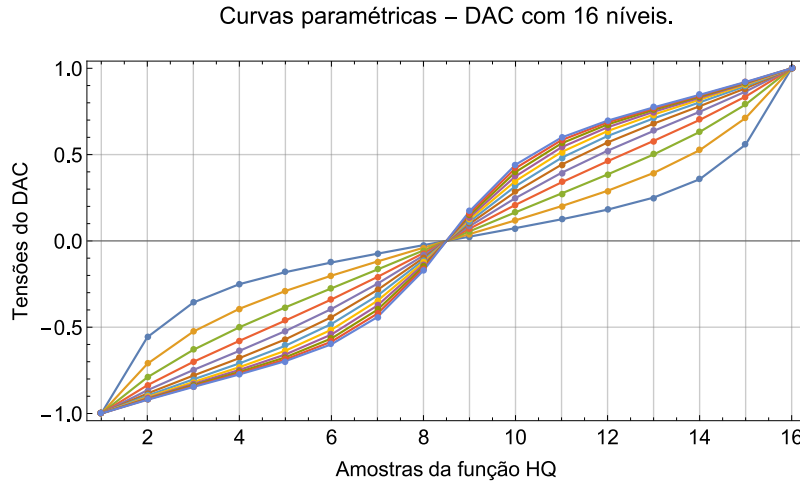


Figura 4.24: Curvas paramétricas definidas pela função HQ para valores fixos de  $v$  (mantidos dezesseis pontos uniformemente distribuídos). O eixo vertical define os níveis do DAC.

A constelação PAM e consequentemente os vetores quadridimensionais gerados a partir desse compander cumprem as regras de quantização impostas pela forma da função HQ. Assim, ao usar uma projeção que preserva uma métrica, como o mapa de Hopf, esperou-se que as constelações resultantes atendessem aos requisitos das comunicações do mundo real, tanto no domínio elétrico, quanto no domínio óptico. De fato, vale ressaltar que a definição de um quantizador sigmóide no plano Cartesiano tem profundas conseqüências que englobam características como a *Projeção Mercator* [183] utilizada em procedimentos gerais de mapas até a redução da PAPR [180, 182]. O próximo passo no cálculo foi a definição do poliedro de referência Figura (4.23). A escolha do *Dodecaedro Pentakis* foi feita devido ao fato desse poliedro permitir a amostragem uniforme sobre a esfera  $S^2$  [179]. Não obstante, o poliedro de referência poderia ser obtido a partir de códigos esféricos com boa cobertura da esfera de Poincaré.

O comportamento da função HQ está intrinsecamente relacionado ao empacotamento de esferas. Conforme já foi mencionado, o produto Cartesiano dos valores de tensão gerados pela função HQ produzem uma constelação QAM. A constelação QAM, por conseguinte, pode ser representada na forma polar como círculos concêntricos com distância  $\Delta d$  de separação radial. Até este ponto, o método MDCE se assemelha com o método de anéis concêntricos usado em [184]. Contudo, a grande diferença é que, no método MDCE a constelação é construída em 4D. Outro aspecto importante é que a métrica usada no método MDCE é *interdimensional*, explorando as relações intrínsecas dos fibrados de Hopf entre  $R^3$  e  $R^4$ .

Para evidenciar o papel de HQ no empacotamento de esferas, utilizou-se o desvio padrão das distâncias  $\sigma(\Delta d)$  entre os diâmetros de anéis concêntricos QAM. Um desvio  $\sigma(\Delta d)$  igual a zero indica que as normas dos vetores QAM estão uniformemente distribuídas no plano 2D. Valores maiores que zero indicam não uniformidade na distribuição dos valores em relação à média. Adicionalmente, convencionou-se que, variações nos parâmetros de HQ influenciam o desvio padrão da diferença entre normas. Tomando como exemplo a quantização de HQ para um DAC com 8 níveis, representa-se na Figura (4.25) o efeito anteriormente descrito. O eixo  $x$  representa a variação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para  $\Gamma = [-\pi, \pi]$ , enquanto o eixo  $y$  representa o desvio padrão  $\sigma(\Delta d)$ . Os valores exibidos no gráfico são função de variações de 360 conjuntos de parâmetros  $(\alpha_k, \beta_k)$ ,  $k = (1, 2, 3, \dots, 360)$ .

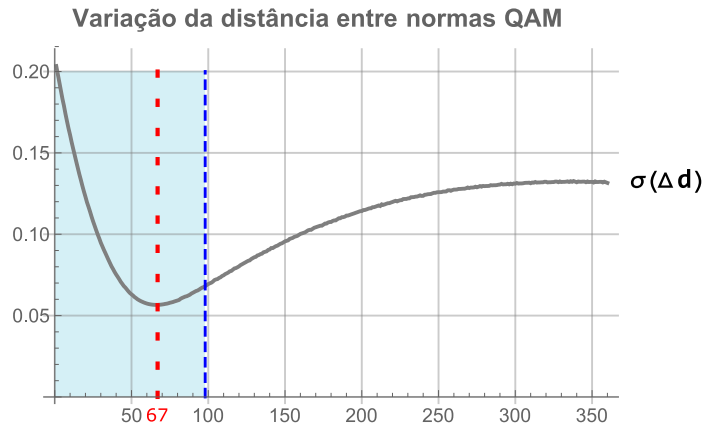


Figura 4.25: Representação gráfica do desvio padrão da distância entre normas QAM em função da excursão da função HQ para um DAC com 8 níveis.

Com o *setup* utilizado, o menor desvio padrão ocorreu no conjunto de parâmetros  $k = 67$  ( $\alpha = 0.671264$ ,  $\beta = 0.299435$ ), enquanto no conjunto de parâmetros  $k = 98$  ( $\alpha = 0.508408$ ,  $\beta = 0.395352$ ), HQ exibe uma reta.

O gráfico da Figura (4.25) indica que, uma distribuição *não uniforme* dos valores reais de HQ produziu a melhor condição de uniformidade (menor valor de  $\sigma(\Delta d)$ ) para a distribuição das normas QAM. Ou seja, o espaçamento radial dos anéis concêntricos é mais uniforme quando o reticulado QAM é não uniforme. Ao utilizar como base o gráfico representado na Figura (4.26), é possível observar que para o conjunto de parâmetros  $k = 67$  ( $\alpha = 0.671264$ ,  $\beta = 0.299435$ ), HQ tem uma forma que tende para a função *arco-seno*. O resultado em questão é duplamente interessante. Primeiro por que, do ponto de vista do DAC, uma função *arco-seno* consome menor potência. Segundo, por que conforme ilustrado pela Figura (1.2) da Seção (1.1.2), a função *arco-seno* lineariza a resposta do MZM (com *bias* no ponto mínimo).

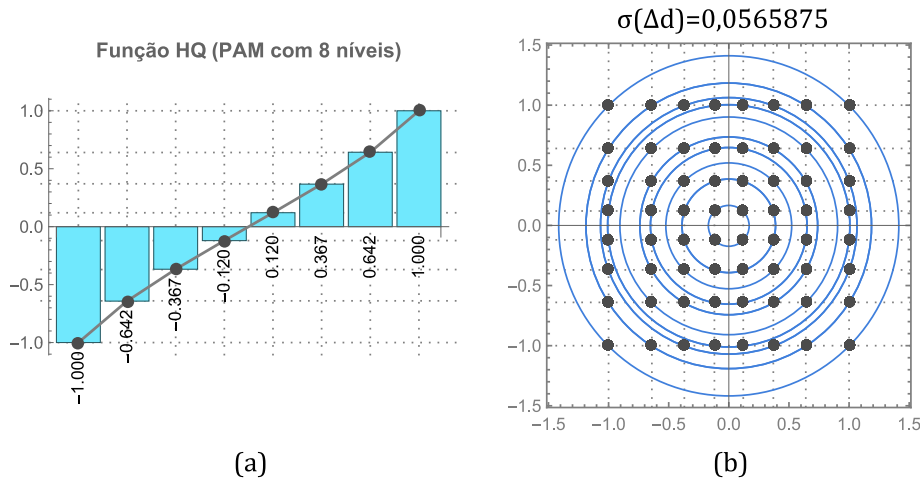


Figura 4.26: (a) Representação gráfica do quantizador DAC com 8 níveis para o conjunto de parâmetros ( $\alpha = 0.671264, \beta = 0.299435$ ),  $\Gamma = [-\pi, \pi]$ . (b) QAM resultante com distribuição maximizada de  $\Delta d$ .

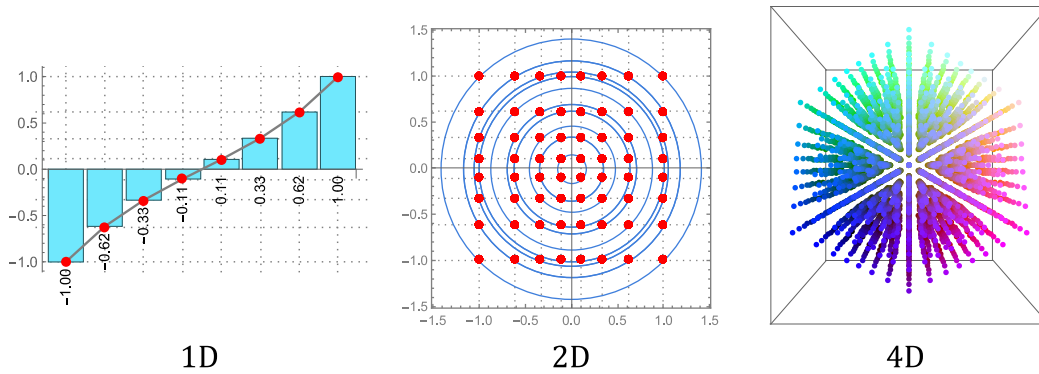
Uma característica relevante do método MDCE aplicado na construção de modulações 4D é o fato de que o ganho de modelagem pode ser obtido com redução simultânea da energia por símbolo ( $E_s$ ) e da PAPR. Esta propriedade do método é potencializada nas situações em que a constelação PAM é definida na região arco-seno, (ver Figura (4.26)).

Para descrever o método proposto, enumerou-se a seguir as regras de restrição de uma perspectiva algorítmica:

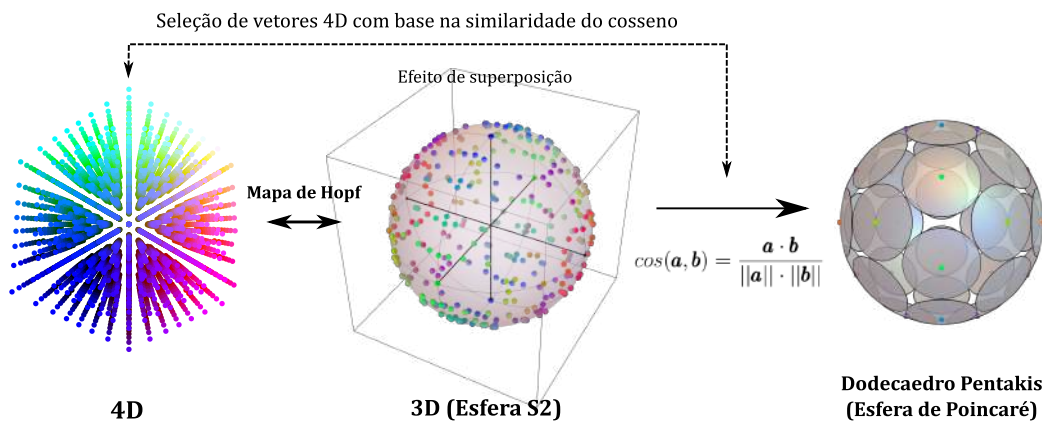
1. As primeiras definições de restrição foram o intervalo da função HQ, o número de iterações neste intervalo e o número de amostras de HQ (níveis do DAC) e da constelação PAM, respectivamente;
2. A partir da constelação PAM resultante, calculou-se o produto Cartesiano (4-tuplas). Em seguida, as 4-tuplas foram projetadas de 4D para 3D ( $R^4 \rightarrow R^3$ );
3. A *distância pareada do cosseno* entre o poliedro de referência e as projeções do mapa Hopf (vetores 4D  $\rightarrow$  3D) foi calculada (ver Apêndice (C.1));
4. A contagem do número  $s$  de superposições (do mapa de Hopf) em cada vértice do poliedro de referência, permitiu monitorar quais subconjuntos da projeção do mapa "coincidiavam" com o poliedro de referência [185]. Neste caso, o subconjunto de vetores 4D que originou a projeção foi selecionado para ser usado na composição das constelações quadridimensionais;

5. Os subconjuntos de vetores 4D correlacionados/filtrados foram classificados por sua norma (casca esférica). Esse procedimento forneceu a *redução de dimensionalidade* denotada por Shannon [186];
6. As cascas esféricas cuja distância euclidiana mínima paritária  $d_{min}$  era menor que a esperada foram removidas. As cascas esféricas cujo número total de vetores era de interesse (ou seja, 8, 16, 32, 64, 96, 128,...) foram selecionadas e usadas em um cálculo de *permutação de cascas esféricas*.
7. Com as constelações resultantes, o Índice Acumulado de Informação Mútua (detalhado na seção Seção (4.5.2) foi utilizado para *classificar numericamente* as melhores constelações.

A Figura (4.27) ilustra o método MDCE para um DAC de 8 níveis.



4.27(a): A constelação PAM amostrada da função HQ com 8 níveis, a QAM resultante do primeiro produto Cartesiano e os vetores 4D (projeção isométrica) resultantes do segundo produto Cartesiano.



4.27(b): Para cada vetor  $b_n$  no polítopo de referência (esfera de Poincaré), a distância do cosseno foi calculada entre os vetores  $a_k$  na projeção  $S^2$ .

## 4.5.2

## O Índice Acumulado de Informação Mútua (IMA)

O índice de Informação Mútua Acumulada (IMA) refere-se à soma da capacidade do canal ao longo de um intervalo de valores discretos para a SNR. No presente trabalho, esse índice de pontuação, baseado na informação mútua de Shannon, foi utilizado para verificar a equivalência em capacidade de constelações com diferentes geometrias e o mesmo número de símbolos. O somatório da IM compreendeu a faixa de 0 dB até a SNR em que a constelação atingisse, assintoticamente, sua capacidade máxima. Portanto, o somatório em questão é uma aproximação da integral abaixo da curva de capacidade do canal AWGN. A Figura (4.27), ilustra os valores discretos de IM contabilizados para a IMA de uma constelação de 512 símbolos.

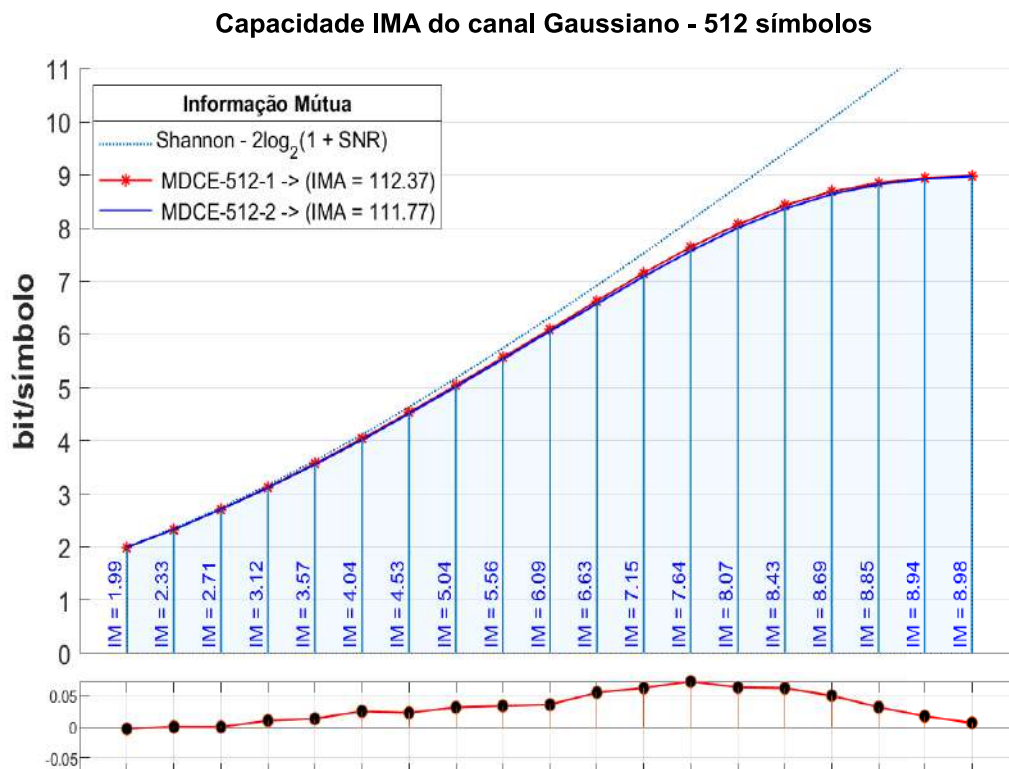


Figura 4.27: Exemplo de cálculo da IMA para uma constelação de 512 símbolos.

Ao utilizar a IMA como figura de mérito, as constelações foram testadas sobre uma gama de relações sinal/ruído. De modo geral, uma pontuação IMA superior, foi indicativa de um bom desempenho em toda a faixa de SNR avaliada. Este teste cumulativo se mostrou bastante rigoroso e reprovou constelações com desempenho incompatível com as referências.

## 4.6

**Avaliação de capacidade das constelações ópticas**

A avaliação de qualidade das constelações geradas pelos métodos propostos na tese, utilizou as métricas descritas na Seção (3.2.1). Em um primeiro momento realizou-se o cálculo da IM/IMA e na sequência, foram calculadas as métricas estáticas: figura de mérito (CFM), eficiência de potência (PE) e energia por símbolo ( $E_s$ ) e PAPR. Avaliações comparativas foram realizadas para constelações com 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 e 4096 símbolos. Um grupo de constelações de referência foi utilizado para avaliações de desempenho, em faixas específicas de eficiência espectral. A Figura (4.28) mostra o gráfico da informação mútua para as constelações de referência utilizadas. O gráfico inclui, a título de demonstração, uma constelação de 16384 símbolos que foi construída através do método MDCE desenvolvido nesta tese.

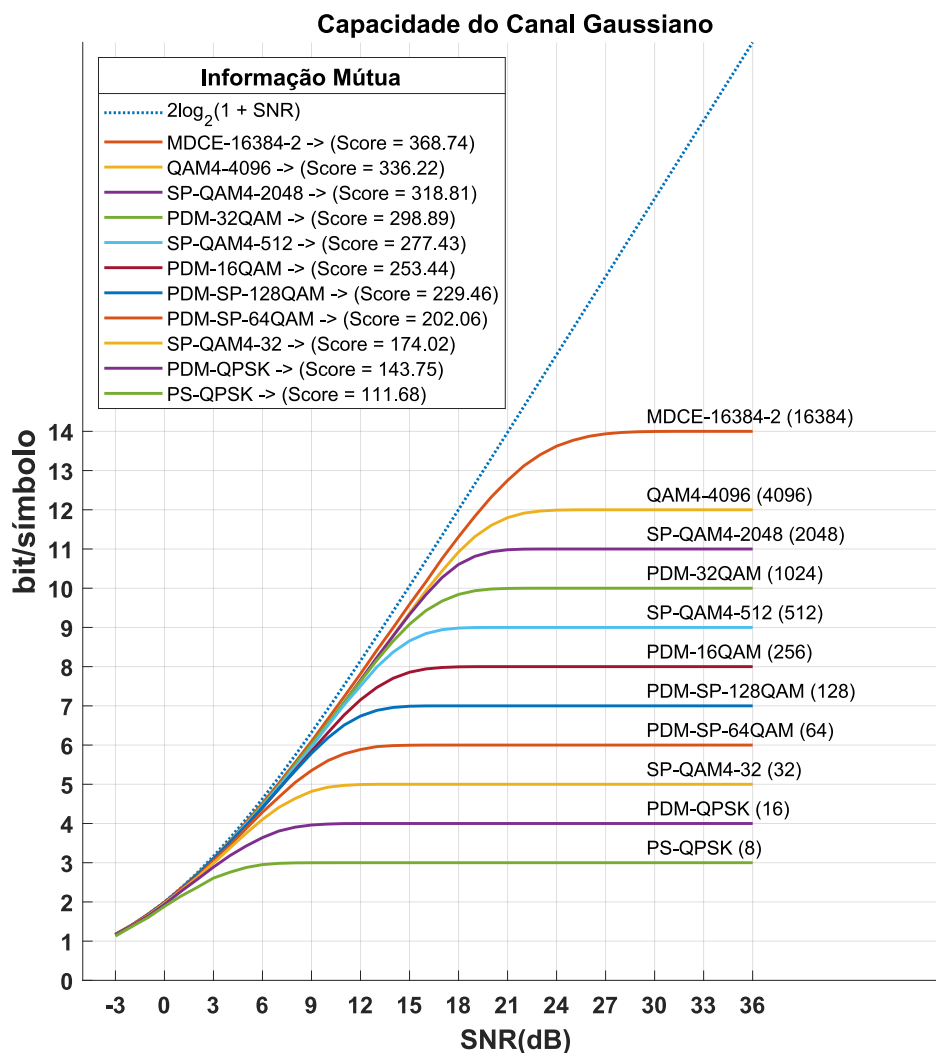


Figura 4.28: Cálculo da informação mútua das constelações de referência para 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 e 4096 símbolos. A constelação de 16384 símbolos foi construída através do método MDCE desenvolvido nesta tese.



### 4.6.1

#### Orientação para interpretação dos resultados

No Capítulo (5), são demonstrados os resultados das avaliações comparativas. Essas avaliações foram segmentadas pelo número de símbolos das constelações 4D e os principais resultados foram exibidos em gráficos e tabelas. Os gráficos da IM identificaram as constelações pela ordem da pontuação IMA. As constelações que apresentaram desempenho IMA compatível com a referência foram selecionadas e ao final de cada seção, foram incluídas tabelas comparativas dos principais resultados.

As métricas estáticas exibidas na Tabela (4.4), foram utilizadas como referência para os cálculos da eficiência energética ( $Es$ ), eficiência espectral (SE) e PAPR.

Tabela 4.4: Métricas estáticas para as constelações de referência.

Número de símbolos	Referência	Métricas estáticas	PAPR <sub>dB</sub>
8	PS-QPSK	$d_{min}=2$ ; CFM=4 ; $Es=5,4$	0 dB
16	PDM-QPSK	$d_{min}=2$ ; CFM=2 ; $Es=16,1$	0 dB
32	SP-QAM-4-32	$d_{min}=1,33$ ; CFM=1,6 ; $Es=14,3$	2,78 dB
64	PDM-SP-64QAM	$d_{min}=0,94$ ; CFM=0,8 ; $Es=23,8$	2,78 dB
128	PDM-SP-128QAM	$d_{min}=0,94$ ; CFM=0,8 ; $Es=40,8$	2,78 dB
256	PDM-16QAM	$d_{min}=0,67$ ; CFM=0,4 ; $Es=71,4$	2,78 dB
512	SP-QAM4-512	$d_{min}=0,57$ ; CFM=0,38 ; $Es=97,8$	3,93 dB
1024	PDM-32-QAM	$d_{min}=0,4$ ; CFM=0,2 ; $Es=163,8$	2,51 dB
2048	SP-QAM4-2048	$d_{min}=0,4$ ; CFM=0,19 ; $Es=320,2$	3,93 dB
4096	QAM4-4096-4096	$d_{min}=0,28$ ; CFM=0,09 ; $Es=587,1$	3,93 dB

As pontuações IMA foram calculadas para um intervalo de valores discretos da SNR. O ponto inicial foi SNR=0 dB. O ponto final, denotado por SNR@SE, identificou o valor da SNR requerida para que cada constelação atingisse a eficiência espectral "máxima". Por este motivo, o intervalo (0 dB - SNR@SE) foi visivelmente destacado em todos os gráficos da IM. Duas linhas verticais identificam os pontos de 0 dB e da SNR@SE, respectivamente. Ao considerar que, idealmente as constelações não atingem sua eficiência espectral máxima, o valor da SNR@SE foi calculado para uma margem de 99,84% da SNR ideal. A margem utilizada, já considera o erro do cálculo de Monte Carlo.



### 4.6.2

#### Terminologia

Apresenta-se nesta tese diversas constelações ópticas ainda não documentadas nas referências bibliográficas consultadas. Por conta desse fato, uma terminologia específica foi utilizada para identificar as constelações e associá-las com os métodos utilizados no seu projeto. Os métodos foram então classificados em dois tipos, com seus respectivos subtipos.

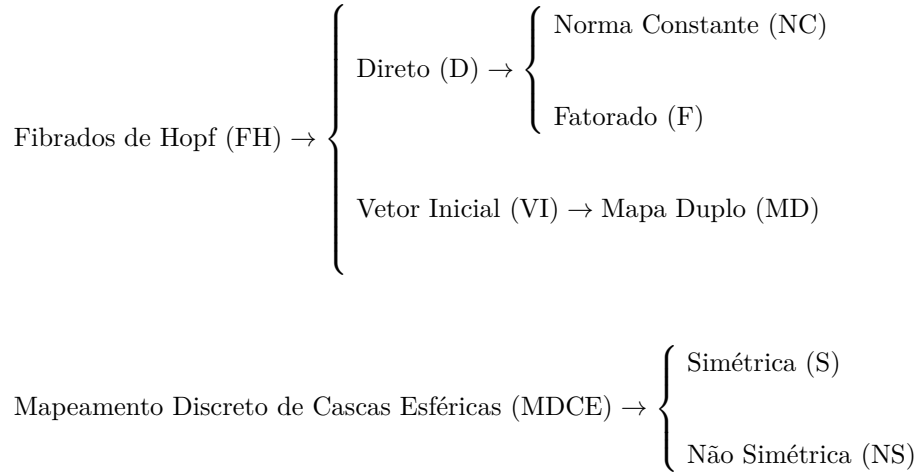


Figura 4.29: Diagrama dos métodos utilizados para a construção de constelações 4D.

Com base na terminologia descrita no diagrama da Figura (4.29), uma constelação de 16 símbolos obtida pelo método dos fibrados de Hopf com norma constante e que utiliza a base do tetraedro foi nomeada **TETRAEDRO-D-NC-4PSK**.

De forma equivalente, foram utilizadas as seguintes terminologias:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{HOPF} & - & \text{VI} & - & \text{Hexaedro} & - & 64 \\
 \text{Método} & & \text{Tipo} & & \text{base} & & \text{Número de símbolos} \\
 \text{MDCE} & - & 256 & - & 1 & & \\
 \text{Método} & & \text{Nº de símbolos} & & \text{Score} & & 
 \end{array} \tag{4-28}$$

**Nota:** Conforme demonstrado em [187, 188], constelações 4D com mapa de polarização simétricos podem ser a base para a construção de constelações 8D. Portanto, será dada atenção especial para as constelações que apresentam mapa de Hopf simétrico. Esta atenção se justifica pelo fato de que algumas constelações apresentadas nessa tese apresentam novas geometrias, ampliando as possibilidades de projeto de modulações 8D.

## 5 Resultados Obtidos

Neste capítulo, apresenta-se os resultados das avaliações de desempenho para constelações com tamanho entre **8** e **16384** símbolos.

A forma de apresentação desses resultados consiste, além da IM, das seguintes informações:

- Partições QAM (projeção de Cayley-Dickson da constelação 4D);
- Histogramas das partições QAM;
- Vista frontal e de topo do mapa de Hopf na esfera Poincaré;
- Número de cascas esféricas e os níveis de tensão para o DAC.

Os histogramas exibem a frequência estatística com que os valores QAM ocorrem em cada partição. Um exemplo é mostrado na Figura (5.1).

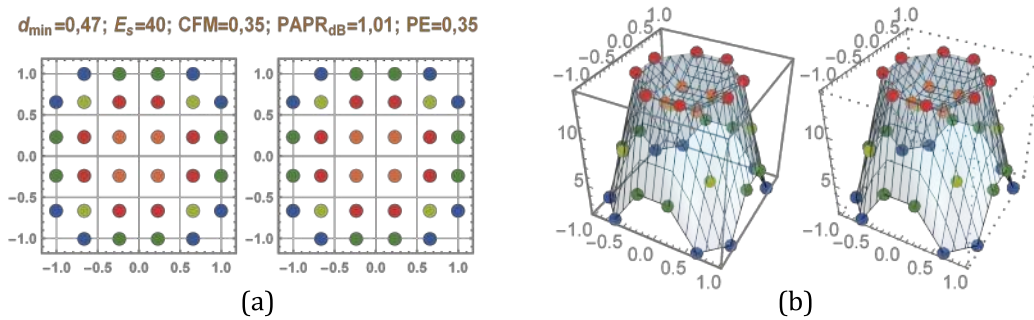


Figura 5.1: (a) Partições QAM da MDCE-256-4 (b) Histogramas das partições.

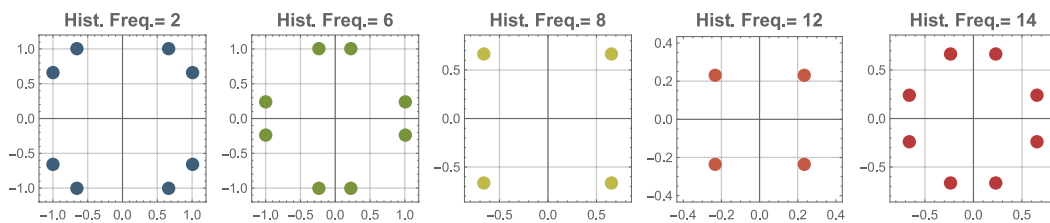


Figura 5.2: Distribuição dos símbolos QAM conforme a frequência estatística.

Uma escala de cores foi utilizada para a contagem de símbolos. Nesta escala, a cor **Azul** indica a contagem mínima, enquanto a cor **Vermelho** indica a contagem máxima. Para o exemplo da Figura (5.1), a frequência mínima é 2 e a frequência máxima é 14 (ver destaques na Figura (5.2)).

O recurso das cores também foi utilizado para exibir o mapa de Hopf na esfera de Poincaré. Nesse caso, os pontos definidos pelas coordenadas ( $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ ) foram normalizados com o código RGB. Com esta convenção, o ponto (1,0,0) tem a cor Vermelho (**R**), o ponto (0,1,0) tem a cor Verde (**G**) e o ponto (0,0,1) tem a cor Azul (**B**). Este recurso simples, ajudou a identificar com facilidade vetores simétricos e antipodais na esfera de Poincaré. O código RGB não aceita coordenadas negativas, logo utilizou-se os valores absolutos dos parâmetros de Stokes. Assim, o ponto (-1,0,0) também tem a cor Vermelho (R).

Acima de cada imagem das partições QAM são exibidos os seguintes parâmetros das constelações:

- $d_{min}$  - distância euclidiana mínima;
- $E_s$  - energia por símbolo;
- CFM - figura de mérito;
- $PAPR_{dB}$  - PAPR, também conhecido como fator de crista;
- PE - eficiência em potência;

É importante observar que, os níveis do DAC foram recuperados a partir das coordenadas geométricas das constelações 4D. Por esse motivo, os gráficos de barras que exibem as normas (cascas esféricas) e os níveis de tensão dos DAC são representados com 2 dígitos decimais. Este detalhe faz diferença pois as coordenadas de algumas constelações densas são descritas originalmente com 4 dígitos decimais (exemplo: A4-4096). Para este caso, os valores foram arredondados.

## 5.1.1

## Avaliação de capacidade de constelações com 8 símbolos

A constelação de referência utilizada para 8 símbolos foi a PS-QPSK. As características dessa constelação como: partições QAM, as características de *shaping*, mapa de Hopf (projeção dos estados de polarização da constelação), o quantizador do DAC e as normas dos vetores 4D são mostradas na Figura (5.3).

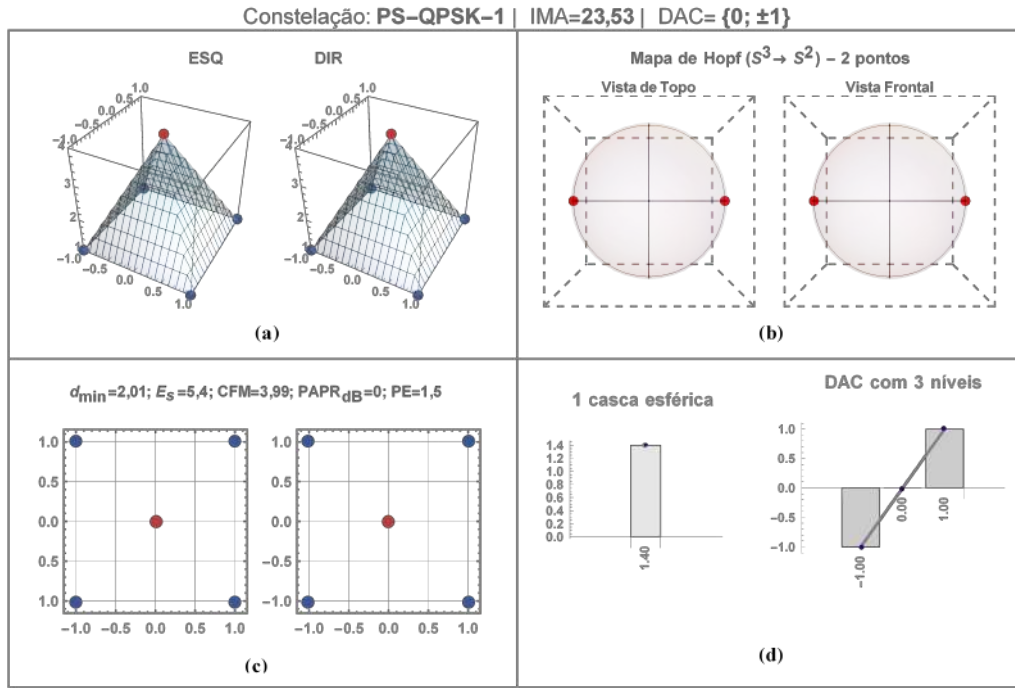


Figura 5.3: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PS-QPSK-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 2 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e necessita de 3 níveis de tensão para o DAC.

A PS-QPSK projeta 2 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 3 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 1 casca esférica (ver Figura(5.3d)). Os histogramas das partições demonstram que a PS-QPSK tem símbolos QAM não equiprováveis com ocorrência igual a 4 para o vetor (0., 0.) com ocorrência igual a 1 para o vetor (-1.0039, 1.0039). A **PAPR<sub>dB</sub>** da norma dos símbolos 4D é **0 dB** com **E<sub>s</sub>=5,4**. Os cálculos de IM para transmissão de 8 símbolos são exibidos na Figura(5.4). As figuras (5.5) e (5.6), (5.7) exibem as características das constelações selecionadas.

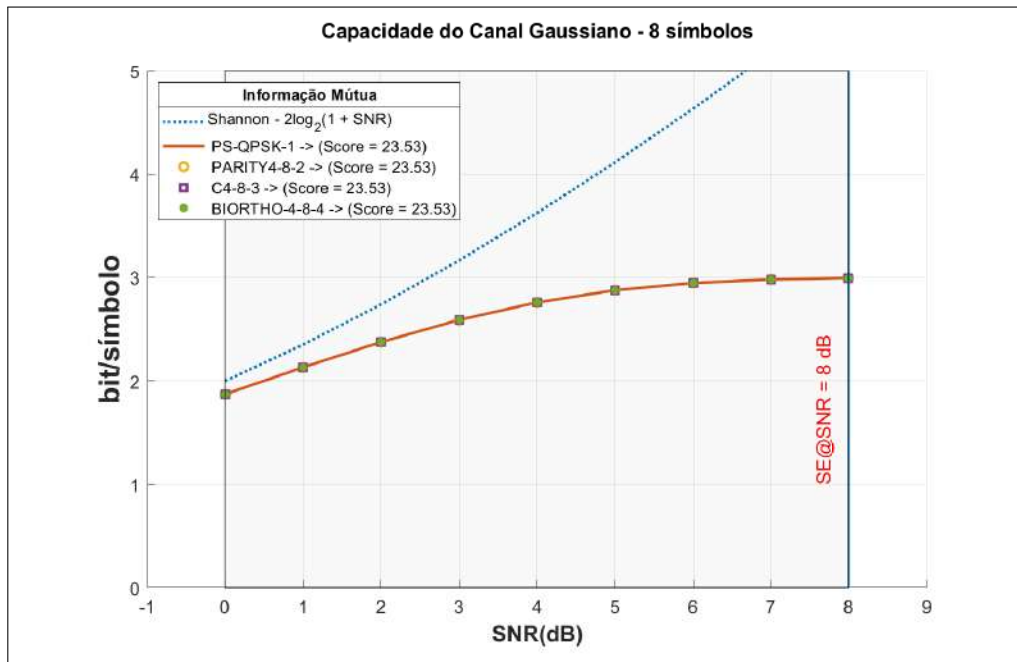


Figura 5.4: Cálculo da informação mútua de constelações com 8 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 3 constelações para transmissão de 8 símbolos com SNR limite de **8 dB**. Apenas 2 constelações listadas a seguir apresentaram eficiência energética  $E_s$  compatível com à referência.

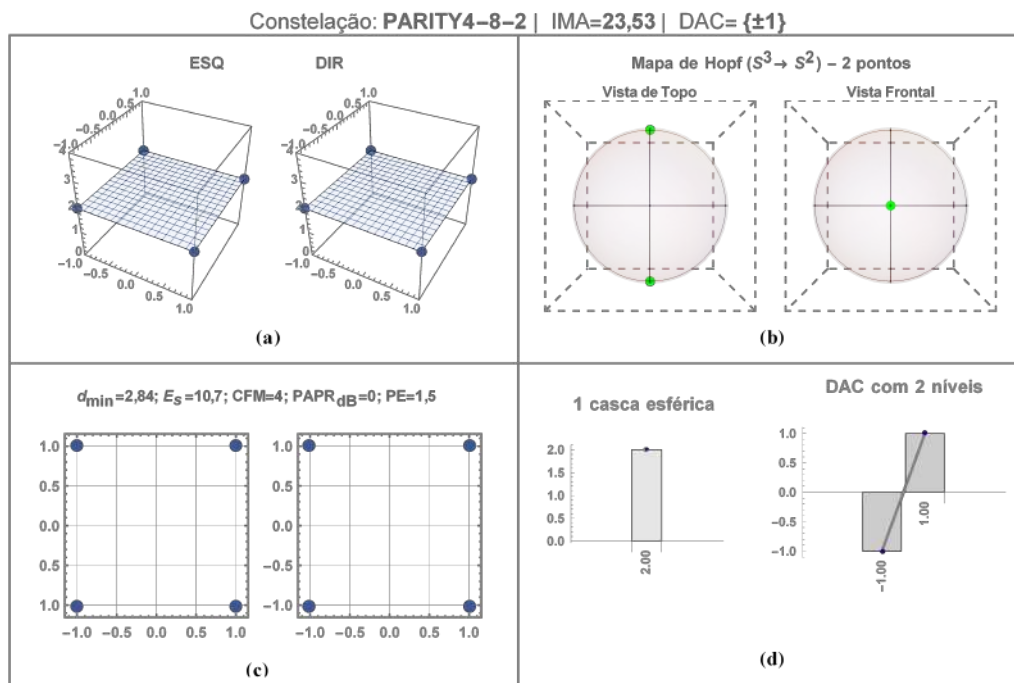


Figura 5.5: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PARITY4-8-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 2 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 2 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **elevada** em **98,1%**.

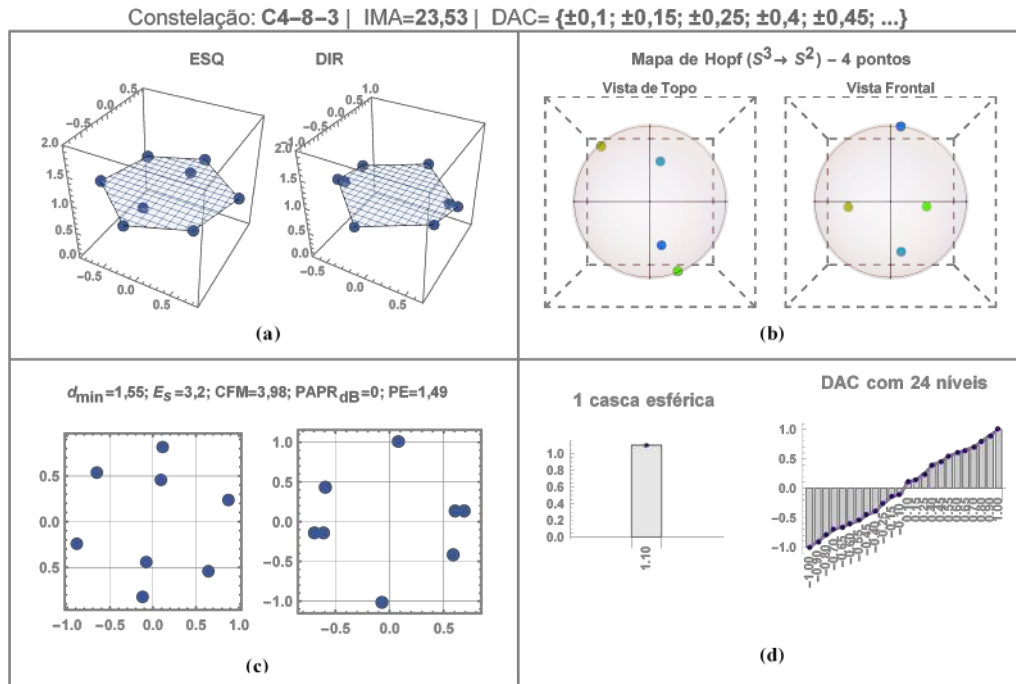


Figura 5.6: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da C4-8-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 24 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **40,7%**.

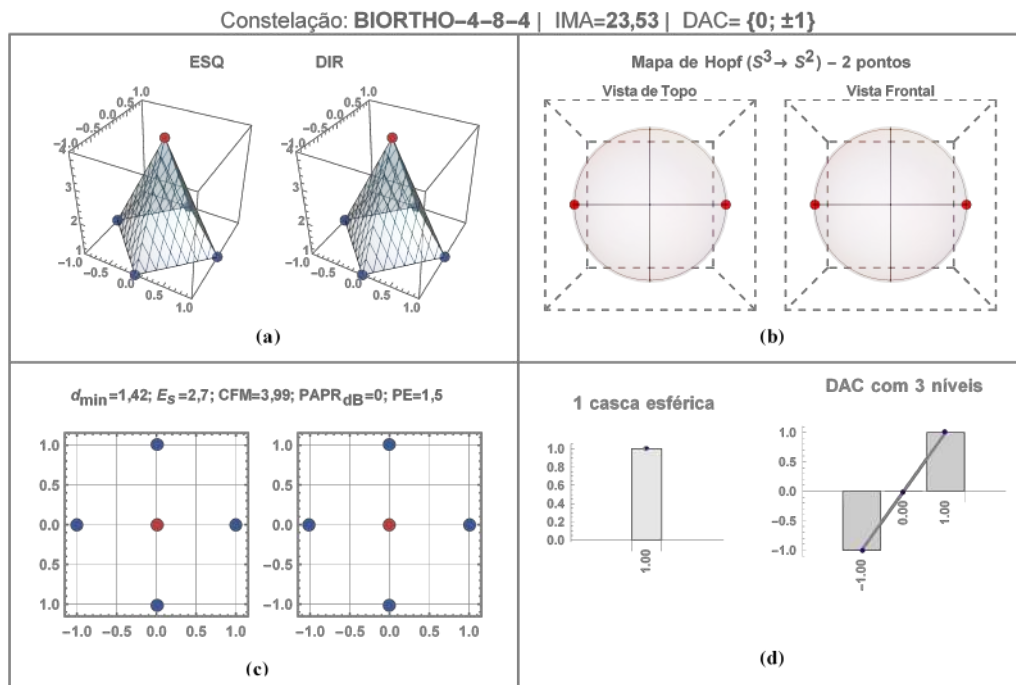


Figura 5.7: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da BIORTHO-4-8-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 2 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 3 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **50%**.

**Resumo:**

A pequena quantidade de símbolos limita o número de geometrias que podem ser obtidas para transmissão eficiente. Deste modo, as constelações de 8 símbolos reproduzidas pelo método MDCE já estão documentadas na literatura [177] com os nomes L4-8-8, PARITY4-8-8 e BIORTHO-4-8-8.

**Observações:**

- A geometria da L4-8-8 é a própria modulação PS-QPSK;
- A BIORTHO-4-8-8 (que apresentou o melhor desempenho comparativo com a PS-QPSK) é uma *versão rotacionada* da PS-QPSK.
- Para gerar a PS-QPSK por hardware são necessários 03 níveis de tensão no DAC conforme representado na Figura (5.3 d).
- O cálculo da informação mútua ilustrado na Figura (5.4) demonstrou que: para uma SNR limite de 8 dB, apenas estruturas geométricas similares rivalizam com a PS-QPSK.

Tabela 5.1: Tabela comparativa dos principais resultados para 8 símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
PS-QPSK-1	23,53	2,01	5,39	----	3,99	0	----	1,5	2	0,38
PARITY4-8-2	23,53	2,84	10,75	99.4%	4	0	0. dB	1,5	2	0,25
C4-8-3	23,53	1,55	3,23	-40.1%	3,98	0	0. dB	1,49	4	3
BIORTHO-4-8-4	23,53	1,42	2,69	-50.1%	3,99	0	0. dB	1,5	2	0,38

Uma observação importante é o fato de que enquanto a IMA apresentou valores iguais, a eficiência energética variou de até 100% entre a PS-QPSK e a PARITY4-8-8. Dessa forma, foi evidenciado que a rotação da constelação impacta significativamente a eficiência energética. Uma descrição da relação entre a rotação da constelação 4D e a rotação da projeção QAM é mostrada em [207].

Um caso positivo de eficiência energética comparativa foi a BIORTHO-4-8-8 com ganho de  $\simeq 50\%$  em relação a PS-QPSK.

## 5.1.2

## Avaliação de capacidade de constelações com 16 símbolos

A referência utilizada para 16 símbolos foi a PDM-QPSK. Embora a constelação C4-16 tenha um desempenho superior à PDM-QPSK. A escolha da referência foi motivada pelo fato da PDM-QPSK ser um padrão conhecido, com menor complexidade de realização. Na Figura (5.8), estão representadas as partições QAM, as características de *shaping*, o mapa de Hopf, o quantizador do DAC e as normas dos vetores 4D dessa constelação de referência.

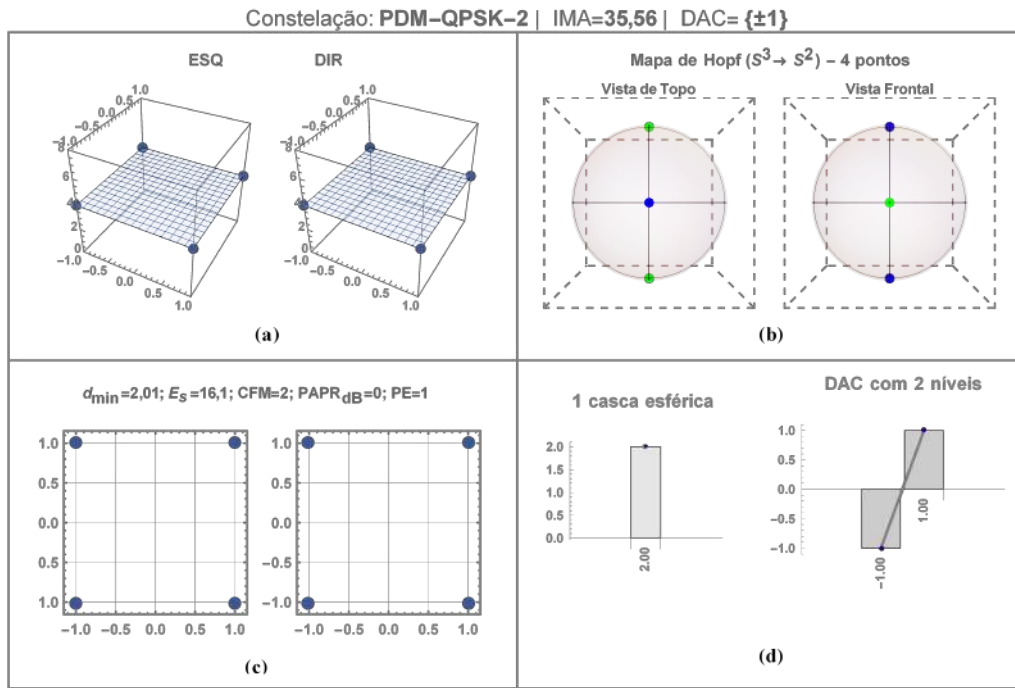


Figura 5.8: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PDM-QPSK-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e necessita de 2 níveis de tensão para o DAC.

A PDM-QPSK projeta 4 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 2 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 1 casca esférica (ver Figura (5.8d)). Os histogramas das partições demonstram que a PDM-QPSK tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 4 para todos os símbolos particionados. A  $PAPR_{dB}$  da norma dos símbolos 4D é  $0\text{ dB}$  com  $E_s=16.1$ . Os cálculos de IM para transmissão de 16 símbolos são exibidos na Figura (5.9). As figuras (5.10), (5.11), (5.12) e (5.13), (5.14) exibem as características das constelações selecionadas.



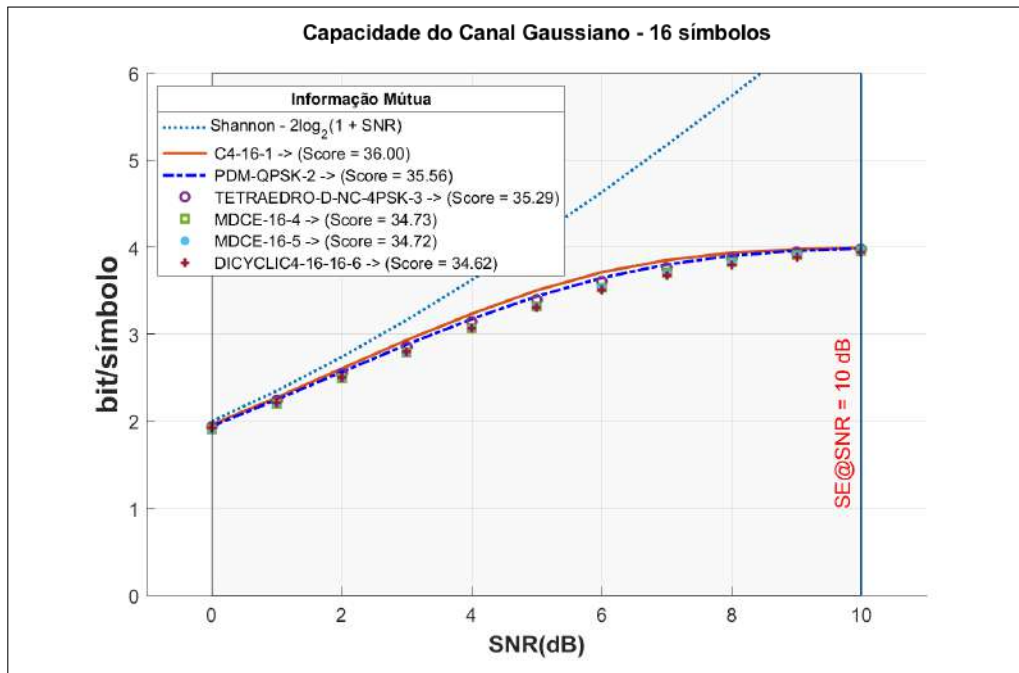


Figura 5.9: Cálculo da informação mútua de constelações com 16 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 5 constelações para transmissão de 16 símbolos com SNR limite de **10 dB**. Todas as constelações listadas a seguir apresentaram eficiência energética  $E_s$  em relação à referência.

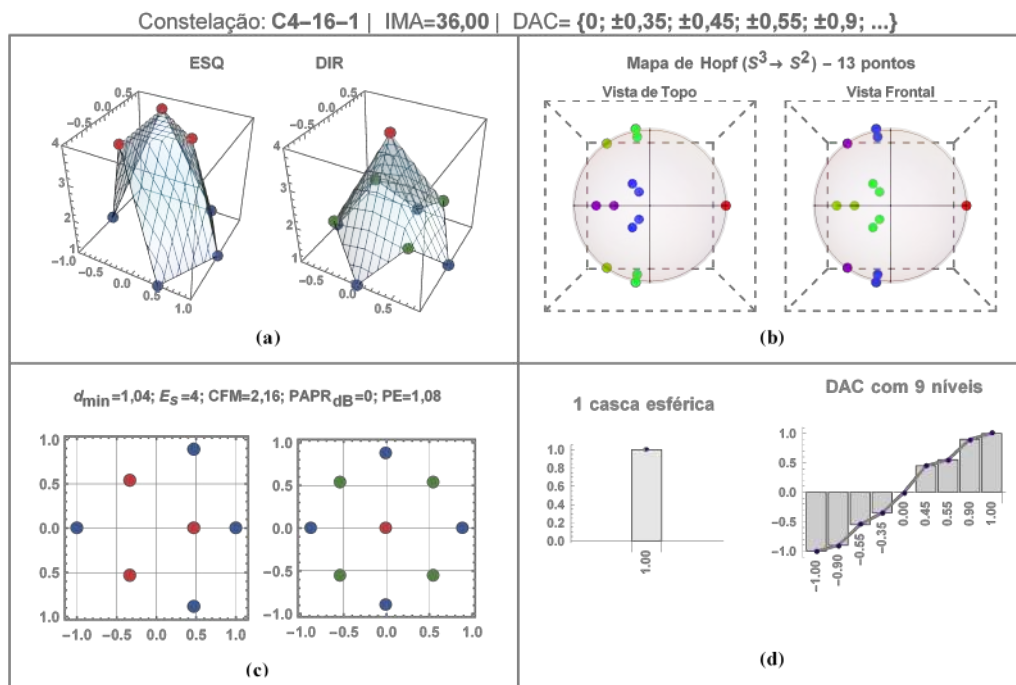


Figura 5.10: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da C4-16-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 13 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 9 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **75,2%**.

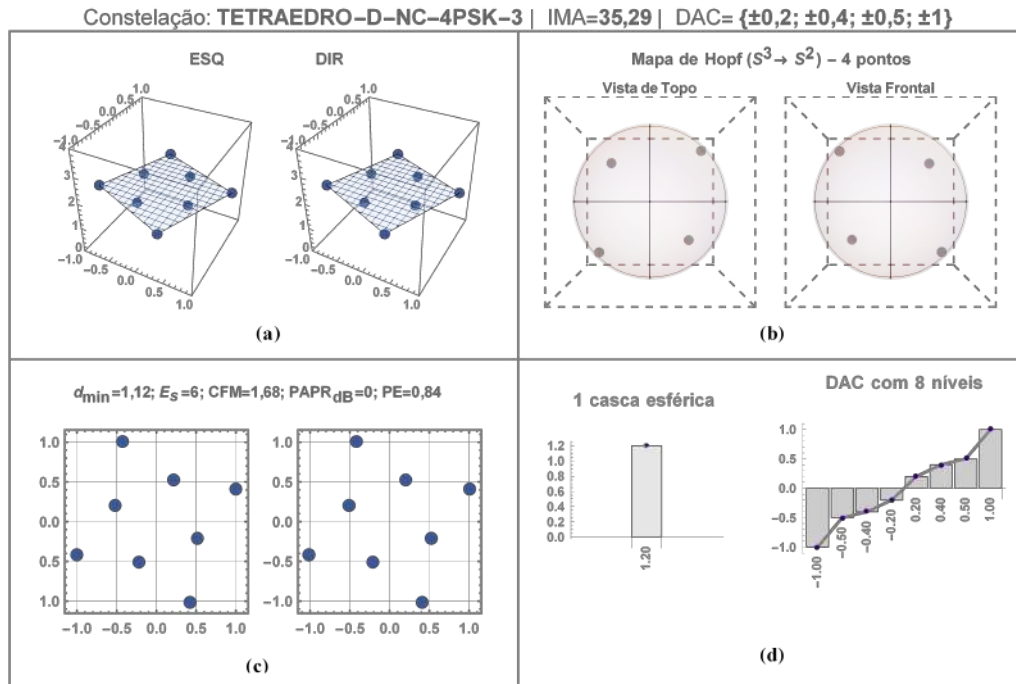


Figura 5.11: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da TETRAEDRO-D-NC-4PSK-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 8 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **62,7%**.

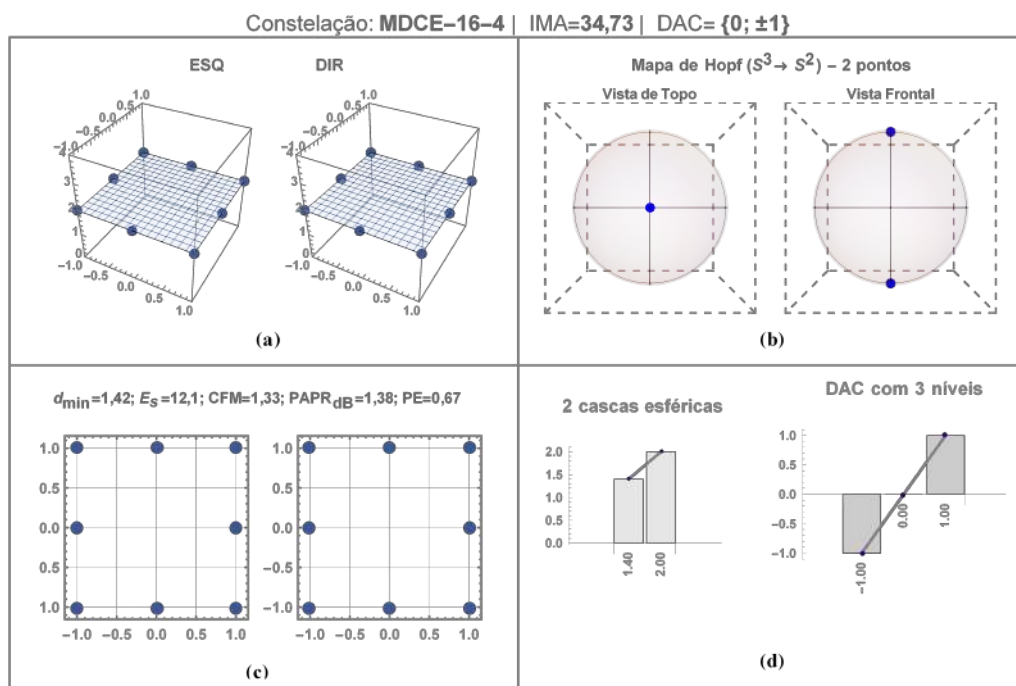


Figura 5.12: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-16-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 2 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 3 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **24,8%**.

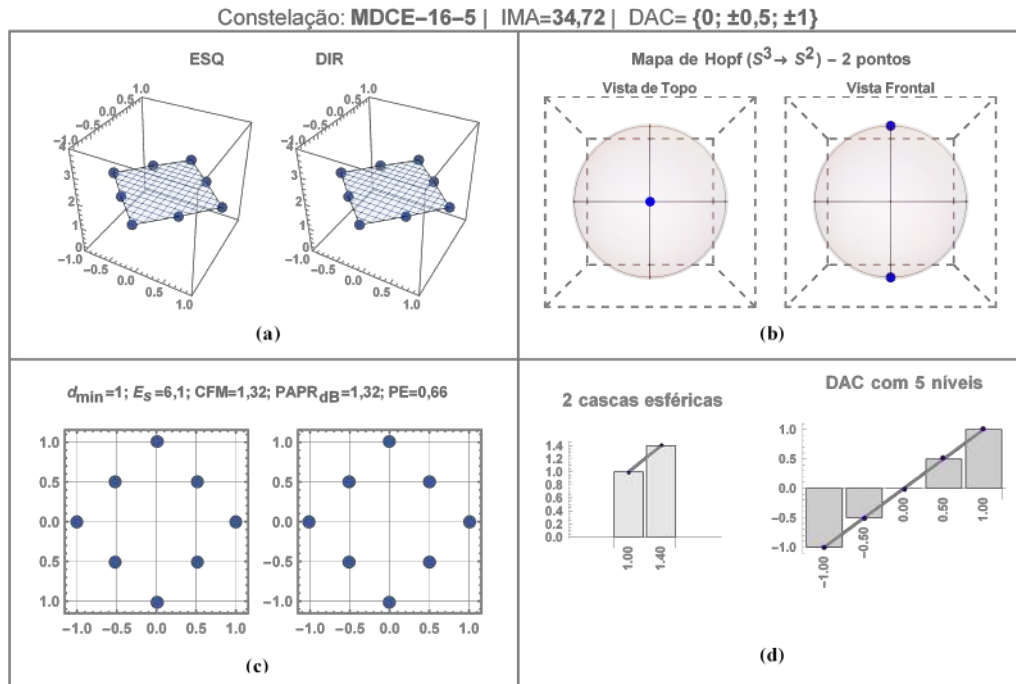


Figura 5.13: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-16-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 2 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **62,1%**.

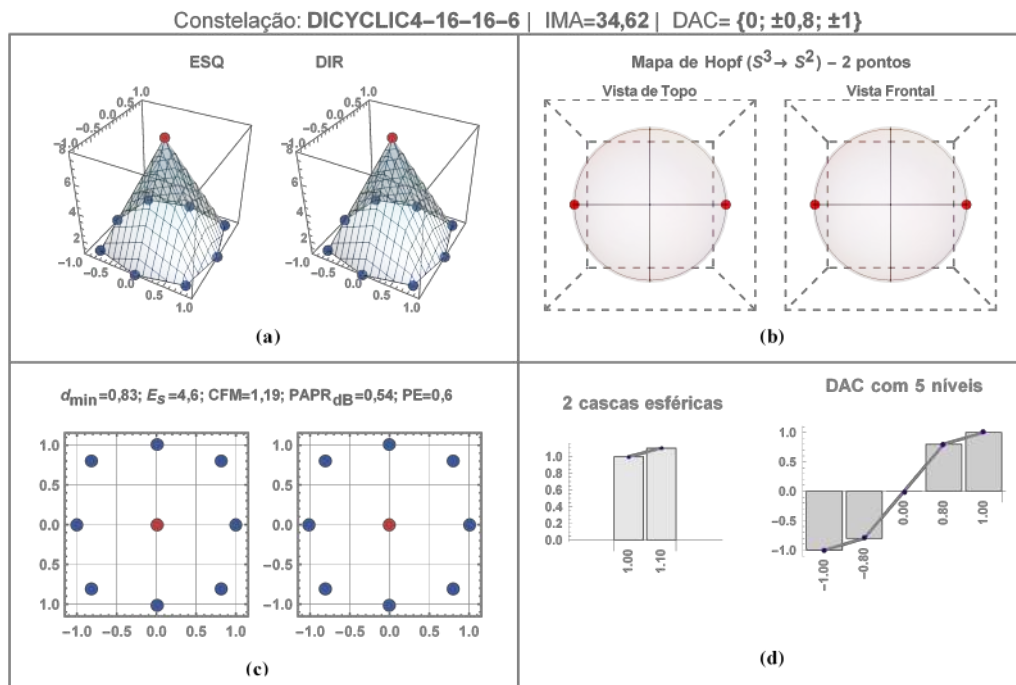


Figura 5.14: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da DICYCLIC4-16-16-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 2 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **71,4%**.

**Resumo:**

- A constelação de 16 símbolos que apresentou melhor desempenho IMA foi a C4-16 já reportada na bibliografia consultada [177, 189];
- A constelação TETRAEDRO-D-NC-4PSK construída pelo método de mapeamento direto de Hopf apresentou um desempenho equivalente ao da PDM-QPSK;
- Quando comparada com a C4-16, a TETRAEDRO-D-NC-4PSK tem menor complexidade de implementação (ver assimetria das partições QAM na Figura (5.10)). Os histogramas das partições demonstram que a TETRAEDRO-D-NC-4PSK tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 2 para todos os símbolos particionados;
- O mapa de Hopf da C4-16 dificulta bastante sua inserção numa estrutura de vértices embutidos fazendo com que as constelações PDM-QPSK e TETRAEDRO-D-NC-4PSK sejam mais adequadas para utilização em um esquema adaptativo de transmissão;
- As constelações MDCE-16-4 e MDCE-16-5 apresentaram métricas estáticas com um desempenho razoável, com redução da  $E_s$  de até 62% e da PAPR de até 1,38 dB. Contudo, os valores da IMA foram inferiores;
- A DICYCLIC4-16-6 tem o mesmo mapa de Hopf que a PS-QPSK.

Tabela 5.2: Tabela comparativa dos principais resultados para **16** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
C4-16-1	36,00	1,04	4	<b>-75.2%</b>	2,16	0	<b>0. dB</b>	1,08	13	4,5
PDM-QPSK-2	35,56	2,01	16,12	----	2	0	----	1	4	1
TETRA-D-NC-4PSK-3	35,29	1,12	5,96	<b>-63.%</b>	1,68	0	<b>0. dB</b>	0,84	4	4
MDCE-16-4	34,73	1,42	12,08	<b>-25.1%</b>	1,34	1,38	<b>1.38 dB</b>	0,67	2	1,5
MDCE-16-5	34,72	1	6,12	<b>-62.%</b>	1,32	1,32	<b>1.32 dB</b>	0,66	2	2,5
DICYCLIC4-16-6	34,62	0,83	4,64	<b>-71.2%</b>	1,19	0,54	<b>0.54 dB</b>	0,6	2	2,5

Todas as constelações selecionadas apresentaram ganho de eficiência energética. Contudo, apenas a C4-16 apresentou IMA superior à referência.

## 5.1.3

## Avaliação de capacidade de constelações com 32 símbolos

A constelação de referência utilizada para 32 símbolos foi a SP-QAM-4-32. As partições QAM, as características de *shaping* e a projeção dos estados de polarização dessa constelação são mostradas na Figura (5.15).

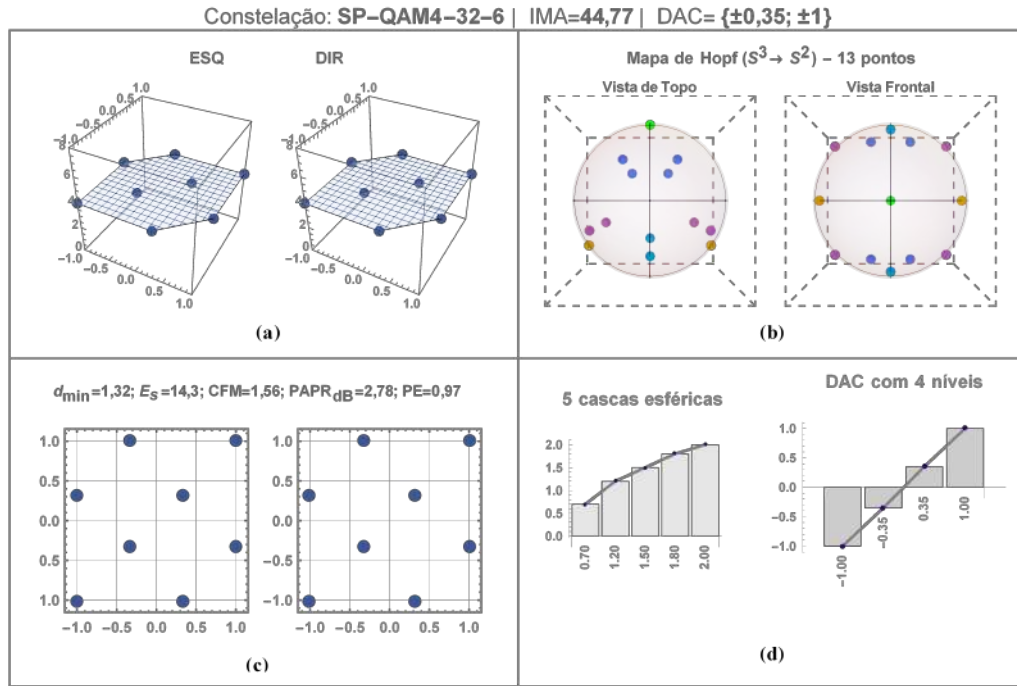


Figura 5.15: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da SP-QAM4-32-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 13 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 4 níveis de tensão do DAC.

A SP-QAM4-32 projeta 13 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 4 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 5 normas diferentes (ver Figura (5.15 d)). Os histogramas das partições demonstram que a SP-QAM4-32 tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 4 para todos os símbolos particionados. A  $\text{PAPR}_{\text{dB}}$  da norma dos símbolos 4D é **2,78 dB** com  $E_s=14,3$ . Os cálculos de IM para transmissão de 32 símbolos são exibidos na Figura (5.16). As figuras (5.17), (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.23) exibem as características das constelações selecionadas.

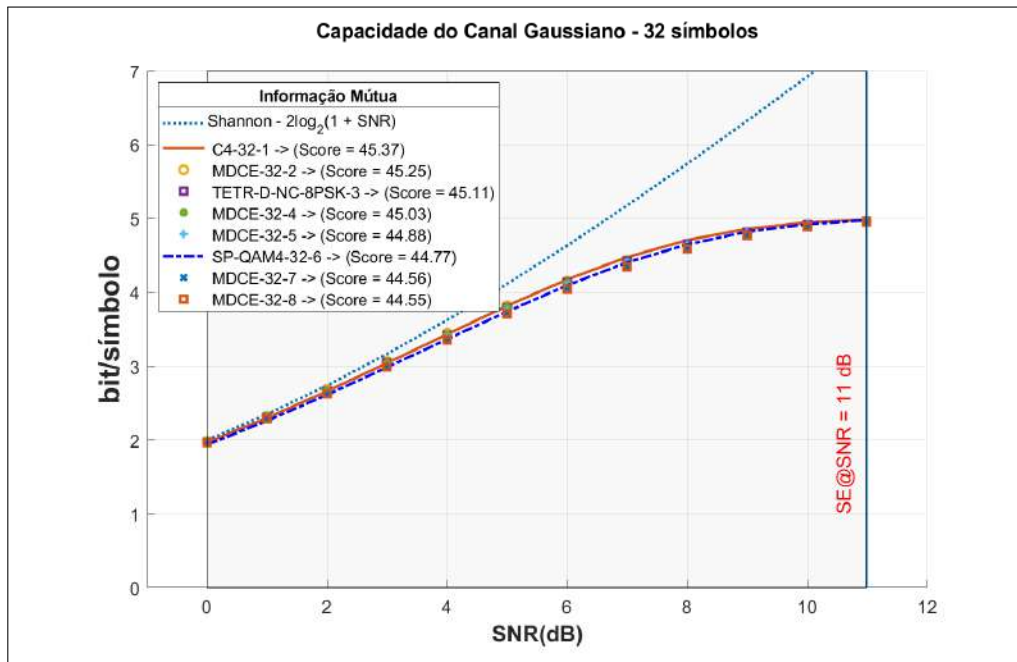


Figura 5.16: Cálculo da informação mútua de constelações com 32 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 07 constelações para transmissão de 32 símbolos com SNR limite de **11 dB**. No cálculo de IM, a constelação que apresentou melhor desempenho comparado com a SP-QAM4-32 foi a C4-32 [177].

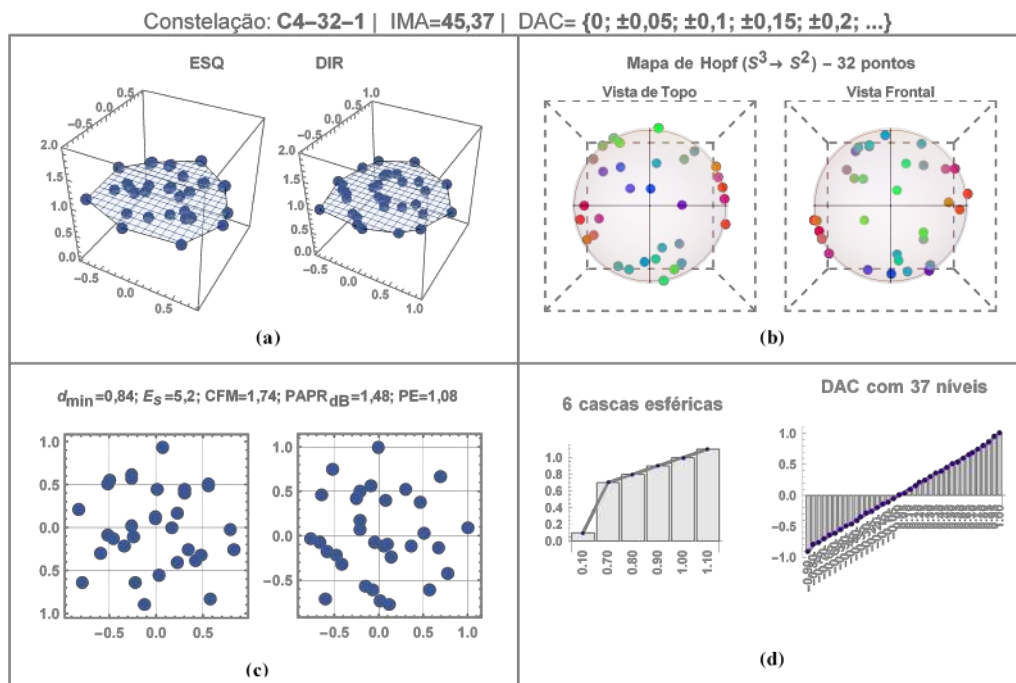


Figura 5.17: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da C4-32-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 32 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 6 cascas esféricas da modulação e os 37 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **63,6%**.



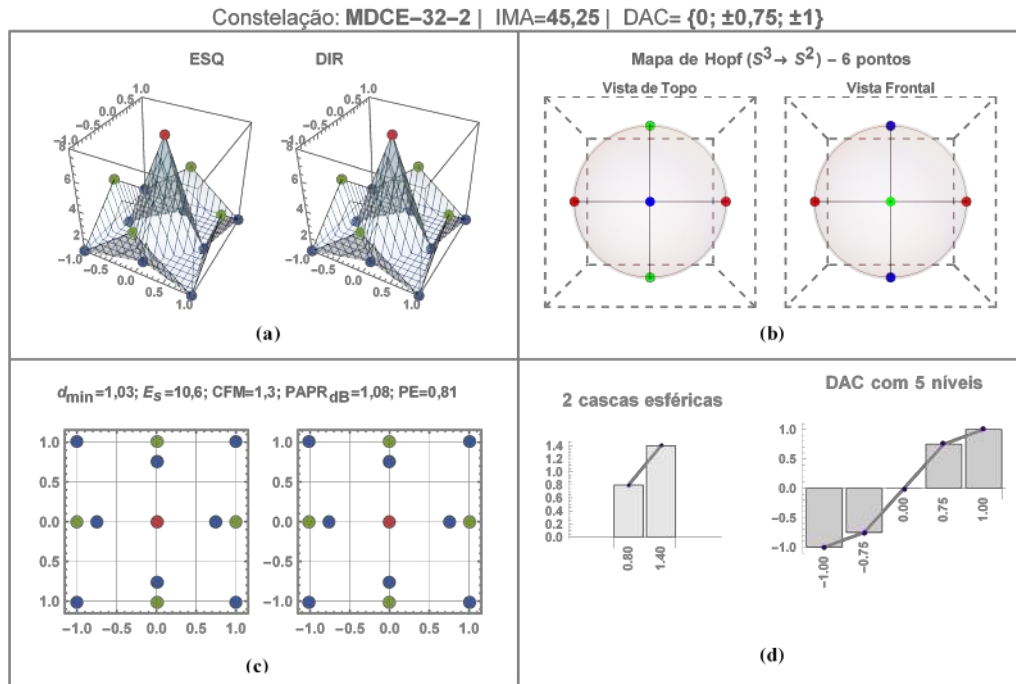


Figura 5.18: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-32-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 6 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **25,9%**.

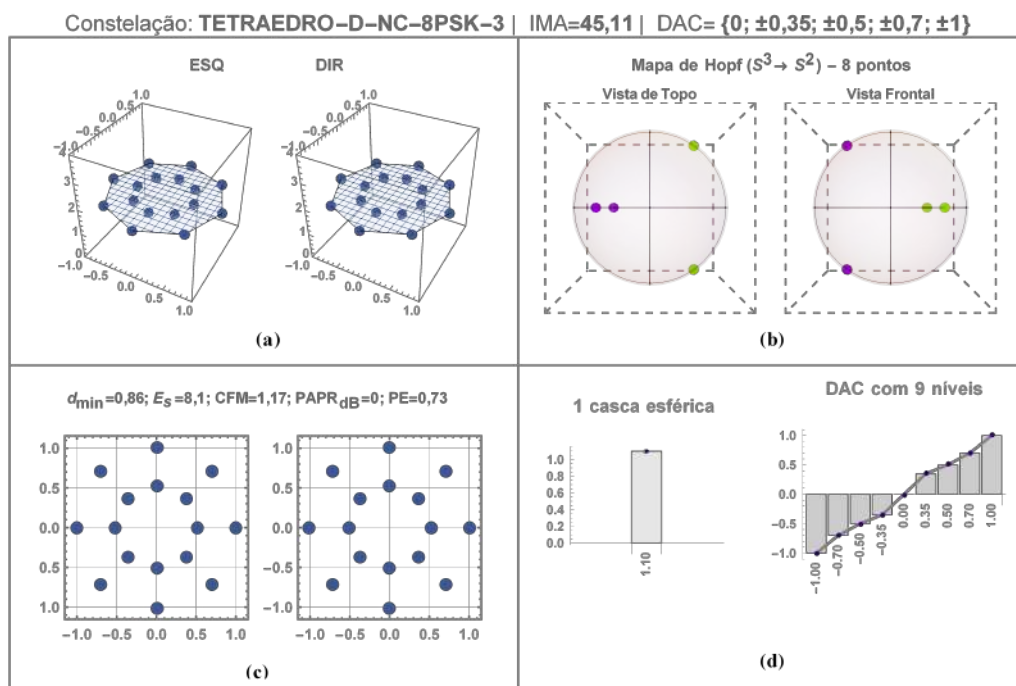


Figura 5.19: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da TETRAEDRO-D-NC-8PSK-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 8 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 9 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **43,4%**.

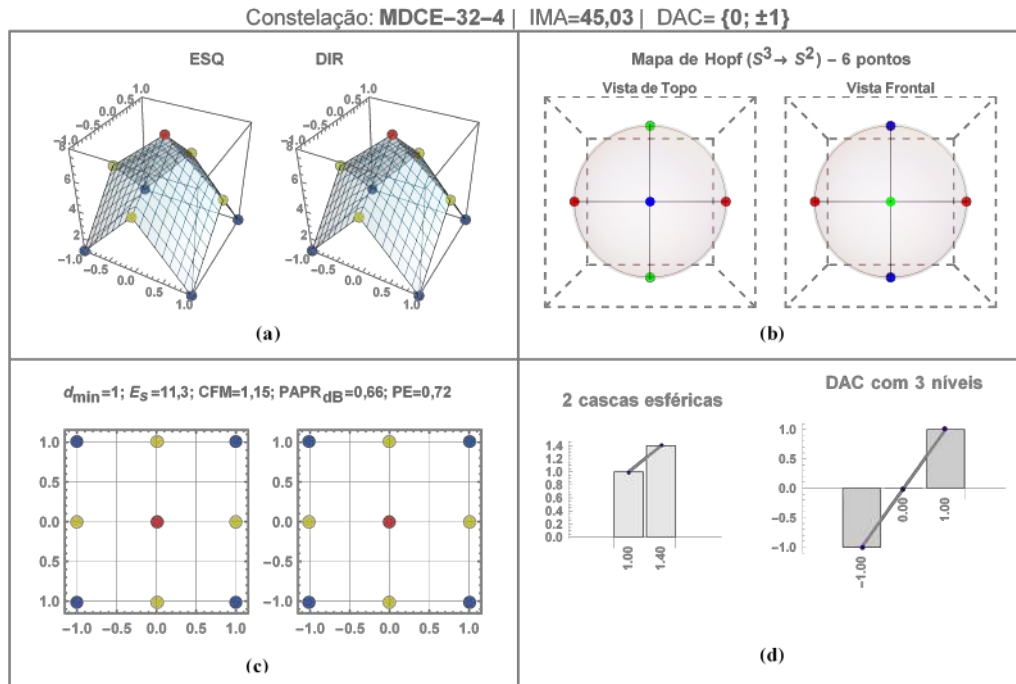


Figura 5.20: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-32-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 6 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 3 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **21%**.

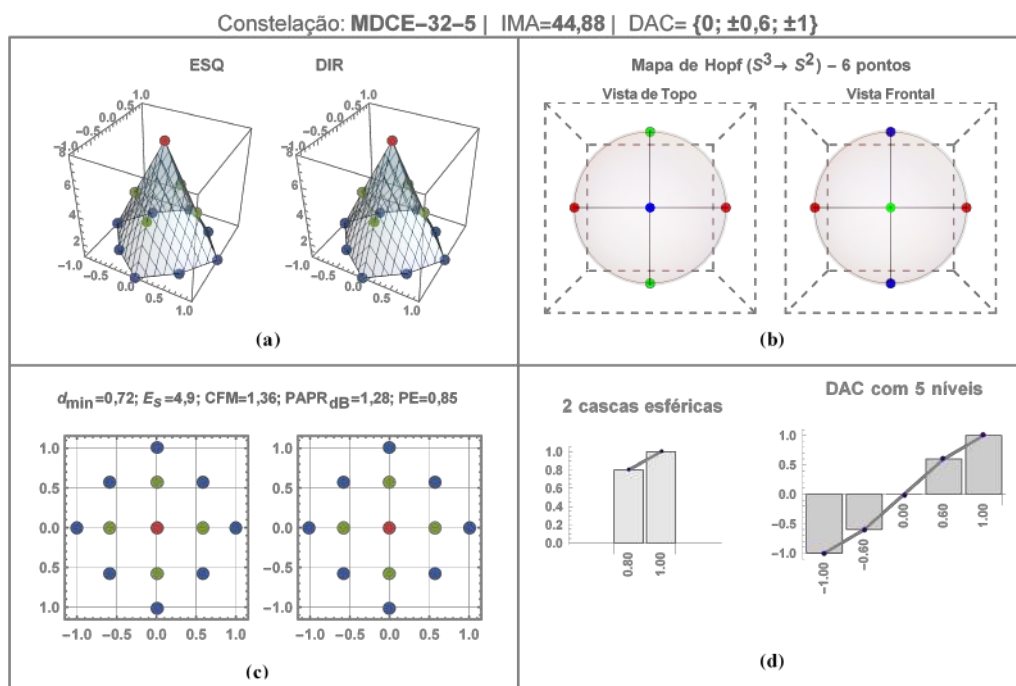


Figura 5.21: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-32-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 6 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **65,7%**.



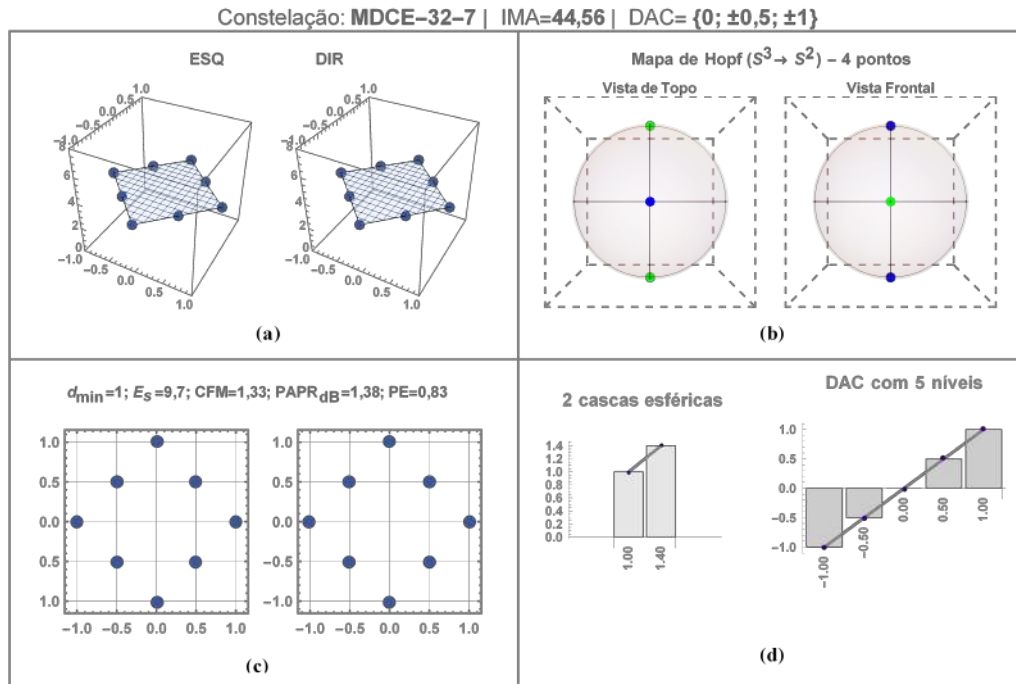


Figura 5.22: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-32-7. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **32,2%**.

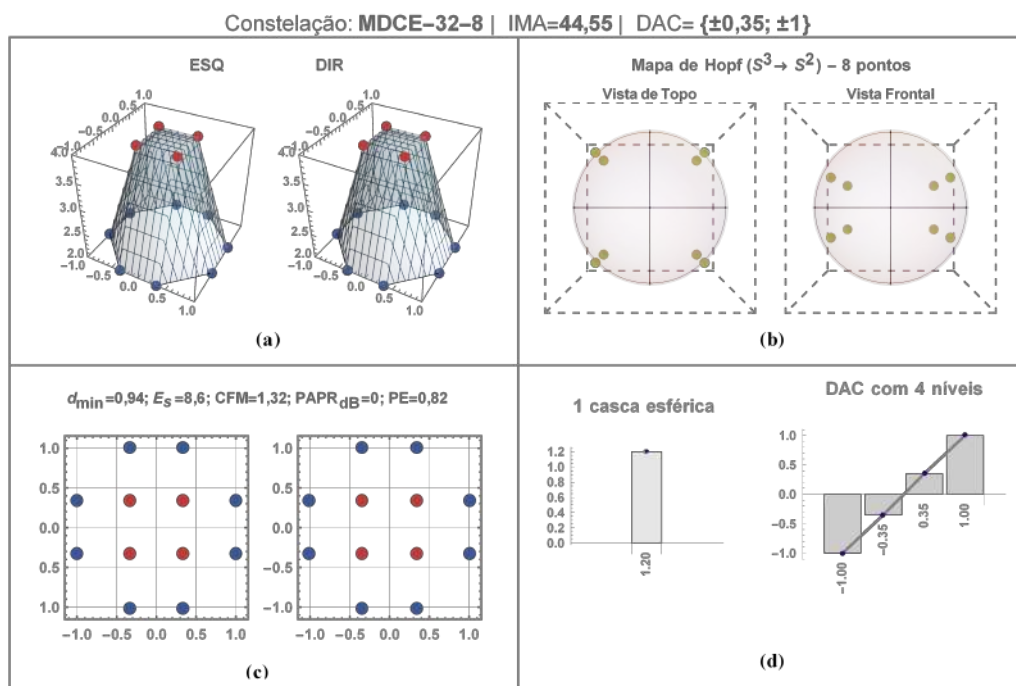


Figura 5.23: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-32-8. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 8 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 4 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **39,9%**.

**Resumo:**

- A constelação MDCE-32-5 tem uma estrutura similar à b4-32, reportada por [177]. Esta constelação guarda também algumas similaridades com a constelação 48cell4-48. Contudo, naquele caso a constelação tem 48 símbolos e não 32 como apresentado neste trabalho;
- A constelação TETRAEDRO-D-NC-8PSK construída pelo método de mapeamento direto de Hopf apresentou um desempenho equivalente (pontuação IMA levemente superior) ao da constelação de referência SP-QAM-4-32. A TETRAEDRO-D-NC-8PSK, apesar de possuir 32 símbolos, possui partições QAM idênticas à modulação Star 16-QAM.
- Observou-se que a C4-32 é uma constelação que apresenta partições QAM extremamente irregulares, com complexidade de implementação maior que a TETRAEDRO-D-NC-8PSK. A TETRAEDRO-D-NC-8PSK necessita de 09 níveis de tensão no DAC e os vetores 4D tem norma constante (ver Figura (5.19 d)).
- A MDCE-32-7 tem o menor mapa de Hopf (4 polarizações), enquanto a MDCE-32-8 não apresentou expansão da constelação constituinte (CER=1).

Tabela 5.3: Tabela comparativa dos principais resultados para **32** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
C4-32-1	45,37	0,84	5,2	<b>-63.6%</b>	1,74	1,48	<b>-1.3 dB</b>	1,08	32	9,25
MDCE-32-2	45,25	1,03	10,6	<b>-25.9%</b>	1,3	1,08	<b>-1.7 dB</b>	0,81	6	1,25
TETRA-D-NC-8PSK-3	45,11	0,86	8,1	<b>-43.4%</b>	1,17	0	<b>-2.78 dB</b>	0,73	8	2,25
MDCE-32-4	45,03	1	11,3	<b>-21.%</b>	1,15	0,66	<b>-2.12 dB</b>	0,72	6	0,75
MDCE-32-5	44,88	0,72	4,9	<b>-65.7%</b>	1,36	1,28	<b>-1.5 dB</b>	0,85	6	1,25
SP-QAM4-32-6	44,77	1,32	14,3	<b>----</b>	1,55	2,78	<b>----</b>	0,97	13	1
MDCE-32-7	44,56	1	9,7	<b>-32.2%</b>	1,34	1,38	<b>-1.4 dB</b>	0,83	4	1,25
MDCE-32-8	44,55	0,94	8,6	<b>-39.9%</b>	1,32	0	<b>-2.78 dB</b>	0,82	8	1

5 constelações selecionadas apresentaram ganho de eficiência energética, sem prejuízo da eficiência espectral. Duas constelações de norma constante (TETRAEDRO-D-NC-8PSK e MDCE-32-8) apresentaram redução de 2,76 dB na PAPR.

## 5.1.4

## Avaliação de capacidade de constelações com 64 símbolos

A constelação de referência utilizada para 64 símbolos foi a PDM-SP-64QAM. As partições QAM, as características de *shaping* e a projeção dos estados de polarização dessa constelação são mostradas na Figura (5.24).

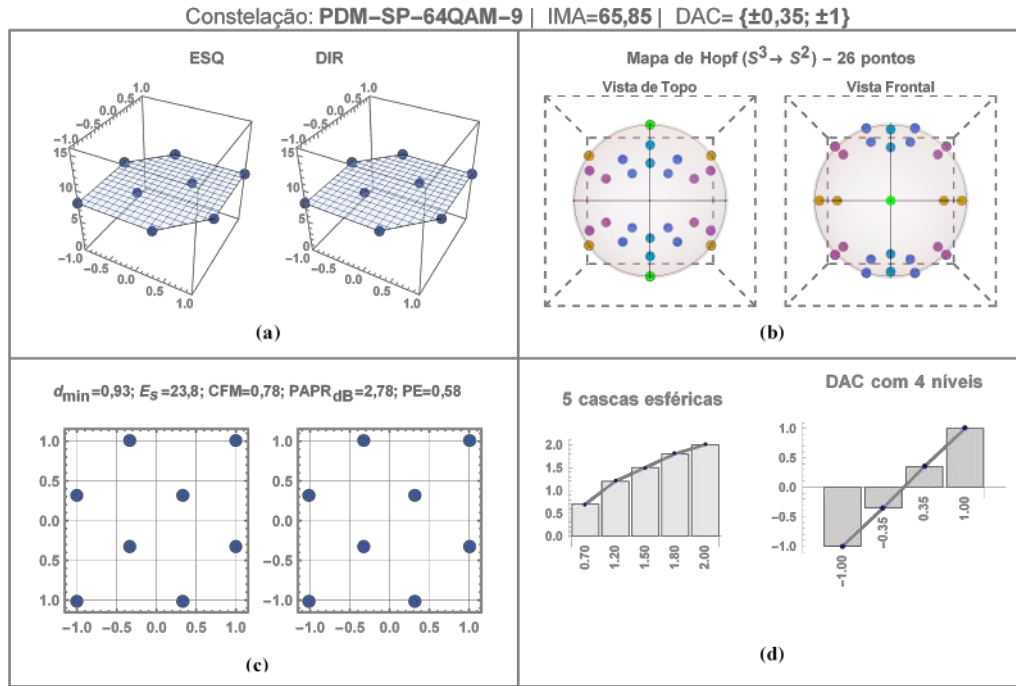


Figura 5.24: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PDM-SP-64QAM-9. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 26 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 4 níveis de tensão do DAC.

A PDM-SP-64QAM projeta 26 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 4 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 5 normas diferentes (ver Figura(5.24d)). Os histogramas das partições demonstram que a PDM-SP-64QAM tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 8 para todos os símbolos particionados. A **PAPR<sub>dB</sub>** da norma dos símbolos 4D é **2,78 dB** com  **$E_s=23,8$** . Os cálculos de IM para transmissão de 64 símbolos são exibidos na Figura (5.25). As figuras (5.26), (5.27), (5.28), (5.29), (5.30), (5.31), (5.32) e (5.33) exibem as características das constelações selecionadas.

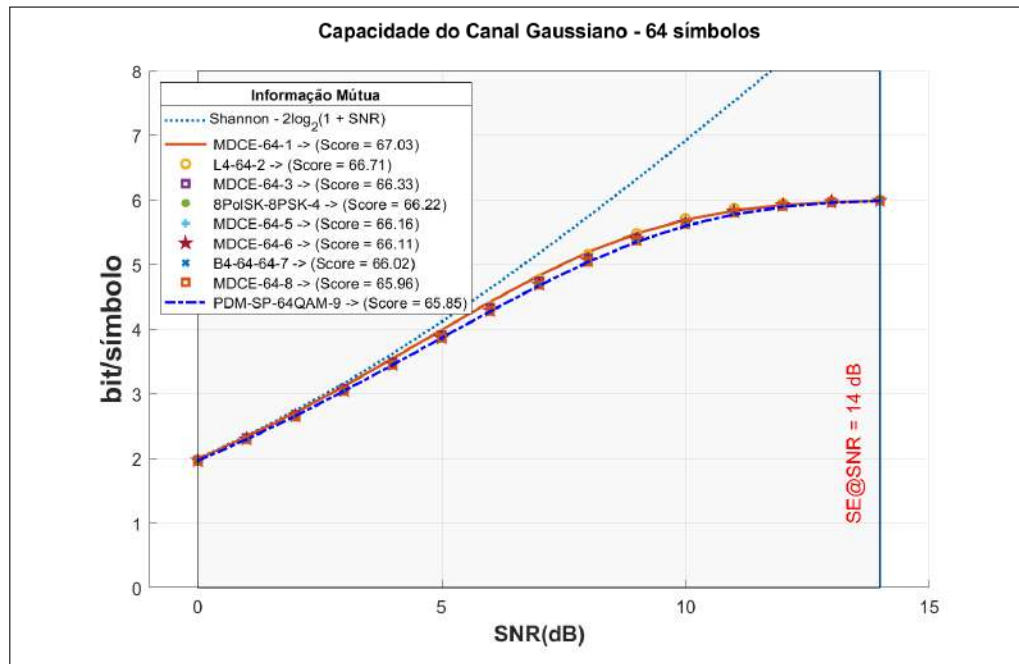


Figura 5.25: Cálculo da informação mútua de constelações com 64 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 08 constelações candidatas para transmissão de 64 símbolos com SNR limite de **14 dB**: A constelação que apresentou melhor desempenho da IM comparado com a PDM-16QAM foi a MDCE-64-1.

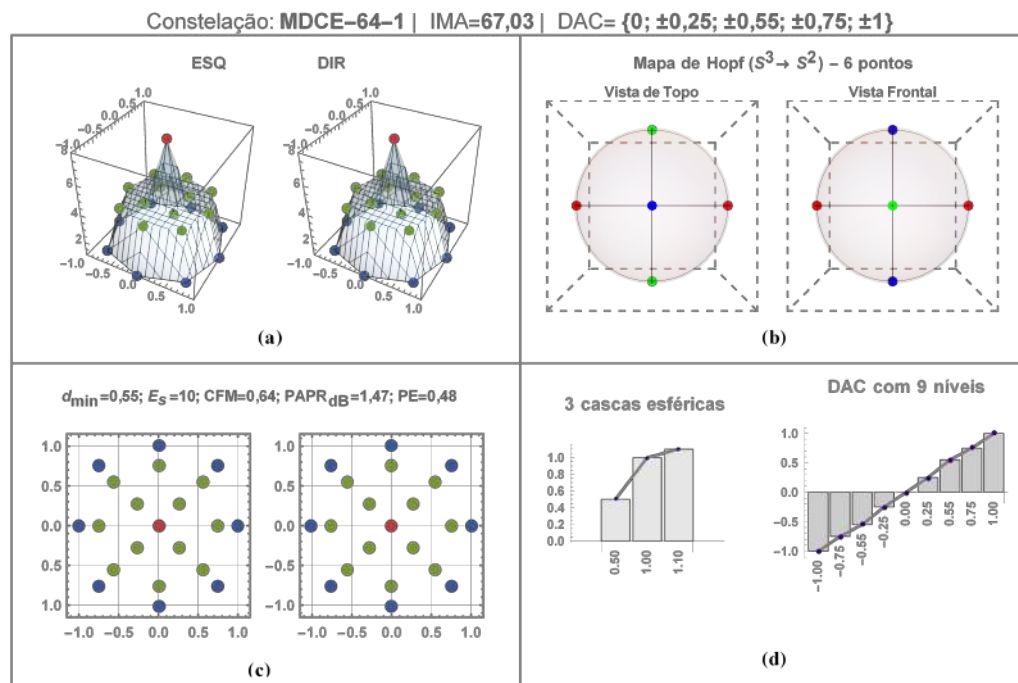


Figura 5.26: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-64-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 6 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 3 cascas esféricas da modulação e os 9 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **58%**.

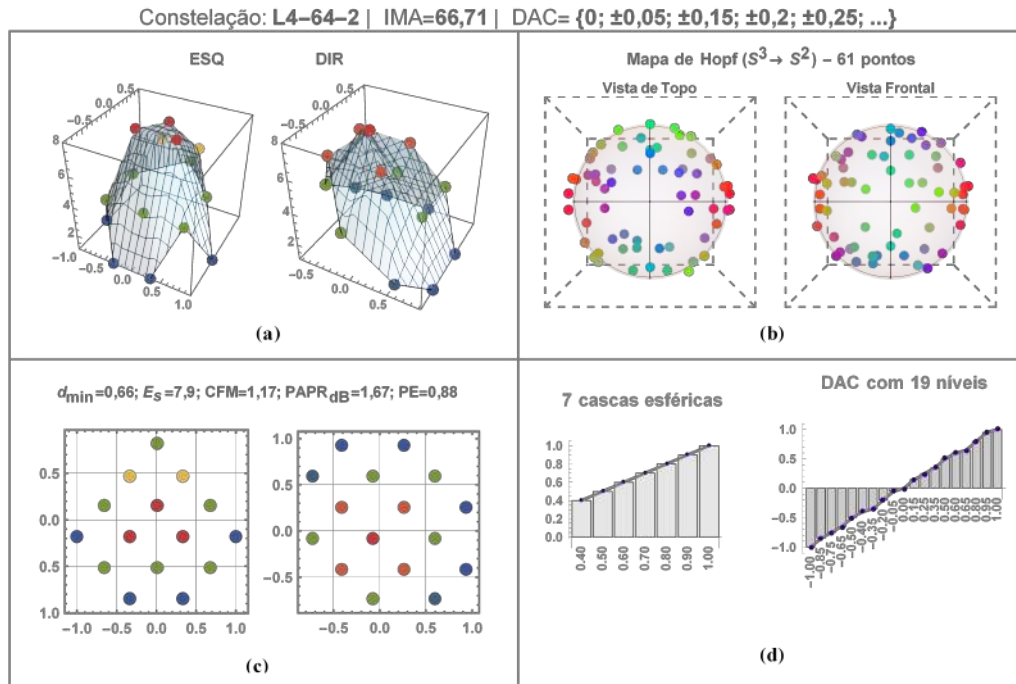


Figura 5.27: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da L4-64-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 61 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 7 cascas esféricas da modulação e os 19 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **66,8%**.

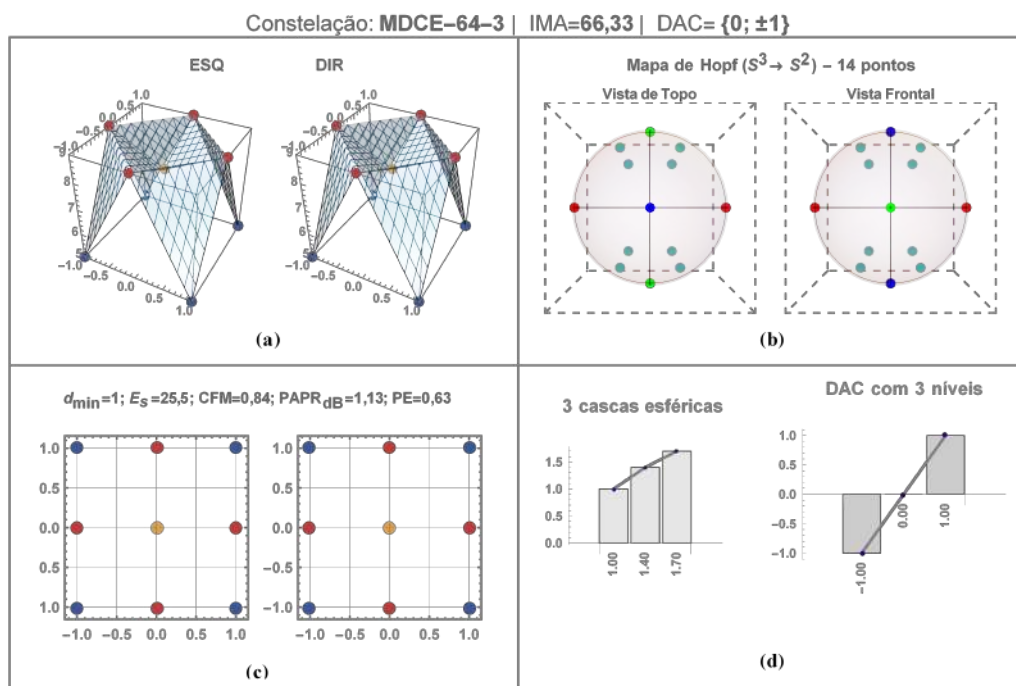


Figura 5.28: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-64-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 14 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 3 cascas esféricas da modulação e os 3 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **elevada** em **7,1%**.

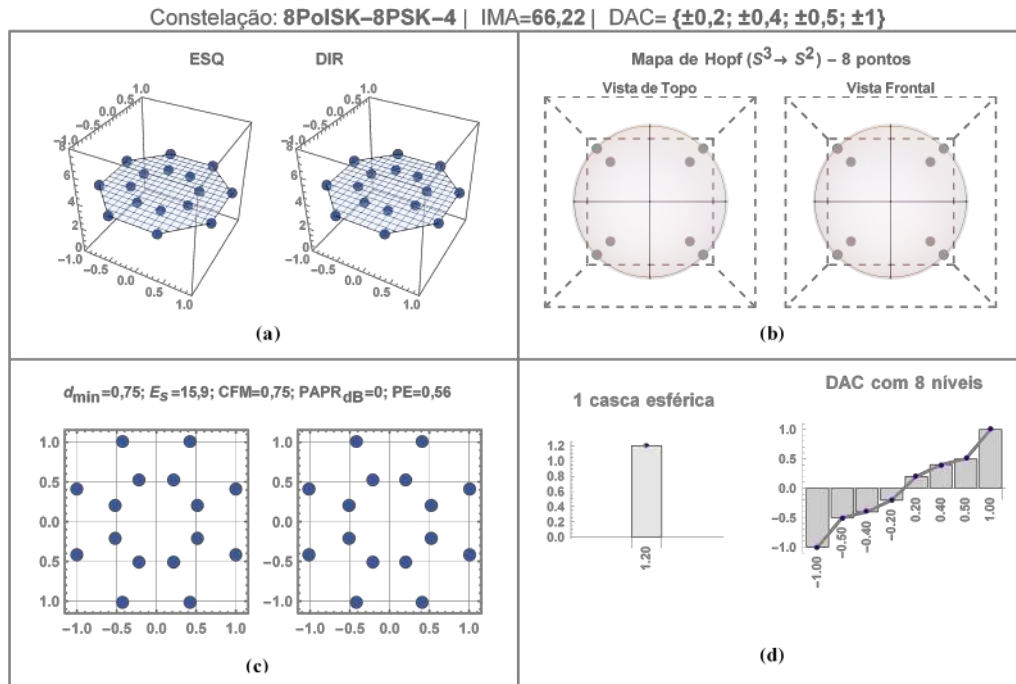


Figura 5.29: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da 8PolSK-8PSK-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 8 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 8 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **33,2%**.

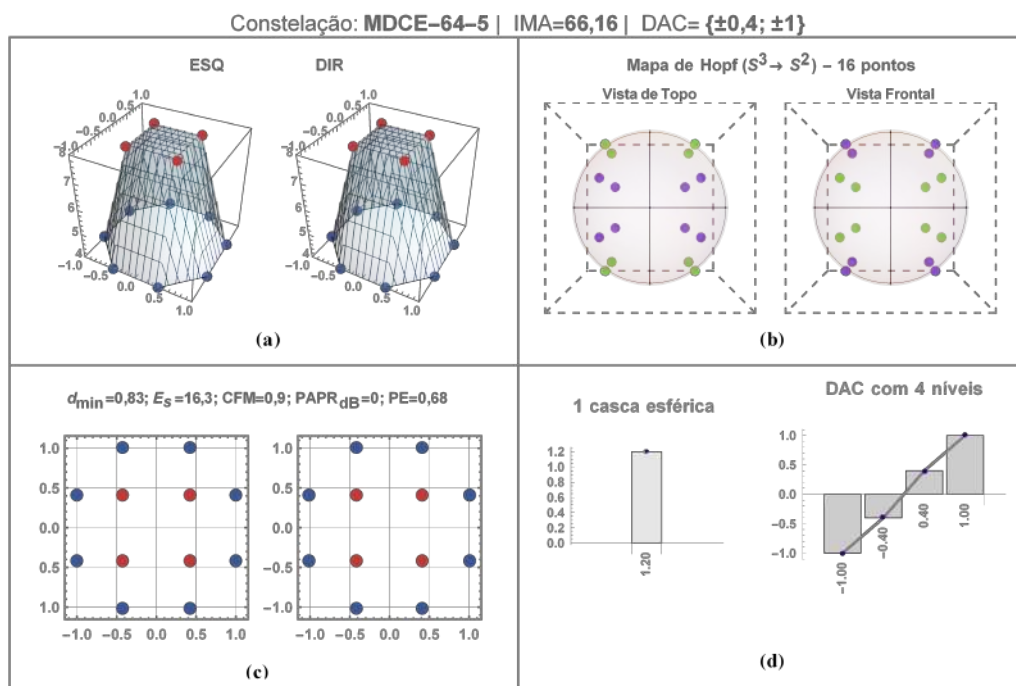


Figura 5.30: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-64-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 16 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 4 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **31,5%**.



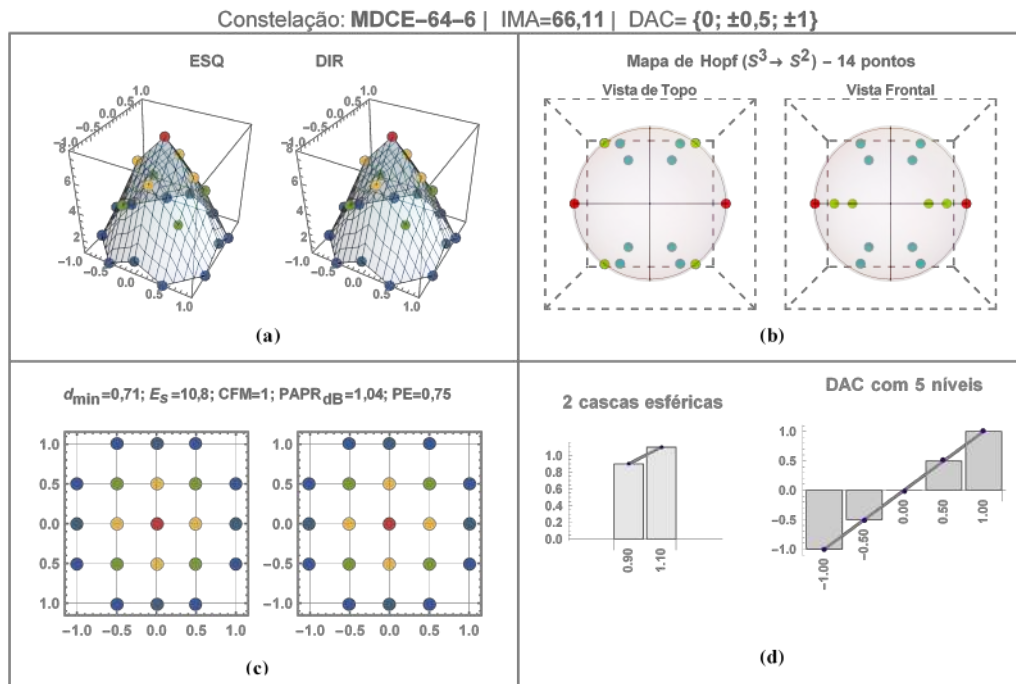


Figura 5.31: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-64-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 14 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **54,6%**.

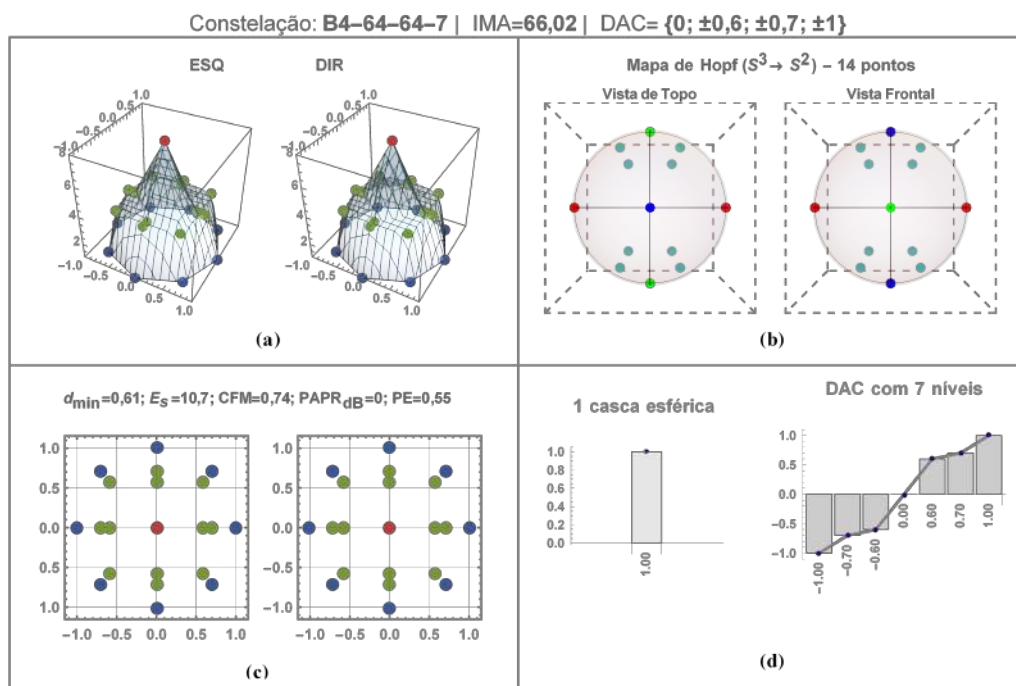


Figura 5.32: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da B4-64-64-7. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 14 vértices na esfera Poincaré. (d) A modulação tem 1 casca esférica e 7 níveis de tensão para o DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **55%**.

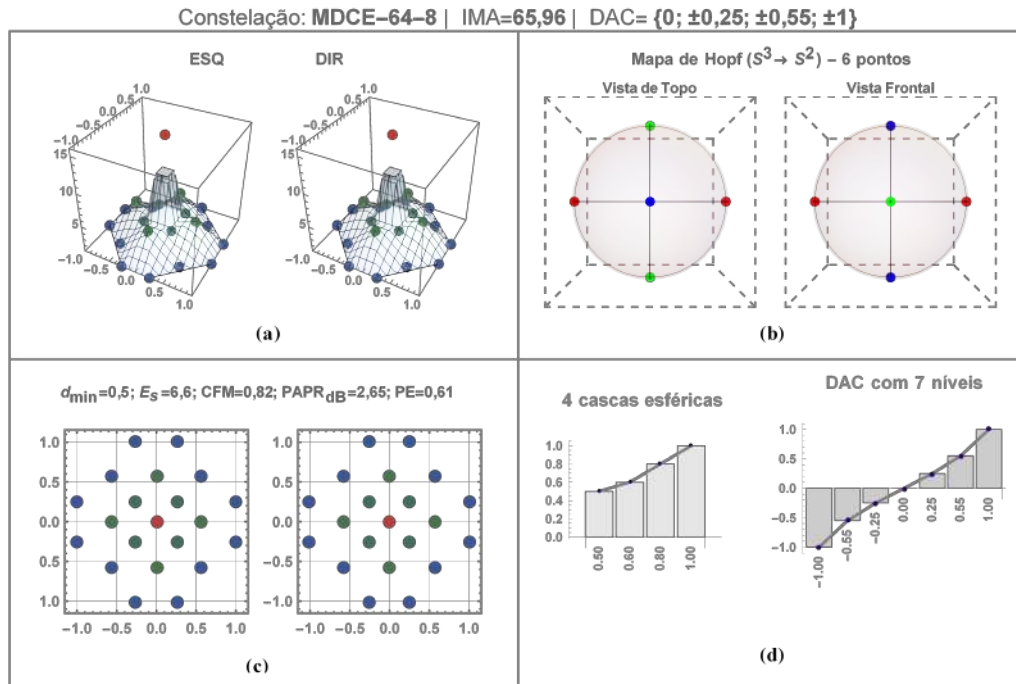


Figura 5.33: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-64-8. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 6 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **72,3%**.

### Resumo:

- A MDCE-64-1 já está documentada na literatura [177]. Esta constelação foi obtida pelo método do vetor inicial desenvolvido nesta tese e mostrado na Seção (4.4.3). A base da fibração Hopf foi o reticulado de Boltzmann D3Q27;
- A constelação 8PolSK-8PSK foi obtida tanto pelo método da fibração inversa quanto pelo método MDCE;
- A constelação MDCE-64-1 superou levemente a pontuação da IMA da L4-64. Esse resultado é relevante, dado que a L4-64 é uma modulação eficiente para 64 símbolos;
- A simetria do mapa de Hopf da MDCE-64-5 permite que a mesma seja utilizada para a construção de uma modulação 8D. Esta constelação não apresentou expansão da constelação constituinte (CER=1);
- Uma redução de 72,3% na  $E_s$  foi obtida com a MDCE-64-8.



Tabela 5.4: Tabela comparativa dos principais resultados para **64** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-64-1	67,03	0,55	10	<b>-58.%</b>	0,64	1,47	<b>-1.31 dB</b>	0,48	6	2,25
L4-64-2	66,71	0,66	7,9	<b>-66.8%</b>	1,17	1,67	<b>-1.11 dB</b>	0,88	61	4,75
MDCE-64-3	66,33	1	25,5	<b>7.1%</b>	0,84	1,13	<b>-1.65 dB</b>	0,63	14	0,75
8PolSK-8PSK-4	66,22	0,75	15,9	<b>-33.2%</b>	0,75	0	<b>-2.78 dB</b>	0,56	8	2
MDCE-64-5	66,16	0,83	16,3	<b>-31.5%</b>	0,9	0	<b>-2.78 dB</b>	0,68	16	1
MDCE-64-6	66,11	0,71	10,8	<b>-54.6%</b>	1	1,04	<b>-1.74 dB</b>	0,75	14	1,25
B4-64-64-7	66,02	0,61	10,7	<b>-55.%</b>	0,74	0	<b>-2.78 dB</b>	0,55	14	1,75
MDCE-64-8	65,96	0,5	6,6	<b>-72.3%</b>	0,82	2,65	<b>-0.13 dB</b>	0,61	6	1,75
PDM-SP-64QAM-9	65,85	0,93	23,8	<b>----</b>	0,78	2,78	<b>----</b>	0,58	26	1

Todas as constelações selecionadas apresentaram ganho de eficiência energética, sem prejuízo da eficiência espectral. Três constelações de norma constante (8PolSK-8PSK-4, MDCE-64-5 e B4-64-64) apresentaram redução de 2,78 dB na PAPR.

## 5.1.5

## Avaliação de capacidade de constelações com 128 símbolos

A constelação de referência utilizada para 128 símbolos foi a PDM-SP-128QAM. As partições QAM, as características de *shaping* e a projeção dos estados de polarização dessa constelação são mostradas na Figura (5.34).

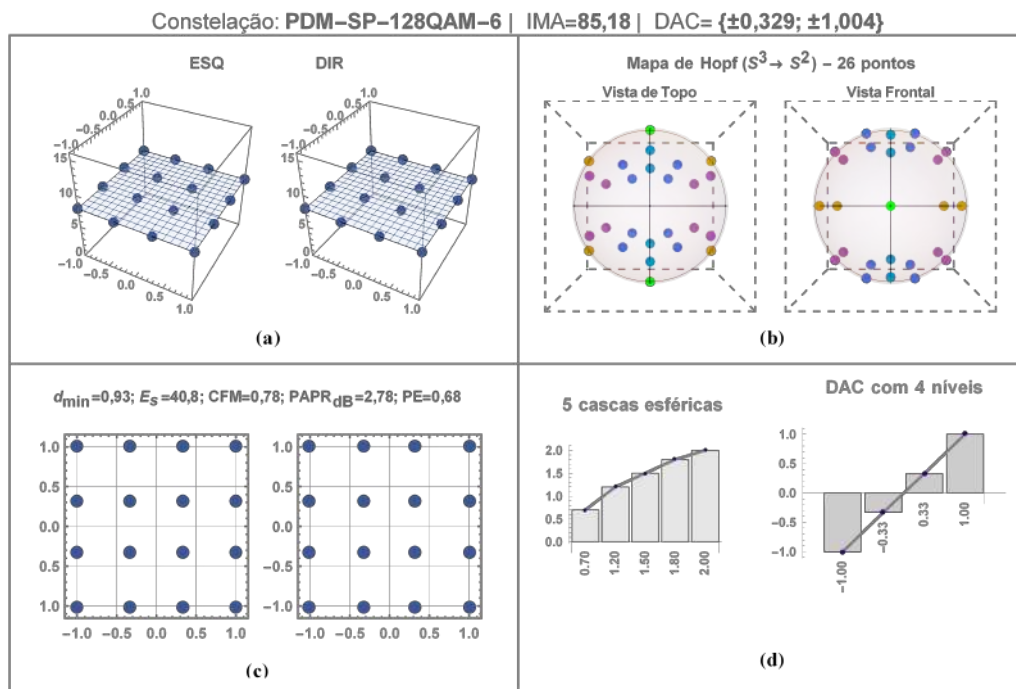


Figura 5.34: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PDM-SP-128QAM-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 26 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 4 níveis de tensão do DAC.

A PDM-SP-128QAM projeta 26 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 4 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 5 normas diferentes (ver Figura(5.34d)). Os histogramas das partições demonstram que a PDM-SP-128QAM tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 8 para todos os símbolos particionados. A  $\text{PAPR}_{\text{dB}}$  da norma dos símbolos 4D é **2,78 dB** com  $E_s=40,8$ . Os cálculos de IM para transmissão de 128 símbolos são exibidos na Figura (5.35). As figuras (5.36), (5.37), (5.38), (5.39), (5.40), (5.41), (5.42) exibem as características das constelações selecionadas.

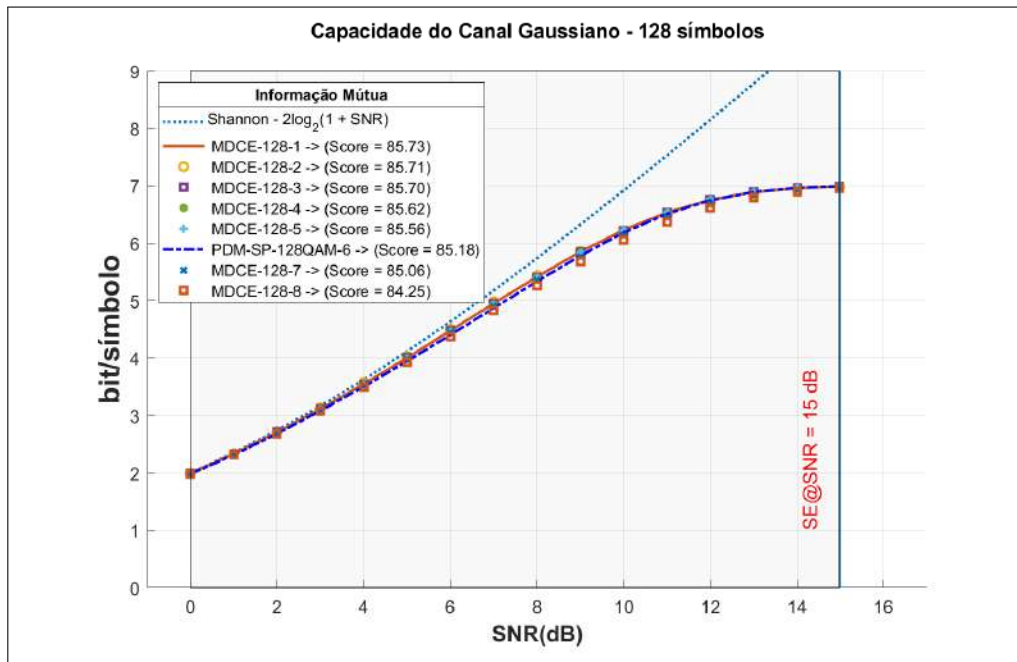


Figura 5.35: Cálculo da informação mútua de constelações com 128 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 7 constelações candidatas para transmissão de 128 símbolos com SNR limite de **15 dB**. A constelação MDCE-128-1 apresentou melhor desempenho da IM comparado com a PDM-16QAM.

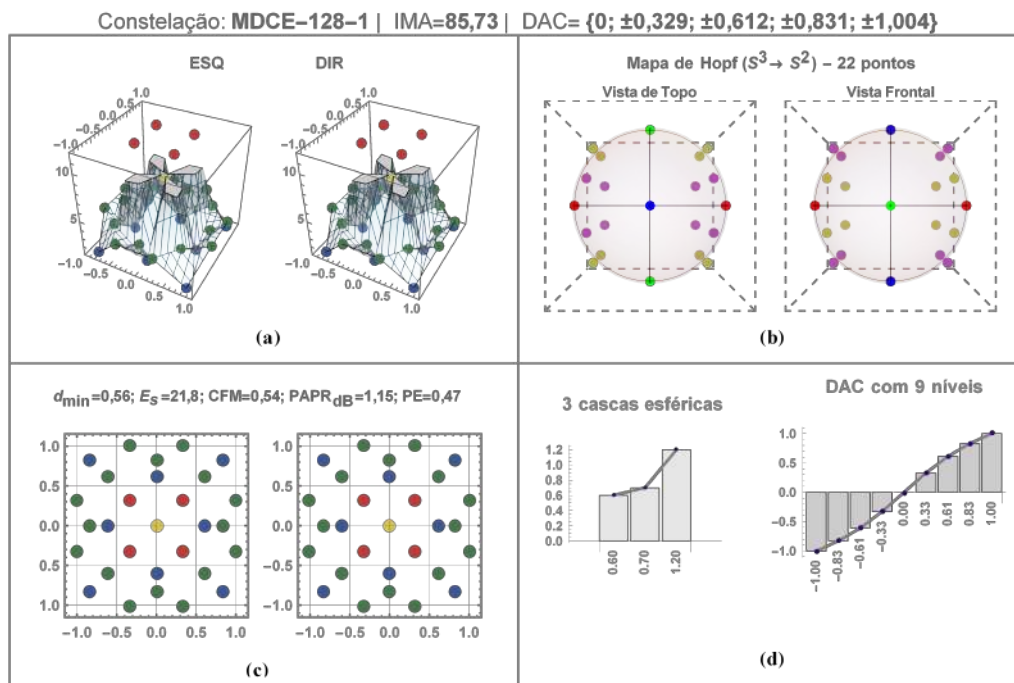


Figura 5.36: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 22 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 3 cascas esféricas da modulação e os 9 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida em 46,6%**.

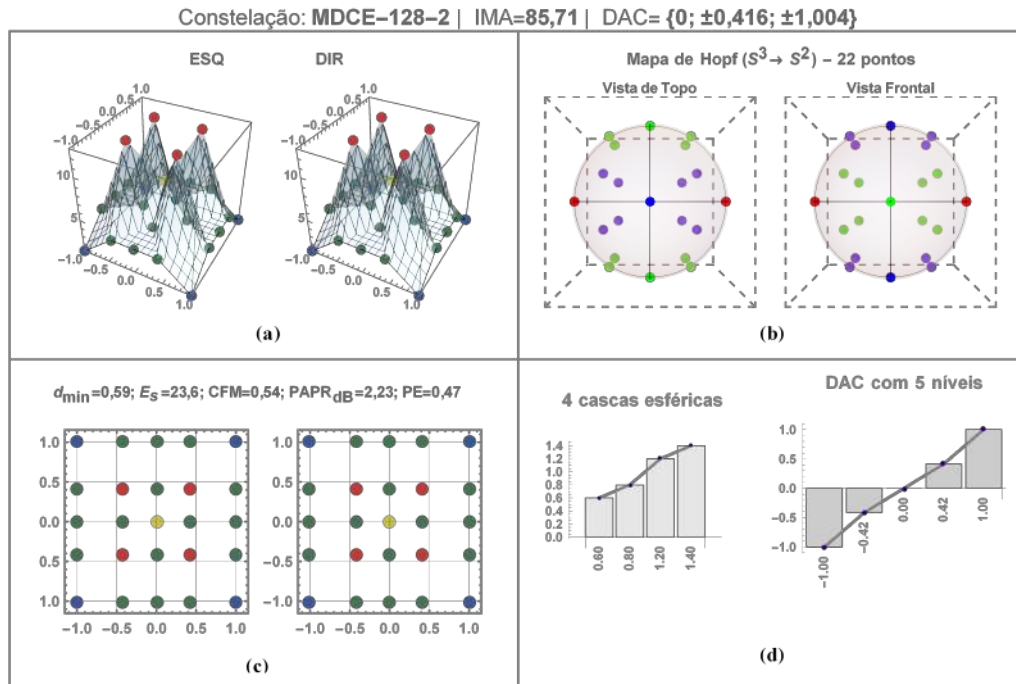


Figura 5.37: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 22 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **42,2%**.

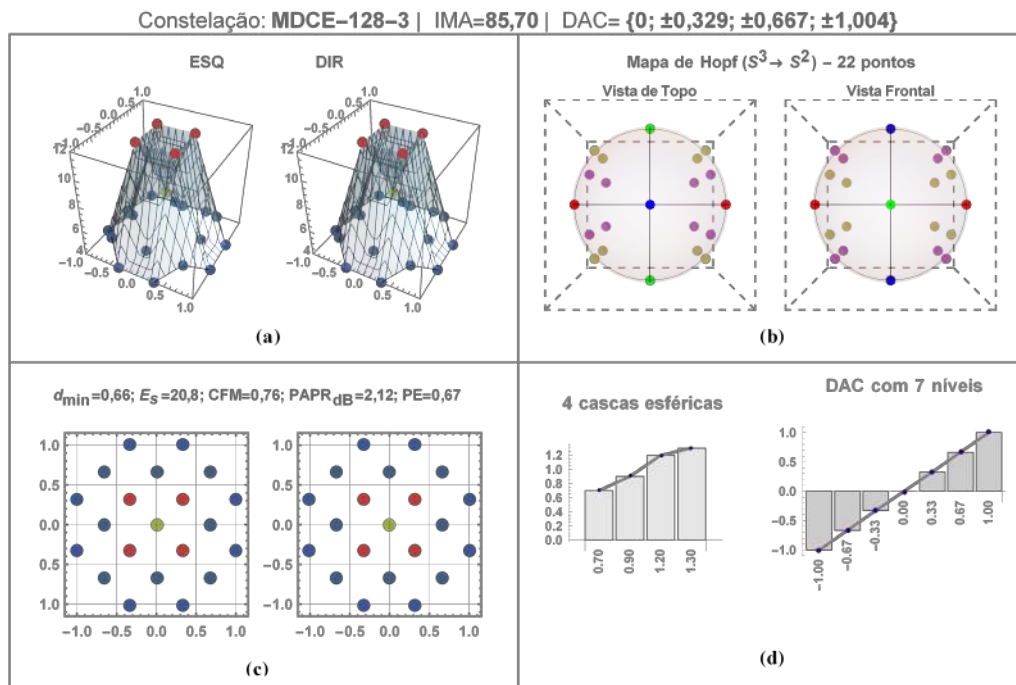


Figura 5.38: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 22 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **49%**.

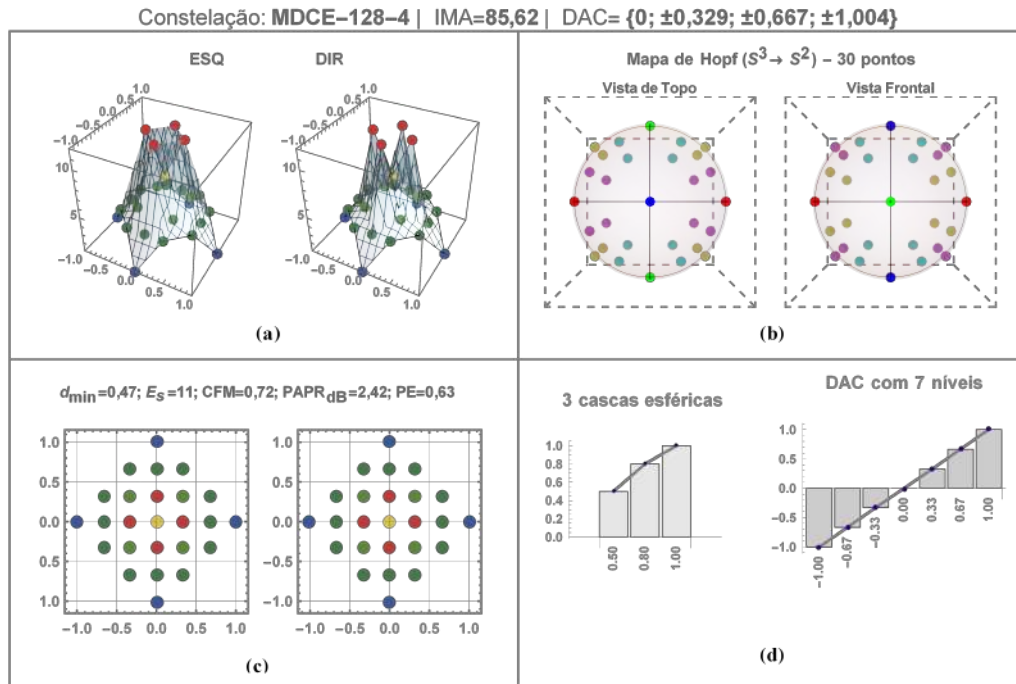


Figura 5.39: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 30 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 3 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **73%**.

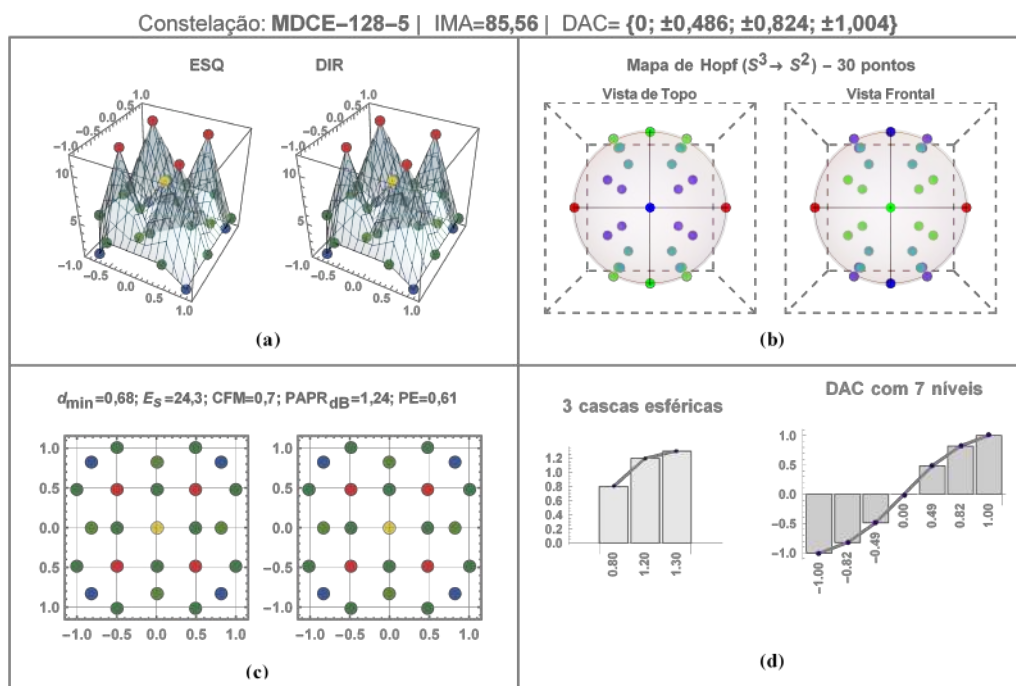


Figura 5.40: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 30 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 3 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **40,4%**.

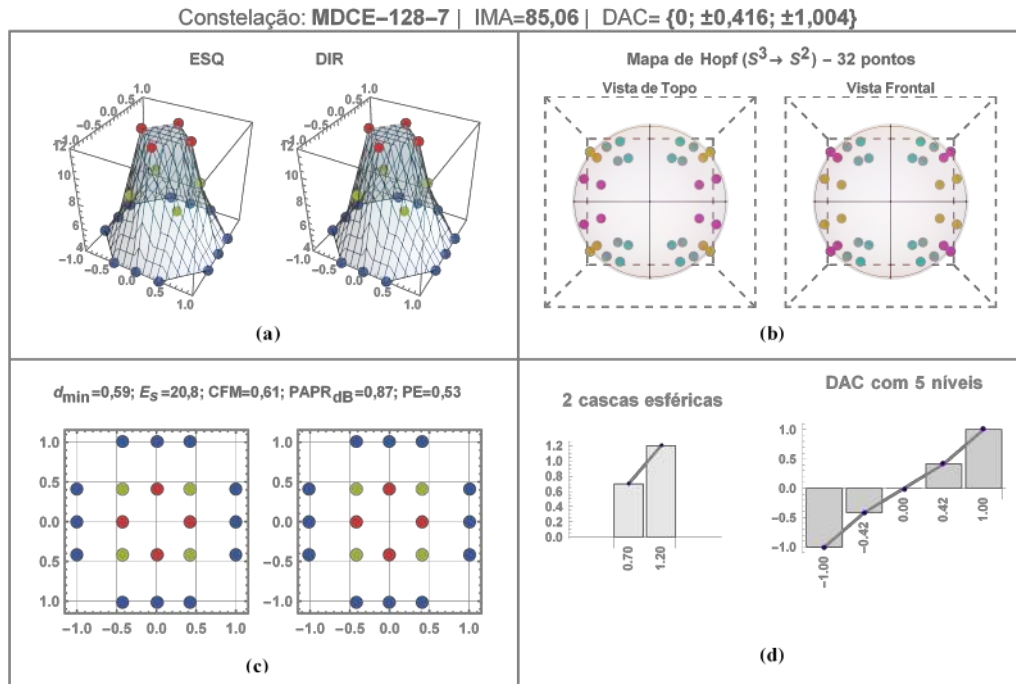


Figura 5.41: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-7. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 32 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em 49%.

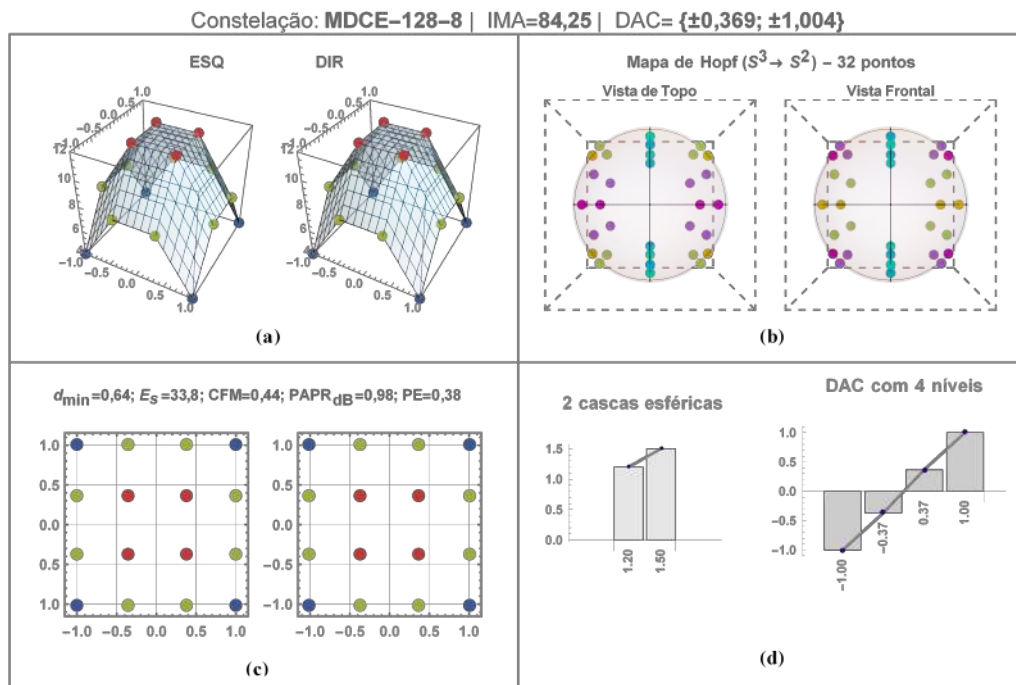


Figura 5.42: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-128-8. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 32 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 2 cascas esféricas da modulação e os 4 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em 17,2%.



**Resumo:**

- Cinco constelações selecionadas apresentaram ganho de eficiência energética em relação à PDM-SP-128QAM. O ganho de eficiência energética foi obtido sem prejuízo da eficiência espectral. É importante notar que, a PDM-SP-128QAM é considerada uma modulação de alto desempenho;
- A MDCE-128-1 apresentou características mais adequadas para transmissão em um arranjo adaptativo. Esta constelação projeta 22 estados de polarização, necessita de um DAC com 09 níveis e tem uma projeção QAM simétrica. Uma característica relevante dessa constelação é a forma de tangente hiperbólica ( $\tanh$ ) do DAC. A função  $\tanh$  pertence à classe das sigmóides e, de modo geral, uma forma de  $\tanh$  em um plano 2D (amplitudes) gera uma estrutura de esferas (círculos concêntricos) com distância regular no espaço 3D (polarização). Os 22 vértices do mapa de Hopf da MDCE-128-1 fazem parte uma estrutura de vértices embutidos (ver Seção (5.4));
- A MDCE-128-9 não apresentou expansão da constelação constituinte (CER=1).

Tabela 5.5: Tabela comparativa dos principais resultados para **128** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-128-1	85,73	0,57	21,8	<b>-46.6%</b>	0,54	1,16	<b>-1.62 dB</b>	0,47	22	2,25
MDCE-128-2	85,71	0,59	23,6	<b>-42.2%</b>	0,54	2,23	<b>-0.55 dB</b>	0,47	22	1,25
MDCE-128-3	85,70	0,66	20,8	<b>-49.%</b>	0,76	2,12	<b>-0.66 dB</b>	0,66	22	1,75
MDCE-128-4	85,62	0,47	11	<b>-73.%</b>	0,72	2,42	<b>-0.36 dB</b>	0,63	30	1,75
MDCE-128-5	85,56	0,68	24,3	<b>-40.4%</b>	0,7	1,24	<b>-1.54 dB</b>	0,61	30	1,75
PDM-SP-128QAM-6	85,18	0,93	40,8	<b>----</b>	0,78	2,78	<b>----</b>	0,68	26	1
MDCE-128-7	85,06	0,59	21	<b>-48.5%</b>	0,6	0,87	<b>-1.91 dB</b>	0,53	32	1,25
MDCE-128-8	84,25	0,64	33,8	<b>-17.2%</b>	0,44	0,98	<b>-1.8 dB</b>	0,38	32	1

**Importante:** Uma observação atenta aos mapas de Hopf, revela que a maioria das constelações listadas projetam sobre uma estrutura de *vértices embutidos* com até 30 pontos na esfera de Poincaré. As exceções são MDCE-128-7, MDCE-128-8 e MDCE-128-9.

## 5.1.6

## Avaliação de capacidade de constelações com 256 símbolos

A constelação de referência utilizada para 256 símbolos foi a PDM-16QAM. As partições QAM, as características de *shaping* e a projeção dos estados de polarização dessa constelação são mostradas na Figura (5.43).

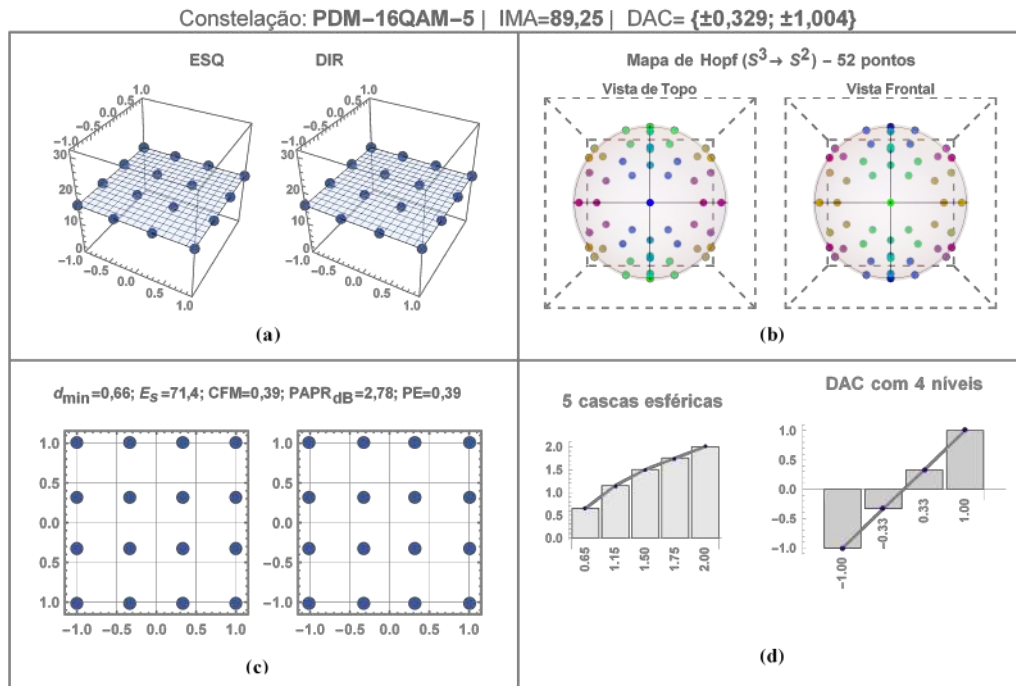


Figura 5.43: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PDM-16QAM-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 52 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 4 níveis de tensão do DAC.

A PDM-16QAM projeta 52 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 4 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 5 normas diferentes (ver Figura (5.43 d)). Os histogramas das partições demonstram que a PDM-16QAM tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 16 para todos os símbolos particionados. A **PAPR<sub>dB</sub>** da norma dos símbolos 4D é **2,78 dB** com  **$E_s=71,4$** . Os cálculos de IM para transmissão de 256 símbolos são exibidos na Figura (5.44). As figuras (5.45), (5.46), (5.47), (5.48) e (5.49) exibem as características das constelações selecionadas.



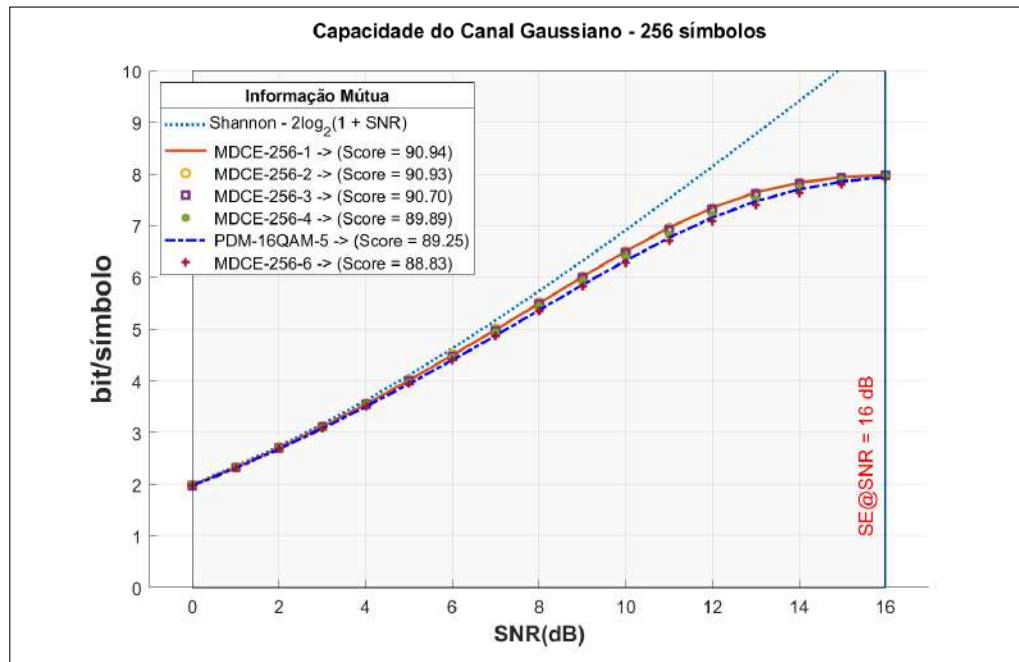


Figura 5.44: Cálculo da informação mútua de constelações com 256 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 05 constelações candidatas para transmissão de 256 símbolos com uma SNR limite de **16 dB**. A constelação que apresentou melhor desempenho comparado com a PDM-16QAM foi a MDCE-256-1.

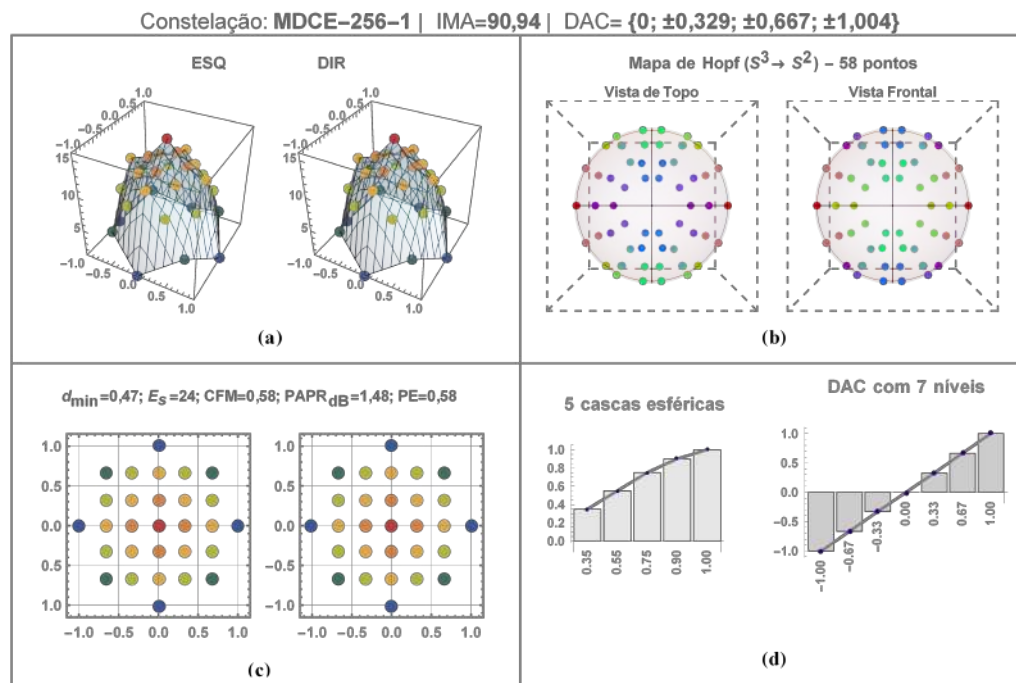


Figura 5.45: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 58 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **66,4%**.

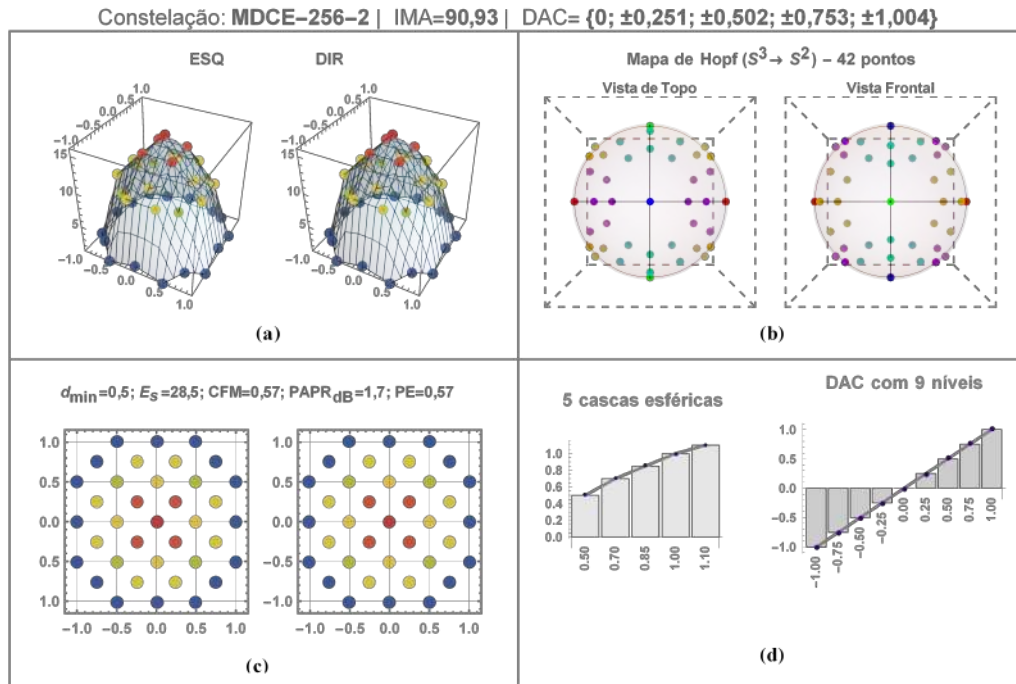


Figura 5.46: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 42 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 9 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **60,1%**.

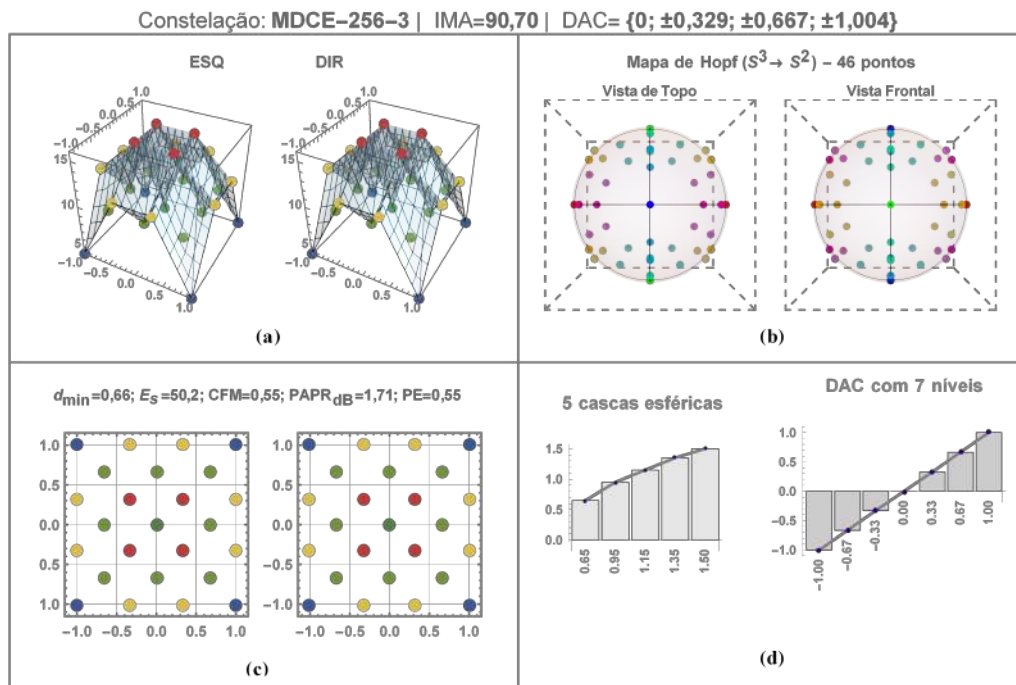


Figura 5.47: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 46 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **29,7%**.

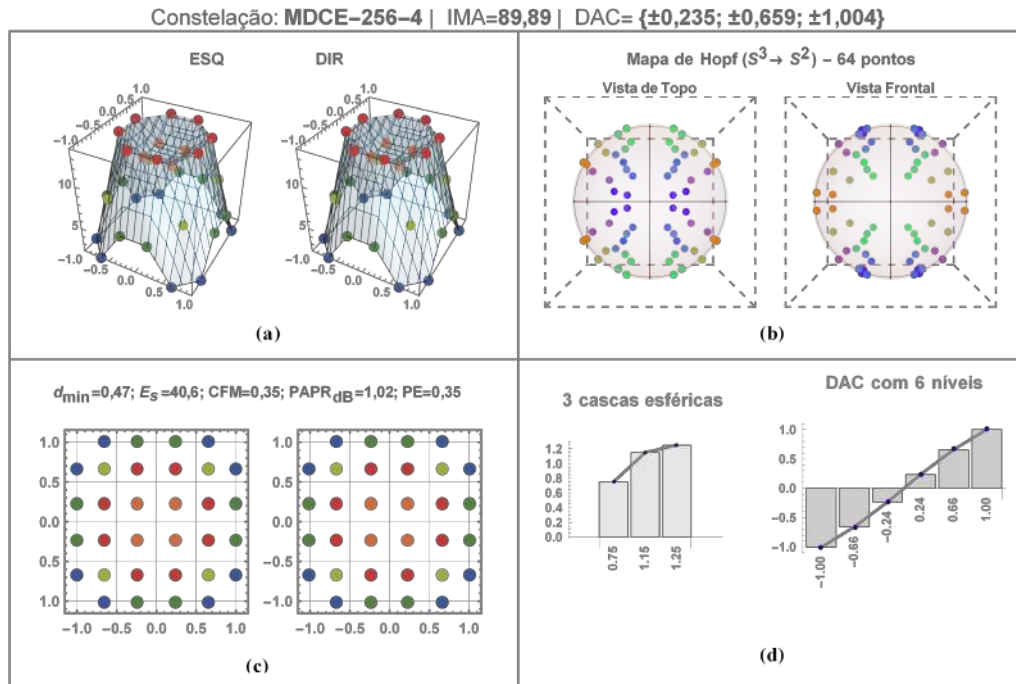


Figura 5.48: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 64 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 3 cascas esféricas da modulação e os 6 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **43,1%**.

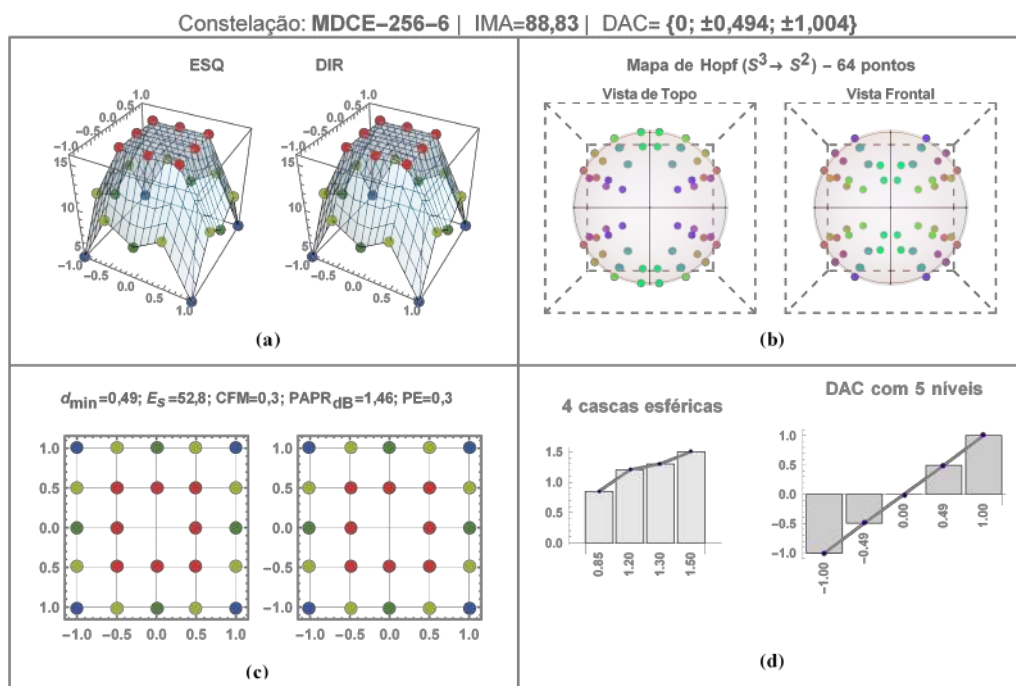


Figura 5.49: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-256-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 64 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 5 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **26,1%**.

**Resumo:**

- Com base nos resultados, observou-se que a MDCE-256-1 é uma versão multinorma da constelação **a4-256-256** já documentada na literatura [177]. A diferença entre as duas geometrias reside na  $E_s=24$  da MDCE-256-1 contra  $E_s=31,17$  da **a4-256-256**. Portanto, a MDCE-256-1 exibiu um ganho energético (redução da  $E_s$ ) de 23%, mantendo a eficiência espectral.
- Todas as constelações selecionadas são um bom exemplo de desempenho e ganho de forma. Além disso, apresentaram desempenho superior de eficiência energética e PAPR quando comparadas com a referência PDM-16QAM.
- Com exceção da MDCE-256-6, todas as constelações apresentaram IM equivalente. A MDCE-256-6 apresentou a menor expansão (CER=1,25). O mapa de Hopf da MDCE-256-4 e da MDCE-256-6 tem 64 símbolos, ou seja ( $256 \div 4$ ).

Tabela 5.6: Tabela comparativa dos principais resultados para **256** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-256-1	90,94	0,47	24	<b>-66.4%</b>	0,58	1,48	<b>-1.3 dB</b>	0,58	60	1,75
MDCE-256-2	90,93	0,5	28,5	<b>-60.1%</b>	0,57	1,7	<b>-1.08 dB</b>	0,57	42	2,25
MDCE-256-3	90,70	0,66	50,2	<b>-29.7%</b>	0,55	1,71	<b>-1.07 dB</b>	0,55	50	1,75
MDCE-256-4	89,89	0,47	40,6	<b>-43.1%</b>	0,35	1,02	<b>-1.76 dB</b>	0,35	64	1,5
PDM-16QAM-5	89,25	0,66	71,4	----	0,39	2,78	----	0,39	56	1
MDCE-256-6	88,83	0,49	52,8	<b>-26.1%</b>	0,3	1,46	<b>-1.32 dB</b>	0,3	64	1,25

Conforme já foi observado, o método MDCE permite o projeto de constelações com um fator proporcional inteiro entre o número de símbolos e o mapa de Hopf.

## 5.1.7

## Avaliação de capacidade de constelações com 512 símbolos

A constelação de referência utilizada para 512 símbolos foi a SP-QAM4-512 reportada em [177]. As partições QAM, as características de *shaping* e a projeção dos estados de polarização dessa constelação são mostradas na Figura (5.50).

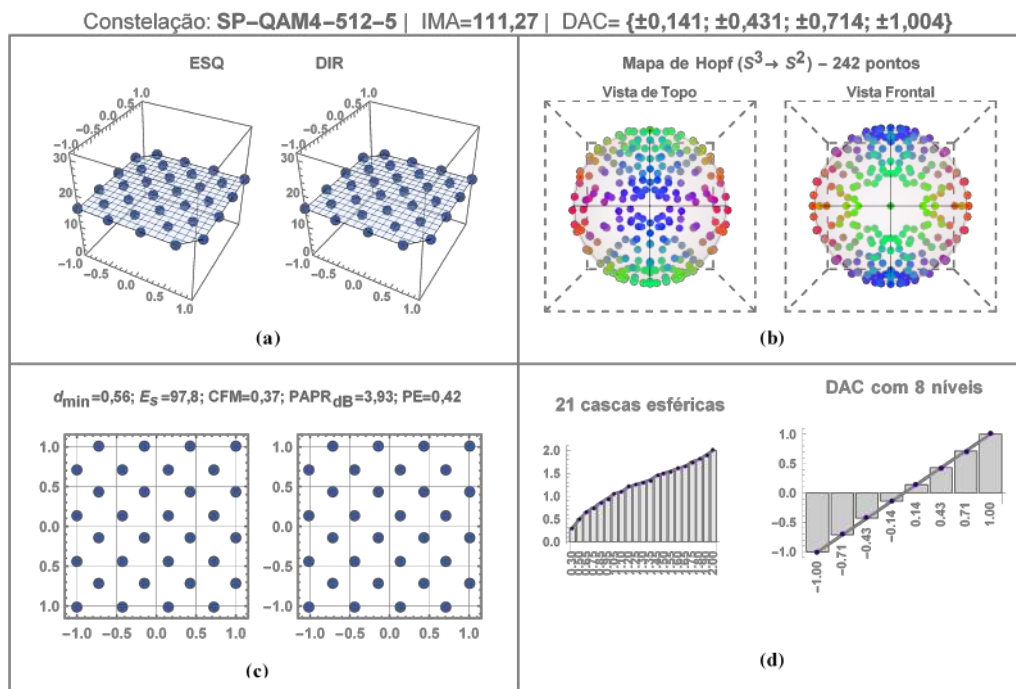


Figura 5.50: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da SP-QAM4-512-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 242 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 21 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC.

A SP-QAM4-512 projeta 242 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 8 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 21 normas diferentes (ver Figura(5.50 d)). Os histogramas das partições demonstram que a SP-QAM4-512 tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 16 para todos os símbolos particionados. A  $\text{PAPR}_{\text{dB}}$  da norma dos símbolos 4D é **3,93 dB** com  $E_s=97,8$ . Os cálculos de IM para transmissão de 512 símbolos são exibidos na Figura(5.51). As figuras (5.52), (5.53), (5.54), (5.55) e (5.56) exibem as características das constelações selecionadas.



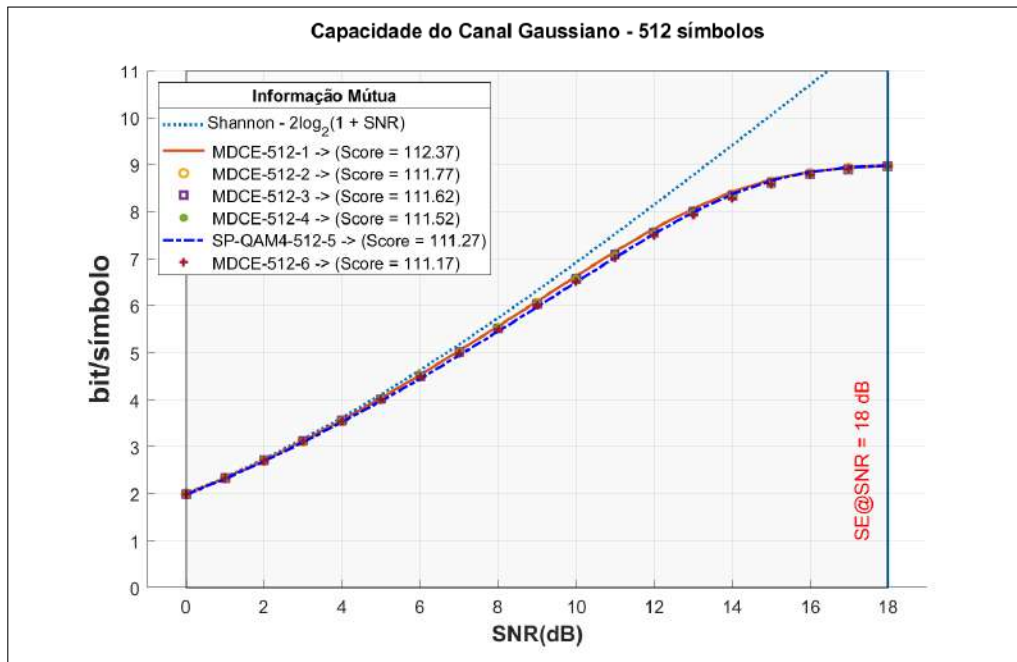


Figura 5.51: Cálculo da informação mútua de constelações com 512 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 05 constelações candidatas para transmissão de 512 símbolos com SNR limite de **18 dB**. Todas as constelações listadas a seguir apresentaram PAPR abaixo da SP-QAM4-512.

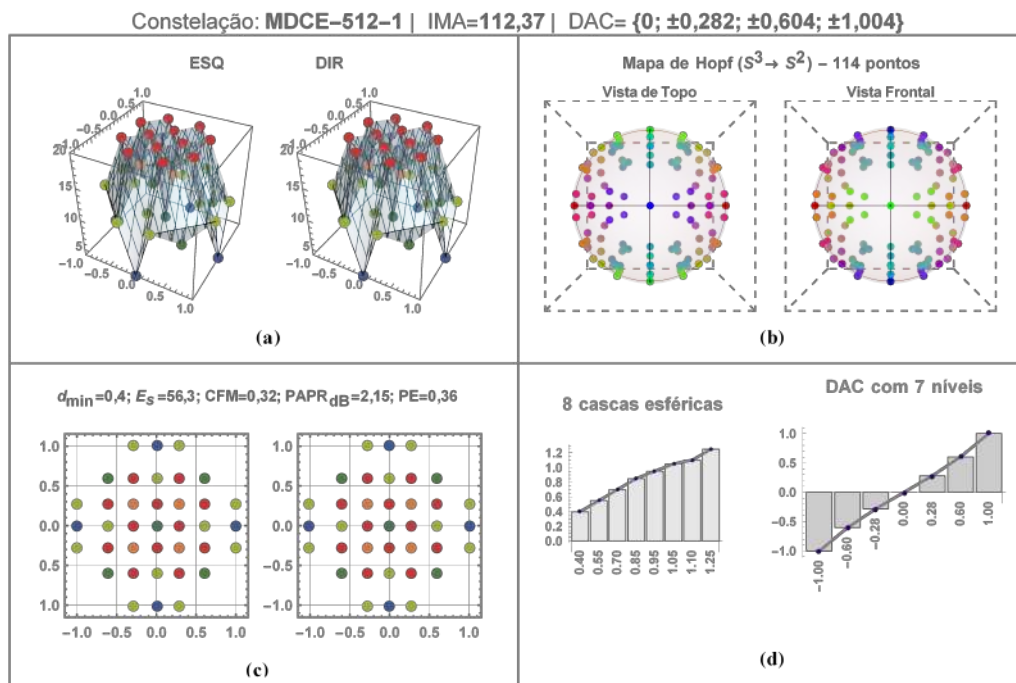


Figura 5.52: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-512-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 114 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 8 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida em 42,4%**.

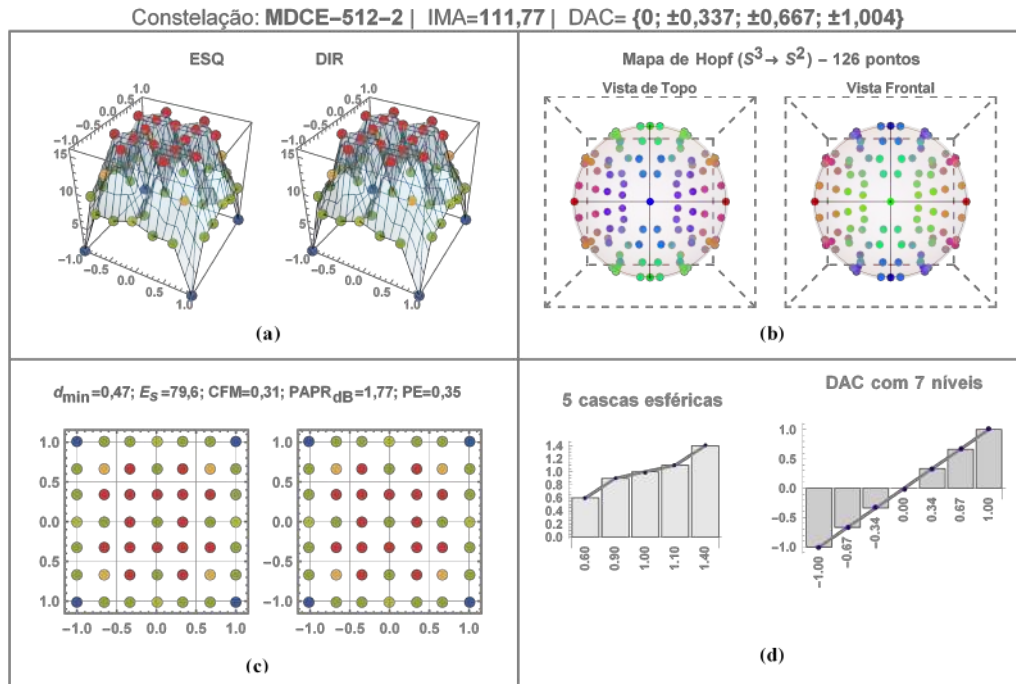


Figura 5.53: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-512-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 126 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 7 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **18,6%**.

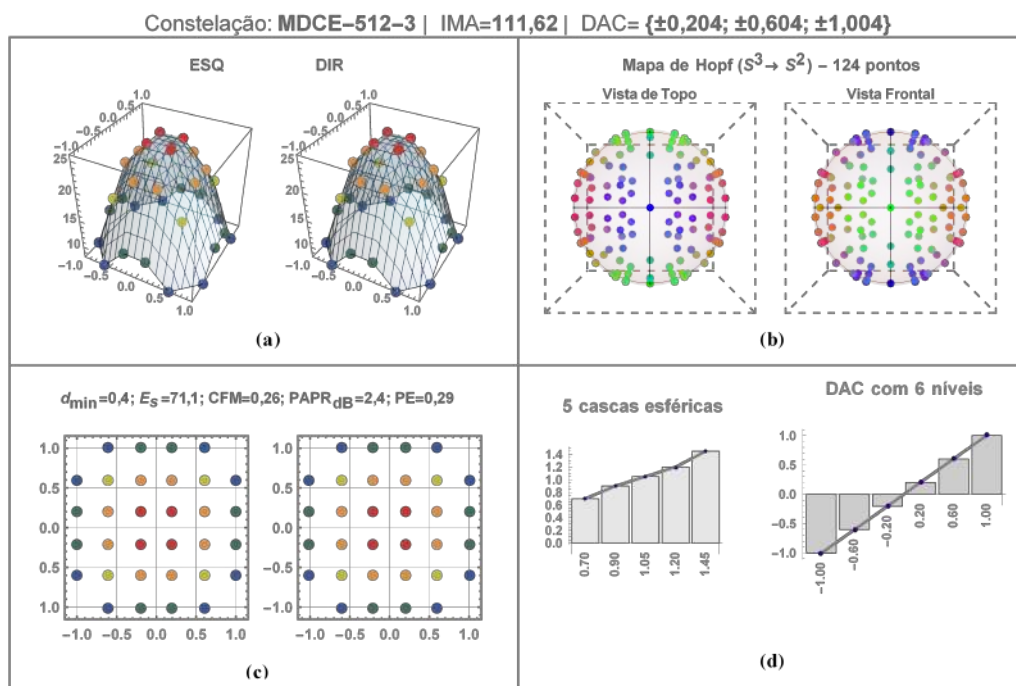


Figura 5.54: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-512-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 124 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 6 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **27,3%**.

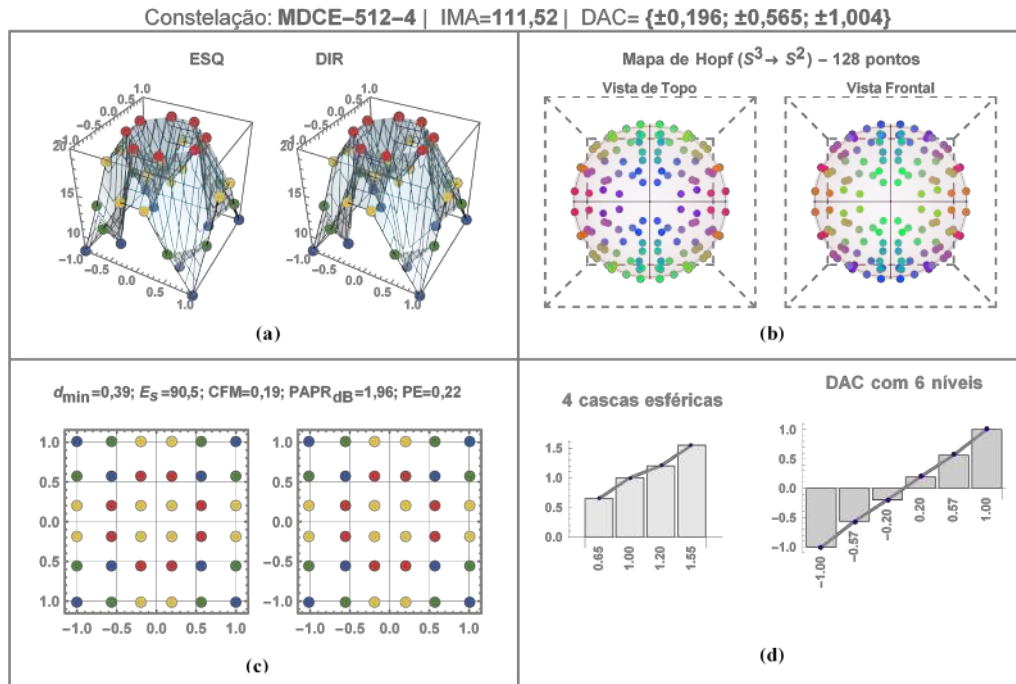


Figura 5.55: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-512-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 128 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 4 cascas esféricas da modulação e os 6 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **7,5%**.

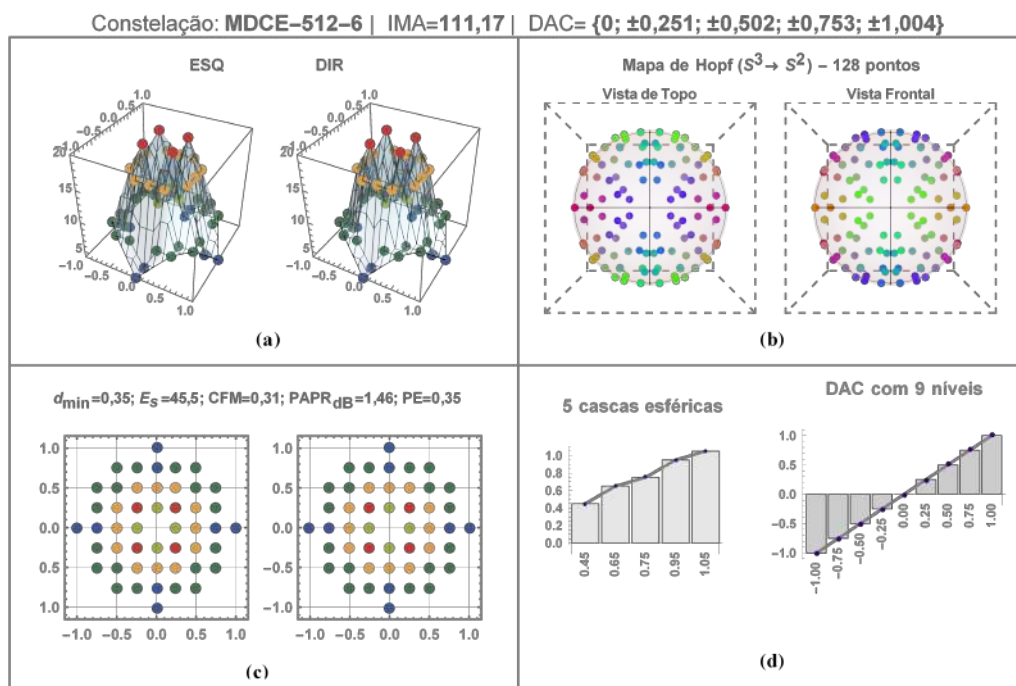


Figura 5.56: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-512-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 128 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 5 cascas esféricas da modulação e os 9 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **53,5%**.



**Resumo:**

- A MDCE-512-4 apresentou características mais adequadas para transmissão em um arranjo adaptativo;
- A MDCE-512-4 tem um mapa de Hopf "clusterizado", no qual não existe vetor de Stokes sobre os eixos principais da esfera de Poincaré. Esta característica revela uma estrutura geométrica adequada para mapeamento de uma modulação 8D.

Tabela 5.7: Tabela comparativa dos principais resultados para **512** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-512-1	112,37	0,4	56,3	-42.4%	0,32	2,15	-1.78 dB	0,36	110	0,88
MDCE-512-2	111,77	0,47	79,6	-18.6%	0,31	1,77	-2.16 dB	0,35	126	0,88
MDCE-512-3	111,62	0,4	71,7	-26.7%	0,25	2,4	-1.53 dB	0,29	124	0,75
MDCE-512-4	111,52	0,39	91	-7.7%	0,19	1,96	-1.97 dB	0,22	128	0,75
SP-QAM4-512-5	111,27	0,56	97,8	----	0,37	3,93	----	0,42	241	1
MDCE-512-6	111,17	0,35	45,5	-53.5%	0,32	1,46	-2.47 dB	0,35	112	1,12

Todas as constelações selecionadas são um bom exemplo de ganho de forma. O desempenho IMA de MDCE-512-1, MDCE-512-2, MDCE-512-3 e MDCE-512-4 foi levemente superior ao da referência PDM-SP-128QAM.

## 5.1.8

## Avaliação de capacidade de constelações com 1024 símbolos

A constelação de referência utilizada para 1024 símbolos foi a PDM-32QAM. As partições QAM, as características de *shaping* e a projeção dos estados de polarização dessa constelação são mostradas na Figura (5.57).

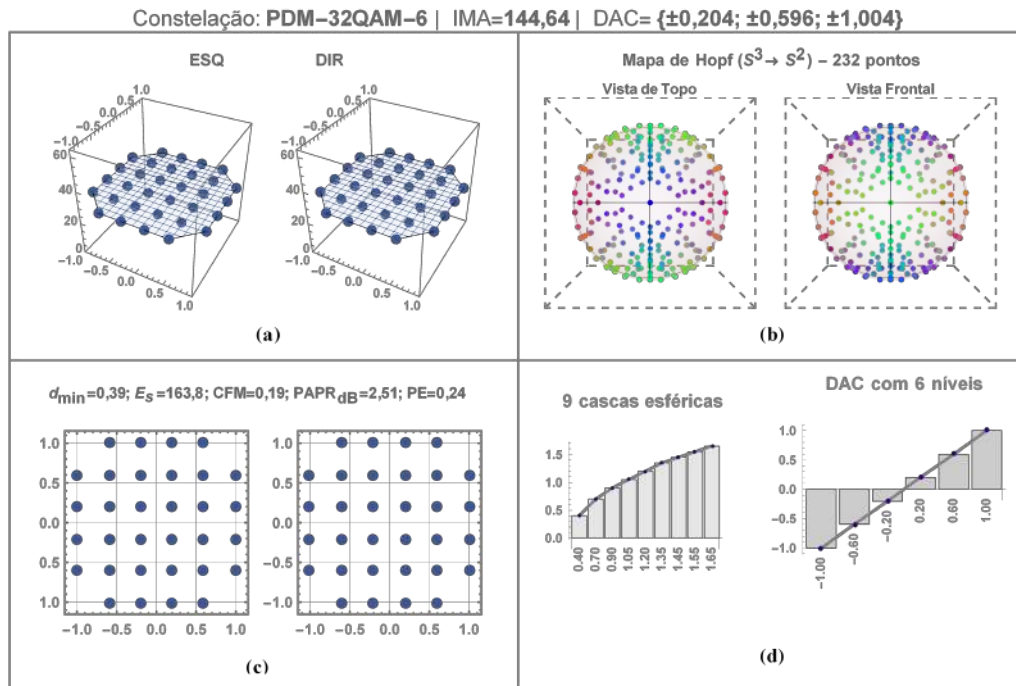


Figura 5.57: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da PDM-32QAM-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 232 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 9 cascas esféricas da modulação e os 6 níveis de tensão do DAC.

A PDM-32QAM projeta 232 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 6 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 9 normas diferentes (ver Figura (5.57 d)). Os histogramas das partições demonstram que a PDM-32QAM tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 32 para todos os símbolos particionados. A **PAPR<sub>dB</sub>** da norma dos símbolos 4D é **2,51 dB** com  **$E_s=163,8$** . Os cálculos de IM para transmissão de 1024 símbolos são exibidos na Figura (5.58). As figuras (5.59), (5.60), (5.61), (5.62) e (5.63) exibem as características das constelações selecionadas.

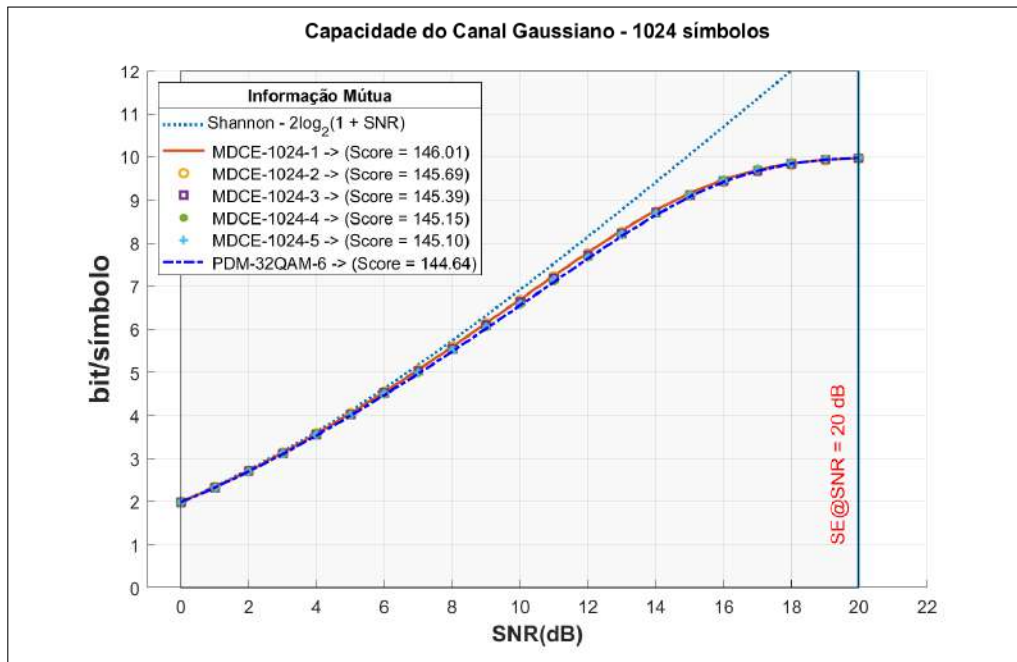


Figura 5.58: Cálculo da informação mútua de constelações com 1024 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 05 constelações candidatas para transmissão de 1024 símbolos com uma SNR limite de **20 dB**. Todas as constelações listadas a seguir apresentaram PAPR abaixo da PDM-32QAM.

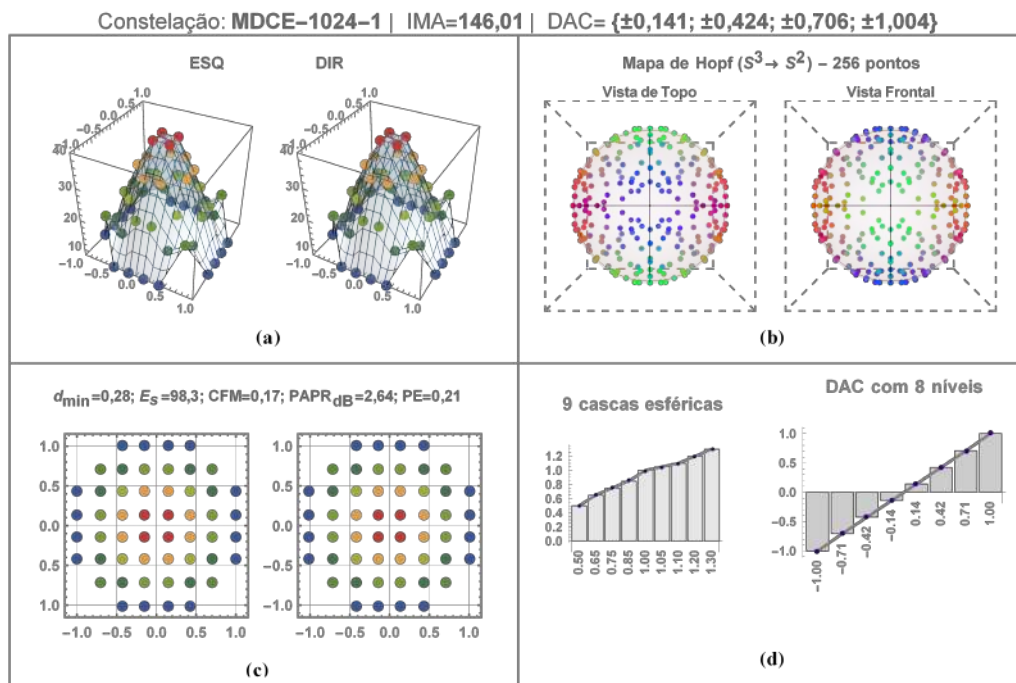


Figura 5.59: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-1024-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 256 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 9 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em 40%.

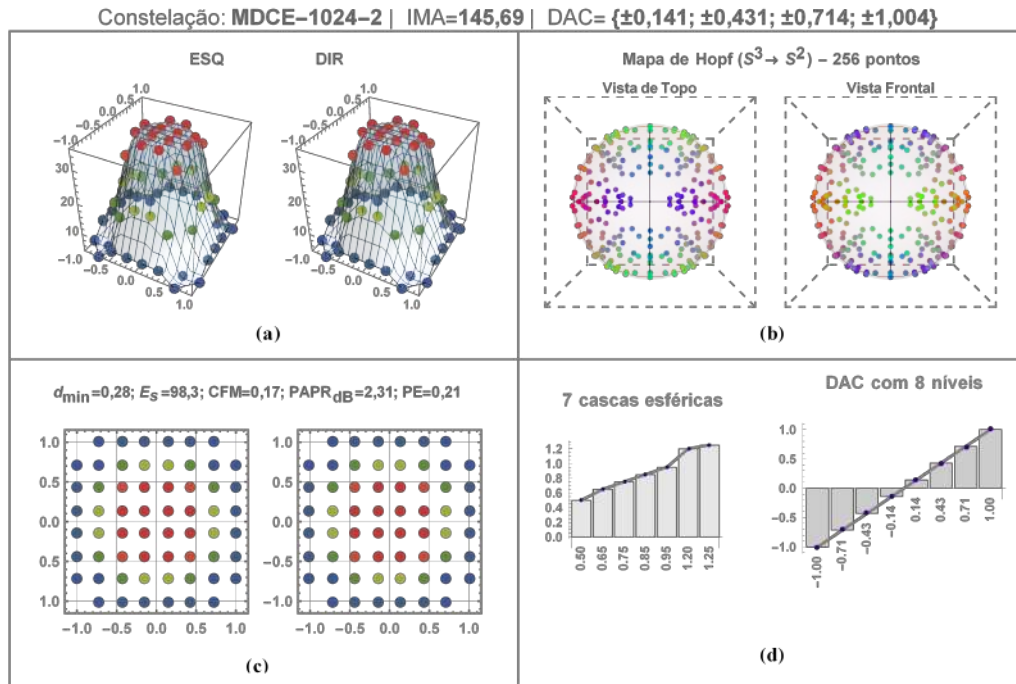


Figura 5.60: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-1024-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 256 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 7 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em 40%.

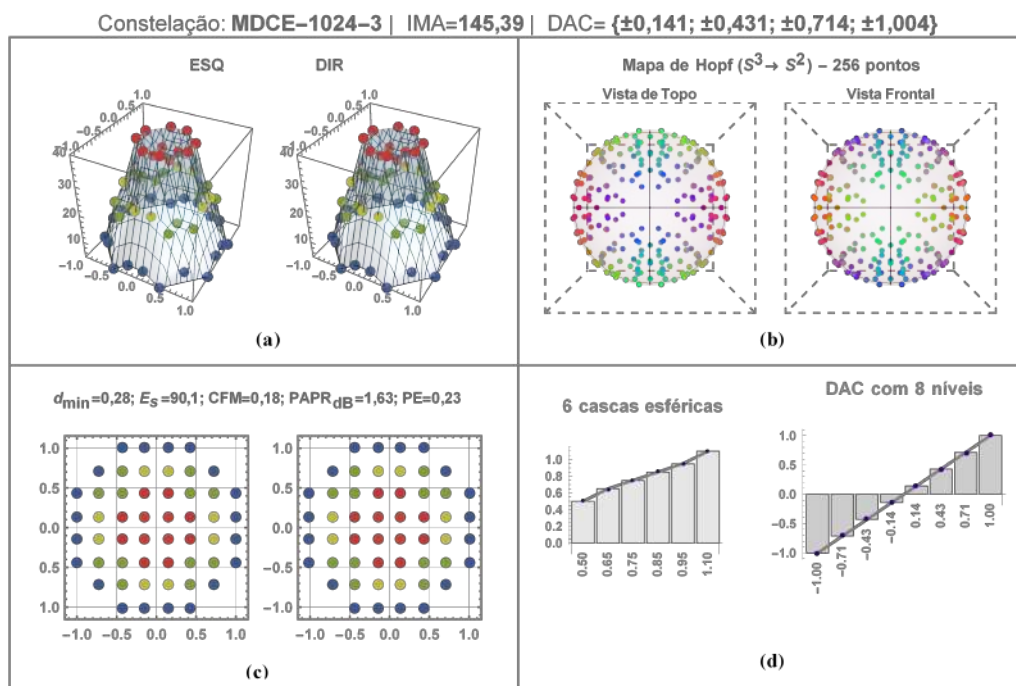


Figura 5.61: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-1024-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 256 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 6 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em 45%.

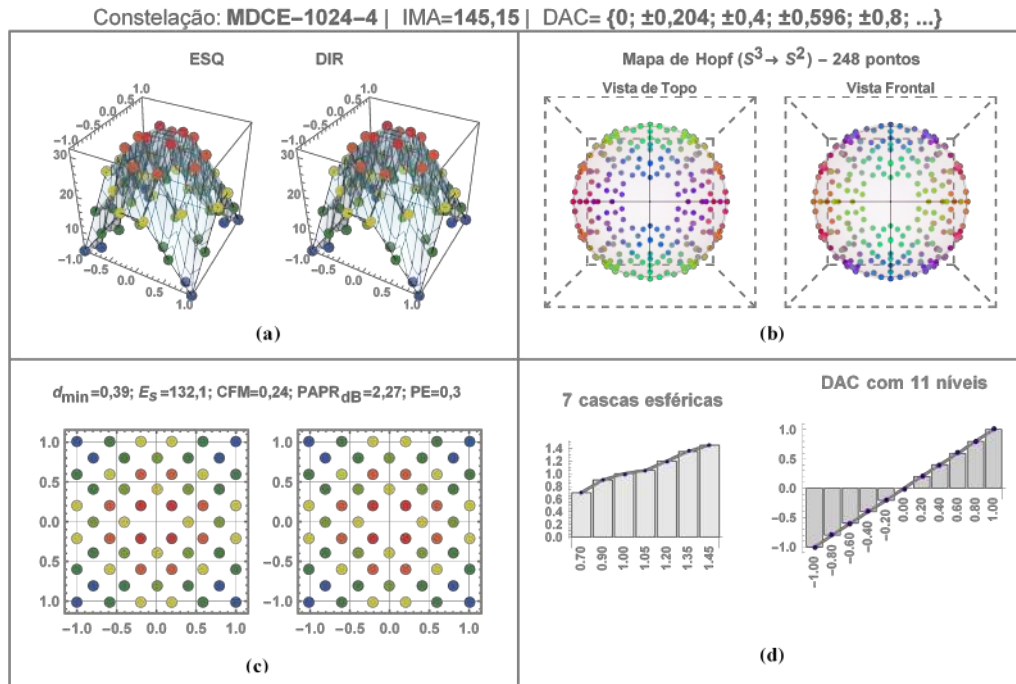


Figura 5.62: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-1024-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 248 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 7 cascas esféricas da modulação e os 11 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **19,4%**.

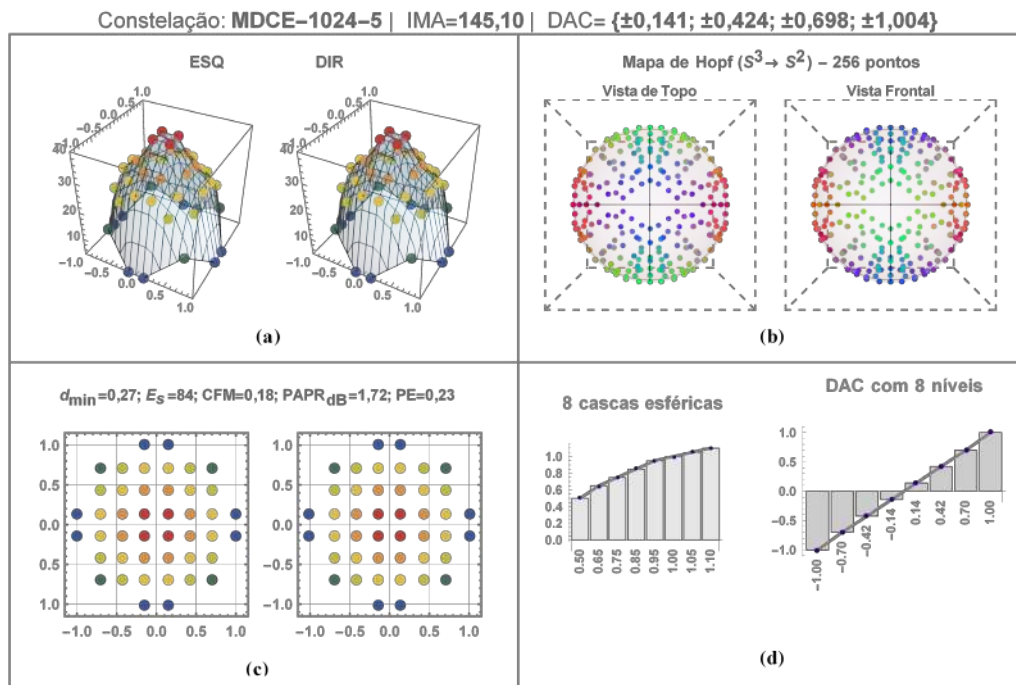


Figura 5.63: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-1024-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 256 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 8 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **48,7%**.

**Resumo:**

- A constelação A4-1024-1024 reportada por [177] não apresentou desempenho satisfatório e por este motivo não foi listada. O fraco desempenho da A4-1024-1024 se reflete também nas métricas estáticas. Por exemplo, sua PE tende a zero e sua  $CFM_{dB}$  tende a infinito. Este resultado evidencia mais uma vez que um bom empacotamento de esferas não produz necessariamente uma boa modulação;
- A MDCE-1024-3 apresentou características mais adequadas para transmissão em um arranjo adaptativo. Esta constelação projeta 256 estados de polarização clusterizados de forma simétrica;
- De modo geral, as modulações com projeção PDM **Cross QAM** apresentaram melhor desempenho (com exceção da MDCE-1024-4);

Tabela 5.8: Tabela comparativa dos principais resultados para **1024** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-1024-1	146,01	0,28	98,3	-40.%	0,17	2,64	0.13 dB	0,21	256	1,33
MDCE-1024-2	145,69	0,28	98,3	-40.%	0,17	2,32	-0.19 dB	0,21	256	1,33
MDCE-1024-3	145,39	0,28	90,1	-45.%	0,18	1,63	-0.88 dB	0,23	256	1,33
MDCE-1024-4	145,15	0,39	132,1	-19.4%	0,24	2,27	-0.24 dB	0,3	248	1,83
MDCE-1024-5	145,10	0,27	84	-48.7%	0,18	1,72	-0.79 dB	0,23	256	1,33
PDM-32QAM-6	144,64	0,39	163,8	----	0,19	2,51	----	0,24	228	1



## 5.2

**Avaliação de capacidade de constelações densas com 2048 e 4096 símbolos**

Apresenta-se a seguir constelações densas construídas com o métodos MDCE. A constelação de referência utilizada para 2048 símbolos foi a constelação SP-QAM4-2048.

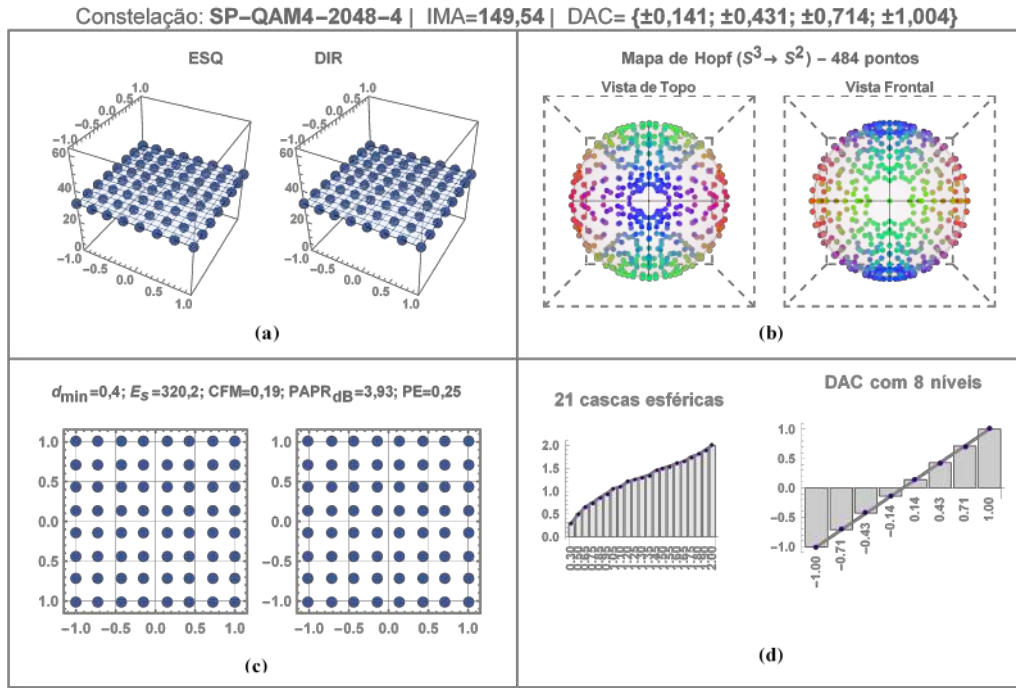


Figura 5.64: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da SP-QAM4-2048-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 484 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 21 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC.

A SP-QAM4-2048 projeta 484 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 8 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 21 normas diferentes (ver Figura (5.64 d)). Os histogramas das partições demonstram que a SP-QAM4-2048 tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 32 para todos os símbolos particionados. A  $PAPR_{dB}$  da norma dos símbolos 4D é **3,93 dB** com  $E_s=320,2$ . Os cálculos de IM para transmissão de 2048 símbolos são exibidos na Figura (5.65). As figuras (5.66), (5.67), (5.68) e (5.69) exibem as características das constelações selecionadas.

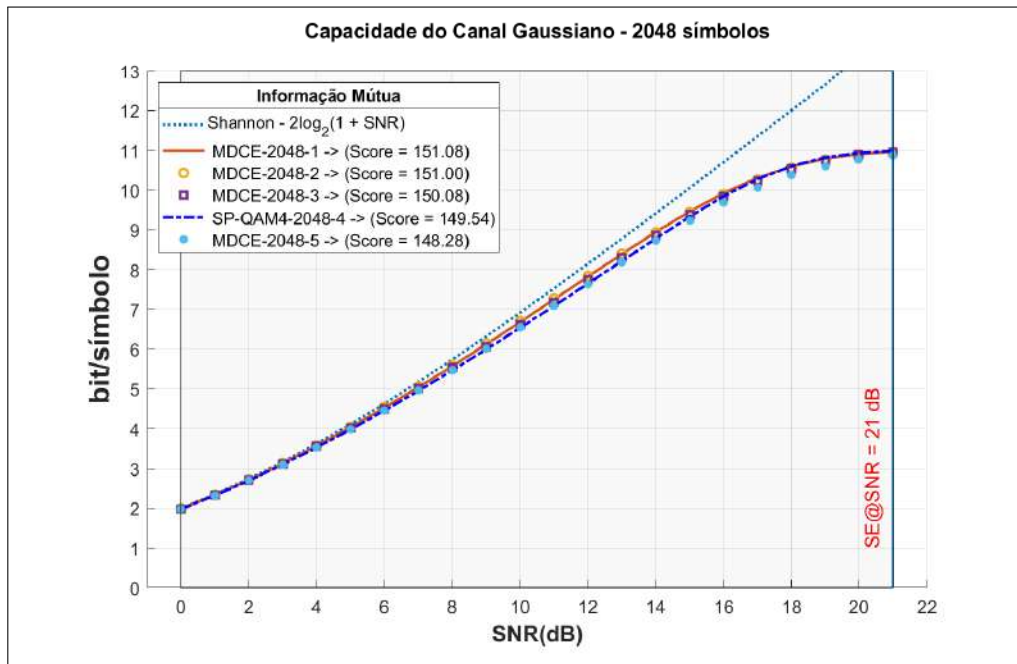


Figura 5.65: Cálculo da informação mútua de constelações com 2048 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 04 constelações candidatas para transmissão de 2048 símbolos com uma SNR limite de **21 dB**. Todas as constelações listadas a seguir apresentaram PAPR abaixo da PDM-32QAM.

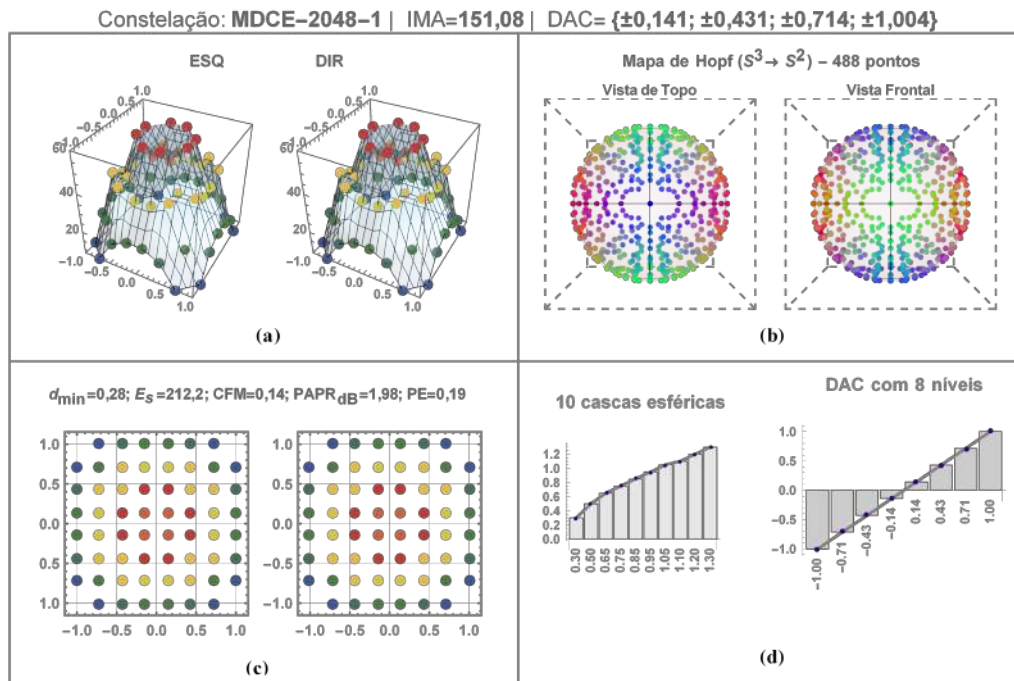


Figura 5.66: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-2048-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 488 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 10 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **33,7%**.



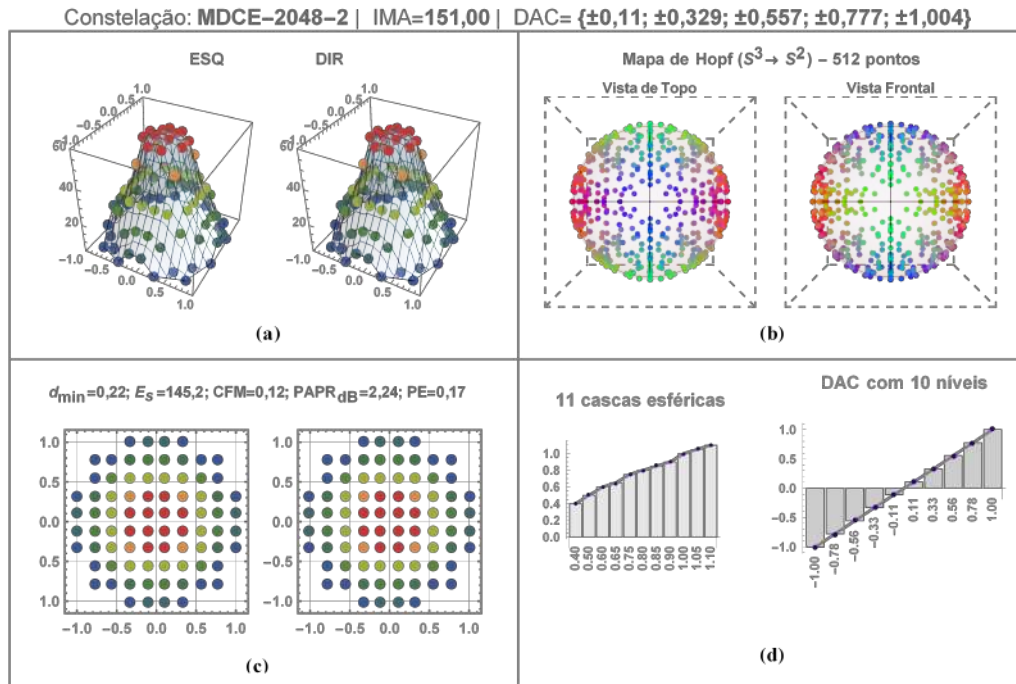


Figura 5.67: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-2048-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 512 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 11 cascas esféricas da modulação e os 10 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **54,7%**.

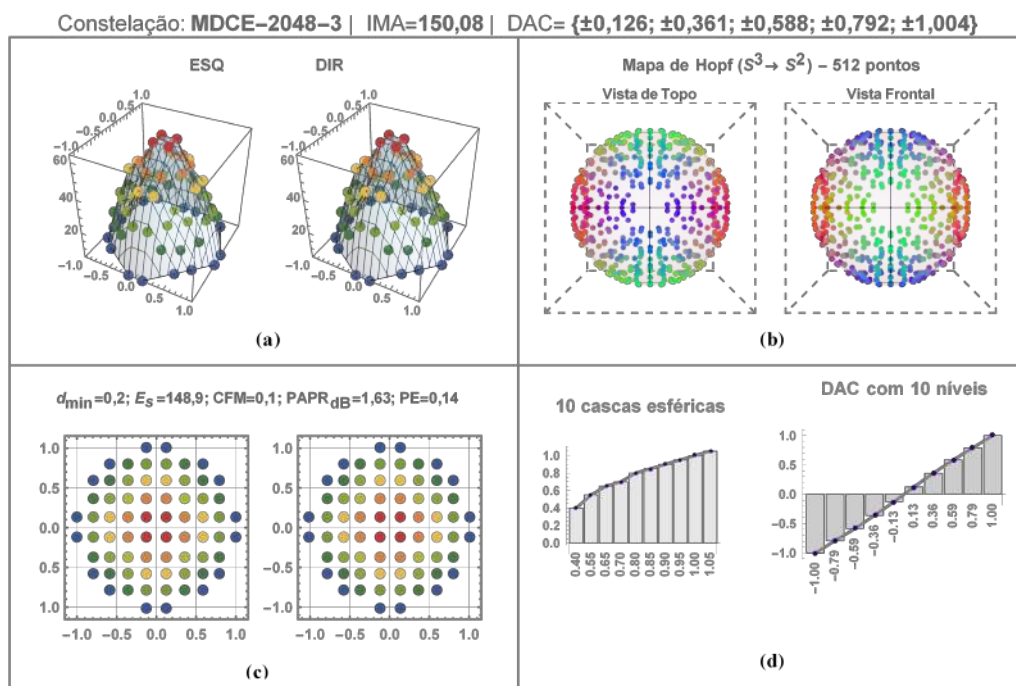


Figura 5.68: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-2048-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 512 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 10 cascas esféricas da modulação e os 10 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **53,5%**.

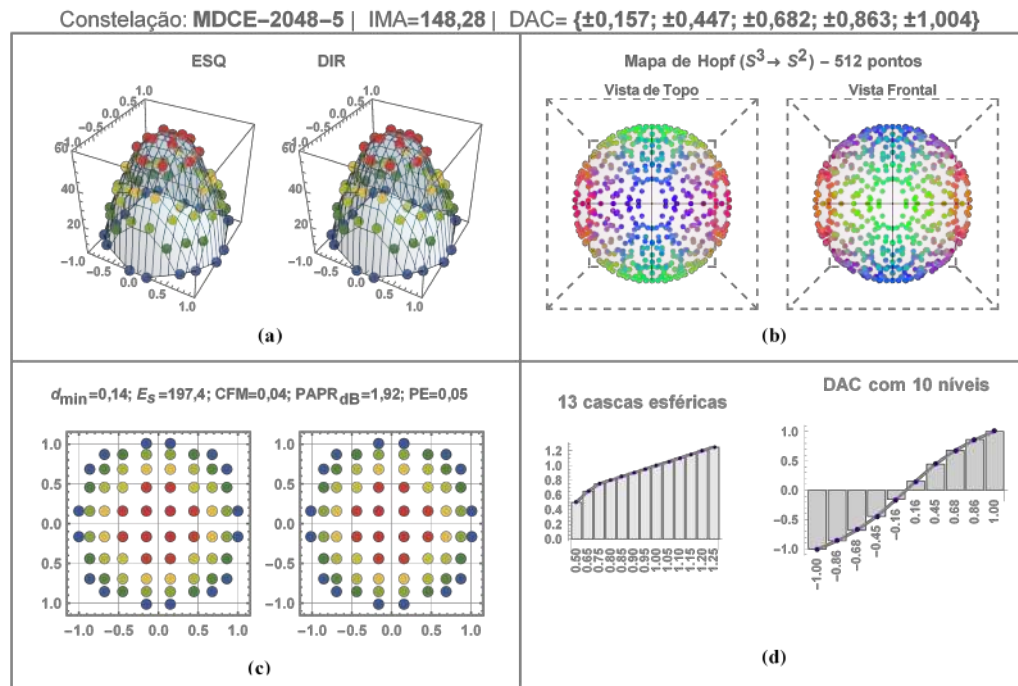


Figura 5.69: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-2048-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 512 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 13 cascas esféricas da modulação e os 10 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **38,4%**.

### Resumo:

Diferentes constelações de 2048 símbolos apresentaram eficiência energética superior à SP-QAM4-2048. Os ganhos de eficiência  $E_s$  oscilaram entre **33** e **54%**, sempre mantendo a eficiência espectral verificada pela IMA. Os valores da PAPR, com reduções entre **1,68** e **2,3 dB**, confirmam a superioridade das constelações MDCE. A relação entre o DAC sigmóide e a geração de PSK multinível fica evidente nas projeções QAM da MDCE-2048-5.

Tabela 5.9: Tabela comparativa dos principais resultados para **2048** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-2048-1	151,08	0,28	212,2	-33.7%	0,14	1,98	-1.95 dB	0,19	484	1
MDCE-2048-2	151,00	0,22	145,2	-54.7%	0,12	2,25	-1.68 dB	0,17	512	1,25
MDCE-2048-3	150,08	0,2	148,9	-53.5%	0,1	1,63	-2.3 dB	0,14	512	1,25
SP-QAM4-2048-4	149,54	0,4	320,2	----	0,18	3,93	----	0,25	482	1
MDCE-2048-5	148,28	0,14	197,4	-38.4%	0,04	1,91	-2.02 dB	0,05	512	1,25

## 5.2.1

## Capacidade de constelações com 4096 símbolos

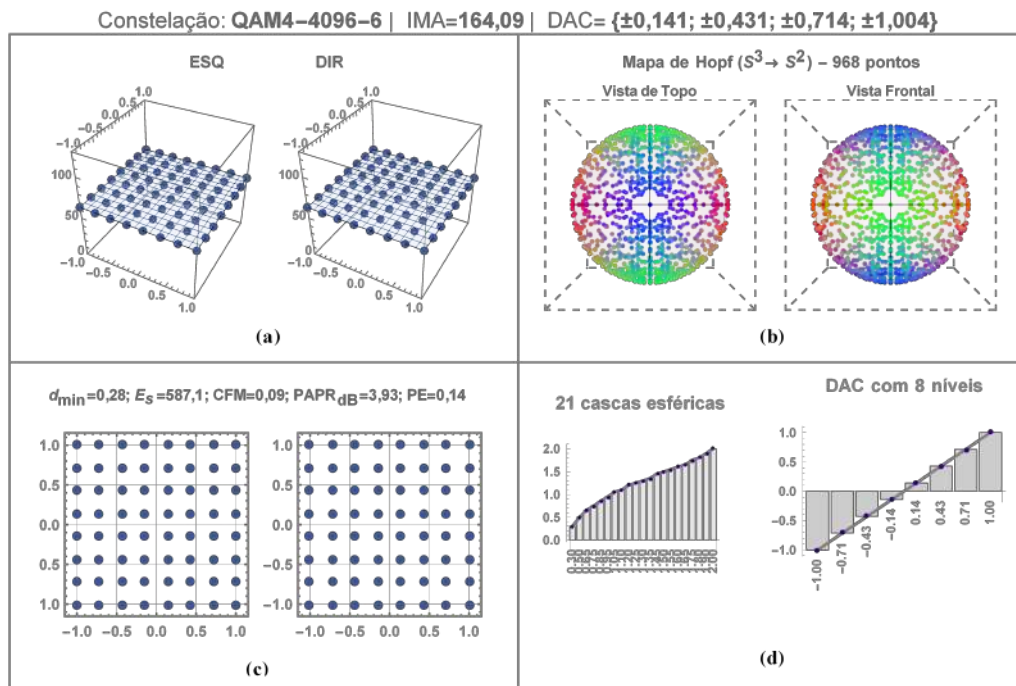


Figura 5.70: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da QAM4-4096-6. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 968 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 21 cascas esféricas da modulação e os 8 níveis de tensão do DAC.

A QAM4-4096-4096 projeta 968 estados de polarização na esfera de Poincaré. Esta constelação necessita de 8 níveis de tensão no DAC e os seus vetores 4D estão distribuídos sobre 21 normas diferentes (ver Figura (5.70 d)). Os histogramas das partições demonstram que a QAM4-4096-4096 tem símbolos QAM equiprováveis com ocorrência igual a 64 para todos os símbolos particionados. A  $\text{PAPR}_{\text{dB}}$  da norma dos símbolos 4D é **3,93 dB** com  $\mathbf{E_s=587,1}$ . Os cálculos de IM para transmissão de 4096 símbolos são exibidos na Figura (5.71). As figuras (5.72), (5.73), (5.74), (5.75) e (5.76) exibem as características das constelações selecionadas.

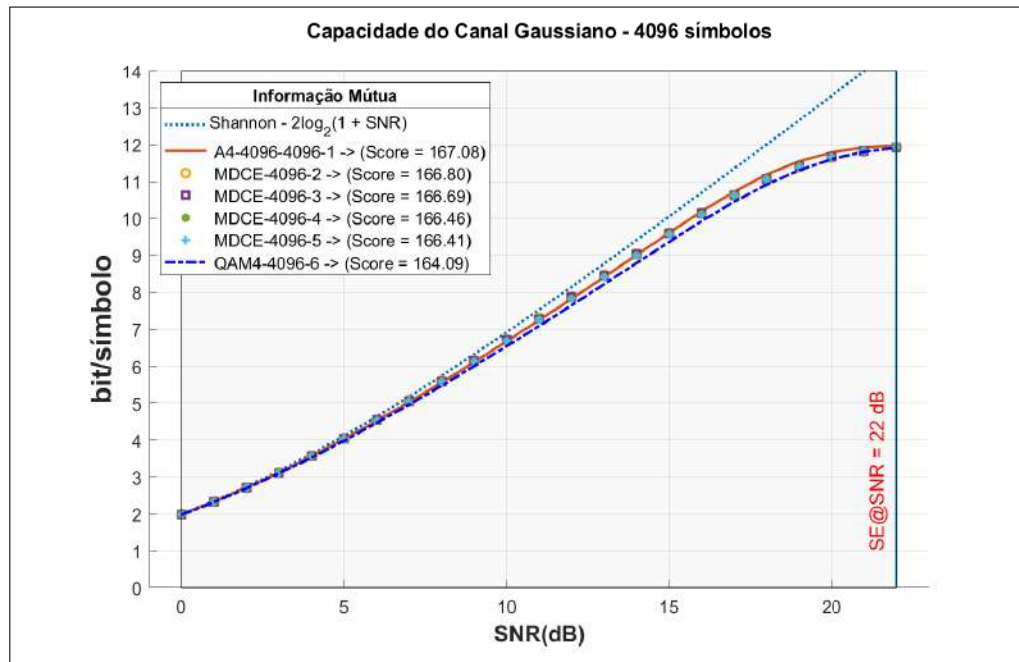


Figura 5.71: Cálculo da informação mútua de constelações com 4096 símbolos.

Os cálculos de IM qualificaram 05 constelações para transmissão de 4096 símbolos com SNR limite **22 dB**. Todas as constelações listadas a seguir apresentaram PAPR abaixo da QAM4-4096-4096.

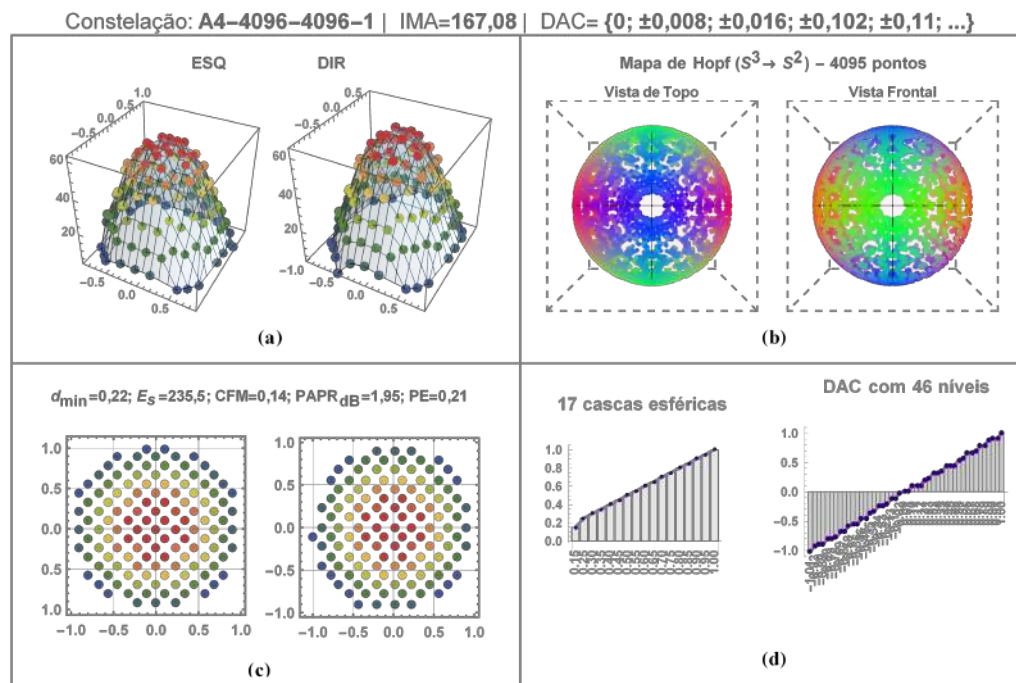


Figura 5.72: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da A4-4096-4096-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4095 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 17 cascas esféricas da modulação e os 46 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **59,9%**.



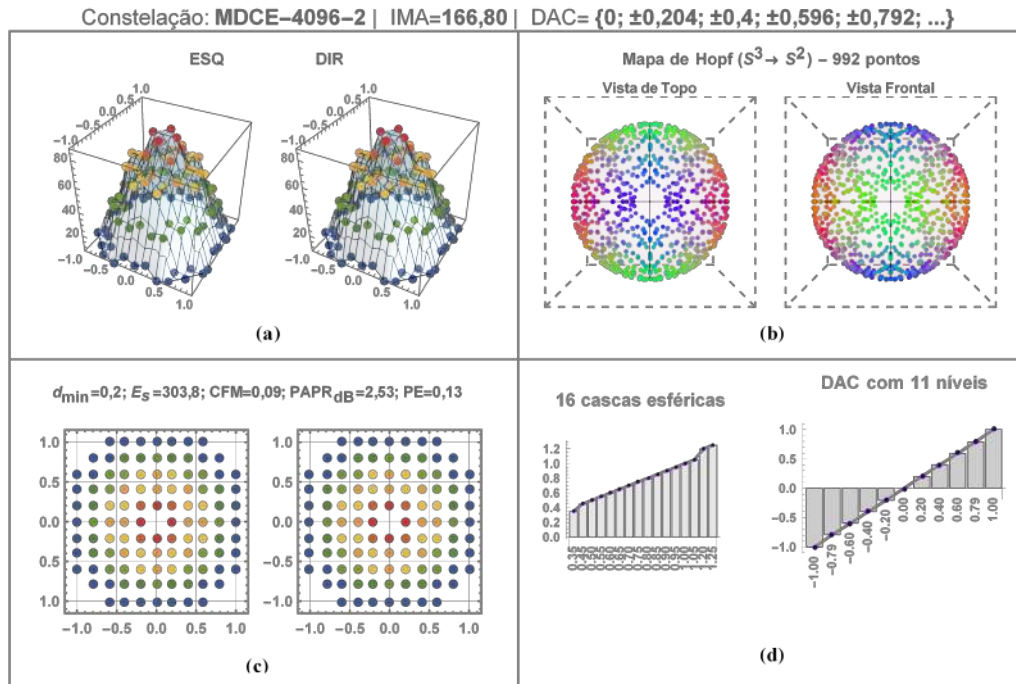


Figura 5.73: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-4096-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 992 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 16 cascas esféricas da modulação e os 11 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **48,3%**.

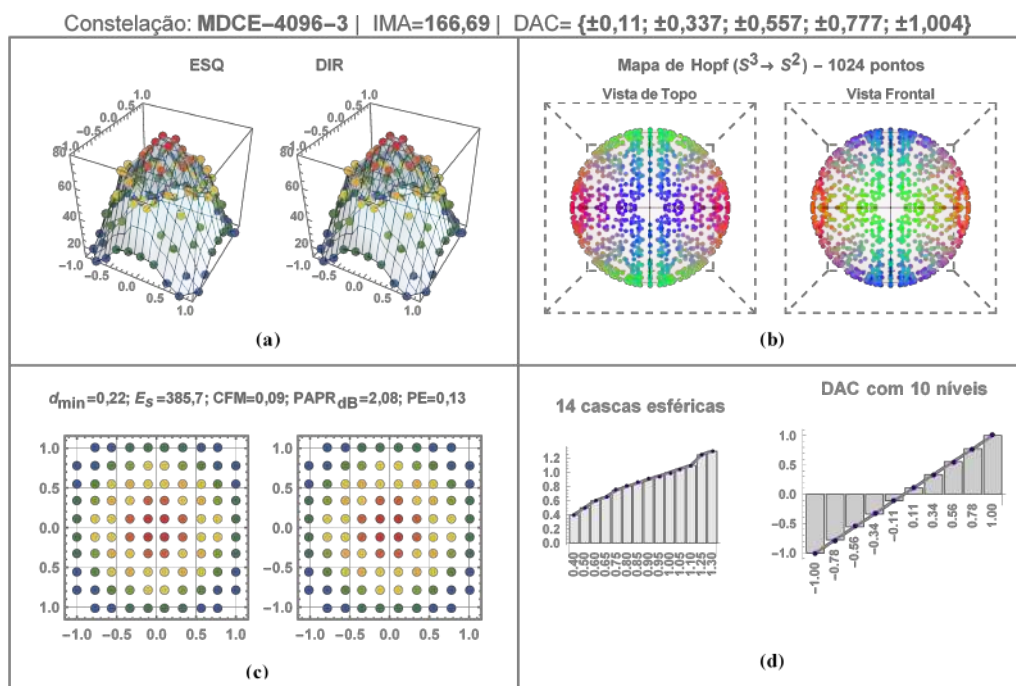


Figura 5.74: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-4096-3. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 1024 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 14 cascas esféricas da modulação e os 10 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **34,3%**.

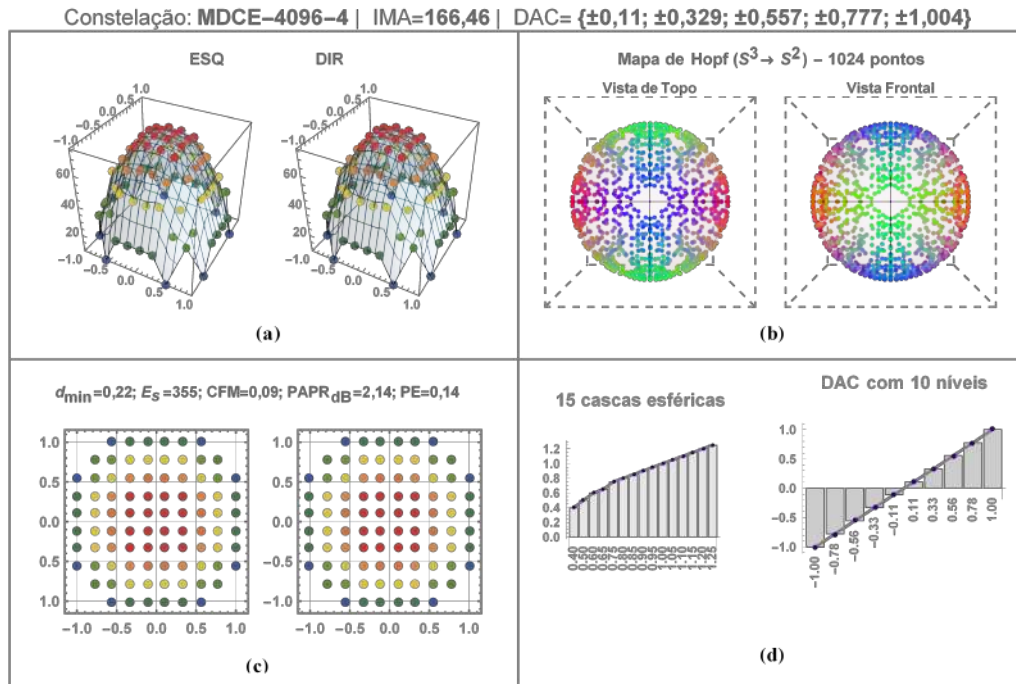


Figura 5.75: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-4096-4. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 1024 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 15 cascas esféricas da modulação e os 10 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **39,5%**.

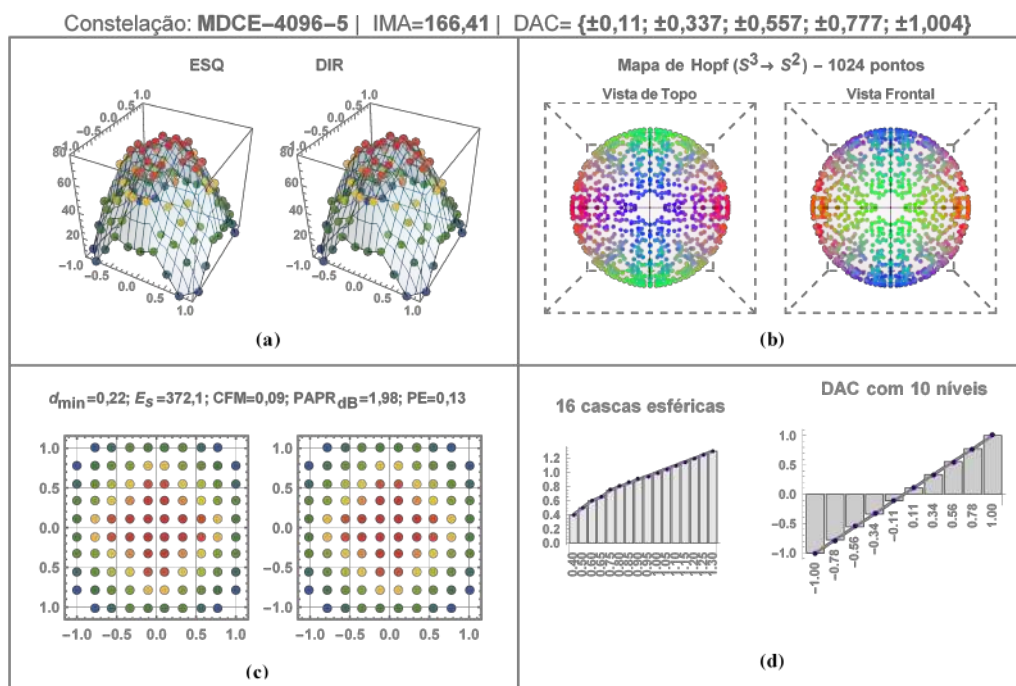


Figura 5.76: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-4096-5. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 1024 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 16 cascas esféricas da modulação e os 10 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **36,6%**.

**Resumo:**

- A constelação A4-4096-4096 documentada na literatura apresentou melhor desempenho na pontuação IMA, na eficiência energética (com redução de 59%) e na PAPR de apenas 1,95 dB. A A4-4096-4096 tem um mapa de Hopf com 4096 vetores, logo cada símbolo 4D mapeia para um estado de polarização diferente. A desvantagem da A4-4096-4096 frente a QAM4-4096-4096 e as constelações MDCE reside na assimetria de suas partições QAM e na necessidade de 23 níveis de tensão no DAC contra 8 níveis para gerar a QAM4-4096-4096. São necessários 11 níveis para gerar a MDCE-4096-2 e 10 níveis para gerar MDCE-4096-3, MDCE-4096-4 e MDCE-4096-5;
- As constelações MDCE-4096-3, MDCE-4096-4 e MDCE-4096-5 tem mapa de Hopf com número de polarizações ( $4096 \div 4$ ), a PAPR da MDCE-4096-2 é 2,53 dB com eficiência energética de 48.3%. A PAPR da MDCE-4096-4 é 2,14 dB com eficiência energética de 40,1%. As constelações MDCE superaram a QAM4-4096 na pontuação IMA;
- A MDCE-4096-2 apresentou IMA=166,80 contra IMA=167,08 da A4-4096-4096, uma diferença global de apenas 0.28 bit/símbolo na faixa de 0 dB a 22 dB. Os valores de PAPR, IMA e  $E_s$  deixam claro as relações de compromisso entre desempenho e custo das constelações.

Tabela 5.10: Tabela comparativa dos principais resultados para **4096** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
A4-4096-4096-1	167,08	0,22	235,5	<b>-59.9%</b>	0,14	1,95	<b>-1.98 dB</b>	0,21	4093	5,75
MDCE-4096-2	166,80	0,2	303,8	<b>-48.3%</b>	0,09	2,53	<b>-1.4 dB</b>	0,13	992	1,38
MDCE-4096-3	166,69	0,22	385,7	<b>-34.3%</b>	0,08	2,09	<b>-1.84 dB</b>	0,13	1024	1,25
MDCE-4096-4	166,46	0,22	351,6	<b>-40.1%</b>	0,09	2,14	<b>-1.79 dB</b>	0,14	1024	1,25
MDCE-4096-5	166,41	0,22	372,1	<b>-36.6%</b>	0,09	1,98	<b>-1.95 dB</b>	0,13	1024	1,25
QAM4-4096-6	164,09	0,28	587,1	<b>----</b>	0,09	3,93	<b>----</b>	0,14	964	1

Obs: As constelações de 4096 foram representadas com 2 dígitos significativos, considerando uma resolução de 32 níveis para o DAC. Esta condição torna extremamente crítica a geração da A4-4096-4096 utilizando as tecnologias de DAC de baixa resolução.

### 5.2.2

#### Capacidade de constelações com 16384 símbolos

Constelações densas são previstas pelo padrão DOCSIS 3.1, que foi projetado para suportar QAM simples com até 16384 símbolos. Nessa faixa de símbolos, a relação sinal-ruído impõe um desafio considerável, com valores da ordem de **27 dB**. Com a tecnologia atual, ainda não é possível usar essas constelações para comunicações ópticas de longa distância. Contudo, em comunicações de curta distância 27 dB é uma meta possível. Adicionalmente, é importante observar que o uso de constelações ópticas é visto como uma solução para reduzir o consumo dos barramentos de computadores da próxima geração. Neste contexto, a métrica bit/joule (ou símbolo/joule) facilita a verificação da redução do consumo nas comunicações ópticas. A seguir demonstra-se a estrutura de uma constelação de 16384 símbolos. Essa demonstração é uma forma de evidenciar as possibilidades do método MDCE no projeto de constelações 4D de alta densidade e alta eficiência. Os cálculos de IM para transmissão de 16384 símbolos são exibidos na Figura (5.77).

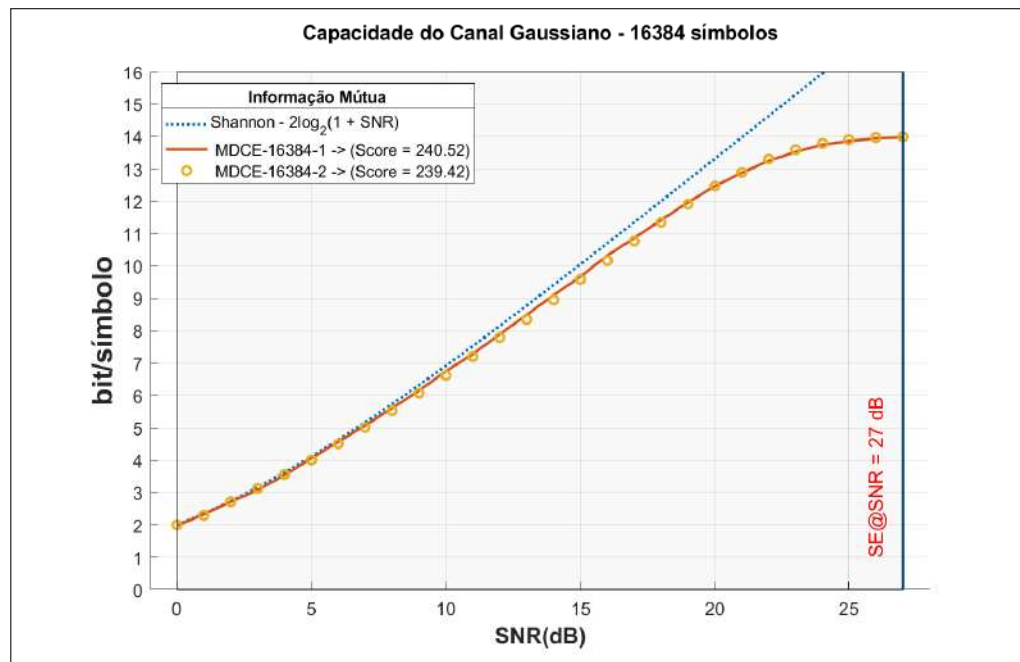


Figura 5.77: Cálculo da informação mútua de constelações com 16384 símbolos.

As figuras (5.78) e (5.79) exibem as características das constelações selecionadas.

**Nota:** Não encontrou-se na bibliografia consultada parâmetros para constelações 4D de 16384 símbolos. Nesse sentido, as constelações aqui apresentadas fornecem esses parâmetros.



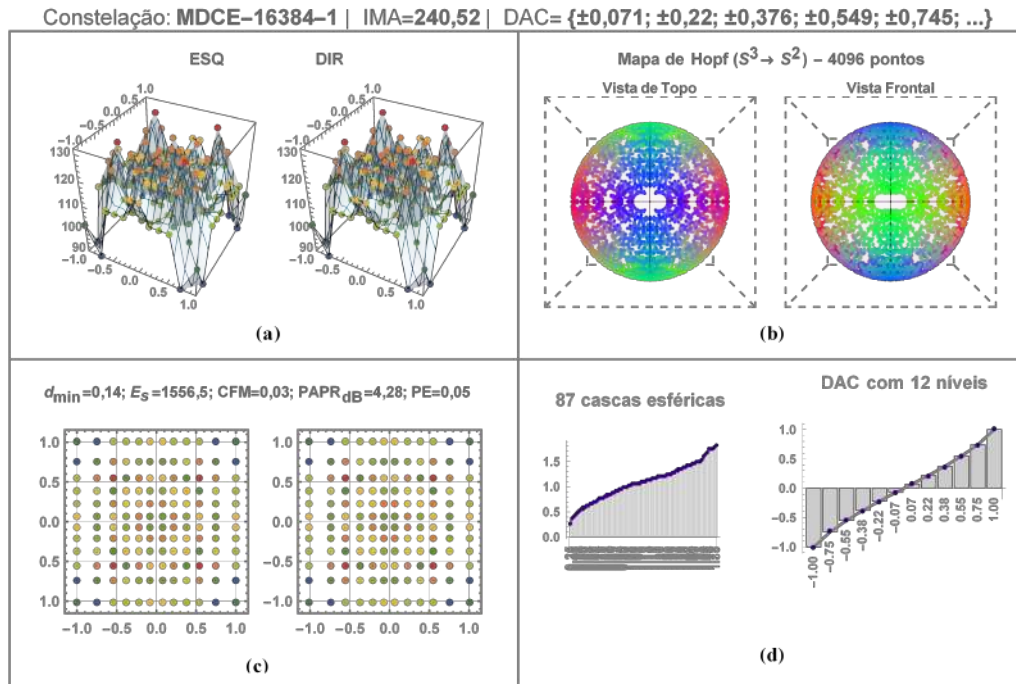


Figura 5.78: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-16384-1. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4096 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 87 cascas esféricas da modulação e os 12 níveis de tensão do DAC.

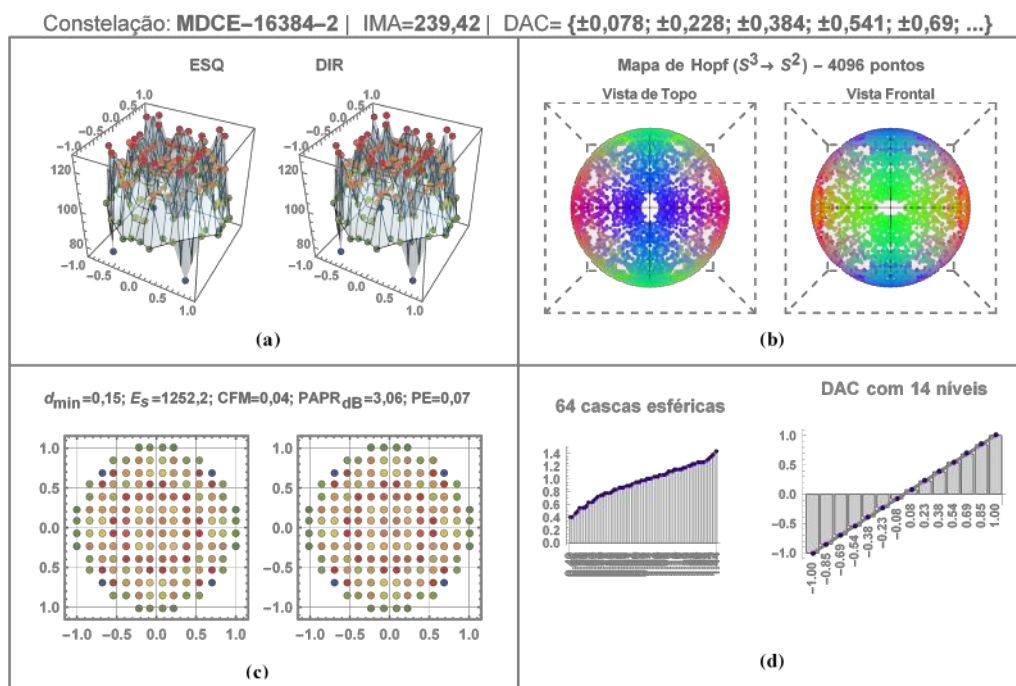


Figura 5.79: (a) Histogramas das partições QAM. (b) Partições QAM da MDCE-16384-2. (c) Vista frontal e de topo do mapa de Hopf simétrico com 4096 vértices na esfera Poincaré. (d) Distribuição das 64 cascas esféricas da modulação e os 14 níveis de tensão do DAC. A energia por símbolo ( $E_s$ ) foi **reduzida** em **19,6%**.

**Resumo:**

As constelações densas demonstradas nesta seção requerem valores elevados da SNR. Este aspecto dificulta seu uso em comunicações ópticas coerentes pois, de acordo com [51], a máxima SNR típica de um receptor coerente é da ordem de 24 dB. O limite de 24 dB sugere que o número máximo de símbolos 4D numa comunicação coerente é 4096. Por exemplo, a SNR requerida para a eficiência espectral plena da MDCE-4096-2 é de **22 dB** (ver Figura (5.71)).

Apesar das limitações para comunicação em longas distâncias, as constelações de 16384 símbolos são exemplos positivos da capacidade de otimização dos métodos propostos nesta tese. É importante notar que: o mapa de Hopf das constelações MDCE-16384 tem 4096 símbolos. Ou seja,  $(16384 \div 4)$ .

Tabela 5.11: Tabela comparativa dos resultados para **16384** símbolos.

Constelação	IMA	$d_{\min}$	$E_s$		CFM	PAPR <sub>dB</sub>		PE	HM	CER
MDCE-16384-1	240,5	0,14	1556	----	0,03	4,28	----	0,05	4096	1
MDCE-16384-2	239,4	0,15	1252	-19.6%	0,04	3,07	-1.21 dB	0,07	4096	1,17

**5.2.3****Comentários e discussões sobre a função HQ**

O uso da função HQ (ver Equação (4-27)), permite a construção de uma classe de constelações cuja projeção de Cayley-Dickson reflete uma estrutura PSK multinível. Isto acontece quando a forma de HQ tende para uma função *tanh* e significa que o uso de funções sigmóides no DAC permite gerar constelações mapeadas sobre esferas concêntricas, tanto em 2D (QAM), quanto em 4D. A explicação para este resultado remete às propriedades de mapeamento da *função gudermanniana*, que relaciona as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas. A função gudermanniana é uma função sigmóide que surge nas equações inversas para a projeção de Mercator [183]. As constelações B4-32, Dicyclic4-16 e Dicyclic4-24 documentadas em [177] são exemplos de constelações encontradas na literatura com a referida estrutura. As constelações MDCE-32-2, MDCE-64-2, MDCE-128-1, MDCE-128-5, MDCE-256-4 e MDCE-2048-5 comprovam esta característica. Apesar do DAC com uma função sigmóide possuir maior energia média, é possível construir constelações de alta ordem com boa eficiência energética explorando a alocação espaço-temporal dos símbolos.

### 5.3

#### Teste de plausibilidade em ambiente com interferência não linear

O fluxo de trabalho desta tese incluiu a análise de plausibilidade para a transmissão das constelações ópticas construídas com o método MDCE. Para esta finalidade, foram utilizados modelos numéricos confiáveis para simular o desempenho das constelações de interesse. Foram utilizadas ao todo três ferramentas de simulação:

- **SSPROP** - O SSPROP é uma rotina de software de uso geral escrita em Matlab para resolver a equação não linear de Schrödinger. O SSPROP também é um programa compilado escrito em C que pode ser chamado diretamente do Matlab. O SSPROP utiliza o método Split-Step Simétrico;
- **ROBOCHAMELEON** - Robochameleon é uma biblioteca de componentes para simulação e análise experimental de sistemas de comunicação óptica que foi usada com sucesso no grupo DSP da DTU (Universidade Técnica da Dinamarca). A biblioteca inclui modelos físicos da maioria dos componentes encontrados em sistemas de comunicação óptica coerentes e incoerentes, bem como blocos padrão de DSP. Os blocos de DSP foram desenvolvidos por um longo período de tempo e validados em dados reais.
- **Modelo EGN (SPM-XPM)** - Uma versão simplificada do modelo GN-EGN foi implementada em um script Matlab pelo pesquisador Tobias Fehenberger que disponibiliza o mesmo no seu website;

Todas as ferramentas de simulação citadas necessitaram de alterações no código original pois as mesmas foram criadas para utilização com constelações/modulações padronizadas como QAM e PSK.

O principal teste de plausibilidade foi realizado utilizando o modelo SPM-XPM descrito na Seção (2.4). Para tanto utilizou-se constelações MDCE de 32, 64 e 256 símbolos. O cálculo da IM destas constelações foi comparado com o equivalente de constelações QAM. É importante notar que o modelo SPM-XPM utiliza os momentos estatísticos padronizados para quantificar a contribuição de ruído não linear em função da forma (*shaping*) de cada constelação. Para constelações de tamanho  $M$  símbolos, a máxima eficiência espectral  $SE@SNR$  foi calculada para valores acima de 99,84% do valor nominal da  $SE = \log_2(M)$ . Como se trata de uma simulação de Monte Carlo, os resultados apresentados são valores aproximados com uma margem de erro de  $\pm 0.16\%$  no cálculo da capacidade do canal em bit/símbolo.

## 5.3.1

## Teste SPM-XPM para constelações de 32 símbolos

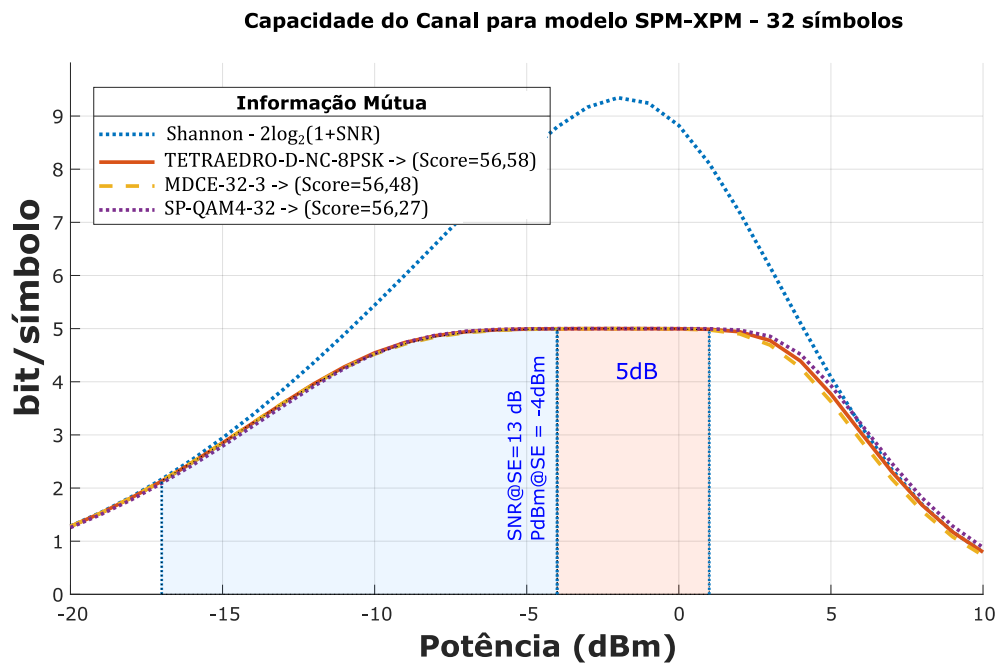


Figura 5.80: Curva da IM para as constelações TETRAEDRO-D-NC-8PSK, MDCE-32-3 e SP-QAM4-32 com base no modelo SPM-XPM.

## 5.3.2

## Teste SPM-XPM para constelações de 64 símbolos

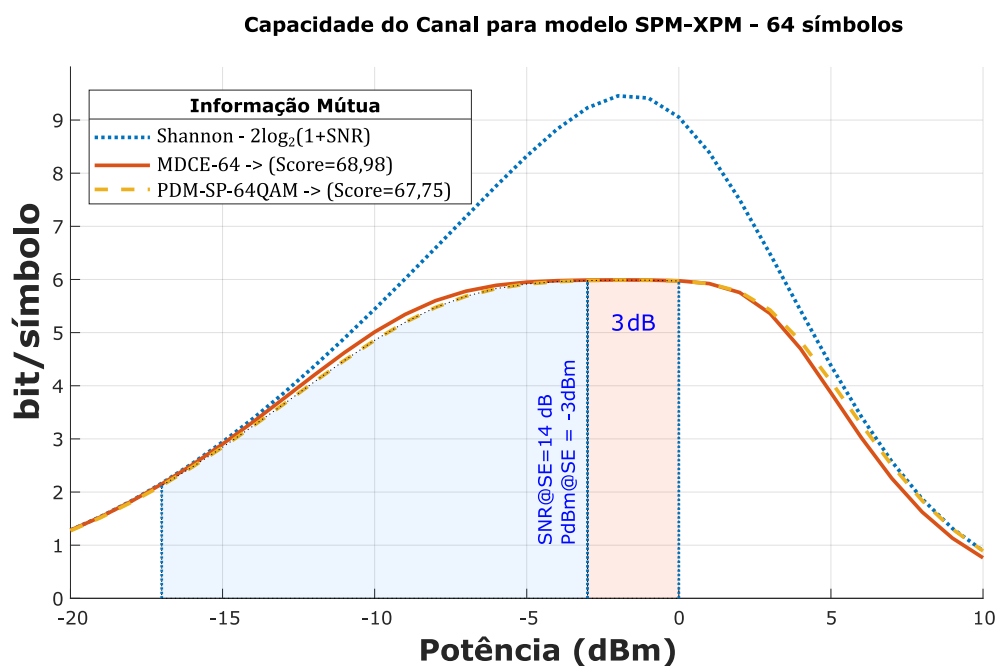


Figura 5.81: Curva da IM para as constelações MDCE-64-1 e PDM-SP-64QAM com base no modelo SPM-XPM.

## 5.3.3

## Teste SPM-XPM para constelações de 256 símbolos

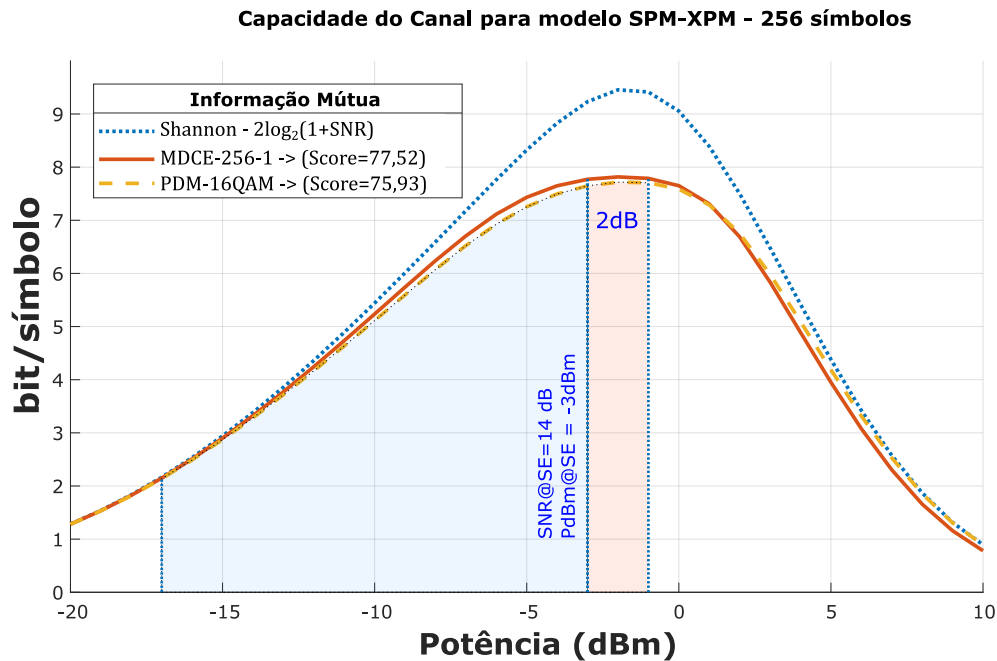


Figura 5.82: Curva da IM para as constelações MDCE-256-1 e PDM-16QAM com base no modelo SPM-XPM.

**Resumo:**

Com base no modelo SPM-XPM, os testes de plausibilidade com a IM evidenciaram que as constelações MDCE apresentam desempenho levemente superior às constelações QAM de referência. A superioridade é observada na faixa linear e se estende até a região em que a potência de transmissão é ótima (destacada nas figuras (5.80), (5.81) e (5.82)). De modo geral, as constelações MDCE mantiveram a vantagem da eficiência energética e reduzida PAPR no regime de transmissão não linear.

OBS: No teste de 32 símbolos desconsiderou-se o uso da constelação C4-32 apesar de sua superioridade numérica. Conforme já descrito na Seção (5.1.3), a constelação C4-32 tem elevada complexidade de implementação.

#### 5.4

#### Avaliação de Requisitos para Construção de um arranjo de constelações adaptativas

Na seção anterior foi demonstrado que as constelações construídas com os métodos propostos nesta tese apresentam na maioria dos casos desempenho equivalente ou superior ao das constelações referenciadas na bibliografia [30, 177, 190, 191]. Agora, busca-se a definição de um arranjo hierárquico de constelações. Com vistas a realizar uma prova de conceito, a estrutura do arranjo de constelações terá recursos mínimos da teoria apresentada.

Para definir o esquema de transmissão adaptativo, tomou-se por base as seguintes premissas:

1. Os cálculos da informação mútua e IMA realizados na Seção (4.6) indicam que é possível definir uma hierarquia de capacidade para constelações ópticas;
2. A informação mútua definiu um *limite superior* de desempenho para as constelações analisadas;
3. A informação mútua forneceu, objetivamente, o valor da relação sinal-ruído (SNR) ótima para que cada constelação atinja sua eficiência espectral. O valor da SNR está intrinsecamente relacionado com a OSNR;
4. O esquema hierárquico de constelações pode ser utilizado para atender a uma escala também hierárquica de relações sinal-ruído;
5. A resiliência das constelações de referência aos efeitos da dispersão cromática (CD), dispersão dos modos de polarização (PMD), perdas dependentes de polarização (PDL), e efeitos não lineares são conhecidos na literatura;
6. No contexto desta tese, a hierarquia de politopos pode ser definida tanto no  $R^4$ , quanto na esfera  $S^2$ . Quando definida esta na esfera  $S^2$ , têm-se o conhecimento prévio do espectro de polarização da modulação;
7. A granularidade de símbolos define a capacidade de sintonia do arranjo de constelações. Conforme ilustrado na Figura (1.6), a granularidade é definida como o "salto" em *número de símbolos* de uma constelação 4D;

Conforme demonstrado na Seção (4.4.1), o arranjo ilustrado na Figura (1.6) pode ser facilmente estendido para uma estrutura nPolSK-mPSK.

Em termos geométricos, este arranjo tem a seguinte hierarquia de politopos:

$$\text{Hexaedro Tetrakis} \rightarrow \begin{cases} \text{Hexaedro (hipercubo-3)} \rightarrow \{\text{Tetraedro} \\ \text{Octaedro} \rightarrow \begin{cases} \text{Tetraedro Plano (hipercubo-2)} \\ \text{Reta (hipercubo-1)} \end{cases} \end{cases}$$

Figura 5.83: Diagrama hierárquico de politopos embutidos no arranjo 14PolSK-mPSK.

Observou-se que o hexaedro tetrakis pode ser utilizado como politopo de referência até a modulação de 128 símbolos. A partir de 128 símbolos surge outra estrutura geométrica capaz de incluir várias outras. Uma observação atenta aos diversos mapas de Hopf ilustrados na Seção (4.6), demonstrou que uma base com 30 vértices tem a propriedade de incorporar as projeções das constelações selecionadas até 256 símbolos. Desta forma, diferente da expectativa inicial, a estrutura selecionada para ser o politopo de referência não precisa necessariamente ser regular. A Figura (5.84) ilustra a referida estrutura de 30 vértices.

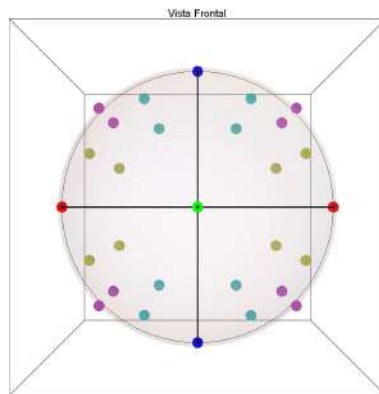


Figura 5.84: Politopo de referência (base dos fibrados de Hopf) para constelações até 256 símbolos.

Além dos vértices embutidos, a estrutura geométrica descrita na Tabela (5.12) indica a presença de simetrias evidenciadas pela repetição de valores das coordenadas dos vetores 3D. O subpolitopo 1 tem 06 vértices de um octaedro. O subpolitopo 2 tem 08 vértices simétricos localizados numa única casca esférica. O subpolitopo 3 tem 16 vértices também simétricos. A base mostrada na Figura (5.84) faz parte de sequência de politopos embutidos cujo número de vértices é uma combinação linear do par  $\{3, 4\}$ .

A combinação linear  $[(2 \times 3) + (2 \times 4)]$  forma, por exemplo, o número de vértices do hexaedro tetrakis. Por sua vez, a combinação linear  $[(2 \times 3) + (6 \times 4)]$  forma os 30 vértices da Figura (5.84). De modo geral, bases com até 102 vértices foram observadas.

Tabela 5.12: Vértices do politopo base (vetores de Stokes).

Subpolitopos	s1	s2	s3
<b>Subpolitopo 1</b>	1.	0.	0.
	-1.	0.	0.
	0.	1.	0.
	0.	-1.	0.
	0.	0.	1.
	0.	0.	-1
<b>Subpolitopo 2</b>	0.33	0.67	0.67
	0.33	0.67	-0.67
	0.33	-0.67	0.67
	0.33	-0.67	-0.67
	-0.33	0.67	-0.67
	-0.33	0.67	0.67
	-0.33	-0.67	-0.67
	-0.33	-0.67	0.67
<b>Subpolitopo 3</b>	0.62	0.71	-0.33
	0.62	0.33	0.71
	0.62	-0.33	-0.71
	0.62	-0.71	0.33
	0.62	0.33	-0.71
	0.62	0.71	0.33
	0.62	-0.71	-0.33
	0.62	-0.33	0.71
	-0.62	0.71	0.33
	-0.62	0.33	0.71
	-0.62	0.71	-0.33
	-0.62	-0.33	0.71
	-0.62	0.33	-0.71
	-0.62	-0.71	0.33
	-0.62	-0.33	-0.71
	-0.62	-0.71	-0.33



Na Tabela (5.13) a seguir, lista-se as modulações compatíveis com o arranjo adaptativo. Estas constelações foram selecionadas após as análises conduzidas na Seção (4.6). No processo de seleção, as constelações deveriam atender aos seguintes critérios e requisitos:

1. Ter bom desempenho no cálculo da IM;
2. Possuir valores de CFM, PE e  $E_s$  e PAPR compatíveis com a modulação de referência;
3. Ter mapa de Hopf simétrico e número reduzido de estados de polarização. Obs: O número de estados de polarização por casca esférica fornece um quantitativo das transições de fase da constelação;
4. Possuir partições QAM simétricas para transmissão PDM, reduzindo a complexidade de implementação;
5. Atender ao critério de granularidade requerido;

Após a seleção, a *matriz de capacidade* do sistema de transmissão foi composta pelas modulações da Tabela (5.13).

Tabela 5.13: Matriz de capacidade do transmissor composta por constelações compatíveis com o arranjo adaptativo

Indice	Número de símbolos	Referência	Constelação alternativa	Limiar SNR
1	8	PS-QPSK	PS-QPSK	8 dB
2	16	PDM-QPSK	TETRAEDRO-D-NC-4PSK	10 dB
3	32	SP-QAM-4-32	MDCE-32-5 (Ver Figura (5.21))	11 dB
4	64	PDM-SP-64QAM	MDCE-64-5 (Ver Figura (5.30))	14 dB
5	128	PDM-SP-128QAM	MDCE-128-4 (Ver Figura (5.39))	15 dB
6	256	PDM-16QAM	MDCE-256-4 (Ver Figura (5.48))	16 dB
7	512	SP-QAM4-512	MDCE-512-4 (Ver Figura (5.55))	19 dB
8	1024	PDM-32-QAM	MDCE-1024-3 (Ver Figura (5.61))	20 dB

O arranjo é iniciado com uma granularidade de 8 símbolos até as constelações (TETRAEDRO-D-NC-4PSK/PDM-QPSK). A partir da MDCE-32-3, a granularidade é 32, 64, 128, 256 e 512 símbolos respectivamente.

### 5.4.1

#### Proposta de controle adaptativo

Ao utilizar o hardware mostrado no Apêndice (A), propôs-se a realização de um sistema de controle adaptativo conforme o modelo apresentado na Seção (1.2). O sistema proposto baseia-se em eventos discretos denominados *estados do canal*. Neste sistema, propõe-se a utilização das seguintes definições:

- *Vetor de estado do canal* - é um vetor cujas coordenadas são variáveis de monitoramento do canal óptico medidas/estimadas (ex: OSNR, EVM, CD, PMD);
- *Vetor de resiliência* - é um vetor cujas coordenadas são medidas percentuais da resiliência da modulação em relação a média acumulada da variável de interesse. Por exemplo: um vetor de resiliência cuja coordenada OSNR é 0,5 indica que a resiliência da modulação é 50% da média acumulada (medida/estimada) para aquela variável;
- *Matriz de resiliência* - é uma matriz que representa a capacidade de transmissão do sistema com base numa lista de modulações candidatas para a transmissão.
- *Vetor de distâncias* - Vetor cujo conjunto de coordenadas é formado pela distância euclidiana entre o vetor de estado do canal e vetores linha da matriz de resiliência.
- *Vetor de custo* - Vetor com a mesma dimensão do vetor de distâncias. As coordenadas são valores discretos, obtidos de estimativas do *custo computacional relativo* de cada modulação. Este vetor define um *ranking* para o custo computacional de utilização para cada modulação.

Neste modelo, a capacidade de uma modulação é definida pelo *vetor de resiliência* da modulação. Contudo, dado que as coordenadas são normalizadas em relação a escala de cada medida, a resiliência se torna uma medida percentual. Quando a média acumulada de determinada variável supera o fundo de escala então o vetor coluna relacionado com a variável em questão é renormalizado. Exemplo: Se o fundo de escala da OSNR for 25 dB e a média acumulada atingir 26 dB, então todas as coordenadas OSNR de resiliência serão multiplicadas pelo fator 26/25.

A capacidade do transmissor é definida por uma matriz (*matriz de capacidade*) cujos vetores linha são os vetores de resiliência de cada modulação *disponível*. As modulações que compõem a matriz são aquelas definidas na Tabela (5.13).



No caso específico do sistema proposto, o vetor de distâncias tem dimensão  $1 \times 8$ . A posição da menor coordenada deste vetor retorna o índice que define a constelação a ser transmitida (ver a coluna 1 da Tabela (5.13)). A posição de menor coordenada do vetor de distâncias indica que a distância geométrica entre o vetor de resiliência e o vetor de estado do canal é reduzida. Nesse modelo, uma modulação que supera largamente os requisitos do estado canal terá um vetor geometricamente distante do estado do canal. Por este motivo torna-se necessário utilizar, além do produto interno, uma métrica com sinal para as distâncias. Uma distância positiva indica uma modulação candidata, uma distância negativa indica uma modulação incapaz de atender aos requisitos do estado do canal. Após o cálculo do produto interno, a posição da coordenada do vetor de distâncias foi codificada com uma palavra binária de 03 bit. Esta palavra binária de 03 bit seleciona os endereços (início-fim) da área de memória das palavras 4D.

Para evitar ambiguidades, a regra de decisão inclui um *vetor de custo* com estimativas do custo de transmissão de cada constelação. Este custo de transmissão pode incluir várias métricas, incluindo o custo energético na forma *joule/bit* derivado da Equação (3-5). Uma maneira simplista de fazer o cálculo do custo energético é considerar a potência média dos níveis do DAC (vistos como símbolos PAM). Outra forma mais precisa, consiste em calcular a potência média consumida pelo transmissor a partir dos histogramas 2D da Seção (4.6). De forma geral, a métrica deve refletir o fato de que constelações com "distância positiva" muito grande tenham uma relação custo-benefício desfavorável. Este artifício evita que modulações com custo muito alto sejam escolhidas para estados do canal que podem ser atendidos por outras modulações de menor custo.

O pareamento entre o vetor de custo e o vetor de distâncias dá mais estabilidade ao sistema. O controle baseado em eventos foi realizado através de uma máquina de estados finitos (FSM). Pela simplicidade da prova de conceito, uma FSM Mealy foi desenvolvida.

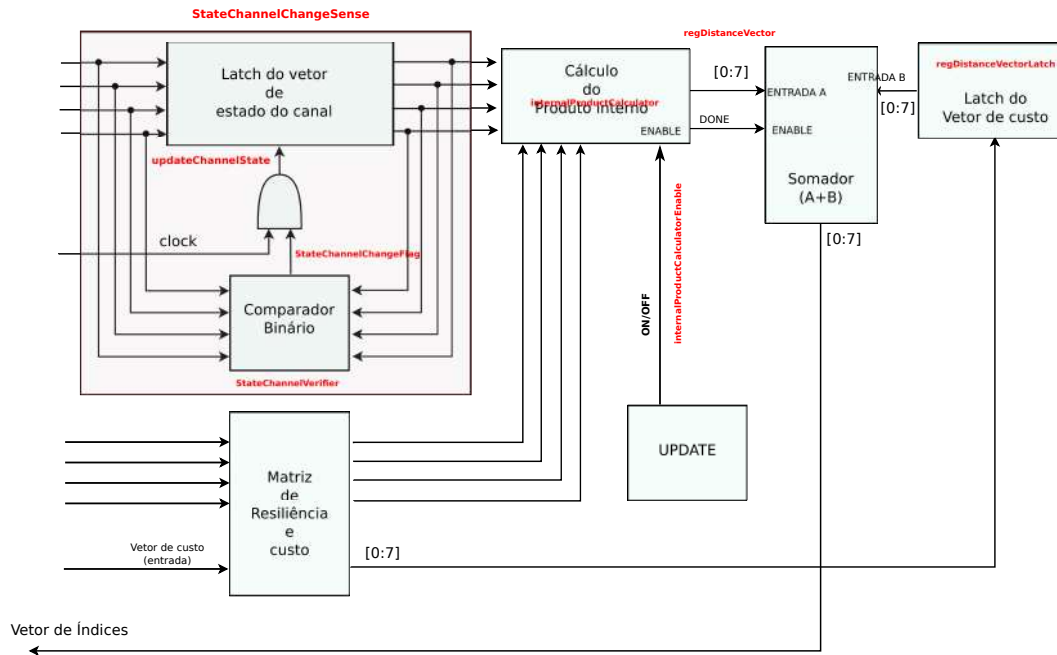


Figura 5.86: Diagrama de blocos simplificado das funções lógicas da máquina de estados.

O funcionamento da máquina de estados pode ser descrito de forma procedural com os seguintes passos:

1. O vetor de estado do canal é atualizado na entrada do registro 1 do bloco (**StateChannelChangeSense**). O registro 1 é um latch paralelo comandado pelo sinal **updateChannelState**;
2. Concomitantemente, um flag booleano que armazena qualquer condição de mudança na matriz de capacidade é transferido para o registro 2 do bloco (**StateChannelChangeSense**);
  - (a) Um comparador de bits (**StateChannelVerifier**) verifica se a entrada do registro 1 de **StateChannelChangeSense** é igual a sua saída.
  - (b) Em caso de entrada e saída iguais, a saída do comparador **StateChannelVerifier** seta a saída booleana **StateChannelChangeFlag** em (False). Isto significa que não houve mudança no estado do canal. O bloco multiplicador não é acionado (**internalProductCalculatorEnable=False**) e o registro do vetor de distâncias (**regDistanceVector**) é mantido;
  - (c) Em caso de entrada e saída diferentes, a saída do comparador **StateChannelVerifier** seta a saída booleana

**StateChannelChangeFlag** em (True). Isto significa que houve mudança no estado do canal. No próximo ciclo de clock, o estado **UPDATE** da FSM muda para ON. O sinal de **StateChannelChangeFlag** é usado para transferir a entrada do registro 1 do bloco (**StateChannelChangeSense**) para a saída deste latch. O bloco multiplicador (**internalProductCalculator**) é acionado (**internalProductCalculatorEnable=True**) e o registro do vetor de distâncias (**regDistanceVector**) é atualizado. Um latch (**regDistanceVectorLatch**) é usado para atualizar **regDistanceVector**, este latch é habilitado pelo sinal **DONE** fornecido por **internalProductCalculator**.

3. O bloco **internalProductCalculator** tem controle de enable (**internalProductCalculatorEnable**) comandado pelo sinal **UPDATE** (ON).

## 5.5

### Lista de publicações com resultados da tese

- F. A. Rodrigues, G. P. Temporão, and J. P. V Weid, “**Discrete Hopf Fibrations in the Signal Space of Four Dimensional Modulations**,” in Advanced Photonics 2017 (IPR, NOMA, Sensors, Networks, SPPCom, PS), 2017, p. SpTu2F.3;
- F. A. Rodrigues, G. Temporão, and J. P. Von Der Weid, “**Discrete Hopf fibration in the design of four-dimensional modulations**,” in SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC 2017, 2017, vol. 2017-January;
- J. P. von der Weid, G. P. Temporão, and F. A. Rodrigues, “**Fibrações Hopf e Modulações 4D**”, XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais - SBrT2017, SETEMBRO 2017;
- F. Rodrigues, G. Temporão, and J. P. von der Weid, “**Constructive Methods for the Design and Labeling of Four-Dimensional Modulations**”, JCIS, vol. 33, no. 1, Aug. 2018;
- F. A. Rodrigues, G. P. Temporão, and J. P. von der Weid, “**Simple FPGA Mezzanine Interface for Test and Measurement of Digital-to-Analog Converters**,” in 2019 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC), 2019, pp. 1–5;
- F. A. Rodrigues, G. P. Temporão, and J. P. V Weid, “**Constrained Shell Mapping for Geometric Optimization of Multilevel 4D Modulations**,” in SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC 2019, 2019, vol. 2019-November;

Demonstrou-se neste trabalho a análise de soluções para comunicações ópticas adaptativas. A análise foi conduzida sob a perspectiva das modulações de polarização utilizadas em sistemas coerentes. Uma revisão bibliográfica detalhada permitiu reconhecer os principais ofensores do canal óptico e também serviu para estabelecer o estado da arte em comunicações ópticas adaptativas. Os conceitos teóricos pertinentes aos objetivos da tese foram abordados, com destaque para a teoria unificada da polarização e coerência da luz. As conclusões obtidas destas teorias confirmam que sinais de polarização possuem uma rigidez geométrica limitada pelo *tempo de polarização*.

A base matemática do problema do empacotamento de esferas foi descrito para a compreensão das ferramentas geométricas utilizadas na tese. Após uma breve análise da evolução das modulações ópticas, concluiu-se que a construção de um sistema de comunicação adaptativo depende do grau de flexibilidade (granularidade) das modulações disponíveis. Dito de outra forma, reconheceu-se que para tornar viável o processo de adaptação do sinal transmitido, seria antes necessário criar novas opções de modulação. Após verificar que a evolução das comunicações ópticas está fortemente relacionada com a utilização de modulações de alta ordem, delimitou-se o modelo do sistema de comunicação a ser analisado. Ao considerar essas premissas, o trabalho foi concentrado no projeto de constelações ópticas utilizando os métodos propostos e demonstrados no Capítulo (4).

Uma contribuição fundamental desta tese foi a aplicação dos fibrados de Hopf associados com vértices embutidos de politopos. O uso destas ferramentas matemáticas potencializou as soluções de engenharia desenvolvidas na tese. Constelações 4D com 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 e 16384 símbolos foram projetadas e avaliadas. Para a maioria das constelações construídas não observou-se relato prévio na bibliografia consultada. Na avaliação comparativa foram utilizadas como métrica a informação mútua acumulada (IMA), a figura de mérito (CFM), a energia por símbolo ( $E_s$ ) das constelações e a relação entre potência de pico e potência média (PAPR).



Concluiu-se após as avaliações, que o desempenho das constelações construídas é, no mínimo, equivalente ao das constelações de alto desempenho documentadas na bibliografia consultada. Constelações construídas através do método do *mapeamento discreto de cascas esféricas* (MDCE), possuem evidente superioridade quando a métrica é a PAPR. Quando comparadas com QAM clássicas, foram verificadas reduções de até 3 dB na PAPR de constelações densas com mapa de Hopf simétrico. O método MDCE generaliza a construção de constelações simétricas e tal propriedade foi testada para constelações de 32 até 16384 símbolos. A favor do método dos fibrados de Hopf está a grande flexibilidade na construção de modulações com diversas granularidades e a capacidade de construir arranjos hierárquicos de constelações.

A seguir, lista-se algumas observações sobre o método de mapeamento discreto de cascas esféricas:

1. O uso de quantizadores (amostras da função HQ) com número par permitiu a criação de constelações com mapa de polarização simétrico. Esta propriedade foi mais facilmente observada quando utilizou-se o mapa de Hopf direito (*right Hopf*). A projeção de vetores 4D sobre icosaedros geodésicos preservou o efeito de superposição do mapa de Hopf e dessa forma as constelações resultantes tinham mapa de Hopf proporcional ao número de símbolos. A proporção observada foi 1:4. Por exemplo: constelações de 32 símbolos apresentaram mapa de Hopf com 8 estados de polarização;
2. O uso de funções sigmóides no DAC permitiu gerar constelações mapeadas sobre esferas concêntricas tanto em 2D (QAM) quanto em 4D. Apesar do DAC com uma função sigmóide possuir maior energia média, foi possível construir constelações de alta ordem com boa eficiência energética (Es) explorando a alocação espaço-temporal dos símbolos.
3. Conforme descrito em [203], o ganho de forma (*shaping gain*) geralmente produz como efeito colateral a expansão da constelação PAM (CER), além do aumento simultâneo da PAPR. No método MDCE, as taxas de expansão (CER) foram relativamente reduzidas. O valor máximo de CER foi 2,5. Adicionalmente, na maioria dos casos, o ganho de forma foi obtido com redução da PAPR (em relação à referência);
4. Devido à redução de dimensionalidade, o método não se mostrou eficiente na construção de constelações abaixo de 32 símbolos;

5. As constelações Cross-QAM têm características próprias para a construção de modulações resilientes aos efeitos da não linearidade do canal óptico. A remoção das coordenadas de maior norma nestas constelações reflete simultaneamente na PAPR e no mapa de Hopf, facilitando o particionamento do referido mapa;
6. A ocorrência simultânea de boa pontuação da IMA com reduzida PAPR implica necessariamente que a constelação tenha um empacotamento eficiente das hiperesferas (cascas esféricas). Isto se aplica devido ao fato que reduzir a PAPR equivale a compactar o espaço das normas em que residem os vetores (símbolos) das constelações. Esse resultado indica que o uso concomitante da PAPR e da IMA é uma boa métrica para avaliação de constelações;
7. A pequena diferença na SNR torna ineficaz estabelecer uma granularidade muito grande das modulações. Por exemplo, a diferença da SNR@SE para as constelações de 128 e 256 símbolos é de apenas 1 dB. O mesmo ocorre com os pares (1024, 2048) e (8192, 16384). As evidências indicam que variar a taxa de sinalização é uma alternativa viável;
8. Conforme mostrado na Figura (5.2), os histogramas das constelações 4D revelam subestruturas que podem ser utilizadas em um arranjo adaptativo. Esse arranjo tem a vantagem de utilizar valores do DAC previsíveis, mantendo o número efetivo de bits (ENOB). Ao tomar como exemplo a constelação MDCE-256-4 (ver Figura (5.1)), é possível identificar 5 constelações disjuntas embutidas no histograma QAM. Após multiplicar o número de símbolos QAM pela frequência do histograma, resulta que a soma totaliza 256 símbolos:

$$\underbrace{8 \times 2}_{16} + \underbrace{8 \times 6}_{48} + \underbrace{4 \times 8}_{32} + \underbrace{4 \times 12}_{48} + \underbrace{8 \times 14}_{112} = 256$$

Conforme explicado na Seção (4.4.2), a projeção de Cayley-Dickson de constelações 4D (cujos símbolos não se repetem) resulta na alocação espaço-temporal dos símbolos QAM;

9. Conforme esperado, as constelações de norma única exibiram desempenho limitado na medida em que o número de símbolos foi aumentado. O resultado indica que o uso prático de constelações de norma única tende a ficar restrito a um numero reduzido de símbolos.

Verificou-se, por exemplo, que a competição entre norma constante e multinorma fica acirrada acima de 128 símbolos. É importante notar que as constelações de norma única permaneceram como boa opção para transmissões no regime não linear;

10. O uso de restrições permitiu a construção de constelações com mapa Hopf Base 2. Esta propriedade é particularmente interessante por permitir que o rótulo das constelações seja realizado sobre o mapa de Hopf. A Tabela (4.2) mostrou um exemplo de rotulagem para a constelação 8PolSK-8PSK;
11. Bases de Hopf ótimas foram observadas numa estrutura de 30 vértices embutidos. As constelações projetadas sobre esta base apresentaram desempenho relativamente superior;
12. A opção de usar um mapa de Hopf Base 2 é particularmente importante para a rotulagem de constelações que impõem penalidades pelo código Gray. Quando o mapa de Hopf é Base 2, as constelações cross-QAM e aquelas com DAC ímpar (que inclui o zero) podem ser rotuladas sem penalidade. Isto se aplica com a condição de que o número de vetores mapeados para cada fibrado de Hopf (vetor de  $S^2$ ) seja Base 2.

Ao utilizar sequências de De Bruijn sobre os fibrados de Hopf, demonstrou-se a rotulagem de símbolos de constelações **n**PolSK-**m**PSK utilizando códigos de cobertura. Com esta abordagem, as métricas da distância de Hamming e da distância euclidiana foram aplicadas. Os rótulos binários permitiram o armazenamento das constelações em memórias FPGA. Estruturas de mapeamento similares à memórias CAM foram utilizadas para associar os rótulos binários aos códigos do DAC.

De modo geral, os métodos propostos acrescentaram flexibilidade no projeto de constelações multidimensionais. As ferramentas de visualização e análise que foram desenvolvidas especialmente para a tese permitiram diagnósticos qualitativos rápidos no processo de seleção das constelações candidatas para transmissão em sistemas de taxa adaptativa. O uso da forma de Cayley-Dickson de quatérnios permitiu, por exemplo, a realização de projeções QAM das modulações 4D. A contagem da frequência (histograma) dos símbolos QAM revelou as propriedades de *shaping* das modulações. Este fato é relevante considerando que as constelações em questão não estão codificadas. Mais importante ainda é o fato de que o ganho de forma foi obtido sem compromisso da estrutura geométrica que se manteve previsível e de fácil descrição.

A forma dos histogramas QAM revelou, como esperado, que constelações de alto desempenho tendem para uma distribuição Gaussiana bidimensional. Para algumas constelações, também foi observado que: o número de símbolos 4D em função da norma (casca esférica), segue uma distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Um fato interessante em relação aos histogramas QAM é que a forma do histograma pode estar invertida, com os símbolos de maior norma ocorrendo mais vezes. As evidências indicaram que o desempenho das constelações não depende do valor absoluto da amplitude do sinal do DAC e sim da variação (relativa) de amplitude. Observou-se ainda que a tomada de decisão em relação à melhor constelação deve utilizar múltiplas métricas. Como exemplo, cita-se o fato de algumas constelações com CFM baixo apresentarem desempenho superior no cálculo da informação mútua. Os resultados indicam que a PAPR, por ser uma métrica relativa, é adequada para avaliar constelações 4D.

Estabelecidas as bases teóricas e os métodos construtivos de constelações 4D, buscou-se através de uma prova de conceito, propor uma estrutura básica de hardware e software com capacidade de alterar o fluxo de transmissão de dados na camada física da rede.

O código FPGA demandou soluções para o carregamento das constelações na memória do hardware. A solução para este problema foi a criação de um script de software que transferiu as constelações projetadas em software diretamente para arquivos .VHDL e posterior armazenamento em hardware.

O hardware descrito no projeto do driver do modulador óptico foi construído. Placas de circuito eletrônico foram projetadas e montadas exclusivamente para esta finalidade. O grau de dificuldade na construção deste driver foi elevado uma vez que os encapsulamentos dos chips utilizados eram em sua maioria BGA (Ball Grid Array). A escassez de documentação sobre os componentes eletrônicos representou um desafio adicional.

O sistema de controle adaptativo integrou a parte digital com a parte analógica. O sistema projetado para a tese realizou apenas funções de tomada de decisão, não incluindo o processamento de sinais de alta velocidade. Esta parte do sistema será desenvolvida num futuro próximo. Com o arranjo de modulações proposto, a alteração no fluxo de dados pode acontecer em função de variações (simuladas) na qualidade do canal ou, através de intervenção humana. Como não foi possível realizar, em tempo hábil, a parte de processamento rápido de sinais, utilizou-se dados provenientes de simulações para o sistema de decisão.

A rótulagem estruturada dos símbolos das constelações utilizando sequências de De Bruijn (ver Tabela 4.2) permitirá a integração com camadas superiores do sistema de controle. Esta capacidade é em última análise um requisito fundamental que permite racionalizar a utilização da banda de transmissão disponível.

Uma aplicação importante dos resultados deste trabalho é no projeto de transceptores ópticos adaptativos, que por sua vez são estruturas chave para viabilizar os transceptores ópticos cognitivos.

**Trabalhos futuros:** As propriedades dos fibrados de Hopf mostradas na Seção (4.3.3) permitem a construção de constelações SDM (Space Division Multiplexing) utilizando a Hélice de Boerdijk-Coxeter ilustrada na Figura (4.9). Esta hélice pode ser construída por métodos combinatórios com sequências pré-definidas. O potencial deste método reside no fato de que é possível fibrar o 600-Cell (e outros politopos) com tetraedros em vez de simples pontos que residem em um grande círculo. Em outras palavras: considerando  $S_r^3$ , uma estrutura de cascas esféricas de raios  $\mathbf{r}$ . Cada coordenada sobre grandes círculos em  $S_r^3$  pode definir a posição não de apenas um ponto mas de quatro pontos, cujos vértices formam tetraedros.

## Apêndices

### A

## Projeto de um Transceptor Experimental para Comunicação em Fibras Ópticas

### A.1

#### O hardware do transmissor óptico

Com o objetivo de aprofundar a análise dos sistemas digitais coerentes, realizou-se neste trabalho o projeto do hardware básico de um transmissor óptico. A seguir são descritas as características relevantes dos principais componentes e subsistemas utilizados.

#### A.1.1

#### Modulador Óptico FTM7977HQA

O modulador óptico utilizado foi um PMQ-MZM, fabricado pela FUJITSU (modelo FTM7977HQA). O diagrama do modulador é ilustrado na Figura (A.1).

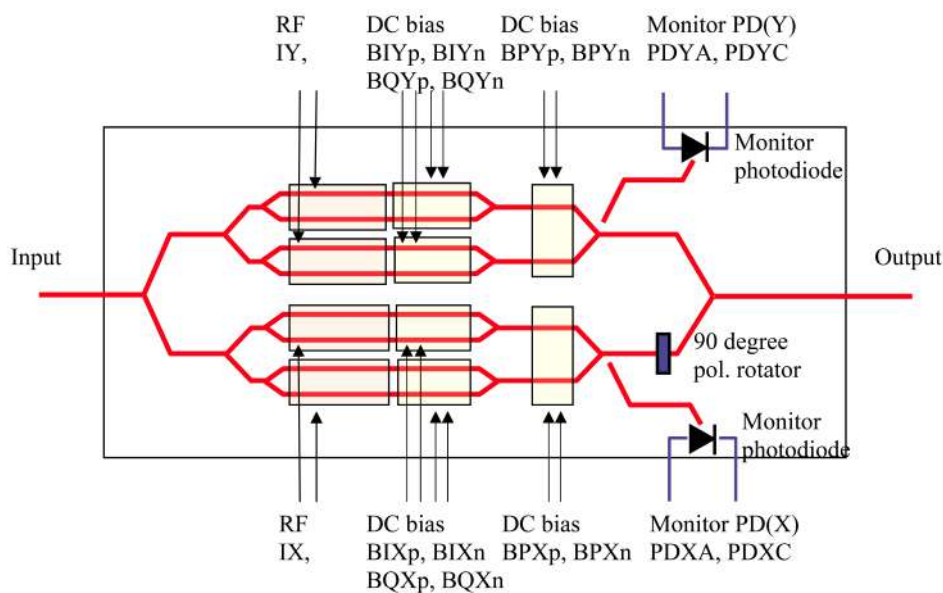


Figura A.1: Modulador óptico FTM7977HQA utilizado para geração de sinais PDM-QPSK (Fonte: FUJITSU).

O FTM7977HQA opera na faixa de 1530 a 1610 nm. Suas entradas de dados suportam taxas de sinalização da ordem de 32 Gbaud, dentro de uma banda passante (banda de 3 dB) de 23 GHz.

A taxa de extinção do principal Mach-Zehnder é da ordem de 22 dB e o  $V\pi$  é de 3,5 Vpp. A máxima potência óptica de entrada suportada pelo modulador é de 18 dBm. O modulador possui dois fotodiodos monitores integrado, cuja responsividade está na faixa de 0,07 a 0,7 A/W com uma largura de banda mínima de 1GHz.

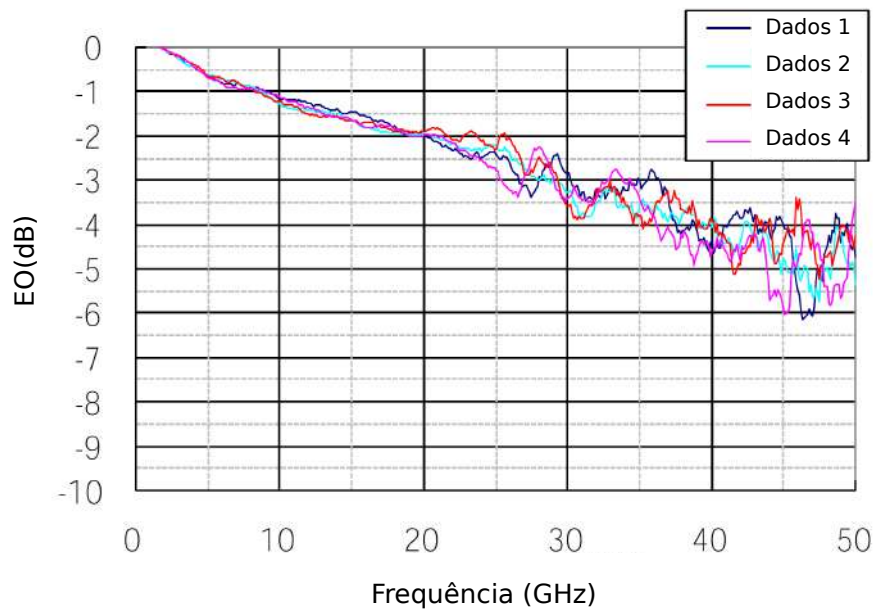


Figura A.2: Curva de resposta em frequência e linearidade do FTM7977HQA (Fonte: FUJITSU).

A curva mostrada na Figura (A.2) faz parte da folha de dados do FTM7977HQA. Ela indica que este modulador é adequado para uso em modulações multinível, principalmente em baixas taxas de sinalização. O valor de  $V\pi$  indica a necessidade de um *driver* amplificador que forneça no mínimo 26 dBm em cada entrada de dados de 50  $\Omega$ . Os parâmetros de linearidade e potência elétrica serviram de base para a especificação do *driver* do modulador óptico cuja descrição detalhada será realizada na próxima seção.

### A.1.2

#### Projeto do *driver* do Modulador Óptico

O *driver* do modulador óptico é parte fundamental do hardware do transmissor. Para esta função, foi utilizado o componente GX62474, do fabricante IDT. A Figura (A.3) ilustra o diagrama interno desse componente.

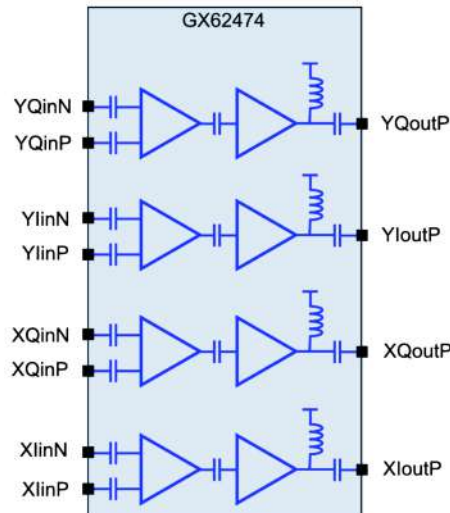


Figura A.3: Diagrama interno simplificado do *driver* GX62474.

A estrutura interna dos *drivers* GX62474 é composta de amplificadores distribuídos [192]. O uso deste tipo de arquitetura permite uma banda passante que vai de zero até 32 Gbaud, fornecendo tensões de saída da ordem de 6,5 Volt. O máximo valor para o sinal de entrada é 4 Vpp. A banda passante do *driver* permite maior fidelidade entre os pulsos gerados pelo DAC. O chip GX62474 da IDT é formado por 4 amplificadores de múltiplo estágio. Cada amplificador requer 04 diferentes tensões de polarização DC (*bias*). Além disso, por conta da tecnologia CMOS empregada, o chip necessita de um adequado sequenciamento das tensões de alimentação para evitar o efeito conhecido como *latch-up*.

Em consequência da complexidade dos circuitos de polarização DC, o projeto do *driver* foi dividido em 03 diferentes circuitos. Com esta configuração, foi necessário a montagem de 03 diferentes placas de circuito impresso. A placa principal do circuito do *driver*, mostrada na Figura (A.4), abriga o chip GX62474 e 04 conectores. Os conectores *headers* de 15 pinos foram utilizados para conduzir as tensões de polarização DC geradas pelas placas auxiliares, os conectores mini SMP foram utilizados para os sinais de alta velocidade.

A placa de circuito tem considerável complexidade e foi projetada para sinais compatíveis com a banda passante do *driver*.



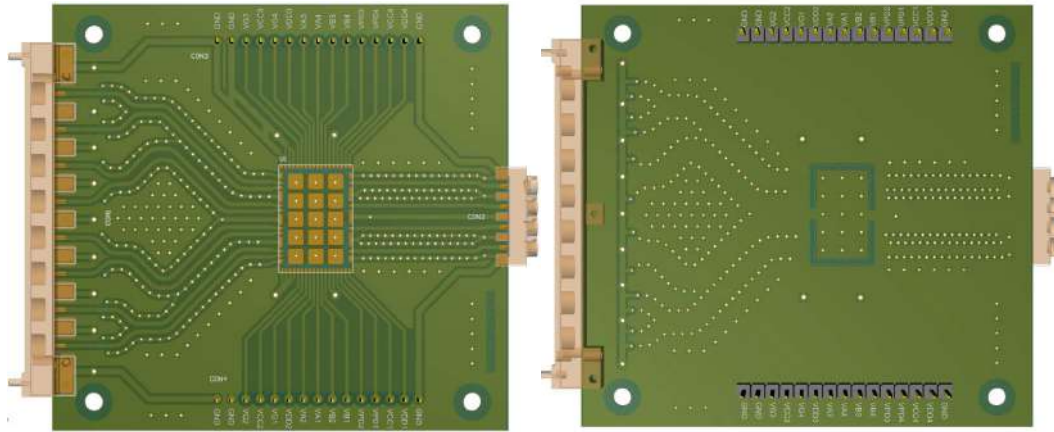


Figura A.4: Projeto PCB da placa de circuito do *driver* GX62474.

Um fator crítico, por exemplo, é o casamento do retardo entre as diferentes trilhas do circuito. Por este motivo, as trilhas que conduzem os sinais diferenciais de entrada foram casadas em comprimento. A tolerância para a diferença de comprimento foi inferior a 10 mils (milésimos de polegada). O comprimento das trilhas dos sinais diferenciais também foram equalizados para evitar defasagem entre os 04 sinais de dados que são ligados ao modulador óptico, neste caso a tolerância ficou abaixo de 15 mils.



Figura A.5: Foto da placa de circuito do *driver* GX62474 projetada e montada.

As trilhas de sinal diferencial foram margeadas por *vias* de blindagem com vistas a redução de possível interferência eletromagnética e planos de terra foram criados nas duas camadas da placa de circuito. Para realizar o projeto das placas utilizou-se a versão acadêmica do software *Altium Designer*. Este software possui recursos adequados para projetos profissionais de placas de circuito.

Os circuitos de polarização DC são reguladores de tensão comandados por amplificadores operacionais. Estes circuitos fornecem para a placa principal do *driver* 05 tipos de tensão denominadas VCC, VDD, VA, VG e VB. Esta denominação é fornecida pelo fabricante do chip GX62474.

Tabela A.1: Tabela de polarização DC (*bias*) para o *driver* GX62474.

GX62474 Pinout				
Número	Nome	Descrição do Pino DC	Tensão DC (V)	Corrente DC (mA)
1	GND	Terra	–	–
2	VG2	Controle de Ganho do Canal XQ	0,6 – 2	
3	VCC2	Primeiro Estágio de Alimentação XQ	6	160
4	VG1	Controle de Ganho do Canal XI	0,6 – 2	
5	VDD2	Segundo Estágio de Alimentação XQ	4 – 6	180 – 220
6	VA2	Controle Positivo de Bias do Canal XQ	0,6 – 1	
7	VA1	Controle Positivo de Bias do Canal XI	0,6 – 1	
8	VB2	Controle Negativo de Bias do Canal XQ	-0,5 – -0,7	
9	VB1	Controle Negativo de Bias do Canal XI	-0,5 – -0,7	
10	VPD2	Detector de Pico do Canal XQ	Medida	
11	VPD1	Detector de Pico do Canal XI	Medida	
12	VCC1	Primeiro Estágio de Alimentação XI	6	160
13	VDD1	Segundo Estágio de Alimentação XI	4 – 6	180 – 220
14	VDD4	Segundo Estágio de Alimentação YQ	4 – 6	180 – 220
15	VCC4	Primeiro Estágio de Alimentação YQ	6	160
16	VPD4	Detector de Pico do Canal YQ	Medida	
17	VPD3	Detector de Pico do Canal YI	Medida	
18	VB4	Controle Negativo de Bias do Canal YQ	-0,5 – -0,7	
19	VB3	Controle Negativo de Bias do Canal YI	-0,5 – -0,7	
20	VA4	Controle Positivo de Bias do Canal YQ	0,6 – 1	
21	VA3	Controle Positivo de Bias do Canal YI	0,6 – 1	
22	VDD3	Segundo Estágio de Alimentação XI	4 – 6	180 – 220
23	VG4	Controle de Ganho do Canal YQ	0,6 – 2	
24	VCC3	Primeiro Estágio de Alimentação YI	6	160
25	VG3	Controle de Ganho do Canal YI	0,6 – 2	
26	GND	Terra	–	–

As tensões mostradas na Tabela (A.1) são aplicadas aos pinos de entrada do GX62474 que ficam em lados opostos do encapsulamento. Por este motivo, para facilitar a conexão mecânica, foram projetadas duas placas para a polarização do amplificador *driver* (ver Figura (A.6)). Essas placas têm circuitos idênticos, diferenciados apenas pela posição do conector *header*. Outra motivação para a construção de duas placas é a redução da complexidade do *layout* necessário para agrupar as tensões com base na sequência de ativação (ver Tabela A.2).

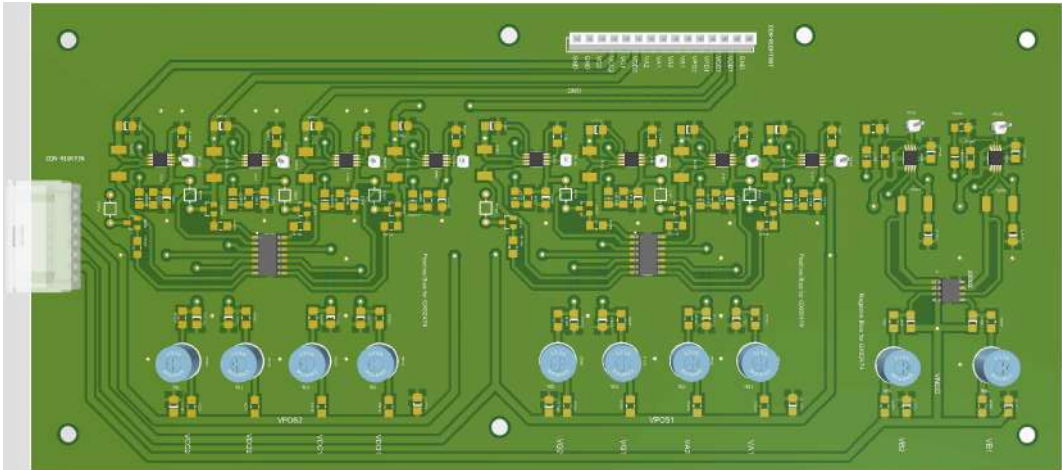


Figura A.6: Projeto PCB dos circuitos de polarização elétrica DC (*bias*) do *driver* GX62474.

As duas placas de polarização elétrica DC (*bias*) foram alimentadas através de um sequenciador de fontes de alimentação.

Conforme já mencionado, para evitar o efeito *latch-up*, um circuito sequenciador foi utilizado para prover os ciclos de ligamento (*power-up*) e desligamento (*power-down*) dos 04 amplificadores contidos no chip GX62474. A tabela de ligamento e desligamento obedece a seguinte sequência:

Tabela A.2: Ciclos *Power On* e *Power Off* do circuito sequenciador.

Sequência de Habilitação das fontes de tensão			
→ Sentido de acionamento			
Power On	VB	VA e VG	VCC e VDD
Power Off	VCC e VDD	VA e VG	VB

No ciclo de ligamento, as tensões negativas (VB) são habilitadas primeiro em seguida são acionadas as tensões VA e VG e por último são ativas as tensões VCC e VDD. O ciclo de desligamento por sua vez inibe as tensões na ordem reversa. Além realizar os ciclos de sequenciamento, o circuito também monitora as condições de sub e sobre voltagem.

A placa mostrada na Figura (A.7), inclui sensores ativos de corrente, que foram adicionados em cada saída para monitorar possíveis curtos-circuitos.

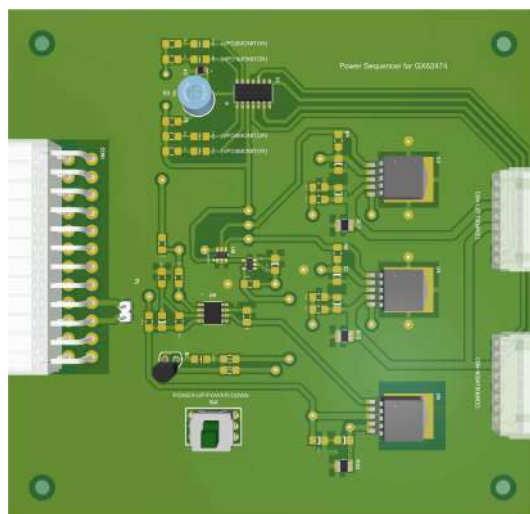


Figura A.7: Projeto PCB do sequenciador de alimentação para as polarizações (*bias*) do *driver* GX62474.

### A.1.3

#### O controlador de polarização do modulador óptico

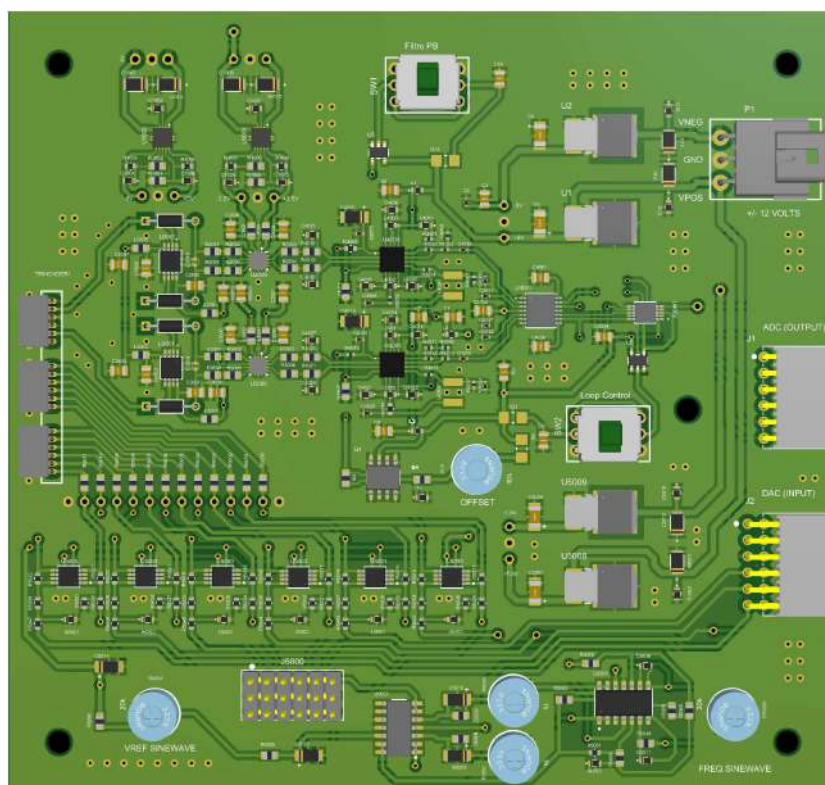


Figura A.8: Projeto PCB do controlador de polarização do modulador óptico.

### A.1.4

#### O conversor Digital Analógico R-2R

O uso de moduladores externos é uma constante nas comunicações ópticas assim como na própria metrologia de fibras ópticas. Desta forma, a despeito do domínio das comunicações em meio óptico, tais sistemas requerem por uma questão de interoperabilidade, que a sua interface seja elétrica. Nesse contexto, a modulação dos sinais de comunicação ou medição requer o uso de conversores digitais analógicos (DACs) nos transmissores e conversores analógico digital (ADCs) nos receptores. Nos casos em que a modulação é multidimensional, torna-se necessário gerar sinais independentes na mesma quantidade dos graus de liberdade (dimensão) da modulação. Portanto, para modulações 4D, precisa-se de um gerador de sinais arbitrários com 4 canais. A complexidade e o custo de um gerador com estas características escalam de forma considerável na medida em que requisitos como taxa de amostragem e taxa de conversão aumentam. Aplicações sofisticadas requerem controle preciso do atraso entre canais, requisito este que faz aumentar ainda mais o custo dos equipamentos envolvidos. Para aplicações simples, é possível relaxar a necessidade de sincronismo perfeito, reduzindo ao máximo a latência entre os canais [212]. A malha R-2R é uma das formas mais simples de se converter um sinal digital num correspondente analógico. A estrutura típica desta malha é mostrada na Figura (A.9), na qual o sinal de entrada  $a_0$  representa o bit menos significativo (LSB) e o sinal de entrada  $a_{n-1}$  representa o bit mais significativo (MSB) de uma palavra digital de tamanho  $n$ .

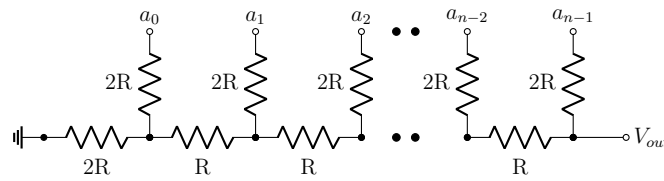


Figura A.9: Malha R-2R típica para uma taxa de conversão de  $n$  bit.

Se considerarmos que a malha em questão funcionará com baixa frequência de amostragem, a função de transferência que representa a conversão digital analógico poderá ser obtida tomando-se circuitos equivalentes de Thévenin. Nesse caso, a tensão de saída  $V_{out}$  é descrita pela Equação (A.1) na forma:

$$V_{out} = \frac{V_{a_{(n-1)}}}{2} + \frac{V_{a_{(n-2)}}}{2^2} + \frac{V_{a_{(n-3)}}}{2^3} + \frac{V_{a_{(n-4)}}}{2^4} + \dots + \frac{V_{a_0}}{2^n} \quad (\text{A.1})$$

A Equação (A.1) é verdadeira apenas para resistores ideais (não indutivos).



Em termos práticos, o modelo de um componente comercial representado na Figura (A.10) equivale a um circuito RLC. Em que,  $R$  é o valor nominal do resistor e  $L, L_c$  e  $C$  são impedâncias parasitas.

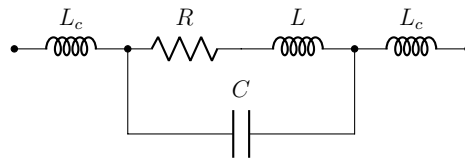


Figura A.10: Modelo elétrico típico para o desempenho de alta frequência de resistor comercial com valor nominal  $R$ . Fonte: *Vishay Sfernice*.

Após consultar folhas de dados de fabricantes de resistores, foi possível obter informações sobre o comportamento de resistores comerciais em função da frequência de operação. Para a série de filme metálico (MELF - Metal Electrode Leadless Face), a resposta em frequência até 1GHz indica que os valores com menor deriva se situam entre 10 e 1000 Ohm. Além disso, é importante acrescentar que a deriva no valor da impedância decorre não somente em função da frequência, mas também depende de outros fatores como o valor nominal do resistor e as dimensões físicas do componente (encapsulamento). Por exemplo, existe grande diferença de desempenho por conta dos diferentes encapsulamentos SMD (Surface Mount Device). Para aplicações de alta velocidade, a construção de malhas R-2R com valores baixos de  $R$  apresenta menor constante  $RC$ , e conseqüentemente maior banda passante. Os diversos fatores aqui observados foram considerados no projeto do hardware, descrito na Seção (A.1.5). O projeto do DAC objetivou utilizar soluções de baixo custo para a geração de sinais arbitrários com resolução de 8 bit.

### A.1.5

#### Projeto e desenvolvimento do circuito

O projeto do hardware do conversor digital analógico foi realizado com a utilização de um circuito integrado (CI) comercial com interfaces CML (Current Mode Logic) [193, 194]. A contribuição do trabalho aqui apresentado consistiu em aproveitar características da interface CML típica, com dois transistores, que operam alternadamente na saturação e no corte. Observou-se, que a interface CML permite que conversores R-2R *diferenciais* sejam realizados, apenas com a adição de resistores  $R$  (externos) entre as saídas binárias. Nesse contexto, uma vez que cada porta lógica possui um espelho de corrente com valor nominal de 16 mA, saídas CML funcionam como elementos de chaveamento polarizado [195].

Um arranjo típico de interfaces CML utilizando transistores bipolares está ilustrado na Figura (A.11). Embora esta arquitetura seja comumente utilizada em nível de integração de alguns CI's de alta velocidade [196], o caso aqui reportado se refere ao projeto experimental de um DAC utilizando exclusivamente componentes comerciais discretos. Portanto, o circuito tem evidentes limitações de velocidade e desempenho quando comparado com seu equivalente integrado. A boa notícia contudo é que o desempenho apresentado pode ser suficiente para uma ampla gama de aplicações.

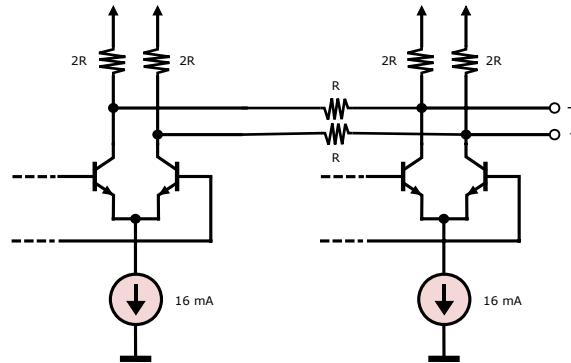


Figura A.11: Interface CML utilizada na construção da malha R-2R diferencial.

Os resistores utilizados para a construção da rede R foram do tipo MELF com boa resposta em frequência. Para o circuito reportado, cada interface CML independente possui resistores de 50 Ohm conectados ao positivo da tensão de alimentação (resistores de *pull-up*). Ao considerar cada resistor *pull-up* de 50 Ohm como um resistor 2R, bastou conectar resistores de valor R (25 Ohm) *entre* as interfaces. Como resultado, foi obtida uma rede R-2R diferencial com boa resposta em frequência.

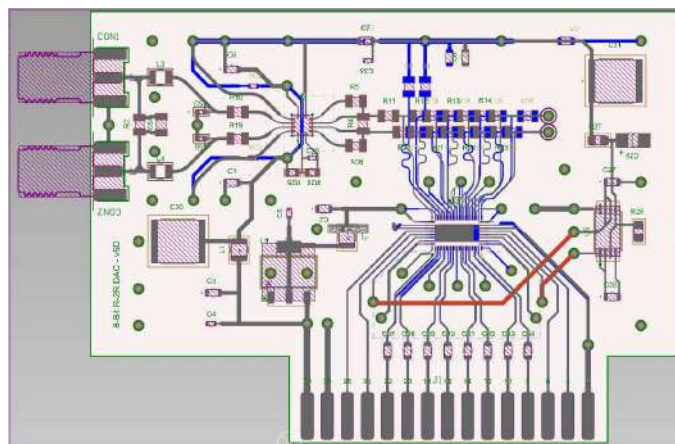


Figura A.12: Visualização do projeto PCB do DAC R-2R 8-bit@800MHz.

A construção com componentes discretos, requer cuidados especiais com o circuito PCB (Printed Circuit Board) do DAC (ver Figura (A.12)).

Técnicas de integridade de sinal foram adotadas para assegurar a qualidade do sinal analógico gerado. O projeto da placa de circuito impresso incluiu ajustes no comprimento das trilhas de sinal diferencial. A diferença de comprimento mínima foi de 10 mils (milésimos de polegada), que equivale a 0,0254 cm. Além do casamento dos comprimentos das trilhas, o roteamento dos sinais diferenciais, numa placa de circuito com 4 camadas evitou ao máximo o uso de *vias* [197]. O software Altium Designer reduziu a complexidade dessas tarefas.

Para isolar a impedância da malha R-2R, utilizou-se o consagrado amplificador diferencial LMH5401. Esse amplificador apresentou excelente desempenho, com *ganho* versus *banda passante* da ordem de 8 GHz. A placa de circuito impresso foi construída para que o DAC pudesse ser montado numa estrutura mecânica modular. Isto é importante, pois, a interface elétrica FMC (FPGA mezzanine card) [198, 199] possui 32 pares de sinais (LPC - Low Pin Count) que podem ser configurados pelo usuário. Portanto, os sinais LPC permitem a construção de um gerador de sinais com 4 DACs de 8 bit.

#### A.1.6

##### Caracterização do DAC

A caracterização do DAC R-2R foi realizada com a geração de sinais digitais HSTL (High-Speed Transceiver Logic) de 8 bit. A sequência de símbolos foi armazenada numa memória ROM (Read-Only Memory), definida por VHDL. Uma lógica digital simples contendo a memória ROM e um contador binário unidirecional foi configurada numa placa FPGA NetFPGA-SUME [200] (Virtex 7). Os sinais de saída foram obtidos da interface FMC e o software Xilinx Vivado foi utilizado para desenvolvimento da lógica de programação e configuração do FPGA.

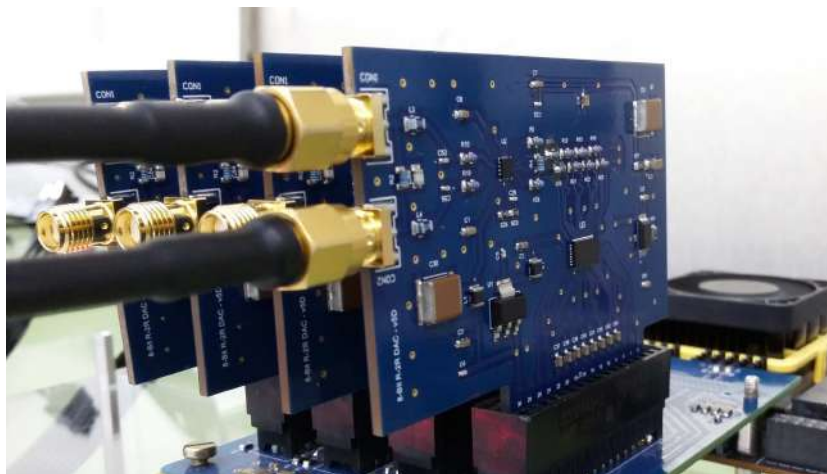


Figura A.13: Setup utilizado para caracterização do circuito DAC R-2R numa placa de circuito modular.



Uma placa adaptadora FMC, previamente construída e adaptada, foi utilizada para conduzir os sinais diferenciais do FPGA até a placa do DAC R-2R (ver Seção (A.1.11)). Os sinais diferenciais de saída foram definidos utilizando o bloco IP `OBUFF_DS`. O processo simplificado de caracterização consistiu na medição da linearidade, resposta em frequência e faixa dinâmica livre de espúrios (SFDR).

Para caracterizar a conversão DA foi conveniente utilizar um osciloscópio que permitisse a visualização simultânea de sinais digitais e analógicos. Para esta finalidade utilizou-se o osciloscópio de modo misto MSO4104 (Tektronix), com taxa de amostragem máxima de 5 GSPS. É importante notar que, todas as medidas foram realizadas com filtro passa banda de 20 MHz e desta forma o efeito do ruído de faixa larga foi considerado apenas no cálculo da SFDR.

### A.1.7

#### Medição da linearidade *versus* não linearidade integral (INL)

O funcionamento em amostragem direta impõe ao DAC aqui apresentado limitações intrínsecas de linearidade e *glitch*. Um sinal em rampa foi gerado para medição da linearidade do referido DAC. Este sinal também foi utilizado para quantificar o efeito de *glitch* na transição da rampa.

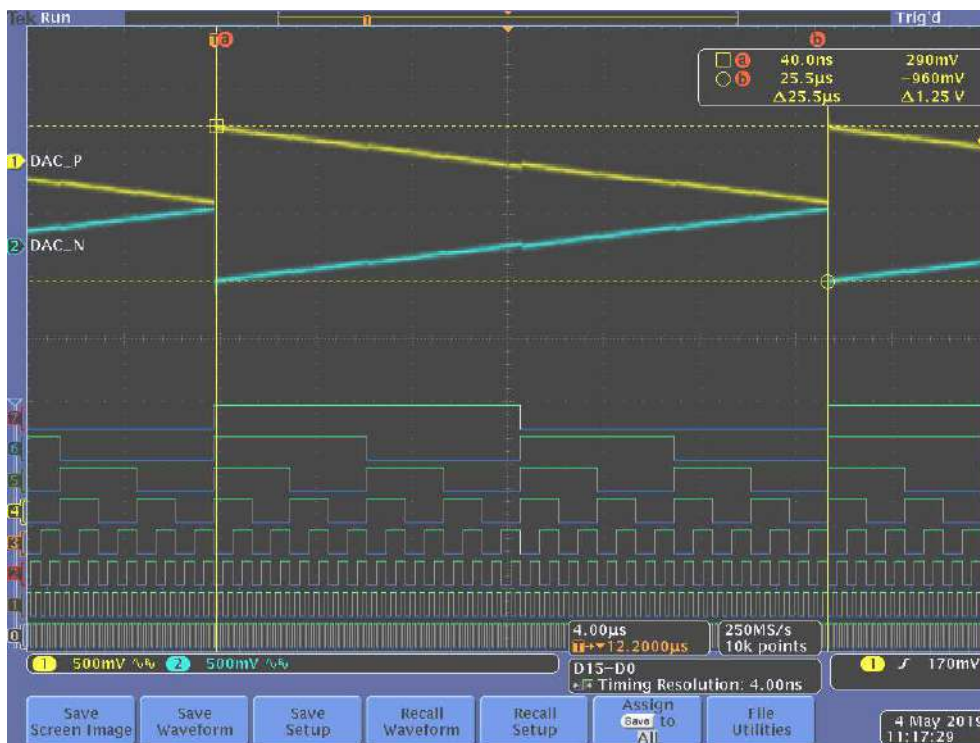


Figura A.14: Captura de tela da medição com o osciloscópio MSO4104: 08 sinais digitais (relógio de 10MHz) e sinal diferencial analógico (saída). O sinal da rampa tem um período de  $25\mu\text{s}$ .

Os valores de tensão que definem a rampa mostrada na Figura (A.14) foram digitalizados pelo osciloscópio em 10000 amostras. Para realizar o cálculo da INL (Integral Nonlinearity), foi necessário fazer um pós-processamento do arquivo .CSV exportado pelo MSO4104. O software *Mathematica* foi utilizado para gerar uma função interpolante com base em 6076 pontos de amostragem. A função interpolante foi então utilizada para recuperar o valor da rampa nos 256 pontos (níveis) da resolução do DAC. A função interpolante foi selecionada com base na sequência de pontos cuja distribuição de probabilidade melhor se aproximasse de uma Gaussiana.

A Figura (A.16) mostra a PDF e a CDF dos desvios entre os valores ideais e os valores medidos no intervalo selecionado. O resultado desta operação definiu o histórico dos valores da INL mostrados na Figura (A.15). Por sua vez, o histórico permitiu o cálculo do valor de  $INL = 0,14 \text{ LSB}$ .

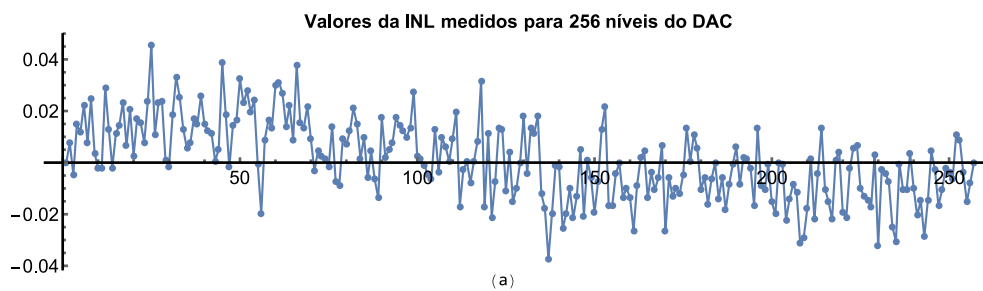


Figura A.15: Histórico dos valores da INL recuperados através de uma função interpolante. A função interpolante foi gerada a partir de valores medidos.

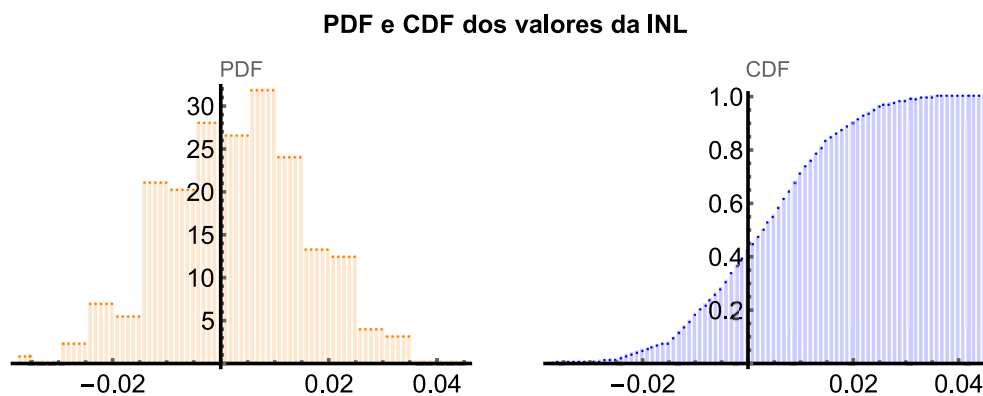


Figura A.16: Representação gráfica da PDF e CDF dos valores da INL.

### A.1.8

#### Medição do efeito glitch

A medição do *glitch* pode ser uma tarefa extremamente complexa conforme demonstrado em [201]. Para a finalidade do presente trabalho, simplificações podem ser feitas utilizando apenas os dados brutos da medida da área do *glitch*. As medidas realizadas indicam um *overshoot* de 84mV com duração de 21,6ns para uma amplitude de transição da tensão de saída de 960mVpp (ver Figura (A.17)).

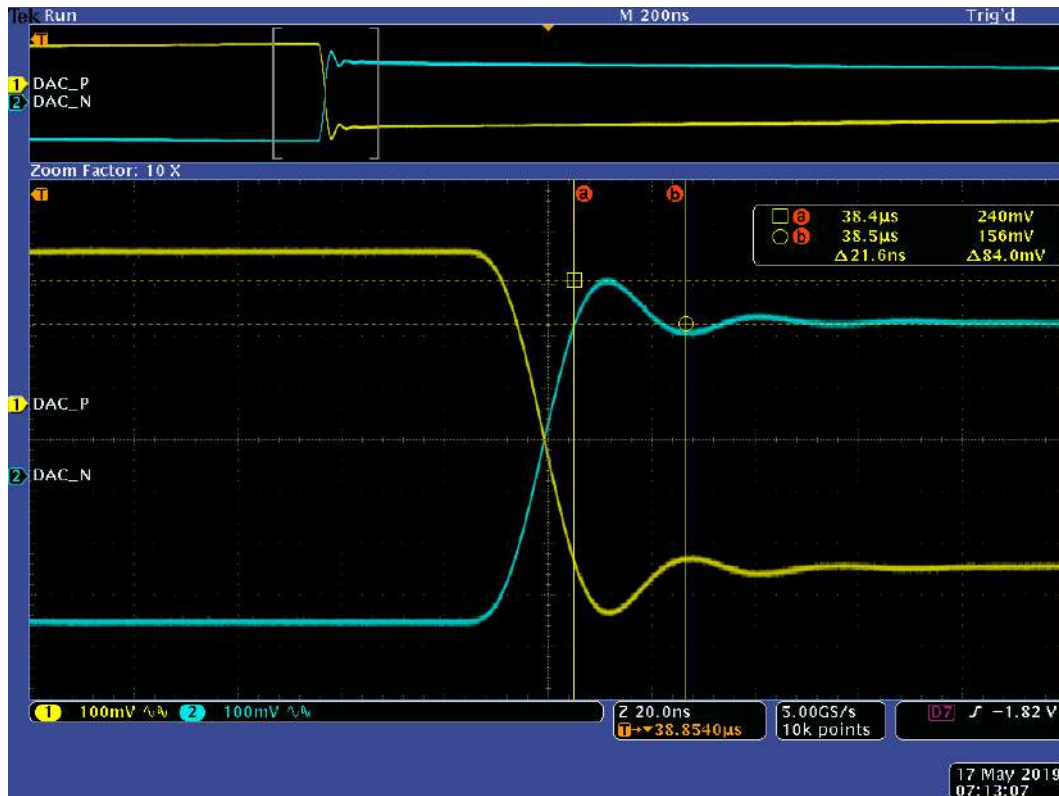


Figura A.17: Captura de tela da medição: transição do sinal de saída (*glitch*) para o sinal em rampa com taxa de amostragem de 10MHz@960mVpp.

### A.1.9

#### Medição da resposta em frequência

Um sinal triangular foi utilizado para estimativa da resposta em frequência do DAC. O procedimento de teste consistiu em gerar um sinal triangular quantizado na escala máxima do DAC. A banda passante foi estimada com base na capacidade do DAC de reproduzir a onda na escala máxima. O DAC conseguiu reproduzir a onda triangular (na escala máxima) com frequências de amostragem na faixa de 10 a 800 MHz.

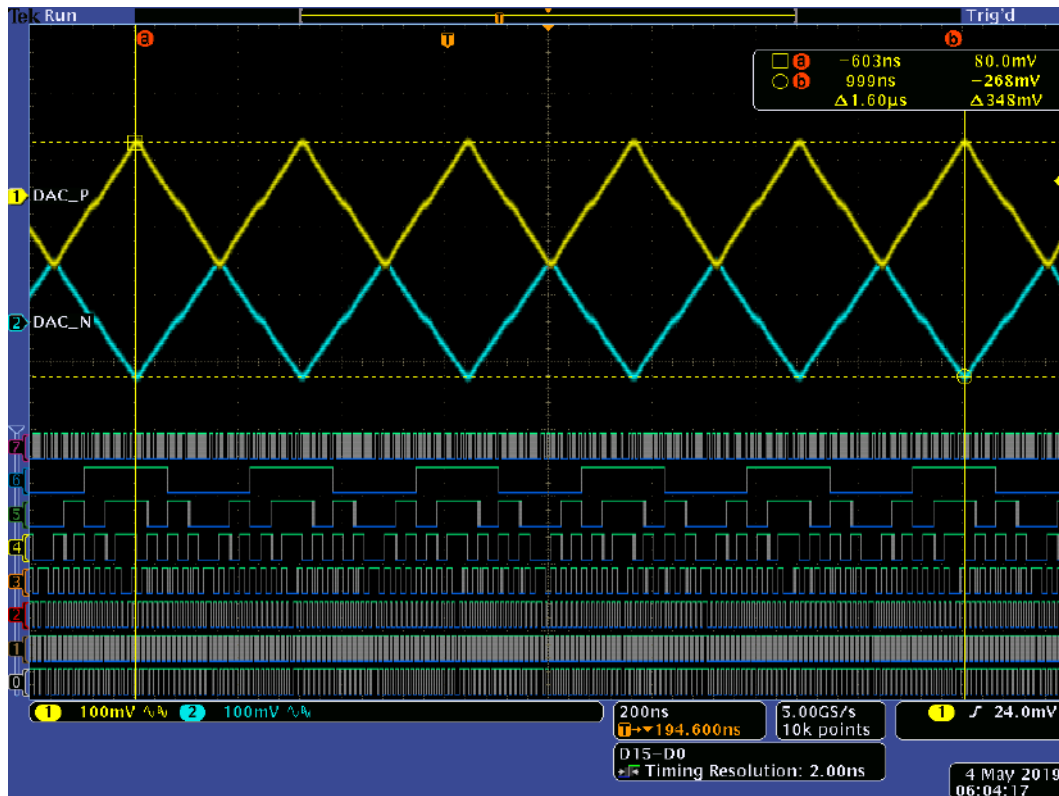


Figura A.18: Captura de tela da medição: sinal triangular com período de 320 ns (800MHz@256 níveis).

### A.1.10

#### Medição da faixa dinâmica livre de espúrios (SFDR)

A medição da faixa dinâmica livre de espúrios foi realizada diretamente do osciloscópio. Para esta finalidade gerou-se um sinal senoidal com uma frequência de amostragem de 800 MHz. O sinal senoidal resultante, mostrado na Figura (A.19), tem portanto um período de  $256 \div 800\text{MHz} = 320\text{ ns}$ .

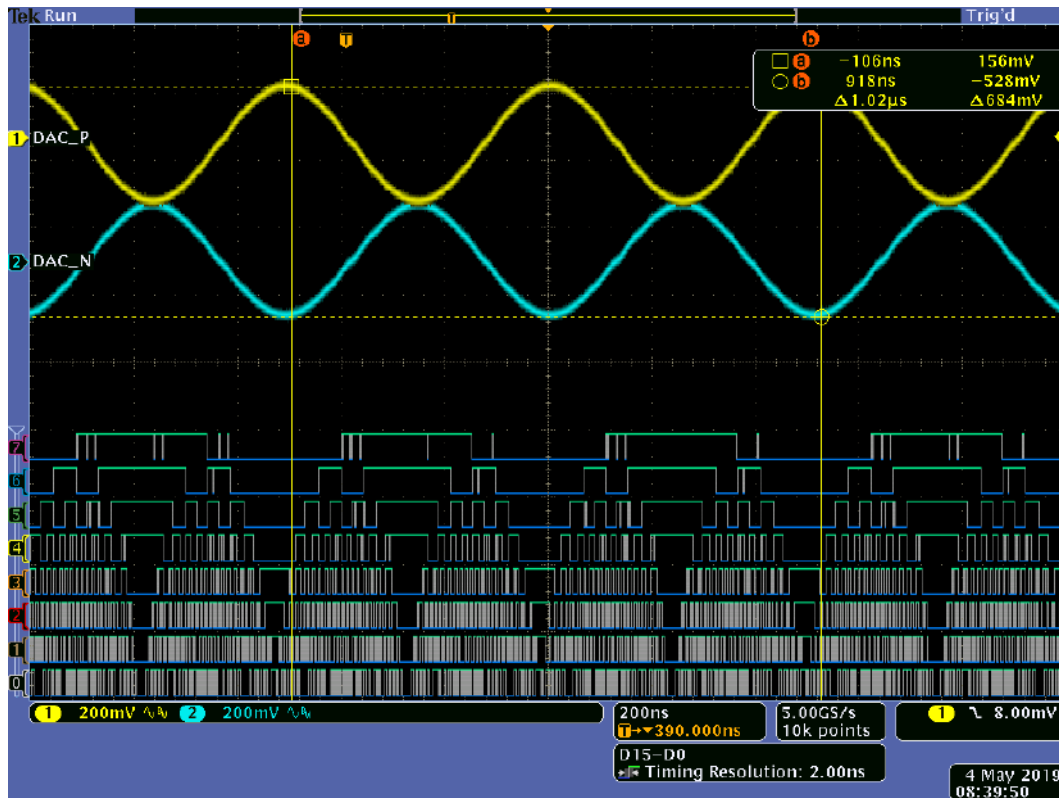


Figura A.19: Captura de tela da medição: sinal senoidal com período de 512 ns (500MHz@256 níveis).

Ajustando-se o ganho do amplificador diferencial LMH5401, a amplitude pico a pico do sinal de saída pode ser ajustada entre 400 mV e 2,63 V, mantendo-se praticamente constante na faixa de 10 a 800 MHz. O valor medido para a SFDR foi de 35,2 dB. Com uma resolução de 8-bit, a relação sinal ruído ideal para o circuito em questão equivale a 49,92 dB. O circuito reportado está distante portanto 14,72 dB do valor ideal.

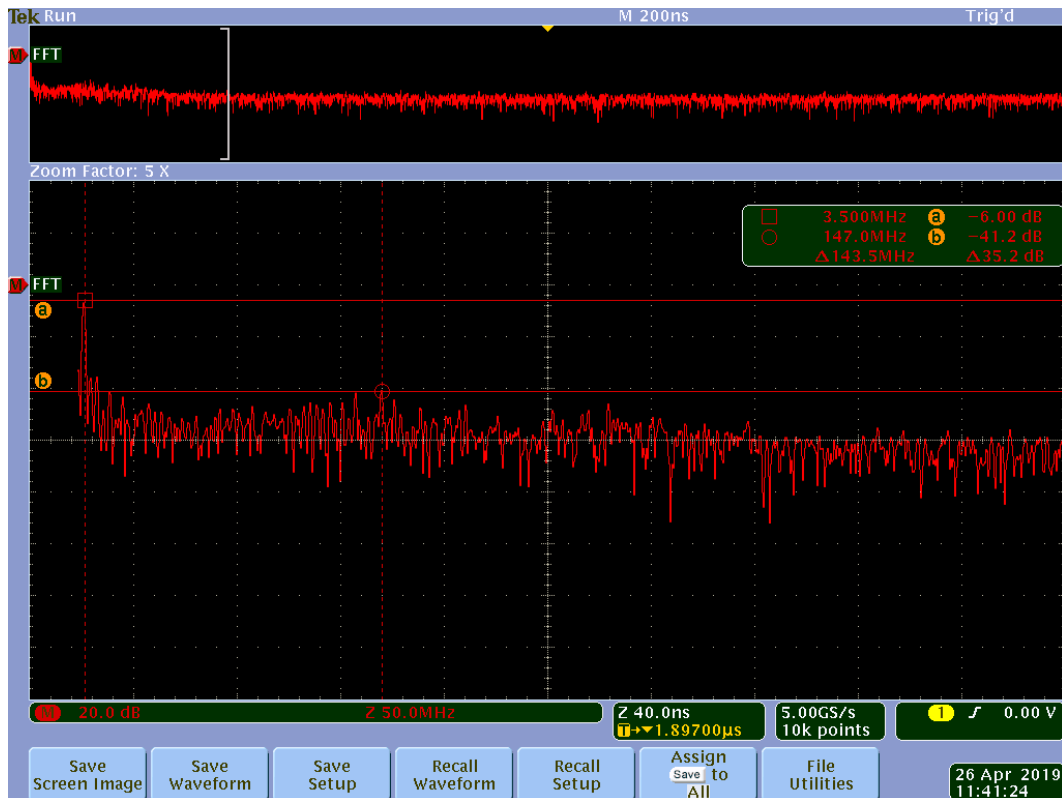


Figura A.20: Captura de tela da medição: transformada de Fourier do sinal diferencial analógico (saída) e medição da faixa dinâmica livre de espúrios.

### A.1.11

#### O conversor de interface para o conector FMC

O projeto do conversor de interface para o conector FMC visou permitir uma conexão modular entre o DAC e a placa NetFPGA-SUME. Os sinais binários gerados na placa FPGA foram internamente convertidos em sinais diferenciais e então roteados para o conector FMC (sinais FMC\_LA[31:0]). Cada palavra binária de 32 bit foi então desmembrada em 4 palavras binárias de 8 bit. Finalmente, as palavras de 8 bit foram direcionadas para os seus respectivos circuitos DAC, localizados em 4 placas independentes e modulares.



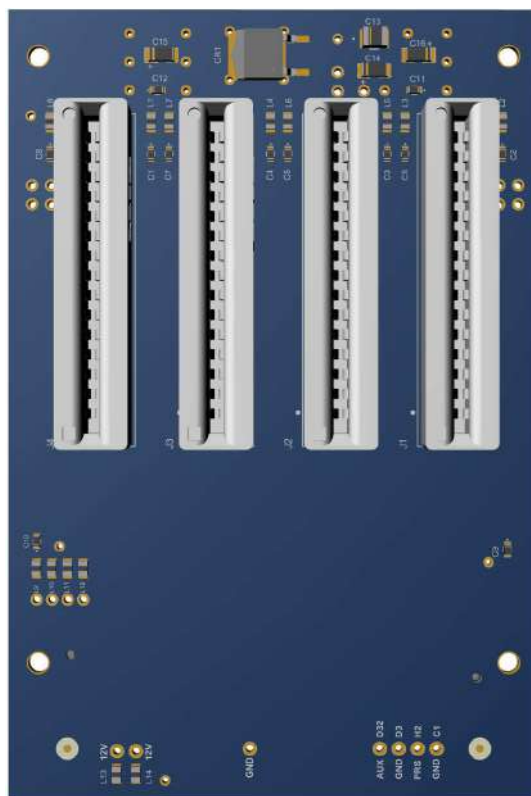


Figura A.21: Projeto PCB do adaptador de interface FMC-DAC.

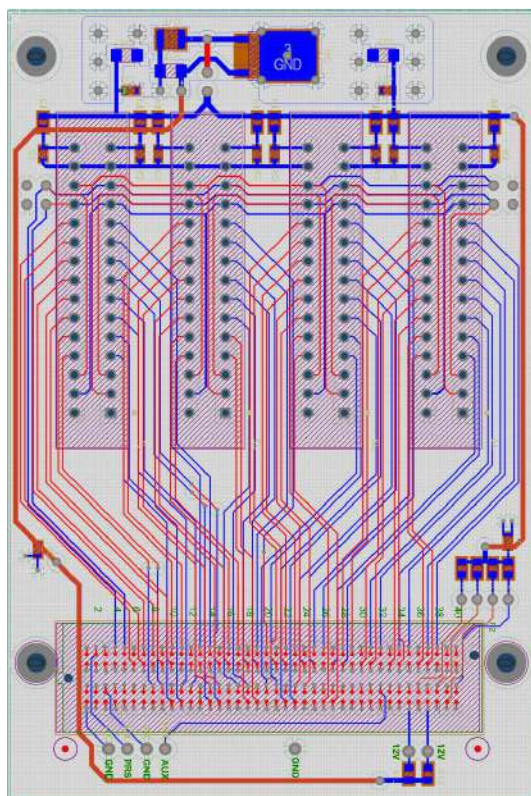


Figura A.22: Destaque da distribuição de pinagem do FMC para quatro conectores de borda definidos pelo projeto PCB do cartão mezanino.



Figura A.23: Captura de tela da medição: três sinais analógicos com oito níveis arbitrários (clock de 10 MHz). O slot DAC restante foi usado para extrair os sinais digitais. Os valores de tensão são os níveis necessários para geração da MDCE-256-4.

A construção modular do sistema de teste mostrou ser benéfica. Por exemplo, os DACs com melhor desempenho farão uso do mesmo sistema (FMC  $\leftrightarrow$  Placa FPGA). A geração de sinal baseada em uma memória fixa fornece previsibilidade e flexibilidade. Como a memória do FPGA foi descrita pela linguagem VHDL, utilizou-se alguns scripts *Mathematica* e *Python* para automatizar sequências de sinais diretamente dos resultados da simulação. Com os resultados descritos aqui, afirma-se que o sistema de teste relatado é interessante devido às suas propriedades altamente personalizáveis e flexíveis.



## A.2

### Desenvolvimento do Software e Programação FPGA

A lógica configurada no FPGA foi relativamente simples e sua finalidade prioritária foi a realização de uma prova de conceito. Utilizou-se como interface de desenvolvimento (IDE) o software Xilinx Vivado. Este software permitiu que códigos VHDL/VERILOG fossem incorporados aos blocos IP como módulos de projeto. Com este recurso, IPs legados puderam ser utilizados juntamente com códigos desenvolvidos especificamente para o projeto. Para o hardware FPGA, utilizou-se como base uma placa NETFPGA-SUME [200]. Esta placa é equipada com um FPGA Virtex-7 e os recursos que possui são análogos aos encontrados no kit de avaliação VC709 da Xilinx. O NetFPGA-SUME é um projeto de *hardware open source* patrocinado pela Universidade de Cambridge. Para a comunidade acadêmica, a placa é vendida por um custo reduzido em relação aos clientes comerciais. Além disso, códigos base para testes de funcionalidade são disponibilizados pelos participantes do projeto em repositórios do GitHub. Um repositório particularmente importante para quem utiliza a placa NetFPGA-SUME pode ser encontrado em [202], em que um código com propriedades da placa reduz a complexidade para o desenvolvimento de aplicações com o software Xilinx Vivado.



Figura A.24: Foto da placa NetFPGA-SUME.

O diagrama de blocos do circuito lógico está ilustrado na Figura (A.25), os blocos com a indicação RTL são os módulos VHDL incorporados ao projeto. O circuito lógico em questão é basicamente um gerenciador de memória RAM integrado com um chaveador de clock que altera a velocidade de leitura da memória com base em um sinal binário de entrada. O tamanho da palavra binária determina a quantidade de opções de modulação que o transmissor pode selecionar.

No caso específico, utilizou-se uma palavra binária de 03 bit permitindo a seleção de 8 modulações diferentes.

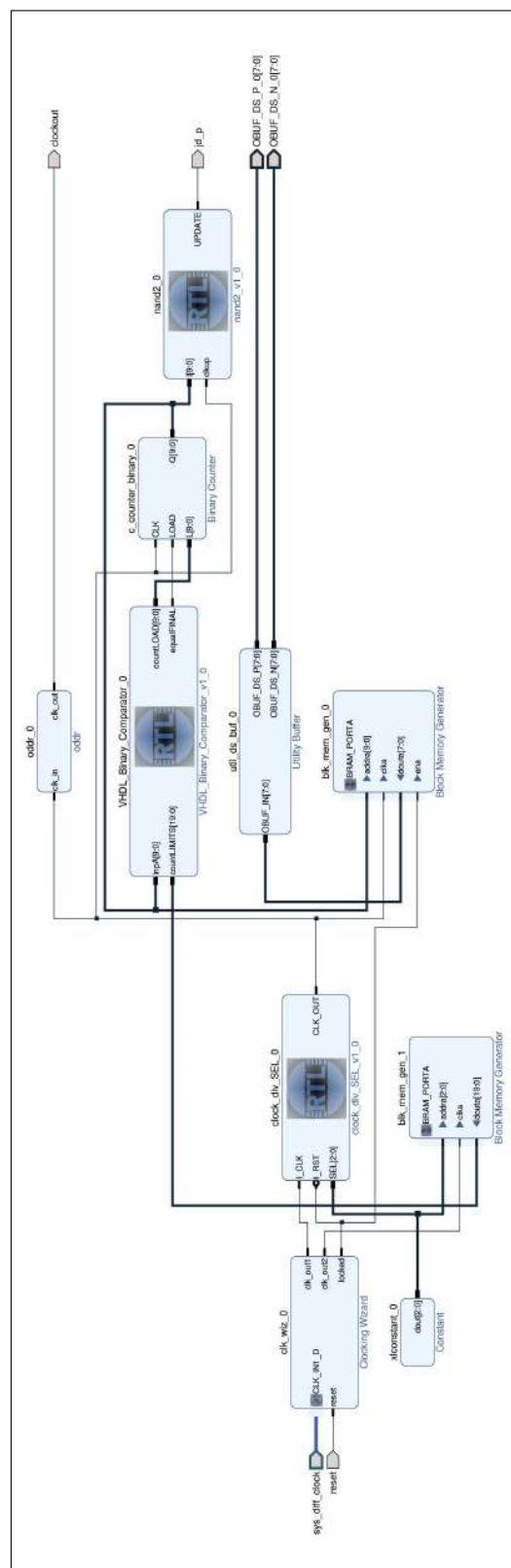


Figura A.25: Diagrama em blocos (interface do software Xilinx Vivado) do controlador de memória RAM.

## B

### A conexão entre SU(2), SO(3) e quatérnios

Na sequência, apresenta-se de forma sucinta a conexão geométrica entre os espaços SU(2), SO(3) e quatérnios. O cálculo começa com a parametrização de Euler de uma matriz arbitrária de uma transformação SU(2). Essa parametrização utiliza as matrizes padrão de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

que satisfazem a relação  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + ie_{ijk}$ , com  $\delta_{ij}$  e  $ie_{ijk}$  sendo os símbolos delta de Dirac e Kronecker respectivamente.

O ponto de partida, no contexto dessa tese, é o mapa exponencial:

$$\begin{aligned} U_2 &= \exp\left(\frac{\mathbf{i}\sigma_3\theta}{2}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}\sigma_2\chi}{2}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}\sigma_3\psi}{2}\right) \\ &= U(\theta, \chi, \psi) \Rightarrow U_z(\theta) U_y(\chi) U_z(\psi) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

em que a notação  $U_z(\theta) U_y(\chi) U_z(\psi)$  representa as rotações *extrínsecas* 3-2-3 (z-y-z) [204].

O mapa exponencial na Equação (B.2) relaciona explicitamente os espaços SU(2) e SO(3) através do produto de matrizes de rotação em  $\mathbb{R}^3$ . Essa relação é representada, a seguir, na Equação (B.3).

$$\begin{aligned} U(\theta, \chi, \psi) &= U_{(R_\theta R_\chi R_\psi)} \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_\chi &= \begin{pmatrix} \cos(\chi) & 0 & \sin(\chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\chi) & 0 & \cos(\chi) \end{pmatrix} \\ R_\psi &= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Alternativamente, as matrizes da Equação (B.3) podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned}
 R_\theta &= \begin{pmatrix} e^{i(\frac{\theta}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{\theta}{2})} \end{pmatrix} \\
 R_\chi &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\chi}{2}) & \sin(\frac{\chi}{2}) \\ -\sin(\frac{\chi}{2}) & \cos(\frac{\chi}{2}) \end{pmatrix} \\
 R_\psi &= \begin{pmatrix} e^{i(\frac{\psi}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{\psi}{2})} \end{pmatrix} \\
 U(\theta, \chi, \psi) &= \pm \begin{pmatrix} \cos(\frac{\chi}{2}) e^{i(\frac{\theta+\psi}{2})} & \sin(\frac{\chi}{2}) e^{i(\frac{\theta-\psi}{2})} \\ -\sin(\frac{\chi}{2}) e^{-i(\frac{\theta-\psi}{2})} & \cos(\frac{\chi}{2}) e^{-i(\frac{\theta+\psi}{2})} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Se as rotações extrínsecas nas Equações (B.2), (B.3) e (B.4) forem da forma  $U_z(\theta) U_x(\chi) U_z(\psi)$  3-1-3 (z,x,z), a rotação fornecida pelo mapa exponencial será centrada no corpo e, nesse caso, a Equação (B.4) estará de acordo com [156]:

$$U(\theta, \chi, \psi) = \pm \begin{pmatrix} \cos(\frac{\chi}{2}) e^{i(\frac{\theta+\psi}{2})} & i \sin(\frac{\chi}{2}) e^{i(\frac{\theta-\psi}{2})} \\ -i \sin(\frac{\chi}{2}) e^{-i(\frac{\theta-\psi}{2})} & \cos(\frac{\chi}{2}) e^{-i(\frac{\theta+\psi}{2})} \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

A Equação (B.5) fornece os parâmetros de Cayley-Klein em termos dos ângulos de Euler. Assim, é interessante notar que, dependendo da convenção adotada, a fibração inversa de Hopf  $S^2 \rightarrow S^3$  pode ser vista como representações angulares de Euler para os quatro parâmetros reais de Euler (ver Equação (B.6)):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right); \\
 x_2 &= \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta + \psi}{2}\right); \\
 x_3 &= \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \psi}{2}\right); \\
 x_4 &= \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \psi}{2}\right);
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Adicionalmente, é fácil conceber que as Equações (B.4) e (B.5) se transformam na representação geral de  $SU(2)$  para variáveis complexas  $z_1$  e  $z_2$ .

As coordenadas  $z_1 = x_1 + ix_2$  e  $z_2 = x_3 + ix_4$ , obtidas do quatérnio  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , possibilitam as convenções:  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}$  e  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ . Consequentemente:

$$U_2 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Por fim, é importante notar que a fibração  $p = S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$  também pode ser expressa em coordenadas complexas na forma da Equação (B.8):

$$p(z_1, z_2) = (2z_1 z_2^*, |z_1|^2 - |z_2|^2) \quad (\text{B.8})$$

Após desenvolver as partes real e complexa da Equação (B.8), resulta que:

$$2z_1 z_2^* = \underbrace{\sin(2\chi) \cos(2\psi)}_{s_1}, \underbrace{\sin(2\chi) \sin(2\psi)}_{s_2}; \quad (\text{B.9})$$

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = \cos(2\chi) = s_3$$

## B.1

### Diferentes formas do mapa de Hopf

Conforme descrito em [157], existem duas formas distintas para o mapa direto de Hopf. Embora essas duas formas representem uma fibração, elas diferem quanto à geometria. Ao utilizar coordenadas reais,  $s_0$  e  $s_1$  são definidos como:

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ s_1 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \end{aligned}$$

A seguir, demonstra-se na Equação (B.10) que a diferença entre os Mapas de Hopf à direita e à esquerda reside no sinal que define as coordenadas  $s_2$  e  $s_3$  do vetor em  $S^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Mapa de Hopf à direita:} & \quad \begin{cases} s_2 = 2(x_1 x_3 + x_2 x_4); \\ s_3 = 2(x_2 x_3 - x_1 x_4) \end{cases} \\ \text{Mapa de Hopf à esquerda:} & \quad \begin{cases} s_2 = 2(x_1 x_3 - x_2 x_4); \\ s_3 = 2(x_2 x_3 + x_1 x_4) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Nesta tese, utilizou-se de forma preferencial o mapa de Hopf à *direita* pois com ele foi facilitada a construção de constelações simétricas.

## C

**Grandes círculos sobre a esfera**

Grande círculo ou *círculo máximo* são os maiores círculos que podem ser desenhados em uma esfera. Estes círculos contêm o menor caminho entre quaisquer dois pontos em uma esfera.

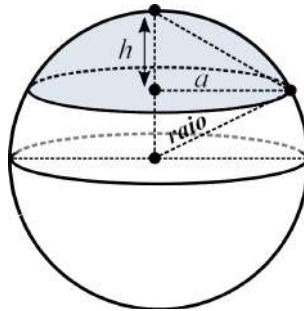


Figura C.1: Representação de uma calota esférica.

A interseção de qualquer plano com a esfera resulta em um círculo na superfície da esfera, se o plano contiver o centro da esfera então o círculo de interseção é um grande círculo. Um triângulo esférico é uma figura sobre uma superfície esférica que resulta quando consideramos 3 grandes círculos (ou círculos máximos) sobre essa superfície. A calota esférica também é definida em função da interseção de um plano com a superfície da esfera, o círculo que delimita a calota pode contudo ter diâmetro menor que um grande círculo. A área de uma calota esférica mostrada na Figura (C.1) é dada pela expressão:

$$A = \pi(h^2 + a^2) \quad (\text{C.1})$$

**C.1****O cálculo da distância do cosseno**

Dados dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , o cosseno [95] entre eles é descrito na forma:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \quad (\text{C.2})$$

O cosseno independe da magnitude dos vetores envolvidos no cálculo. Ele é calculado pela razão entre o produto interno dos dois vetores numéricos e o produto dos comprimentos *normalizados* desses vetores. Com essa formulação, os valores de saída próximos a 1 indicam alta similaridade. A partir da medida de similaridade é possível calcular a distância do cosseno na forma:

$$1 - \left( \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3}{\sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + |\mathbf{a}_3|^2} \sqrt{|\mathbf{b}_1|^2 + |\mathbf{b}_2|^2 + |\mathbf{b}_3|^2}} \right) \quad (\text{C.3})$$

O software *Mathematica* realiza, através da função *CosineDistance*, a formulação da Equação (C.3) que é definida apenas para valores positivos. De acordo com [205], essa não é uma distância concisa na medida em que a desigualdade de Schwartz não se sustenta. As seguintes definições angulares são consideradas distâncias concisas:

$$\text{distância angular do cosseno} = \frac{\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{-1}}{\pi} \quad (\text{C.4})$$

$$\text{similaridade angular do cosseno} = (1 - dac)$$

Apesar dessas observações, para o cálculo da distância pareada do cosseno realizado nessa tese, foi suficiente utilizar a formulação da Equação (C.3). Um ângulo de tolerância foi definido para aceitar a similaridade entre a projeção do vetor 4D e os vetores 3D definidos pelos vértices do poliedro de referência. Este ângulo teve um limite superior definido pela geometria do poliedro. Ao considerar como exemplo o poliedro Dodecaedro Pentakis representado na Figura (4.23), evitou-se a superposição das regiões definidas pelas calotas esféricas. Para tanto, calculou-se a menor distância entre os vértices vizinhos. A distância angular até o ponto vizinho mais próximo definiu o raio das calotas esféricas (chapéus esféricos em [206]).

A Figura (C.2) mostra graficamente as calotas esféricas resultantes.

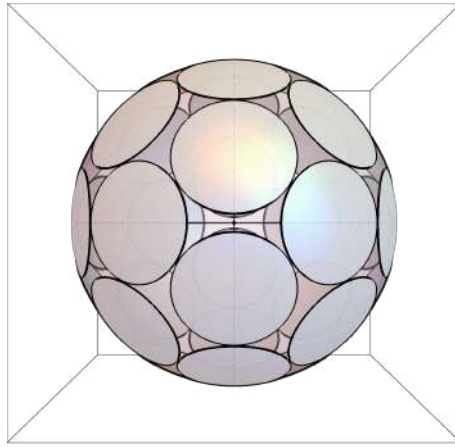


Figura C.2: Calotas esféricas definidas na região limite dos 32 vértices do Dodecaedro Pentakis.

**D****Códigos numéricos usados na tese****D.1****Códigos Matlab****D.1.1****Função de transferência do Mach-Zehnder**

```

1 function [Eout] = getMZM(Ein,vmod,bias,V_pi)
2 %
3 % Função de transferência (simplificada) de um MZM
4 % vmod = tensão (normalizada) proveniente do DAC
5 % [Eout] = getMZM(Ein,vmod,1/2,pi/2);
6 %
7 veff = vmod+bias;
8 Eout = complex(Ein.*round(cos((veff./V_pi)*pi),6));
9 end

```

**D.1.2****Função de transferência do QPMZM**

```

1 function [MZMIQ1,MZMIQ2] = PMQMZM(Ein,vmod,vbias,vpi,th)
2 %
3 % Função de transferência (simplificada) de um PMQ-MZM
4 % v_n com n =1,2,3,4 são os sinais de dados
5 % vpi: tensão de excursão do modulador
6 % vbias: tensão de polarização
7 % th: ângulo do rotator de polarização
8 %
9 % Uso:
10 % vmod=[1 -1 1 0]; 04 tensões (normalizadas) - DAC
11 % [EXout,EYout]=PMQMZM(vmod,1/2,1,pi/2);
12 %
13 MZM1 = getMZM(Ein,vmod(:,1),vbias,vpi);
14 MZM2 = getMZM(Ein,vmod(:,2),vbias,vpi);
15 MZMIQ1 = complex(MZM1 + (1j.*MZM2));
16 %
17 MZM3 = getMZM(Ein,vmod(:,3),vbias,vpi);
18 MZM4 = getMZM(Ein,vmod(:,4),vbias,vpi);
19 MZMIQ2 = complex((MZM3 + (1j.*MZM4)).*exp(-1j.*th));
20 end

```



## D.2

## Códigos Mathematica (software versão 11.2)

## D.2.1

## Mapa direto de Hopf (à direita)

```

1  (*
2  A função rightDirectHopfMap é uma implementação
3  do mapa direto de Hopf
4  {x_,y_,z_,w_} são as coordenadas da entrada do vetor 4D
5  {S1,S2,S3} são as coordenadas do vetor Stokes normalizado
6  *)
7
8  rightDirectHopfMap[{x_,y_,z_,w_}] :=
9      Module[{S0 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2},
10         S1 = x^2 + y^2 - z^2 - w^2;
11         S2 = 2*((x*z) + (y*w));
12         S3 = 2*((y*z) - (x*w));
13         If[S0 <= 10^-9, STOKES={S1,S2,S3},STOKES={S1,S2,S3}/S0];
14         STOKES
15 ];

```

## D.2.2

## Mapa inverso de Hopf (modificado conforme a regra da Equação (4-11))

```

1  (*
2  getHopfFiber
3  é um exemplo de implementação do mapa inverso de Hopf
4  TH, CHI e PSI são respectivamente os parâmetros de entrada
5  para os ângulos \[Theta],\[Chi], e \[Psi]
6  SA define o ângulo inicial da fibração
7  *)
8
9  getHopfFiber[{TH_,CHI,PSI_},SA_] := Module[{th=TH},
10     If[
11       And[Abs[CHI]==0,
12         If[
13           Abs[PSI]!=0,(PSI-1.5707) < 0.0001]
14       ],
15     th=TH-\[Pi]/4,th=TH
16 ];
17 z1 = Cos[CHI/2] Exp[I((th+SA)+PSI/2)];
18 z2 = Sin[CHI/2] Exp[I((th+SA)-PSI/2)];
19 Cz1 = Simplify[ComplexExpand[ReIm[z1]]];
20 Cz2 = Simplify[ComplexExpand[ReIm[z2]]];
21 Round[Flatten[{Cz1,Cz2}],0.0001]
22 ];

```

## D.2.3

## Conversão dos vetores de Stokes para a forma angular

```

1  (*
2  A função StokesToPolarCoordinates é uma implementação
3  da conversão entre vetores de Stokes e parâmetros
4  angulares (coordenadas esféricas).
5  A entrada StokesVector_ é a representação do vetor
6  de Stokes normalizado com parâmetros (s1,s2,s3);
7  column_ é usado para selecionar se a função retorna
8  vetores de Stokes [1] ou parâmetros angulares [2]
9  A saída dos parâmetros de Stokes pode ser usada para
10 calcular a quantidade de ERRO inserida na conversão
11 Exemplo de uso:
12 StokesToPolarCoordinates[{1,0,0},2] (*retorna ângulos*)
13 *)
14 StokesToPolarCoordinates[StokesVector_,column_] :=
15 Module[{radius = Sqrt[(StokesVector[[1]])^2+
16 (StokesVector[[2]])^2+
17 (StokesVector[[3]])^2]
18 },
19 (*
20 ZDFlag é usado para evitar divisão por zero
21 CUIDADO, este termo insere ERRO no cálculo
22 *)
23 ZDFlag = 10^-16;
24 (* Ângulo \[Theta]1 determina a latitude na esfera S2 *)
25 RS0 = Solve[
26 N[ArcCos[StokesVector[[3]]/(radius+ZDFlag)]]==
27 \[Theta]1, \[Theta]1, Reals] //Flatten;
28 (* Ângulo \[Phi]1 determina a longitude na esfera S2 *)
29 RS4 = Solve[
30 N[ArcTan[StokesVector[[2]]/(StokesVector[[1]]+ZDFlag)]]==
31 \[Phi]1, \[Phi]1, Reals] //Flatten;
32 RS5 = Flatten[Join[RS0,RS4]];
33 (* Regra específica para o cálculo de \[Theta]x *)
34 If[
35 (StokesVector[[1]]) < 0,
36 bas1={\[Phi]x->\[Phi]1, \[Theta]x->-\[Theta]1} /. RS5,
37 bas1={\[Phi]x->\[Phi]1, \[Theta]x->\[Theta]1} /. RS5
38 ];
39 out={Round[{
40 radius*Sin\[Theta]x Cos\[Phi]x,
41 radius*Sin\[Theta]x Sin\[Phi]x,
42 radius*Cos\[Theta]x},0.00001],
43 {\[Phi]->\[Phi]x,\[Theta]->\[Theta]x}} /. bas1;
44 out[[column]] //Simplify
45 ];

```

## D.2.4

## Projeção stereográfica

```

1 (* Função ProjSTEREO - Realiza a projeção stereográfica
2   de vetores 4D
3   ATENÇÃO: Utilizada apenas para visualização qualitativa
4   pois o parâmetro de entrada "fatorin" distorce
5   a projeção no eixo vertical
6
7   Modo de uso:
8       v = {1,1,-1,1};
9       fatorin = 0.499;
10      ProjSTEREO[v,fatorin]
11 *)
12 ProjSTEREO[{x_,y_,z_,w_},fator_] := Module[{r=N[1-fator]},
13 X=x/(1-(r*w));
14 Y=y/(1-(r*w));
15 Z=z/(1-(r*w));
16 {X,Y,Z}
17 ]

```

## D.2.5

## Função de quantização do DAC - HQ (Ver Equação (4-27))

```

1 (* Função HQ realiza a quantização do DAC
2   com o efeito de "companding"
3   Modo de uso:
4   n = 256;
5   x = Subdivide[-1, 1, n - 1]*Pi;
6   a = 3;
7   b = 1/a;
8   HQ = getHQ[x, a, b];
9   HQnorm = Round[(HQ - Min[HQ])/(Max[HQ] - Min[HQ]), 0.01]
10  Show[{ListPlot[HQnorm, AxesOrigin -> {1, 0}],
11        ListLinePlot[HQnorm, AxesOrigin -> {1, 0}]},
12        GridLines -> Automatic, AxesOrigin -> {1, 0}
13  ]
14 *)
15
16 getHQ[x_,alp_,bet_] := Module[
17   {e1=alp*x, e2=alp*\[Pi], e3=2*bet*x},
18   HQ = 1/4(((E^e1 - E^-e1)/(E^e2 - E^-e2)) +
19     (2/(1 + E^-e3)+1))
20 ];

```

## Referências bibliográficas

- [1] HUI, R.; O'SULLIVAN, M.. **Fiber Optic Measurement Techniques**, chapter Fundamentals of Optic Devices. Elsevier Science, 2009.
- [2] AGRAWAL, G. P.. **Fiber-Optic Communication Systems**. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley, 1997.
- [3] CHEN, A.; MURPHY, E.. **Broadband Optical Modulators: Science, chapter=Modulator Technology, Tech., and Applications**. CRC Press, 2011.
- [4] SHIEH, W.; DJORDJEVIC, I.. **Optical Communications Fundamentals**. In: OFDM FOR OPTICAL COMMUNICATIONS, chapter 3. Elsevier Science, 2009.
- [5] RÖRICH, D.. **Mach-Zehnder Modulator**. Institute of Telecommunications, University of Stuttgart, Germany, Mar 2018. Webdemo.
- [6] SEIMETZ, M.. **High-Order Modulation for Optical Fiber Transmission**, chapter Transmitter Design. Springer Series in Optical Sciences. Springer, 2009.
- [7] PHYSICAL; GROUP, L. L. P. W.. **100G Ultra Long Haul DWDM Framework Document**. Technical report, OIFORUM, 2009.
- [8] AGRAWAL, G. P.. **Polarization Effects**. In: Agrawal, G. P., editor, NONLINEAR FIBER OPTICS (FOURTH EDITION), Optics and Photonics, chapter 6, p. 203–259. Academic Press, San Diego, fourth edition edition, 2006.
- [9] SHAW, J. K.. **Mathematical Principles of Optical Fiber Communication**. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [10] NATHAN, P. M. C.; KALYANASUNDARAM, N. ; RAJU, M. K.. **Analysis of optical soliton propagation in birefringent fibers**. In: TENCON 2008 - 2008 IEEE REGION 10 CONFERENCE, p. 1–6, nov 2008.
- [11] LEBLE, S.; REICHEL, B.. **Coupled nonlinear Schrödinger equations in optic fibers theory**. The European Physical Journal Special Topics, 173(1):5–55, 2009.
- [12] BENEDIKOVIC, D.; LITVIK, J.; KUBA, M.; DADO, M. ; DUBOVAN, J.. **Modeling of WDM transmission system with high-order phase modulation formats**. In: TELECOMMUNICATIONS AND SIGNAL PROCESSING (TSP), 2012 35TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 325–329, jul 2012.
- [13] LAB, P. R.. **SSPROP - General-purpose symmetrized split-step software routine**.

- [14] KAWANISHI, T.; SAKAMOTO, T.; CHIBA, A. ; KANNO, A.. **Vector modulation technologies for high-speed optical transmission.** In: TRANSPARENT OPTICAL NETWORKS (ICTON), 2010 12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 1–4, jun 2010.
- [15] AGRELL, E.; KARLSSON, M.. **Power-Efficient Modulation Formats in Coherent Transmission Systems.** *Journal of Lightwave Technology*, 27(22):5115–5126, 2009.
- [16] FISCHER, J. K.; ALREESH, S.; TANIMURA, T.; ELSCHNER, R.; FREY, F.; MEUER, C.; MOLLE, L.; SCHMIDT-LANGHORST, C. ; SCHUBERT, C.. **Four-Dimensional Coded Modulation: 6PolSK-QPSK.** In: PHOTONIC NETWORKS, 14. 2013 ITG SYMPOSIUM. PROCEEDINGS, p. 1–6, may 2013.
- [17] KARLSSON, M.; AGRELL, E.. **Constellation optimization for coherent optical transmission systems.** In: IEEE PHOTONICS SOCIETY, 2010 23RD ANNUAL MEETING OF THE, p. 152–153, nov 2010.
- [18] KOIKE-AKINO, T.; MILLAR, D. S.; KOJIMA, K. ; PARSONS, K.. **Eight-dimensional modulation for coherent optical communications.** In: OPTICAL COMMUNICATION (ECOC 2013), 39TH EUROPEAN CONFERENCE AND EXHIBITION ON, p. 1–3, sep 2013.
- [19] WELTI, G.; LEE, J.. **Digital transmission with coherent four-dimensional modulation.** *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(4):497–502, jul 1974.
- [20] ZETTERBERG, L.; BRANDSTROM, H.. **Codes for Combined Phase and Amplitude Modulated Signals in a Four-Dimensional Space.** *IEEE Transactions on Communications*, 25(9):943–950, sep 1977.
- [21] LYONS, D. W.. **An Elementary Introduction to the Hopf Fibration.** *Mathematics Magazine*, 76(2):87–98, 2003.
- [22] DENNIS, M. R.; ALONSO, M. A.. **Swings and roundabouts: optical Poincaré spheres for polarization and Gaussian beams.** *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2087):20150441, 2017.
- [23] BULOW, H.; BÜLOW, H.. **Polarization QAM modulation (POL-QAM) for coherent detection schemes.** In: OPTICAL FIBER COMMUNICATION - INCLUDES POST DEADLINE PAPERS, 2009. OFC 2009. CONFERENCE ON, número OWG2, p. 1–3, mar 2009.
- [24] FISCHER, J. K.; ALREESH, S.; ELSCHNER, R.; FREY, F.; MEUER, C.; MOLLE, L.; SCHMIDT-LANGHORST, C.; TANIMURA, T. ; SCHUBERT, C.. **Experimental Investigation of 126-Gb/s 6PolSK-QPSK signals.** *Opt. Express*, 20(26):B232—B237, dec 2012.
- [25] KARLSSON, M.; AGRELL, E.. **Which is the most power-efficient modulation format in optical links?** *Opt. Express*, 17(13):10814–10819, Jun 2009.
- [26] ADAMS, J.; ZVENGROWSKI, P. ; LAIRD, P.. **Vertex embeddings of regular polytopes.** *Expositiones Mathematicae*, 21(4):339–353, 2003.

- [27] AGRELL, E.; KARLSSON, M.. **On the Symbol Error Probability of Regular Polytopes.** Information Theory, IEEE Transactions on, 57(6):3411–3415, jun 2011.
- [28] MOSSERI, R.; DANDOLOFF, R.. **Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations.** Journal of Physics A: Mathematical and General, 34(47):10243–10252, 2001.
- [29] WENNINGER, M.. **Spherical Models.** Cambridge University Press, 1979.
- [30] HARDIN, R.; SLOANE, N. ; SMITH, W.. **Tables of spherical codes with icosahedral symmetry.** 2000.
- [31] WANG, N.; LEE, J.-L.. **Geometric Properties of the Icosahedral-Hexagonal Grid on the Two-Sphere.** SIAM Journal on Scientific Computing, 33(5):2536–2559, 2011.
- [32] DECASTER, D.; VILCOT, J.-P.. **Progress in Optoelectronic ICs.** In: SOLID STATE DEVICE RESEARCH CONFERENCE, 1989. ESSDERC '89. 19TH EUROPEAN, p. 329–342, sep 1989.
- [33] KUNKEL, R.; BACH, H.-G.; HOFFMANN, D.; WEINERT, C. M.; MOLINA-FERNANDEZ, I. ; HALIR, R.. **First monolithic InP-based 90 Degree-hybrid OEIC comprising balanced detectors for 100GE coherent frontends.** In: INDIUM PHOSPHIDE RELATED MATERIALS, 2009. IPRM '09. IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 167–170, may 2009.
- [34] RISTIC, S.; FLORJANCZYK, M. ; LEBBY, M.. **Optoelectronic integrated circuits (OEICs) for 100G ethernet and coherent networks based on multi-guide vertical integration platform.** In: OPTICAL FIBER COMMUNICATIONS CONFERENCE AND EXHIBITION (OFC), 2014, p. 1–3, mar 2014.
- [35] ROBERTS, K.; LAPERLE, C.. **Flexible Transceivers.** In: OPTICAL COMMUNICATIONS (ECOC), 2012 38TH EUROPEAN CONFERENCE AND EXHIBITION ON, p. 1–3, sep 2012.
- [36] ZHUGE, Q.; MORSY-OSMAN, M.; CHAGNON, M.; XU, X.; QIU, M. ; PLANT, D. V.. **Terabit bandwidth-adaptive transmission using low-complexity format-transparent digital signal processing.** Opt. Express, 22(3):2278–2288, feb 2014.
- [37] MELLO, D. A. A.; ROZENTAL, V. N.; LIMA, T. C.; PEREIRA, F. C.; A. N. BARRETO, M. C. ; BRUNO, G.. **Adaptive Optical Transceivers - Concepts and Challenges.** Journal of Communication and Information Systems, 29(1), may 2014.
- [38] CABALLERO, A.; BORKOWSKI, R.; ZIBAR, D. ; MONROY, I. T.. **Performance monitoring techniques supporting cognitive optical networking.** In: TRANSPARENT OPTICAL NETWORKS (ICTON), 2013 15TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 1–4, jun 2013.
- [39] SCHLOTTMANN, C. R.; HASLER, J.. **High-Level Modeling of Analog Computational Elements for Signal Processing Applications.** Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, IEEE Transactions on, 22(9):1945–1953, sep 2014.

- [40] DERR, F.. **Coherent optical QPSK intradyne system: concept and digital receiver realization.** *Lightwave Technology, Journal of*, 10(9):1290–1296, sep 1992.
- [41] SEIMETZ, M.. **High-Order Modulation for Optical Fiber Transmission**, chapter Receiver Configurations. Springer Series in Optical Sciences. Springer, 2009.
- [42] NOÉ, R.. **Essentials of Modern Optical Fiber Communication.** Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [43] PHYSICAL; GROUP, L. L. P. W.. **Implementation Agreement for Integrated Dual Polarization Intradyne Coherent Receivers.** Technical report, OIFORUM, nov 2013.
- [44] PHYSICAL; GROUP, L. L. P. W.. **OIF-IC-TROSA-01.0 – Implementation Agreement for Integrated Coherent Transmit-Receive Optical Sub.** Technical report, OIFORUM, August 2019.
- [45] STOJANOVIC, N.; GONZALEZ, N. G.; XIE, C.; ZHAO, Y.; MAO, B.; QI, J. ; BINH, L. M.. **Timing recovery in Nyquist coherent optical systems.** In: TELECOMMUNICATIONS FORUM (TELFOR), 2012 20TH, p. 895–898, nov 2012.
- [46] BINH, L. N.. **Digital Signal Processing for Optical Transmission Systems.** In: OPTICAL FIBER COMMUNICATION SYSTEMS WITH MATLAB{®} AND SIMULINK{®} MODELS, SECOND EDITION, Optics and Photonics. CRC Press, 2014.
- [47] ZHOU, X.. **Enabling Technologies for High Spectral-efficiency Coherent Optical Communication Networks.** Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley, 2016.
- [48] XIAOHONG, Z.; XIAOBO, Y.; XIANG, L. ; WINZER, P. J.. **100G transport systems: Technology bench-mark testing in China and evolution to Terabit/s interfaces.** *Communications, China*, 10(4):19–30, apr 2013.
- [49] PITTALA, F.; HAUSKE, F. N.; YE, Y.; GONZALEZ, N. G. ; MONROY, I. T.. **Joint PDL and in-band OSNR monitoring supported by data-aided channel estimation.** In: OPTICAL FIBER COMMUNICATION CONFERENCE AND EXPOSITION (OFC/NFOEC), 2012 AND THE NATIONAL FIBER OPTIC ENGINEERS CONFERENCE, p. 1–3, mar 2012.
- [50] ZHU, C.; TRAN, A. V.; CHEN, S.; DU, L. B.; DO, C. C.; ANDERSON, T.; LOWERY, A. J. ; SKAFIDAS, E.. **Statistical moments-based OSNR monitoring for coherent optical systems.** *Opt. Express*, 20(16):17711–17721, jul 2012.
- [51] MAHER, R.; ALVARADO, A.; LAVERY, D. ; BAYVEL, P.. **Increasing the information rates of optical communications via coded modulation: a study of transceiver performance.** *Scientific Reports*, 6:21278, feb 2016.
- [52] SETO, I.; OHTSUKI, T.; YSHIMA, H.; SASASE, I. ; MORI, S.. **Coherent Optical Polarization-Shift-Keying (POLSK) Homodyne System Using Phase-Diversity Receivers.** In: GLOBAL TELECOMMUNICATIONS CONFERENCE, 1991. GLOBECOM '91. 'COUNTDOWN TO THE

- NEW MILLENNIUM. FEATURING A MINI-THEME ON: PERSONAL COMMUNICATIONS SERVICES, p. 1601–1605 vol.3, dec 1991.
- [53] BENEDETTO, S.; POGGIOLINI, P.. **Theory of polarization shift keying modulation**. Communications, IEEE Transactions on, 40(4):708–721, apr 1992.
- [54] UEHARA, H.; SETO, I.; OHTSUKI, T.; SASASE, I. ; MORI, S.. **Phase Noise Insensitive Multilevel POLSK Based on QAM Mapping in Coherent Optical Systems**. In: SINGAPORE ICCS/ISITA '92. 'COMMUNICATIONS ON THE MOVE', p. 1043–1047 vol.3, nov 1992.
- [55] LOUCHET, H.; KUZMIN, K. ; RICHTER, A.. **Joint Carrier-Phase and Polarization Rotation Recovery for Arbitrary Signal Constellations**. Photonics Technology Letters, IEEE, 26(9):922–924, may 2014.
- [56] CHEN, C.; LI, C.; ZAMANI, M. ; ZHANG, Z.. **Coherent detection of a 32-point 6PolSK-QPSK modulation format**. In: OPTICAL FIBER COMMUNICATION CONFERENCE AND EXPOSITION AND THE NATIONAL FIBER OPTIC ENGINEERS CONFERENCE (OFC/NFOEC), 2013, p. 1–3, mar 2013.
- [57] ALREESH, S.; FISCHER, J. K.; NOLLE, M. ; SCHUBERT, C.. **Joint-Polarization Carrier Phase Estimation for PS-QPSK Signals**. Photonics Technology Letters, IEEE, 24(15):1282–1284, aug 2012.
- [58] NEBENDAHL, B.; SCHMOGROW, R.; JOSTEN, A.; HILLERKUSS, D.; KOENIG, S.; WINTER, M.; FREUDE, W.; KOOS, C.; LEUTHOLD, J.; FREUDE, W.; KOOS, C.; LEUTHOLD, J.; MEYER, J.; DRESCHMANN, M.; HUEBNER, M.; WINTER, M.; HUEBNER, M.; HILLERKUSS, D. ; LEUTHOLD, J.. **EVM as new quality metric for optical modulation analysis**. In: ELECTRONICS, COMMUNICATIONS AND PHOTONICS CONFERENCE (SIEPCP), 2013 SAUDI INTERNATIONAL, p. 1–4, Apr 2013.
- [59] MUNIR, J.; MEZGHANI, A.; SLIM, I. ; NOSSEK, J. A.. **Chromatic dispersion compensation using complex-valued all-pass filter**. In: SIGNAL PROCESSING CONFERENCE (EUSIPCO), 2014 PROCEEDINGS OF THE 22ND EUROPEAN, p. 396–400, sep 2014.
- [60] FOUGSTEDT, C.. **Energy-Efficient Chromatic Dispersion Compensation for Coherent Fiber-Optic Receivers**, 2014.
- [61] EGHBALI, A.; JOHANSSON, H.; GUSTAFSSON, O. ; SAVORY, S. J.. **Optimal Least-Squares FIR Digital Filters for Compensation of Chromatic Dispersion in Digital Coherent Optical Receivers**. Lightwave Technology, Journal of, 32(8):1449–1456, apr 2014.
- [62] WINZER, P. J.; ESSIAMBRE, R.. **Advanced Optical Modulation Formats**. Proceedings of the IEEE, 94(5):952–985, may 2006.
- [63] AGRAWAL, GOVIND P. **Pulse Propagation in Fibers**. In: Agrawal, G. P., editor, NONLINEAR FIBER OPTICS (FOURTH EDITION), Optics and Photonics, chapter 2, p. 25–50. Academic Press, San Diego, fourth edition edition, 2006.
- [64] CVIJETIC, M.; DJORDJEVIC, I. B.. **Signal Propagation in Optical Fibers**, volumen 1 de Artech House applied photonics series, chapter 3, p. 141–229. Artech House, 2012.



- [65] DE DINECHIN, F.; TAKEUGMING, H. ; TANGUY, J.-M.. **A 128-tap complex FIR filter Processing 20 giga-samples/s in a single FPGA**. In: SIGNALS, SYSTEMS AND COMPUTERS (ASILOMAR), 2010 CONFERENCE RECORD OF THE FORTY FOURTH ASILOMAR CONFERENCE ON, p. 841–844, nov 2010.
- [66] J.J. GIL. **Polarimetric characterization of light and media**. The European Physical Journal Applied Physics, 26:3–9, 2007.
- [67] DAMASK, J. N.. **Polarization Optics in Telecommunications**. In: POLARIZATION OPTICS IN TELECOMMUNICATIONS, volumen 101 de Springer Series in Optical Sciences, chapter Vectorial Propagation of Light, p. 1–36. Springer, 2004.
- [68] SAVORY, S. J.. **Digital filters for coherent optical receivers**. Optics Express, 16(2):804–817, 2008.
- [69] VASSILIEVA, O.; KIM, I.; AKASAKA, Y.; BOUDA, M. ; SEKIYA, M.. **Interplay between PDL and nonlinear effects in coherent polarization multiplexed systems**. In: OPTICAL COMMUNICATION (ECOC), 2011 37TH EUROPEAN CONFERENCE AND EXHIBITION ON, p. 1–3, sep 2011.
- [70] VASSILIEVA, O.; KIM, I. ; SEKIYA, M.. **Statistical analysis of the interplay between nonlinear and PDL effects in coherent polarization multiplexed systems**. In: OPTICAL COMMUNICATIONS (ECOC), 2012 38TH EUROPEAN CONFERENCE AND EXHIBITION ON, p. 1–3, sep 2012.
- [71] AWWAD, E.; JAOUEËN, Y. ; OTHMAN, G. R.-B.. **Polarization-time coding for PDL mitigation in long-haul PolMux OFDM systems**. Opt. Express, 21(19):22773–22790, Sep 2013.
- [72] MUMTAZ, S.; OTHMAN, G. B. ; JAOUEN, Y.. **[space-time codes for optical fiber communication with polarization multiplexing**. In: 2010 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATIONS, p. 1–5, May 2010.
- [73] DE MIGUEL, I.; DURÁN, R. J.; JIMÉNEZ, T.; FERNÁNDEZ, N.; AGUADO, J. C.; LORENZO, R. M.; CABALLERO, A.; MONROY, I. T.; YE, Y.; TYMECKI, A.; TOMKOS, I.; ANGELOU, M.; KLONIDIS, D.; FRANCESCON, A.; SIRACUSA, D. ; SALVADORI, E.. **Cognitive Dynamic Optical Networks \[Invited\]**. J. Opt. Commun. Netw., 5(10):A107—A118, oct 2013.
- [74] HUI, R.; O’SULLIVAN, M.. **Fiber Optic Measurement Techniques**, volumen 1, chapter Characterization of RIN and Linewidth of Semiconductor Lasers. Elsevier Science, 2009.
- [75] MONROY, I. T.; ZIBAR, D.; GONZALEZ, N. G. ; BORKOWSKI, R.. **Cognitive Heterogeneous Reconfigurable Optical Networks (CHRON): Enabling technologies and techniques**. In: TRANSPARENT OPTICAL NETWORKS (ICTON), 2011 13TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 1–4, Jun 2011.
- [76] SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C.. **Fundamentals of Photonics**, volumen 1, book Statistical Optics, p. 342–383. John Wiley & Sons, Inc., 1st ed edition, 2001.
- [77] DAMASK, J. N.. **Polarization Optics in Telecommunications**, volumen 101 de Springer Series in Optical Sciences, p. 385–428. Springer New York, 2005.

- [78] DOMANSKI, A. W.; BUDASZEWSKI, D.; CIESLAK, R. ; WOLINSKI, T. R.. **Bandwidth Measurement Method for Quasi-Monochromatic Light Sources**. Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 58(8):2606–2610, aug 2009.
- [79] DE ALMEIDA E ALBUQUERQUE, J. P.; FORTES, J. M. P. ; FINAMORE, W. A.. **Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos**, chapter Processos Estocásticos. INTERCIENCIA, 2008.
- [80] TANG, L.; XU, H.. **Two necessary and sufficient conditions of mean ergodicity about covariance stationary process**. In: COMPUTER APPLICATION AND SYSTEM MODELING (ICCSM), 2010 INTERNATIONAL CONFERENCE ON, volumen 10, p. V10–244–V10–248, oct 2010.
- [81] SALEH, B. E. A.; JOHN WILEY & SONS, I.. **Fundamentals of Photonics (Second Edition)**, volumen 1, book Statistical Properties of Random Light. Wiley-Interscience, 1st ed edition, 1991.
- [82] MILLER, D. A. B.. **Quantum Mechanics for Scientists and Engineers**, chapter Appendix D - Maxwell's equations and electromagnetism, p. 509–518. Cambridge University Press, 2008.
- [83] VANDERLUGT, A.. **Optical Signal Processing**. Wiley series in pure and applied optics. J. Wiley, 1992.
- [84] SALEH, B. E. A.; JOHN WILEY & SONS, I.. **Fundamentals of Photonics (Second Edition)**, volumen 1, book Fourier Transform - Time Duration and Spectral Width , p. 1124–1127. Wiley-Interscience, 1st ed edition, 1991.
- [85] OU, Z.; BAO, X.; LI, Y.; SAXENA, B. ; CHEN, L.. **Ultrannarrow Linewidth Brillouin Fiber Laser**. Photonics Technology Letters, IEEE, 26(20):2058–2061, Oct 2014.
- [86] ELLIS, B.; MAYER, M.; SHAMBAT, G.; SARMIENTO, T.; HARRIS, J. S.; HALLER, E. ; VUCKOVIC, J.. **Ultra-low Threshold Electrically Pumped Quantum Dot Photonic Crystal Nanocavity Laser**. In: CLEO:2011 - LASER APPLICATIONS TO PHOTONIC APPLICATIONS, p. PDPA1. Optical Society of America, 2011.
- [87] SEIMETZ, M.. **High-Order Modulation for Optical Fiber Transmission**, chapter Fiber Propagation Effects. Número 6 em Springer Series in Optical Sciences. Springer, 2009.
- [88] SALEH, B. E. A.; JOHN WILEY & SONS, I.. **Fundamentals of Photonics (Second Edition)**, volumen 1, book Polarization Optics. Wiley-Interscience, 1st ed edition, 1991.
- [89] SEIMETZ, M.. **Laser Linewidth Limitations for Optical Systems with High-Order Modulation Employing Feed Forward Digital Carrier Phase Estimation**. In: OPTICAL FIBER COMMUNICATION/NATIONAL FIBER OPTIC ENGINEERS CONFERENCE, 2008. OFC/NFOEC 2008. CONFERENCE ON, p. 1–3, feb 2008.
- [90] ANDRADE, N. S. D. O.; ROSA, A. N. D. C. S. ; FARIA, P. C. D. C.. **A elipsometria e os parâmetros do vetor de Stokes**. In: ANAIS DO XIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO REMOTO, 2007.

- [91] COLLETT, E.. **Field Guide to Polarization**. Field Guide Series. SPIE Press, 2005.
- [92] JONES, R. C.. **A New Calculus for the Treatment of Optical Systems**. J. Opt. Soc. Am., 31(7):488–493, jul 1941.
- [93] DERICKSON, D.. **Fiber Optic Test and Measurement**, chapter Polarization Measurements. Hewlett-Packard professional books. Prentice Hall PTR, 1998.
- [94] GERRARD, A.; BURCH, J. M.. **Introduction to Matrix Methods in Optics**, chapter Matrices in Polarization Optics. Dover Books on Physics. Dover, 1994.
- [95] ANTON, H. A.; BUSBY, R. C.. **Produto Escalar e Ortogonalidade**. In: ALGEBRA LINEAR CONTEMPORÂNEA, p. 37–47. Bookman, 2006.
- [96] STOKES, G. G.. **On the Composition and Resolution of Streams of Polarized Light from Different Sources**. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society : Mathematical and physical sciences. Cambridge Philosophical Society, 1852.
- [97] HUI, R.; O'SULLIVAN, M.. **Fiber Optic Measurement Techniques**, chapter Optical Polarimeter. Elsevier Science, 2009.
- [98] MUGA, N. J.; PINTO, A. N.. **Adaptive 3-D Stokes Space-Based Polarization Demultiplexing Algorithm**. J. Lightwave Technol., 32(19):3290–3298, Oct 2014.
- [99] PIZURICA, A.; PIZURICA, R.; SENK, V. ; PIZURICA, V.. **An Application Of Spherical Codes To Polarization Shift Keying Modulation**, 1998.
- [100] WOLF, E.. **Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light**, chapter Elementary theory of polarization of stochastic electromagnetic beams. Cambridge University Press, 2007.
- [101] KARLSSON, M.; AGRELL, E.. **Four-dimensional optimized constellations for coherent optical transmission systems**. In: OPTICAL COMMUNICATION (ECOC), 2010 36TH EUROPEAN CONFERENCE AND EXHIBITION ON, p. 1–6, Sept 2010.
- [102] RÉFRÉGIER, P.; ROUEFF, A.. **Intrinsic Coherence: A New Concept in Polarization and Coherence Theory**. Opt. Photon. News, 18(2):30–35, feb 2007.
- [103] WOLF, E.. **Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light**. Cambridge University Press, 2007.
- [104] LAHIRI, M.. **Concept of purity in the theory of optical polarization**. Opt. Lett., 38(6):866–868, mar 2013.
- [105] RÉFRÉGIER, P.; SETÄLÄ, T. ; FRIBERG, A. T.. **Temporal and spectral degrees of polarization of light**. In: PROC. SPIE, volumen 8171, p. 817102–817109, 2011.
- [106] SETÄLÄ, T.; SHEVCHENKO, A.; KAIVOLA, M. ; FRIBERG, A. T.. **Polarization time**. Journal of Physics: Conference Series, 139(1):12011, 2008.

- [107] SHEVCHENKO, A.; ROUSSEY, M.; FRIBERG, A. T. ; SETÄLÄ, T.. **Polarization Time of Unpolarized Light**. *Optica*, 4(1):64–70, Jan 2017.
- [108] FLAMANT, J.; CHAINAIS, P. ; BIHAN, N. L.. **Polarization Spectrogram of Bivariate Signals**. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING (ICASSP), p. 3989–3993, Mar 2017.
- [109] FLAMANT, J.; BIHAN, N. L. ; CHAINAIS, P.. **Time-frequency analysis of bivariate signals**. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, p. –, 2017.
- [110] SCHREIER, P. J.. **Polarization ellipse analysis of nonstationary random signals**. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(9):4330–4339, Sep. 2008.
- [111] MUGA, N. J.; PINTO, A.. **Digital PDL Compensation in 3D Stokes Space**. *J. Lightwave Technol.*, 31(13):2122–2130, Jul 2013.
- [112] MENYUK, C. R.. **Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers**. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 23(2):174–176, Feb 1987.
- [113] POGGIOLINI, P.; BOSCO, G.; CARENA, A.; CURRI, V.; JIANG, Y. ; FORGHIERI, F.. **The GN-model of fiber non-linear propagation and its applications**. *Journal of Lightwave Technology*, 2014.
- [114] POGGIOLINI, P.; JIANG, Y.; CARENA, A. ; FORGHIERI, F.. **Analytical Modeling of the Impact of Fiber Non-Linear Propagation ON Coherent Systems and Networks**, chapter 7, p. 247–310. John Wiley & Sons, Ltd, 2016.
- [115] TEHRANI, M. N.; TORBATIAN, M.; SUN, H.; MERTZ, P. ; WU, K. T.. **A Novel Nonlinearity Tolerant Super-Gaussian Distribution for Probabilistically Shaped Modulation**. In: EUROPEAN CONFERENCE ON OPTICAL COMMUNICATION, ECOC, 2018.
- [116] DAR, R.; FEDER, M.; MECOZZI, A. ; SHTAIF, M.. **Properties of Nonlinear Noise in Long, Dispersion-uncompensated Fiber Links**. *Optics Express*, 2013.
- [117] FEHENBERGER, T.; ALVARADO, A.; BOCHERER, G. ; HANIK, N.. **On Probabilistic Shaping of Quadrature Amplitude Modulation for the Nonlinear Fiber Channel**. *Journal of Lightwave Technology*, 2016.
- [118] AGRELL, E.; ALVARADO, A. ; KSCHISCHANG, F. R.. **Implications of Information Theory in Optical Fibre Communications**. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2062), 2016.
- [119] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. ; BANNAI, E.. **Sphere-packings, Lattices, and Groups**, volumen 290 de III, chapter Sphere Packings and Kissing Numbers. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1987.
- [120] DE SIQUEIRA, R. M.. **Códigos Esféricos com Simetrias Cíclicas**. 2006.
- [121] ERICSON, T.; ZINOVIEV, V.. **Codes on Euclidean Spheres**, chapter 1. North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science, 2001.

- [122] HAMMING, R. W.. **Error Detecting and Error Correcting Codes**. Bell System Technical Journal, 29(2):147–160, 1950.
- [123] SHANNON, C.. **A Mathematical Theory of Communication**. Bell System Technical Journal, 27:379–423, 623–656, 1948.
- [124] SHANNON, C. E.. **Probability of error for optimal codes in a Gaussian channel**. Bell System Technical Journal, The, 38(3):611–656, may 1959.
- [125] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. ; BANNAL, E.. **Sphere-packings, Lattices, and Groups**, volumen 290 de **III**, chapter Codes, Designs, and Groups. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1987.
- [126] SHANNON, C. E.. **Certain results in coding theory for noisy channels**. Information and Control, 1(1):6–25, 1957.
- [127] DARPA/MTO. **Photonics in the Package for Extreme Scalability (PIPES)**, 2018. [Online; accessed 05-July-2019].
- [128] KWON, H.; BIRDSALL, T. G.. **Channel capacity in bits per joule**. Oceanic Engineering, IEEE Journal of, 11(1):97–99, jan 1986.
- [129] WANG, Y.; ZHANG, J. ; ZHANG, P.. **Energy-efficient power and subcarrier allocation in multiuser OFDMA networks**. In: COMMUNICATIONS (ICC), 2014 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 5492–5496, jun 2014.
- [130] RAFIQUE, D.; ZHAO, J. ; ELLIS, A. D.. **Digital back-propagation for spectrally efficient WDM 112 Gbit/s PM m-ary QAM transmission**. Opt. Express, 19(6):5219–5224, mar 2011.
- [131] WANG, D.; MENYUK, C. R.. **Calculation of penalties due to polarization effects in a long-haul WDM system using a Stokes parameter model**. Lightwave Technology, Journal of, 19(4):487–494, apr 2001.
- [132] BARRY, J. R.; LEE, E. A. ; MESSERSCHMITT, D. G.. **Digital Communication**, chapter Multidimensional Signal Constellations. Springer US, 2004.
- [133] SCHMIDT, W. M.. **On the Minkowski-Hlawka theorem**. Illinois Journal of Mathematics, 7(1):18–23, 1963.
- [134] KABATIANSKY, G. A.; LEVENSHTAIN, V. I.. **On Bounds for Packings on a Sphere and in Space**. Problemy Peredachi Informatsii, 14(1):3–25, 1978.
- [135] INGBER, A.; ZAMIR, R. ; FEDER, M.. **Finite-dimensional infinite constellations**. IEEE Transactions on Information Theory, 59(3):1630–1656, March 2013.
- [136] KARLSSON, M.; AGRELL, E.. **Multidimensional Modulation and Coding**. Optical Fiber Communication Conference, 8724(c):M3A.1, 2016.
- [137] MADHOW, U.. **Fundamentals of Digital Communication**, chapter Information Theoretic Limits and Their Computation. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.

- [138] AHMED I. ABD EL-RAHMAN;JOHN CARTLEDGE. **Multidimensional Geometric Shaping for QAM Constellations**. In: 43RD EUROPEAN CONFERENCE ON OPTICAL COMMUNICATION - ECOC, p. Tu.1.D.3. European Conference on Optical Communication, 2017.
- [139] CONTRIBUTORS, W.. **De bruijn sequence — wikipedia, the free encyclopedia**, 2017. [Online; accessed 13-March-2018].
- [140] CHUNG, F.; COOPER, J. N.. **De Bruijn cycles for covering codes**. Random Structures & Algorithms, 25(4):421–431, 2004.
- [141] ICHINOSE, N.; YADA, T. ; GOTOH, O.. **Tetrahedral Gray Code for Visualization of Genome Information**. PLOS ONE, 9(1):1–10, 01 2014.
- [142] SJÖDIN, M.; JOHANNISSON, P.; LI, J.; AGRELL, E.; ANDREKSON, P. A. ; KARLSSON, M.. **Comparison of 128-SP-QAM with PM-16-QAM**. Opt. Express, 20(8):8356–8366, 2012.
- [143] DESCHAMPS, J.-P.. **Hardware Implementation of Finite-Field Arithmetic**. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1 edition, 2009.
- [144] ÖSTERGÅRD, P. R. J.; WEAKLEY, W. D.. **Classification of binary covering codes**. Journal of Combinatorial Designs, 8(6):391–401, 2000.
- [145] JOHANNISSON, P.; SJODIN, M.; ERIKSSON, T. A. ; KARLSSON, M.. **Four-dimensional modulation formats for long-haul transmission**. In: CONFERENCE ON OPTICAL FIBER COMMUNICATION, TECHNICAL DIGEST SERIES, 2014.
- [146] ISHIMURA, S.; KIKUCHI, K.. **Multi-dimensional permutation-modulation format for coherent optical communications**. Opt. Express, 23(12):15587–15597, jun 2015.
- [147] WINZER, P. J.. **Beyond 100G Ethernet**. IEEE Communications Magazine, 48(7):26–30, jul 2010.
- [148] OPTICAL, T.; FORUM, I.. **Technology Options for 400G Implementation**. Forum, (July):1–46, 2015.
- [149] VISINTIN, M.; BIGLIERI, E. ; CASTELLANI, V.. **Four-dimensional signaling for bandlimited channels**. IEEE Transactions on Communications, 42(234):403–409, feb 1994.
- [150] WAITE, J. V.. **The Hopf Fibration and Encoding Torus Knots in Light Fields**. M.s.c.thesis - disponível online at [\url{http://digitalscholarship.unlv.edu/thesesdissertations/2756/}](http://digitalscholarship.unlv.edu/thesesdissertations/2756/), University of Nevada, Las Vegas, 2016.
- [151] BARTOCCI, C.; BOI, L. ; SINIGAGLIA, C.. **New Trends in Geometry: Their Role in the Natural and Life Sciences**, chapter The Geometry of Dense Packing and Biological Structures. Imperial College Press, 2011.
- [152] DASH, S. S.; PYTHOUD, F.; HILLERKUSS, D.; BAEUERLE, B.; JOSTEN, A.; LEUCHTMANN, P. ; LEUTHOLD, J.. **Constellation modulation - an approach to increase spectral efficiency**. Opt. Express, 25(14):16310–16331, Jul 2017.

- [153] JURČO, B.. **Polarization of Light and Hopf fibration**. Czechoslovak Journal of Physics, 1987.
- [154] SADO, J.-F.; MOSSERI, R.. **Geometrical Frustration**, chapter Appendix A1: Spaces With Constant Curvatures. Collection Alea-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics. Cambridge University Press, 1999.
- [155] TOREZZAN, C.; COSTA, S. I. R. ; VAISHAMPAYAN, V. A.. **Constructive spherical codes on layers of flat tori**. In: IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, volumen 59, p. 6655–6663, 2013.
- [156] WOLF, E.. **Appendix A: Lie Groups in Polarization Optics**, p. 368–371. Número vol. 49 em Progress in Optics. Elsevier Science, 2006.
- [157] KIM, H.; ROTE, G.. **Congruence Testing of Point Sets in 4-Space**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, 2016.
- [158] OPTICAL INTERNETWORKING FORUM. **Implementation Agreement for Integrated Polarization Multiplexed Quadrature Modulated Transmitters v01.1**. Technical report, 2013.
- [159] KARLSSON, M.. **Four-dimensional Rotations in Coherent Optical Communications**. Lightwave Technology, Journal of, 32(6):1246–1257, mar 2014.
- [160] ELL, T. A.; BIHAN, N. L. ; SANGWINE, S. J.. **Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing**, chapter Quaternion Algebra, p. 1–19. FOCUS Series. Wiley, 2014.
- [161] SANGWINE, S. J.; BIHAN, N. L.. **Quaternion polar representation with a complex modulus and complex argument inspired by the Cayley-Dickson form**. Advances in Applied Clifford Algebras, 20(1):111–120, 2010.
- [162] CHAGNON, M.; OSMAN, M.; ZHUGE, Q.; XU, X. ; PLANT, D. V.. **Analysis and experimental demonstration of novel 8PolSK-QPSK modulation at 5 bits/symbol for passive mitigation of nonlinear impairments**. Opt. Express, 21(25):30204–30220, Dec 2013.
- [163] ZHANG, X.; ZHAO, Y. ; ZOU, L.. **Optimum TCM Codes Design for Gaussian Channels by Considering Both Euclidean and Hamming Distances**. In: COMMUNICATIONS, 2009. ICC '09. IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON, p. 1–5, jun 2009.
- [164] LORD, E. A.; RANGANATHAN, S.; LORD, E. A. ; RANGANATHAN, S.. **Sphere packing, helices and the polytope  $\{3, 3, 5\}$** . The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, 15(3):335–343, 2001.
- [165] SADO, J. F.; RIVIER, N.. **Boerdijk-Coxeter helix and biological helices as quasicrystals**. Materials Science and Engineering A, 294-296:397–400, 2000.
- [166] SADO, J. F.. **Helices and helix packings derived from the  $\{3, 3, 5\}$  polytope**. European Physical Journal E, 5(5):575–582, 2001.

- [167] BOERDIJK, A. H.. **SOME REMARKS CONCERNING CLOSE-PACKING OF EQUAL SPHERES**. Philips Research Reports, 7(4):303–313, 1952.
- [168] CASTLE, T.; EVANS, M. E.; HYDE, S. T.; RAMSDEN, S. ; ROBINS, V.. **Trading spaces: building three-dimensional nets from two-dimensional tilings**. Interface Focus, 2(5):555 LP – 566, aug 2012.
- [169] HURLEY, A.. **Some Helical Structures Generated by Reflexions**. Australian Journal of Physics, 38:299, 1985.
- [170] BABIKER, H.; JANECKO, S.. **Combinatorial Representation of Tetrahedral Chains**. Communications in Information and Systems, 15:331–359, 01 2015.
- [171] MINNEAPOLIS, M. E.. **The Quadrahelix : A Nearly Perfect Loop of Tetrahedra**. 10:1–24, 2016.
- [172] CONWAY, J.; BURGIEL, H. ; GOODMAN-STRAUSS, C.. **The Symmetries of Things**, chapter Naming the Archimedean and Catalan polyhedra and tilings, p. 284. Ak Peters Series. Taylor & Francis, 2008.
- [173] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A.. **Sphere Packings, Lattices and Groups**, chapter Certain Important Lattices and Their Properties, p. 117–119. Número 4. Springer New York, New York, NY, 1999.
- [174] FEHENBERGER, T.. **Information rates of probabilistically shaped coded modulation for a multi-span fiber-optic communication system with 64QAM**. Optics Communications, 409:2–6, 2018.
- [175] ZHANG, S.; YAMAN, F.. **Constellation Design with Geometric and Probabilistic Shaping**. Optics Communications, 409:7–12, 2018.
- [176] KAROUT, J.; ESSIAMBRE, R. J.; AGRELL, E. ; TULINO, A.. **Achievable rates of multidimensional multisphere distributions**. In: 2017 OPTICAL FIBER COMMUNICATIONS CONFERENCE AND EXHIBITION (OFC), p. 1–3, March 2017.
- [177] AGRELL, E.. **Sphere packings and their use as modulation formats @ONLINE**. <https://codes.se/packings/>, 2016.
- [178] DUNEAU, M.; KATZ, A.. **Quasiperiodic patterns**. Physical Review Letters, 1985.
- [179] YERSHOVA, A.; JAIN, S.; LAVALLE, S. M. ; MITCHELL, J. C.. **Generating Uniform Incremental Grids on SO(3) Using the Hopf Fibration**. The International journal of robotics research, 29(7):801–812, jun 2010.
- [180] SMITH, B.. **Instantaneous Companding of Quantized Signals**. Bell System Tech. Journal, 36(3):653–709, 1957.
- [181] LOWE, D.; HUANG, X.. **Optimal Adaptive Hyperbolic Companding for OFDM**. In: THE 2ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON WIRELESS BROADBAND AND ULTRA WIDEBAND COMMUNICATIONS, AUSWIRELESS, 2007.



- [182] MOHAMMED, A.; SHEHATA, M.; MOSTAFA, H. ; NASSAR, A.. **Peak-to-Average Power Ratio Suppression using Companding schemes in OFDM Systems**. In: 2018 IEEE 61ST INTERNATIONAL MIDWEST SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS (MWSCAS), p. 933–936, Aug 2018.
- [183] SHE, A.; CAPASSO, F.. **Parallel Polarization State Generation**. Scientific Reports, 6:26019, may 2016.
- [184] ESSIAMBRE, R.; KRAMER, G.; WINZER, P. J.; FOSCHINI, G. J. ; GOEBEL, B.. **Capacity Limits of Optical Fiber Networks**. Lightwave Technology, Journal of, 28(4):662–701, feb 2010.
- [185] BAAKE, M.; ZEINER, P.. **Coincidences in Four Dimensions**. Philosophical Magazine, 2008.
- [186] SHANNON, C. E.. **Communication in the Presence of Noise**. Proceedings of the IRE, p. 4, 1949.
- [187] SHINER, A. D.; REIMER, M.; BOROWIEC, A.; GHARAN, S. O.; GAUDETTE, J.; MEHTA, P.; CHARLTON, D.; ROBERTS, K. ; O’SULLIVAN, M.. **Demonstration of an 8-dimensional modulation format with reduced inter-channel nonlinearities in a polarization multiplexed coherent system**. Opt. Express, 22(17):20366–20374, Aug 2014.
- [188] CHEN, B.; OKONKWO, C.; HAUFERMANN, H. ; ALVARADO, A.. **High Spectral Efficiency 8D Polarization-Ring-Switching Modulation Formats**. arXiv, 4 2019.
- [189] KAROUT, J.; LIU, X.; SETHUMADHAVAN, C.; AGRELL, E.; KARLSSON, M. ; ESSIAMBRE, R.-J.. **Experimental Demonstration of an Optimized 16-ary Four-Dimensional Modulation Format Using Optical OFDM**. In: OPTICAL FIBER COMMUNICATION CONFERENCE/NATIONAL FIBER OPTIC ENGINEERS CONFERENCE 2013, p. OW3B.4, 2013.
- [190] HARDIN, R.; SLOANE, N. J. ; SMITH, W. D.. **A library of putatively optimal coverings of the sphere with n equal caps**, 1987.
- [191] ZHOU, X.. **Multidimensional Optimized Optical Modulation Formats** , chapter 2. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley, 2016.
- [192] GINZTON, E. L.; HEWLETT, W. R.; JASBERG, J. H. ; NOE, J. D.. **Distributed amplification**. Proceedings of the IRE, 36(8):956–969, Aug 1948.
- [193] MAXIM\_INTEGRATED. **Introduction to LVDS, PECL and CML**, 2000.
- [194] HEYDARI, P.; MOHANAVELU, R.. **Design of ultrahigh-speed low-voltage CMOS CML buffers and latches**. In: IEEE TRANSACTIONS ON VERY LARGE SCALE INTEGRATION (VLSI) SYSTEMS, 2004.
- [195] RAZAVI, B.. **The Current-Steering DAC [A Circuit for All Seasons]**. IEEE Solid-State Circuits Magazine, 2018.
- [196] NAGATANI, M.; NOSAKA, H.. **High-speed low-power digital-to-analog converter using InP heterojunction bipolar transistor technology for next-generation optical transmission systems**. NTT Technical Review, 2011.

- [197] JOHNSON, H.; GRAHAM, M.. **High-speed Digital Design: A Handbook of Black Magic**. Prentice Hall Modern Semiconductor Design Series. Prentice Hall, 1993.
- [198] VAN DER BIJ, E.; SERRANO, J.; WLOSTOWSKI, T.; CATTIN, M.; GOUSIOU, E.; ALVAREZ SANCHEZ, P.; BOCCARDI, A.; VOUMARD, N. ; PENACOBÁ, G.. **Open Hardware for CERN's accelerator control systems**. Journal of Instrumentation, 2012.
- [199] LIU, W.; REN, Y.; HE, D. ; QIAO, L.. **Development of universal FMC carrier card based on PXI Express**. In: 2016 IEEE 7TH ANNUAL UBIQUITOUS COMPUTING, ELECTRONICS AND MOBILE COMMUNICATION CONFERENCE, UEMCON 2016, 2016.
- [200] ZILBERMAN, N.; AUDZEVICH, Y.; KALOGERIDOU, G.; BOJAN, N. M.; ZHANG, J. ; MOORE, A. W.. **NetFPGA - Rapid prototyping of high bandwidth devices in open source**. In: 25TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON FIELD PROGRAMMABLE LOGIC AND APPLICATIONS, FPL 2015, 2015.
- [201] BALESTRIERI, E.; DAPONTE, P.; DE VITO, L. ; RAPUANO, S.. **Experimental Investigation on DAC Glitch Measurement**. Proc. of 20th IMEKO World Congress, 2012.
- [202] YOHEI KUGA. **NFSUME board files @ONLINE**. <https://github.com/sora>, 2016.
- [203] FISCHER, R. F.. **Precoding and Signal Shaping for Digital Transmission**, chapter Signal Shaping. 2005.
- [204] SIMINOVITCH, D. J.. **Rotations in NMR: Part I. Euler-Rodrigues parameters and quaternions**. Concepts in Magnetic Resonance, 1997.
- [205] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.18 of 2018-03-27.
- [206] NAVES, L. R. B.; TOREZZAN, C. ; COSTA, S.. **Construção e análise de códigos esféricos com boas taxas binárias**. TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 2013.
- [207] RODRIGUES, F.; TEMPORÃO, G. ; VON DER WEID, J. P.. **Constructive Methods for the Design and Labeling of Four-Dimensional Modulations**. Journal of Communication and Information Systems, 33(1), Aug. 2018.
- [208] VON DER WEID, J. P.; TEMPORÃO, G. P. ; RODRIGUES, F. A.. **Fibrações Hopf e Modulações 4D**. In: XXXV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES E PROCESSAMENTO DE SINAIS, SBRT2017, p. 664–667, Setembro 2017.
- [209] RODRIGUES, F. A.; TEMPORÃO, G. P. ; WEID, J. P. V.. **Discrete Hopf Fibrations in the Signal Space of Four Dimensional Modulations**. In: ADVANCED PHOTONICS 2017 (IPR, NOMA, SENSORS, NETWORKS, SPPCOM, PS), p. SpTu2F.3. Optical Society of America, 2017.

- [210] RODRIGUES, F.; TEMPORÃO, G. ; VON DER WEID, J.. **Discrete hopf fibration in the design of four-dimensional modulations**. In: SBMO/IEEE MTT-S INTERNATIONAL MICROWAVE AND OPTOELECTRONICS CONFERENCE, IMOC 2017, volumen 2017-January, 2017.
- [211] RODRIGUES, F. A.; TEMPORÃO, G. ; VON DER WEID, J. P.. **Constrained Shell Mapping for Geometric Optimization of Multilevel 4D Modulations**. In: 2019 SBMO/IEEE MTT-S INTERNATIONAL MICROWAVE AND OPTOELECTRONICS CONFERENCE (IMOC) (IMOC'2019), Aveiro, Portugal, Nov 2019.
- [212] RODRIGUES, F. A.; TEMPORÃO, G. P. ; VON DER WEID, J. P.. **Simple FPGA Mezzanine Interface for Test and Measurement of Digital-to-Analog Converters**. In: 2019 SBFOTON INTERNATIONAL OPTICS AND PHOTONICS CONFERENCE (SBFOTON IOPC), p. 1–5, 2019.