

**Pablo Vinícius Ferreira Telles**

**Otimização hierárquica na parametrização de  
superfícies triangularizadas por domínios locais  
com aplicações no remalhamento semirregular**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Sinesio Pesco  
Co-orientador: Prof. Esdras Soares de Medeiros Filho

Rio de Janeiro  
setembro de 2020

**Pablo Vinícius Ferreira Telles**

**Otimização hierárquica na parametrização de  
superfícies triangularizadas por domínios locais  
com aplicações no remalhamento semirregular**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Sinesio Pesco**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Esdras Soares de Medeiros Filho**

Co-orientador

Departamento de Matemática – UFC

**Prof. Romildo José da Silva**

Departamento de Matemática – UFC

**Prof. Marcelo Ferreira Siqueira**

Align Technology, Inc. – Align

**Prof. Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho**

Visgraf – IMPA

**Prof. Lis Ingrid Roque Lopes Custódio**

Departamento de Ciências da Computação – UERJ

**Prof. Marcos Craizer**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de setembro de 2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Pablo Vinícius Ferreira Telles**

Graduado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF) e Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), com área de concentração em Matemática Aplicada e na linha de pesquisa Processamento Geométrico.

Ficha Catalográfica

Telles, Pablo Vinícius Ferreira

Otimização hierárquica na parametrização de superfícies triangularizadas por domínios locais com aplicações no remalhamento semirregular / Pablo Vinícius Ferreira Telles; orientador: Sinesio Pesco; co-orientador: Esdras Soares de Medeiros Filho. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2020.

v., 122 f: il. color. ; 30 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Projeção hierárquica; Otimização hierárquica; Conjuntos colantes; Remalhamento semirregular.

I. Pesco, Sinesio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Para as minhas amadas mãe Denise e avó Dionízia.



## Agradecimentos

Agradeço a Deus, o Castelo Forte, pela sua maravilhosa Graça que alcança a todos segundo os propósitos da sua vontade.

À minha mãe Denise e avó Dionízia, o meu porto seguro, pelo amor e incentivo. Às minhas sobrinhas Júlia e Luiza por trazerem alegria e ternura. Aos seus pais, meu irmão Patrick e cunhada Izabelle, pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, professor Sinésio, por confiar no meu trabalho, pelas boas conversas e por sua grande generosidade e amizade.

Ao meu coorientador, professor Esdras, por confiar no meu trabalho, pela sua parceria e por todas as ajudas e discussões ao longo do caminho.

Ao professor Romildo, pela sua amizade e pela parceria na realização deste trabalho.

Aos meus amigos e familiares pela torcida, paciência e pelo apoio, em especial, à minha prima querida Maria Aparecida que se tornou uma estrela e hoje vive na minha memória.

Aos amigos da PUC-Rio, pela companhia, apoio e incentivo. Em especial, ao Orlando, à Dania, à Viviana, à Yunelsy, ao Rafael Sanabria, ao João Marcos, à Tamires, ao Thiago, à Tahiz e ao Renan.

Aos professores membros da banca examinadora, pelas sugestões e pelo tempo dispensado ao exame.

Aos professores do Departamento de Matemática da PUC-Rio, pelos ensinamentos e conversas.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da PUC-Rio. Em especial, à Creuza, à Kátia, ao Carlos, ao seu Orlando e à Mariana, pelos apoios necessários.

À VRAC/PUC-Rio pelos auxílios concedidos e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio.

Ao Departamento de Matemática da UFC pela recepção e por colaborar com a execução deste projeto.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Telles, Pablo Vinícius Ferreira; Pesco, Sinesio; Medeiros, Esdras. **Otimização hierárquica na parametrização de superfícies triangularizadas por domínios locais com aplicações no remalhamento semirregular.** Rio de Janeiro, 2020. 122p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A parametrização de superfícies triangularizadas, orientadas e sem bordo não se realiza em um único domínio planar e, por vezes, são sensíveis às descontinuidades ora introduzidas entre os múltiplos domínios planares solicitados. Para tanto, um domínio base não planar é exigido com uma estrutura diferenciável, bem como, a parametrização da superfície por este domínio. A principal abordagem desta tese utiliza uma estrutura de multi-triangulação que direciona a simplificação da superfície inicial numa superfície base e propõem uma projeção hierárquica dos vértices iniciais sobre este domínio. A projeção hierárquica é combinada com um sistema de parametrização da superfície base em domínios locais que são relacionados por funções de transição suaves. Como aplicação, o remalhamento semirregular de superfícies triangularizadas converte a superfície inicial, possivelmente irregular, em outra superfície com triangulação semirregular. A qualidade da triangulação e a preservação da forma original são aspectos importantes para o remalhamento e são resultantes da combinação de componentes envolvidas durante a sua construção, como a superfície base que aproxima a superfície inicial sem bordo, o particionamento semirregular desta superfície base e o reposicionamento de sua geometria. Um desafio significativo está no reposicionamento da geometria dos vértices que decorre da parametrização da superfície inicial. A otimização hierárquica realizada nestes domínios locais buscando reduzir as energias de distorção introduzidas pela parametrização, tal como, os atributos da superfície base são fundamentais para a qualidade deste remalhamento. A estrutura hierárquica permite flexibilidade durante a otimização e influencia no tempo de convergência.

## Palavras-chave

Projeção hierárquica; Otimização hierárquica; Conjuntos colantes; Remalhamento semirregular.

## Abstract

Telles, Pablo Vinícius Ferreira; Pesco, Sinesio (Advisor); Medeiros, Esdras (Co-Advisor). **Hierarchical optimization in parameterization of triangular surfaces by local domains with applications in semi-regular remeshing**. Rio de Janeiro, 2020. 122p. Tese de doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The parameterization of triangulated, oriented and free boundary surfaces does not take place in a single planar domain, and sometimes are sensitive to discontinuities introduced between the various planar domains requested. Therefore, a non-planar base domain is required with a differentiable structure, as well as a parameterization of the surface by this domain. The main approach of this thesis uses a multi-triangulation structure that directs the simplification of the initial surface to base surface and proposes a hierarchical projection of the initial vertices on the domain. A hierarchical projection is combined with a parameterization system of the initial surface composed of local domains related by smooth transition maps. As an application, the semi-regular remeshing of triangulated surfaces converts an input surface, possibly irregular, to another surface with semi-regular triangulation. The quality of the triangulation and the shape preserving are important aspects for the remeshing and are resulting from the components merge used during its building, such as the base surface that approximate the initial free boundary surface, refinement of the semi-regular surface and geometric fitting. An important challenge is the geometric fitting that results from the parameterization of the initial surface. The hierarchical optimization carried out in these local domains that minimizes the distortion energies produced by the parameterizations, such as the base surface attributes are fundamental to the quality of this remeshing. The hierarchical structure allows flexibility during optimization and influences the convergence time.

## Keywords

Hierarchical projection; Hierarchical optimization; Sets of gluing data, Semi-regular remeshing.

# Sumário

1	Introdução	<b>13</b>
1.1	Motivação	14
1.2	Trabalhos relacionados	15
1.3	Contribuições	17
1.4	Organização da tese	18
2	Conceitos fundamentais	<b>19</b>
2.1	Elementos combinatórios	19
2.2	Conjunto de dados colantes	23
2.3	Energia de distorção	28
3	Otimização hierárquica em superfícies com bordo	<b>35</b>
3.1	Descrição do problema	35
3.2	Construção da hierarquia	36
3.2.1	Parametrização por combinação convexa	36
3.2.2	Parametrização por coordenadas polares	38
3.2.3	Simplificação	41
3.3	Processo de otimização	43
3.3.1	Não-hierárquico	46
3.3.2	Hierárquico	48
3.4	Mapeamento de textura	50
4	Otimização hierárquica em superfícies sem bordo	<b>59</b>
4.1	Descrição do problema	59
4.2	Construção da hierarquia	61
4.2.1	Simplificação	61
4.2.2	Projeção subsequente	67
4.3	Projeção hierárquica	69
4.4	Estrutura diferenciável	77
4.5	Processo de otimização global	84
4.5.1	Não-hierárquico	85
4.5.2	Hierárquico	93
5	Remalhamento semirregular	<b>96</b>
5.1	Construção da superfície	96
5.1.1	Subdivisão 4:1	97
5.1.2	Interpolação	99
5.2	Comparações	102
6	Conclusão	<b>116</b>

## Lista de figuras

Figura 2.1	Operações topológicas <i>flip</i> e <i>split</i> .	21
Figura 2.2	Operações topológicas de simplificação.	21
Figura 2.3	Coordenadas baricêntricas	22
Figura 2.4	Variedades diferenciáveis [1]	25
Figura 2.5	Função objetivo	31
Figura 2.6	Esquema da parametrização restrita ao triângulo	33
Figura 3.1	Parametrização do vértice $v_i$ com coordenadas do valor médio	37
Figura 3.2	Parametrização $\phi$ da superfície $\mathcal{S}$ no domínio $\mathcal{P}$	38
Figura 3.3	Correspondência $\sigma$ entre $Star(b, \mathcal{B})$ e $\Omega_b$	40
Figura 3.4	Parametrização $\phi$ da superfície $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ no domínio $\mathcal{P}$	41
Figura 3.5	Modificação local em $\mathcal{S}_k$ após remoção do vértice $v_k$	42
Figura 3.6	Associação do vértice removido $u_k$ com a triangulação subsequente	43
Figura 3.7	Representação hierárquica dos modelos <i>Nefertiti</i> e <i>Duck</i>	43
Figura 3.8	Representação hierárquica de uma região do modelo <i>Botijo</i>	44
Figura 3.9	Núcleo da estrela convexa ou não-convexa em $\mathcal{P}$	46
Figura 3.10	Otimização local da energia combinada do vértice $v_i$	46
Figura 3.11	(a) Textura no modelo original (b) Textura com as coordenadas otimizadas sem hierarquia (c) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia	50
Figura 3.12	(a) Textura no modelo original (b) Textura com as coordenadas otimizadas sem hierarquia (c) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia	51
Figura 3.13	(a) <i>Júlio Cesar</i> original (b) <i>Júlio Cesar</i> simplificado	52
Figura 3.14	(a) <i>Clown Fish</i> original (b) <i>Clown Fish</i> simplificado	52
Figura 3.15	(a) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia em 2000 iterações (b) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia em 3000 iterações	53
Figura 3.16	(a) Textura sem as coordenadas otimizadas (b) Textura com as coordenadas otimizadas sem hierarquia (c) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia	54
Figura 3.17	Região $\mathcal{S}$ na superfície $\mathcal{M}$	54
Figura 3.18	(a) Original (b) $\mu = 0.5$ (c) $\mu = 1.0$ (d) $\mu = 3.0$	55
Figura 3.19	Variação de energia nos modelos (a) <i>Júlio César</i> (b) Região do <i>bunny</i> (c) <i>Clown Fish</i>	55
Figura 3.20	Variação de energia no modelo <i>Clown Fish</i> com iterações irregulares. A região hachurada corresponde ao <i>box</i> vermelho	56
Figura 3.21	Comparação por ângulos da Região do <i>bunny</i> com as suas coordenadas de textura (a) sem otimização (b) com otimização hierárquica	57
Figura 3.22	Comparação por arestas da Região do <i>bunny</i> com as suas coordenadas de textura (a) sem otimização (b) com otimização hierárquica	57

Figura 4.1	$r$ -vizinhança localizada restrita	62
Figura 4.2	$(\alpha, \beta)$ -LRPDS	62
Figura 4.3	Família de conjuntos encaixantes [2]	63
Figura 4.4	Modificação local por triangulação de Delaunay [2]	65
Figura 4.5	A aproximação das regiões de Voronoi é identificada em cores (esquerda), os vértices de conflito destacados estão mantidos e a triangulação $\oplus_{s=0}^{i-1} \mathcal{T}_s$ correspondente é obtida (direita) [2]	67
Figura 4.6	Projeção dos vértices em níveis subsequentes	69
Figura 4.7	Projeção dos vértices de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{B}$	70
Figura 4.8	Projeção dos vértices de $\mathcal{M}_N$ sobre $\mathcal{M}_{k-1}$	71
Figura 4.9	Projeção do vértice $v_k$ sobre $ J_0 $ e $\psi_i = \sigma_i \circ \rho$ em $\mathcal{M}_{k-1}$ e $\mathcal{M}_k$	74
Figura 4.10	Projeções nos casos (a) 1 e (b) 2	75
Figura 4.11	Projeções no caso 3 envolvendo uma única estrela de $\mathcal{B}$	76
Figura 4.12	Projeção no caso 3 envolvendo mais de uma estrela de $\mathcal{B}$	76
Figura 4.13	Projeção no caso 3 envolvendo mais de uma estrela de $\mathcal{B}$ e formando um "túnel". Os elementos da junção estão destacados em cor azul na representação de $\mathcal{Q}_k$ .	77
Figura 4.14	Aplicação $g_i \circ R_{ij}$ sobre o setor canônico duplo	82
Figura 4.15	Aplicação $g_{ij}$ sobre $\Omega_j$	83
Figura 4.16	$C_0 \cap C_1$	83
Figura 4.17	Regiões $\mathcal{S}_i$ , $\mathcal{S}_j$ e $\mathcal{S}_h$ de $\mathcal{M}$ projetadas sobre $\mathcal{B}$ e relacionadas com os domínios $\mathcal{P}_i$ , $\mathcal{P}_j$ , $\mathcal{P}_h$ que se comunicam pelas funções de transição. Os domínios colantes contêm porções das triangulações dos domínios de parametrização discretos. As cores azul claro e azul escuro representam as porções em $\Omega_{ij}$ e $\Omega_{ji}$ , azul escuro e rosa representam porções em $\Omega_{hj}$ e $\Omega_{jh}$ , verde e azul escuro representam porções em $\Omega_{ih}$ e $\Omega_{hi}$ .	86
Figura 4.18	Atualização da projeção de $v$ após relaxação.	87
Figura 4.19	$u = \psi_i(v)$ é reposicionado em $\tilde{u}$ , migrando para dentro do domínio colante $\Omega_{ij}$ , e o bordo na triangulação $\mathcal{P}_j$ será atualizado localmente como indicado na região destacada.	88
Figura 4.20	$u = \psi_i(v)$ é reposicionado em $\tilde{u}$ , migrando para dentro do domínio colante $\Omega_{ij}$ , mas não há nenhum triângulo incidente a $\tilde{u}$ totalmente contido em $\Omega_{ij}$ , neste caso, $\psi_{ji}(\tilde{u})$ pertence ao domínio de parametrização $\Omega_j$ mas não pertence a triangulação $\mathcal{P}_j$ .	88
Figura 4.21	$u = \psi_i(v)$ é reposicionado em $\tilde{u}$ , migrando para fora do domínio colante $\Omega_{ij}$ , e o bordo na triangulação $\mathcal{P}_j$ será atualizado localmente como indicado na região destacada.	89
Figura 4.22	$u = \psi_i(v)$ é reposicionado em $\tilde{u}$ , migrando para fora do domínio colante $\Omega_{ij}$ .	89
Figura 4.23	Relaxação do conjunto $\rho(X_N)$ sobre $ J_0 $ . Os triângulos coloridos estão inteiramente contidos em algum triângulo de $\mathcal{B}$ e o movimento de algumas estrelas projetadas estão destacados em cores.	92

Figura 4.24	Variação da energia média na otimização global não-hierárquica com 800 iterações realizadas pelo algoritmo 4 no modelo <i>Egea</i> composto por 46045 vértices e 92086 triângulos.	93
Figura 4.25	Variação da energia média na otimização global não-hierárquica comparada com a otimização global hierárquica, ambas realizadas com 800 iterações, respectivamente, pelos algoritmos 4 e 5 no modelo <i>Egea</i> composto por 46045 vértices e 92086 triângulos.	94
Figura 5.1	(a) Estrela de $\mathcal{B}$ (b) <i>Split</i> ( $L = 2$ ) (c) <i>Flip</i> (d) Projeção dos novos vértices	97
Figura 5.2	Reposicionamento dos vértices introduzidos pela subdivisão 4:1. Cada novo vértice $v$ é mapeado nos seus respectivos domínios de parametrização discretos e a partir destes domínios são remapeados na superfície $\mathcal{M}$ . As coordenadas de $v$ são recalculadas por interpolação e representada pelo ponto de cor lilás sombreado.	100
Figura 5.3	(a) Gráfico de $\mathfrak{h}$ (b) Gráfico de $\gamma_b$	102
Figura 5.4	(a) Subdivisão 4:1 (b) Interpolação (c) Original	103
Figura 5.5	Comparação de suavidade das linhas com domínios (a) não otimizados e (b) otimizados hierarquicamente.	106
Figura 5.6	Modelo <i>Egea</i> original (a) e remalhado (b).	107
Figura 5.7	Modelo <i>Bunny</i> original (a) e remalhado (b).	107
Figura 5.8	Modelo <i>Vértebra</i> original (a) e remalhado (b).	108
Figura 5.9	Variação da energia total máxima (a), (b); média (c), (d); mínima (e), (f), na otimização dos modelos <i>Egea</i> e <i>Bunny</i> .	109
Figura 5.10	Algumas diferenças no remalhamento do modelo <i>Egea</i> pela hierarquia e sem hierarquia.	110
Figura 5.11	Algumas diferenças no remalhamento do modelo <i>Bunny</i> pela hierarquia e sem hierarquia.	111
Figura 5.12	Remalhamento do modelo <i>Egea</i> : (a) Otim. H. ( $\#V_{base} = 100$ ) (b) Pietroni <i>et al.</i> [3] ( $\#V_{base} = 103$ )	111
Figura 5.13	Mapa de cores na razão de aspecto: <i>Egea</i> . (a) Otim. H. (b) Pietroni <i>et al.</i> [3]	112
Figura 5.14	Mapa de cores na razão de aspecto: <i>Bunny</i> . (a) Otim. H. (b) Pietroni <i>et al.</i> [3]	113
Figura 5.15	Mapa de cores na razão de aspecto: <i>Vértebra</i> . (a) Otim. H. (b) Pietroni <i>et al.</i> [3]	113
Figura 5.16	Taxa de distorção nos modelos (a) <i>Egea</i> e (b) <i>Bunny</i> .	115

## Lista de tabelas

Tabela 3.1	Seleção de níveis da hierarquia para a otimização e tempo de execução	52
Tabela 3.2	Seleção de níveis da hierarquia para a otimização e tempo de execução	53
Tabela 3.3	Número de iterações e tempo de execução	56
Tabela 5.1	Cardinalidade de vértices e triângulos nos modelos originais, bases e remalhados.	106
Tabela 5.2	Comparações de ângulo, razão de aspecto e distância.	108
Tabela 5.3	Comparações de área e comprimento de arestas.	108
Tabela 5.4	Comparações de ângulo, razão de aspecto e distância entre o método proposto em Pietroni <i>et al.</i> [3] e o remalhamento pela otimização hierárquica dos domínios locais.	112
Tabela 5.5	Comparações de área e comprimento de arestas entre o método proposto em Pietroni <i>et al.</i> [3] e o remalhamento pela otimização hierárquica dos domínios locais.	114



# 1

## Introdução

Algumas aplicações em modelagem de superfícies como [4], [1], [5], ou envolvendo simulações de fluxos em superfícies como [6], ou ainda soluções de equações diferenciais em superfícies [7], e também *manifold learning* [8], entre outras, são definidas com alguma estrutura de variedade diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ . De modo que, o interesse no desenvolvimento de algoritmos eficientes para construir uma estrutura de variedade diferenciável, preferencialmente suave, é bastante relevante para o âmbito computacional.

Em remalhamento semirregular, o ajuste geométrico da nova triangulação estruturada construída a partir de um domínio base é realizada pela "cartificação" da superfície original em função deste domínio. As parametrizações locais envolvidas estabelecem a conexão entre a superfície original com a nova superfície remalhada. Todavia, essas parametrizações quase sempre introduzem distorções que influenciam diretamente na qualidade da triangulação produzida pelo remalhamento, especialmente nos trechos da superfície que correspondem às regiões próximas aos bordos dos domínios locais.

Nesse sentido, [9] destaca que sistemas de parametrizações globalmente suaves tendem a produzir remalhamentos cujas triangulações possuam vértices localmente uniformes e com variação mais suave no aspecto global, particularmente em torno dos vértices extraordinários do remalhamento. As abordagens globalmente suaves são menos frequentes na literatura de remalhamento, ocorre, por exemplo, em [10] onde são construídas funções de transição suaves entre os domínios, mas apenas em [11] e [3] as descontinuidades nos vértices extraordinários são evitadas. Esses vértices extraordinários são aqueles que sobrevivem ao processo de simplificação, compõem a superfície base e permanecerão no remalhamento. Deste modo, combinar a estrutura diferenciável suave de [12] com a otimização hierárquica dos domínios locais proporciona que os vértices parametrizados, inclusive os extraordinários, sejam hierarquicamente otimizados de acordo com uma classificação prévia em relação ao grau de distorção e isso contribui para que o remalhamento construído evite descontinuidades nos vértices extraordinários.

## 1.1

### Motivação

O problema principal desta tese consiste em construir uma estrutura de parametrização otimizada hierarquicamente para superfícies triangularizadas sem bordo. Esse problema foi introduzido e parcialmente discutido por *Kai Hormman* em [13] e detalhado na sua tese [14] com o objetivo de obter eficiência computacional na otimização, mas apenas para superfícies triangularizadas com bordo. Sobre a parametrização de superfícies sem bordo, foi proposto em sua tese um método de parametrização da triangulação original sobre um domínio base obtido por simplificação, mas sem introduzir critérios de otimização. Em seguida, o problema foi revisitado por [15], mas ainda tratando de superfícies com bordo e propondo uma nova abordagem que contribuiu com a quantificação da deformação e com a metodologia da otimização hierárquica. Algumas outras abordagens de otimização hierárquica para triangulações surgiram [16], [17], mas buscando eficiência computacional e abordando superfícies com bordo.

Os artigos de *Siqueira et al.* [1], [12] propõem uma estrutura diferenciável que transforma uma superfície triangularizada, linear por partes, orientada e sem bordo em uma variedade diferenciável. Por outro lado, *Medeiros et al.* [2] propõem uma estrutura de multi-triangulação que constrói uma hierarquia  $\{\mathcal{M}_k\}_{k=0}^N$  de superfícies onde, particularmente, a superfície base  $\mathcal{M}_0$  é bastante adequada à construção dessa variedade diferenciável. Os abertos da variedade são definidos, para cada vértice  $i$  da triangulação, por discos abertos  $\Omega_i$  inscritos em  $\omega$ -polígonos regulares, onde  $\omega$  é a valência de cada vértice. A qualidade dos triângulos da superfície  $\mathcal{M}_0$  permite que a associação isomórfica entre estrela e polígono não incorra em distorções iniciais tão grosseiras. Uma parametrização dos vértices em cada nível da hierarquia sobre a superfície  $\mathcal{M}_0$  permitiria uma parametrização de cada nível nos domínios  $\Omega_i$  definidos pela superfície base. Estas combinações já possibilitariam a construção da estrutura de parametrização hierárquica por domínios locais, criando em cada nível  $k$  e para cada domínio  $\Omega_i$  a associação entre triangulações  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  com regiões  $\mathcal{S}_i^k \subset \mathcal{M}_k$ .

A suavidade da variedade é preponderante para realização da otimização em cada triangulação  $\mathcal{P}_i^k$ , pois as funções de transição definidas na variedade permitem que domínios  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  correspondentes aos vértices vizinhos na superfície base se comuniquem difeomorficamente e deste modo  $\mathcal{P}_i^k$  e  $\mathcal{P}_j^k$ , que possuem vértices correspondentes comuns na superfície  $\mathcal{M}_k$ , podem ser otimizados suavemente e livres de inconsistências. A hierarquia permite que a otimização ocorra em diversos níveis  $k$  selecionados, nos níveis mais grosseiros a

otimização ocorre mais eficientemente e cada novo nível encontra triangulações previamente otimizadas. Neste cenário, foi motivado o problema principal da tese que pode encontrar diversas aplicações, mas por ora foi proposto o remalhamento semirregular que permite visualizar alguns resultados sobre a otimização hierárquica.

## 1.2

### Trabalhos relacionados

O problema de otimização hierárquica foi exposto originalmente por [13] que o propôs para superfícies triangularizadas com bordo em busca de eficiência computacional. O processo de otimização do domínio de parametrização foi realizado com o funcional  $E_{MIPS}$  apresentado por [18]. A estrutura hierárquica foi inspirada na *progressive mesh* de [19] por meio de modificações locais na triangulação com o colapso de semi-arestas e com o armazenamento da história dos vértices removidos registrados através das coordenadas baricêntricas atribuídas em planificações locais [20] da triangulação modificada, baseado em [21].

A otimização hierárquica foi revisitada por [22] que verificou a conformidade do funcional  $E_{MIPS}$  e apresentou um novo funcional [15] que combina  $E_{MIPS}$  com uma função de deformação da área buscando, assim, quantificar as distorções de isometria na parametrização e possibilitando a minimização dessas distorções. O funcional apresentado é invariante por translações, rotações, não introduz triângulos degenerados durante a otimização e é apropriado inclusive para minimização no bordo. Para a realização da otimização hierárquica, [15] modifica o método proposto por [13] e utiliza um algoritmo de relaxação dos vértices que prioriza os vértices mais distorcidos enquanto mantêm fixados os vértices do seu elo e com isso garante a convergência do algoritmo de otimização.

A estrutura hierárquica de multi-triangulação foi proposta inicialmente por [23] destinada a organizar, em modelo mais geral, uma hierarquia de decomposições de domínios planares em triângulos e consiste em uma coleção de fragmentos de triangulações agrupados nos nós de uma grafo orientado acíclico. Em [24], é apresentada uma outra abordagem especializada em níveis variáveis de detalhes e bastante adequada para construções adaptativas. Uma técnica recente é apresentada em [2] que adapta a definição da estrutura de multi-triangulação de [23] para superfícies triangularizadas propondo uma estrutura de multi-triangulação (HPDS-MT) baseada em amostragem hierárquica por discos de Poisson [25] e apresenta garantias teóricas sobre a qualidade dos triângulos em cada nível de resolução. A HPDS-MT produz

superfícies de alta qualidade em todos os níveis de resolução, inclusive em níveis mais grosseiros que são bem adequados como domínios base utilizados na construção do conjunto de dados colantes [12] ou em aplicações de remalhamento, como sugerido por [9].

A primeira definição construtiva de variedades diferenciáveis em modelagem geométrica surgiu em [4] com o objetivo de extrair aproximações de superfícies suaves em  $\mathbb{R}^3$  construindo parametrizações locais de superfícies triangularizadas em domínios que se comunicam por funções de transição suaves. Essa inserção inspirou outras abordagens [26], [27], [28], [1], [12], [5], com características e contribuições diferentes mas geralmente baseadas em [4]. A proposta de [12] apresenta uma definição construtiva de variedades diferenciáveis  $C^\infty$  fornecendo uma definição precisa sobre conjuntos de dados colantes e apresenta resultados teóricos que sustentam todas as construções propostas, além disso, difere de [4] em dois aspectos teóricos importantes envolvendo a definição de dados colantes, na condição de espaço Hausdorff e na condição de co-ciclo, difere de [27] pois a aproximação da superfície suave não contém pontos singulares e em [5] a aproximação da superfície tem regiões em que não há garantias sobre a suavidade  $C^\infty$ .

A construção do remalhamento semirregular pode ser realizada por diferentes técnicas empregadas com objetivos específicos para a superfície resultante [29], [30]. Dentre elas, as principais técnicas de remalhamento semirregular, são apresentadas e discutidas em [9]. A estrutura comumente empregada no desenvolvimento de remalhamentos semirregulares envolve uma superfície base obtida num processo de simplificação, o particionamento desta superfície e o ajuste geométrico em relação a superfície original. Algumas abordagens neste sentido são apresentadas em [21], [31], [10], [11] e [3].

A geração da superfície base é realizada por simplificação incremental com colapso de arestas em [31] e [10]; com remoção de vértices em [21] e [3]; a simplificação com o particionamento da superfície original por diagrama de Voronoi centroidal é realizado por [11]. A superfície base produzida pela HPDS-MT [2] é construída por simplificação incremental com remoção de vértices e foi comparada à [10] e [3] e apresentou melhores estatísticas na qualidade do modelo base obtido. A parametrização, importante para o ajuste geométrico, é apenas conforme em [21] e [10]; é otimizada em [11] com um funcional baseado em coordenadas do valor médio [32] e é otimizada em [3] com o funcional área/ângulo [15]. O *survey* [9] aponta para [3] com o melhor desempenho no quesito qualidade da triangulação, que envolve qualidade por triângulo e qualidade global da amostragem. Entretanto, é importante observar que a comparação de outros quesitos importantes é realizada paralelamente.

### 1.3

#### Contribuições

O ambiente de desenvolvimento desta tese envolve uma estrutura de multi-triangulação baseada em amostragem hierárquica de pontos por discos de Poisson (HPDS-MT) que constrói a partir de uma superfície  $\mathcal{M}$  linear por partes, triangularizada, sem bordo, compacta e orientável, um grafo orientado acíclico produzido com simplificação incremental e que direciona uma hierarquia de superfícies

$$\mathcal{B} = \mathcal{M}_0 \rightleftarrows \dots \rightleftarrows \mathcal{M}_N = \mathcal{M}$$

que preserva a topologia e produz triângulos de alta qualidade em todos níveis hierárquicos e, juntamente à hierarquia, uma estrutura diferenciável que transforma a estrutura topológica da superfície  $\mathcal{B}$  numa variedade diferenciável suave composta naturalmente por domínios locais de parametrização e por funções de transição suaves entre esses domínios. Neste contexto, são propostos:

- Uma metodologia de parametrização hierárquica da superfície  $\mathcal{M}_k$  sobre a superfície base  $\mathcal{B}$ , para cada nível  $k = 0, \dots, N$ , onde a parametrização dos vértices é graduada, ocorre durante o refinamento e apenas depende dos vértices parametrizados no nível anterior. Os vértices são parametrizados com boa distribuição e permitem particionar a superfície  $\mathcal{M}_k$  em regiões parametrizadas pelas cartas da variedade diferenciável definida pela superfície base.
- Um algoritmo para a otimização hierárquica global realizada nestes domínios de parametrização, onde são atenuadas as distorções dos domínios de parametrização discretos introduzidas pela parametrização de regiões da superfície  $\mathcal{M}_k$ , em cada nível  $k$  desejado. A otimização ao longo da hierarquia é mais flexível pois permite realizar mais iterações de otimização em níveis menos densos. O refinamento dos domínios correspondentes ao avanço na hierarquia ocorre a partir de níveis previamente otimizados influenciando diretamente no tempo de processamento e na qualidade da otimização
- Um remalhamento semirregular cuja estrutura de adjacências corresponde a uma triangulação semirregular construída a partir da superfície base  $\mathcal{B}$  e cujo ajuste geométrico é realizado com uma interpolação realizada pelos domínios de parametrização otimizados hierarquicamente e que incorpora o formato da superfície  $\mathcal{M}$ .

## 1.4

### Organização da tese

O capítulo 2 contém alguns dos principais conceitos teóricos que são envolvidos nos demais capítulos, como as definições de complexos simpliciais e seus elementos; alguns conceitos sobre variedades diferenciáveis e conjuntos de dados colantes; distorções geométricas, medições dessas distorções, conformidade e isometria.

O capítulo 3 contém o detalhamento do problema de otimização hierárquica para superfícies lineares por partes, triangularizadas, orientadas e com bordo. O objetivo principal é apresentar o problema propulsor da otimização hierárquica que foi proposto originalmente em [14] para superfícies com bordo e revisitado por [15] que propôs uma nova abordagem e um funcional mais adequado para a otimização. A simplificação da superfície triangularizada foi modificada neste capítulo para adequar a abordagem do problema exposto à metodologia necessária para o tratamento do problema principal, realizado no capítulo seguinte.

O capítulo 4 contém a definição do problema principal, bem como, os elementos necessários adotados para a sua construção e solução. Neste sentido, são apresentados alguns conceitos sobre a estrutura de multi-triangulação (HPDS-MT), a metodologia de parametrização hierárquica  $\mathcal{M}_k$  em  $\mathcal{B}$ , a construção do conjunto de dados colantes e os processos, não-hierárquico e hierárquico, para a otimização global.

O capítulo 5 explora os elementos necessários para a construção de um remalhamento semirregular composto por triangulação de boa qualidade e que preserva as características originais do modelo original. Além disso, são apresentadas as comparações realizadas com a otimização hierárquica.

## 2

### Conceitos fundamentais

Esta seção agrega os principais elementos conceituais que serão necessários para a compreensão dos assuntos tratados ao longo dos próximos capítulos. Foram colecionadas algumas definições e teoremas consultados em [33] e [34], para descrever os elementos combinatórios, em [12] e [1], para definir o conjunto de dados colantes e estabelecer a estrutura diferenciável associada, e em [18], [15] e [22], para estabelecer uma energia de distorção área/ângulo avaliada nas parametrizações.

#### 2.1

##### Elementos combinatórios

**Definição 2.1** Um **simplexo**  $\sigma^k$  de dimensão  $k$  é o fecho convexo da coleção de  $k+1$  pontos  $\{v_0, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$  tal que os vetores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$  formam um conjunto linearmente independente.

Os simplexos de dimensão 0, 1 e 2 são denominados por *vértices*, *arestas* e *triângulos*. Um simplexo de dimensão  $p$  (ou  $p$ -simplexo) é uma *face* de um  $k$ -simplexo,  $p \leq k$ , quando for gerado por um subconjunto dos vértices do  $k$ -simplexo. Neste caso, o  $p$ -simplexo é uma face *incidente* ao  $k$ -simplexo. A dimensão do  $k$ -simplexo  $\sigma$  é denotada por  $\dim(\sigma) = k$ .

O *bordo* de um simplexo  $\sigma$ , denotado por  $\partial\sigma$ , é a coleção das faces de  $\sigma$ , exceto o próprio  $\sigma$ . Neste caso, o *interior* de  $\sigma$  é denotado por  $\text{int}(\sigma) = \sigma - \partial\sigma$ .

Os simplexos  $\sigma$  e  $\tau$  num conjunto finito de simplexos  $K$  são *independentes* ou *adjacentes*, respectivamente, quando  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  ou  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ . Os simplexos  $\sigma$  e  $\tau$  são *conectados* se existe uma sequência de simplexos  $(\gamma_i)_{i=0}^l$  em  $K$  sendo  $\gamma_0$  face de  $\sigma$  e  $\gamma_l$  face de  $\tau$  e tal que quaisquer dois simplexos consecutivos na sequência sejam adjacentes.

**Definição 2.2** O **complexo simplicial** é um conjunto finito de simplexos  $K$  e de todas as suas faces, de modo que, se dois simplexos  $\sigma, \tau \in K$  são adjacentes então  $\dim(\sigma \cap \tau) < \dim(\sigma)$  e  $\dim(\sigma \cap \tau) < \dim(\tau)$ , caso contrário eles são independentes. A dimensão de  $K$  é o número  $d = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$ .

Em particular, um subconjunto  $K^*$  composto pelos simplexos de  $K$  é um *subcomplexo* de  $K$  e  $\dim(K^*) \leq \dim(K)$ . Um subcomplexo  $K^*$  é uma

*componente conexa* de  $K$  quando todos os seus simplexos são conectados. O conjunto que consiste da união de todos os pontos nos elementos vértices, arestas e triângulos de  $K$  constitui o *espaço subjacente* de  $K$  e denotado por  $|K|$ .

A *junção* de dois simplexos  $\sigma$  e  $\tau$  independentes é um novo simplexo  $\gamma$  gerado pela união dos vértices de  $\sigma$  e  $\tau$ . Essa operação é denotada por  $\sigma \star \tau = \gamma$  e  $\dim(\sigma) + \dim(\tau) < \dim(\mathbb{R}^n)$ .

**Definição 2.3** *Seja  $K$  um complexo simplicial em  $\mathbb{R}^n$ . A **estrela** e o **elo** de um simplexo  $\sigma$  de  $K$  são denotados, respectivamente, por  $Star(\sigma, K)$  e  $Link(\sigma, K)$ :*

- i.  $Star(\sigma, K)$  é a união de todos os simplexos de  $K$  que compartilham a face  $\sigma$ .
- ii.  $Link(\sigma, K)$  é a união de todos os simplexos de  $K$  independentes de  $\sigma$  e que compõem a  $Star(\sigma, K)$ .

**Definição 2.4** *Um complexo simplicial  $K$  de dimensão 2 é denominado por **superfície simplicial** se toda aresta de  $K$  for uma face de um ou dois triângulos de  $K$  e o espaço subjacente ao elo de cada vértice de  $K$  é homeomorfo a um intervalo ou a um círculo  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ .*

As arestas da superfície simplicial  $K$  incidentes à uma única face são as *arestas de bordo* e os vértices incidentes à estas arestas de bordo são os *vértices de bordo*. O subcomplexo de  $K$  que coleciona as arestas de bordo determina o *bordo da superfície simplicial  $K$* , denotado por  $\partial K$ . Os vértices e as arestas que não compõem o bordo de  $K$  são os *vértices de interior* e as *arestas de interior*, o *interior* de  $K$ , denotado por  $int(K)$ , é o conjunto complementar  $K - \partial K$ . A *valência* de um vértice em  $K$  é o número de arestas incidentes ao vértice.

A superfície simplicial  $K$  é orientável quando é possível escolher uma orientação de modo que dois triângulos induzem orientações opostas em sua aresta de interior comum.

Quando  $\dim(K) = 2$  e  $|Star(v, K)|$  é homeomorfo ao disco aberto ou ao semiplano em  $\mathbb{R}^2$ , para todo vértice  $v$  de  $K$ , a superfície simplicial  $K$  é uma *triangulação*. Uma superfície orientável  $\mathcal{M}$ , bidimensional em  $\mathbb{R}^3$ , é dita *triangularizável* se, e somente se, existe uma triangulação  $K$  cujos vértices pertencem a  $\mathcal{M}$  e tal que  $|K|$  é homeomorfo a  $\mathcal{M}$ . Neste caso, a *superfície triangularizada* será denotada pelo par  $\mathcal{M} = (K, X)$  onde  $X \subset \mathbb{R}^3$  armazena as informações geométricas dos vértices e  $K$  contém a estrutura de adjacências.



### Operações topológicas

As operações topológicas elementares em triangulações transformam uma triangulação  $K$  em outra triangulação  $K'$  preservando o tipo topológico. As operações topológicas necessárias para o propósito desta tese são o *split* e o *flip*, ambas são realizadas em arestas como exemplificado na figura 2.1. São permitidas como *operações legais* sob certos aspectos que foram estabelecidos por [35]. A operação *split* é sempre legal pois nunca altera o tipo topológico. Em contra-partida, a operação *flip* que transforma a aresta  $\{l, k\} \in K$  em  $\{i, j\} \in K'$  só é legal se  $\{i, j\} \notin K$ .

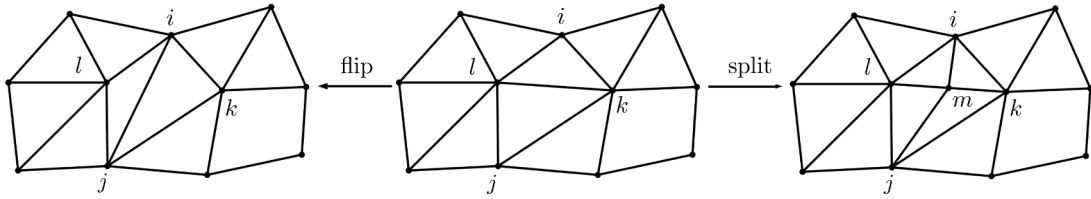


Figura 2.1: Operações topológicas *flip* e *split*.

A operação de remoção de vértices na triangulação  $K$  realiza uma simplificação local com a remoção de um vértice de valência  $\omega$  e introduz um bordo homeomorfo ao círculo  $\mathbb{S}^1$  composto por uma quantidade  $\omega$  de arestas. O preenchimento desta lacuna deverá introduzir  $\omega - 2$  triângulos e resultará em uma nova triangulação  $K'$  composta por menos um vértice, menos dois triângulos e menos três arestas, a figura 2.2 ilustra esse processo local. Os critérios utilizados para escolher o vértice e para preencher com os novos triângulos são fundamentais nas metodologias de simplificação que adotam esta operação.

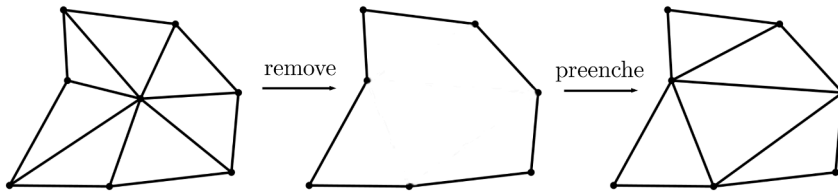


Figura 2.2: Operações topológicas de simplificação.

### Coordenadas baricêntricas

Considerando um triângulo em  $\mathbb{R}^2$  cujos vértices são denotados por  $u_0 = (x_0, y_0)$ ,  $u_1 = (x_1, y_1)$ ,  $u_2 = (x_2, y_2)$  em posição geral, ou seja,  $\overrightarrow{u_0 u_1}, \overrightarrow{u_0 u_2}$

são linearmente independentes e um ponto  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que para  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , nem todos nulos,

$$u = \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \text{ com } \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

A solução do sistema linear nas variáveis  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ , com  $\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1$  são unicamente determinadas pois os vértices do triângulo estão em posição geral e, portanto,

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - x_2 & x_1 - x_2 \\ y_0 - y_2 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1$$

Expandindo essas soluções, os valores  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  são determinados pelas razões entre as áreas  $A_0 = \text{área}([u_0, u_1, u])$ ,  $A_1 = \text{área}([u_1, u_2, u])$  e  $A_2 = \text{área}([u_2, u_0, u])$  pela área total  $A = \text{área}([u_0, u_1, u_2])$  de modo que

$$\lambda_0 = \frac{A_0}{A}, \lambda_1 = \frac{A_1}{A}, \lambda_2 = \frac{A_2}{A}$$

Quando essas razões são todas positivas o ponto  $u$  está no interior do triângulo, quando uma delas é nula então  $u$  está localizado em alguma das arestas e quando duas delas são nulas o ponto coincide com algum vértice. Essas soluções são denominadas por *coordenadas baricêntricas* do ponto  $u$  unicamente determinadas em relação aos vértices do triângulo de que se trata e, do mesmo modo, cada ponto  $u$  determinará unicamente três coordenadas baricêntricas em relação aos vértices do triângulo.

Um triângulo  $t$  em  $K$  com coordenadas geométricas  $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  e congruente ao triângulo  $[u_0, u_1, u_2]$  em  $\mathbb{R}^2$  determinará unicamente e no mesmo plano do triângulo  $t$  o ponto  $v \in \mathbb{R}^3$ , correspondente ao ponto  $u$ , com as mesmas coordenadas baricêntricas como ilustrado na figura 2.3.

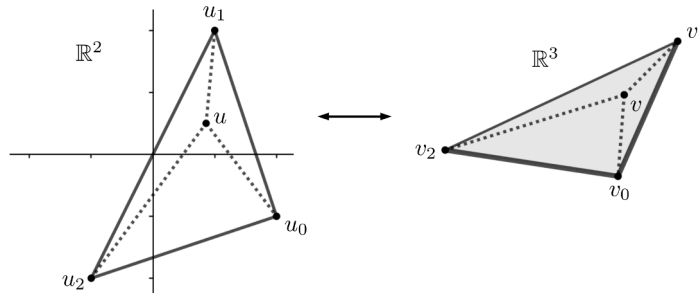


Figura 2.3: Coordenadas baricêntricas

Portanto, dado um ponto  $v$  no mesmo plano do triângulo  $[v_0, v_1, v_2]$  o ponto  $v$  é unicamente determinado com as coordenadas baricêntricas dadas

nas mesmas razões, onde  $A_0 = \text{área}([v_0, v_1, v])$ ,  $A_1 = \text{área}([v_1, v_2, v])$ ,  $A_2 = \text{área}([v_2, v_0, v])$  e  $A = \text{área}([v_0, v_1, v_2])$ .

A seguinte propriedade estabelece um modo para relacionar pontos de um triângulo, no interior ou no bordo, com pontos de outro triângulo, no interior ou no bordo, através das mesmas coordenadas baricêntricas. Considerando os vértices de um triângulo  $u_0, u_1, u_2$  cujos correspondentes em outro triângulo são os vértices  $v_0, v_1, v_2$  e  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  são as coordenadas baricêntricas não-negativas de um ponto  $u$  tais que  $u = \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  então

$$\text{bar}(u) = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v \text{ e } \text{bar}^{-1}(v) = \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = u,$$

onde os pontos  $u, v$  pertencem, respectivamente, ao interior ou ao bordo dos triângulos  $[u_0, u_1, u_2]$  e  $[v_0, v_1, v_2]$ .

## 2.2

### Conjunto de dados colantes

Nesta seção será apresentada uma componente teórica sofisticada e fundamental na abordagem desta tese, a estrutura diferenciável por meio do conjunto de dados colantes. A construção de um modelo diferenciável concreto abrangendo superfícies simpliciais e com funções de transição  $C^\infty$  satisfazendo a propriedade de co-ciclo foi o maior desafio solucionado em [1] e [12]. No artigo [1], Siqueira, M. *et al.* fornecem um conjunto de funções envolvendo coordenadas polares e que são definidas em domínios locais definidos pelo interior de discos abertos no plano, como será visto sobretudo no capítulo 4 e em [12], e são fornecidas ainda todas as provas e justificativas teóricas. Esse conjunto de funções equipa a superfície simplicial com uma estrutura de variedade diferenciável, não é uma superfície diferenciável, mas permite aplicações em superfícies simpliciais que dependam da suavidade determinada pelas funções de transição.

A otimização hierárquica proposta nesta tese resolve, principalmente, o problema de otimizar o funcional não-linear que mede a energia de distorção área\ângulo introduzida nos domínios locais pelas parametrizações de uma superfície triangularizada sem bordo  $(X_k, J_k)$  em cada nível hierárquico  $k$ , onde  $X_k$  coleciona a geometria dos vértices e  $J_k$  coleciona a estrutura de adjacências da triangulação. Neste contexto, os vértices das superfície  $(X_k, J_k)$  são parametrizados sobre o domínio base  $(X_0, J_0)$  e a partir deste domínio é definida a estrutura diferenciável com os domínios locais de parametrização euclidianos fornecidos por [1]. A diferenciabilidade das funções de transição que comunicam tais domínios de parametrização são essenciais, por exemplo, para

otimizar a parametrização de um vértice pertencente a  $(X_k, J_k)$  que ocorra em mais de um domínio. A otimização ocorre localmente em um dos domínios, como será visto mais a diante, mas as restrições impostas à esta otimização devem ser verificadas no domínio de otimização e nos domínios vizinhos que contém a parametrização do vértice. O pacote Algencan [36] utilizado para resolver o problema não-linear de minimização produz uma solução mais robusta quando são definidas as derivadas de primeira e segunda ordem das restrições do problema e isso, por sua vez, envolve uma composição das funções de restrição com as respectivas funções de transição que relacionam o domínio em questão aos domínios vizinhos que contenham a parametrização do vértice, bem como, as derivadas de primeira e segunda ordem da composição.

Inicialmente será definido o conceito de variedades diferenciáveis com as suas componentes clássicas e, em seguida, será definido o conjunto de dados colantes. Essas definições estão originalmente postas em [12].

**Definição 2.5** A função projeção  $pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , é dada por  $pr_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ .

**Definição 2.6** Dado um espaço topológico  $M$ , uma **carta** (ou função coordenada local) é o par  $(U, \psi)$ , onde  $U \subset M$  é um aberto e  $\psi : U \rightarrow \Omega$  é um homeomorfismo sobre o **domínio local**  $\Omega = \psi(U) \subset \mathbb{R}^{n_\psi}$  (para algum  $n_\psi \geq 1$ ). Para qualquer  $p \in M$ , o par  $(U, \psi)$  é uma carta em  $p$  se, e somente se,  $p \in U$ . Se  $(U, \psi)$  é uma carta, então as funções  $x_i = pr_i \circ \psi$  são denominadas por **coordenadas locais** e para todo  $p \in U$ , a tupla  $(x_1(p), \dots, x_n(p))$  é o conjunto de **coordenadas** de  $p$  com respeito a carta. Finalmente, a carta no sentido inverso  $(\Omega, \psi^{-1})$  é denominada por **parametrização local**.

**Definição 2.7** Dadas quaisquer duas cartas  $(U_i, \psi_i)$  e  $(U_j, \psi_j)$  em um espaço topológico  $M$ . Se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  então as **funções de transição**

$$\psi_{ji} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \text{ e } \psi_{ij} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$$

são dadas por

$$\psi_{ji} = \psi_j \circ \psi_i^{-1} \text{ e } \psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$$

.

Vale observar que essas funções relacionam abertos de  $\mathbb{R}^n$  e são inversíveis entre si. A figura 2.4 esquematiza todos esses elementos. A definição seguinte estabelece condições para que o espaço topológico  $M$  seja uma variedade diferenciável.

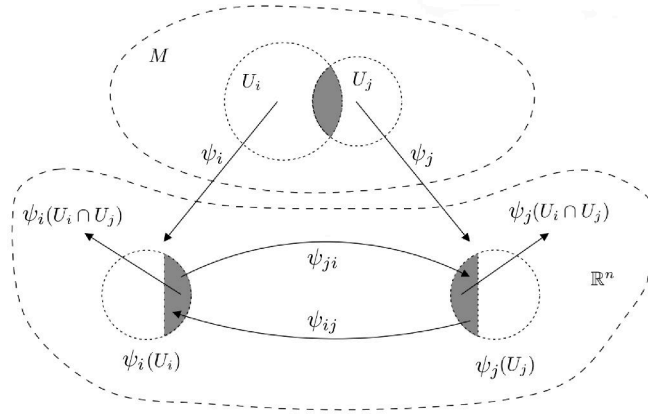


Figura 2.4: Variedades diferenciáveis [1]

**Definição 2.8** Dados um espaço topológico  $M$ , um inteiro  $n \geq 1$  e algum inteiro positivo  $r$  ou  $r = \infty$ , um  **$n$ -atlas**  $\mathcal{A}$  de classe  $C^r$  em  $M$  é uma família de cartas  $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ , onde  $I$  é um conjunto de índices não-vazio, possivelmente não-enumerável e tal que:

- i.  $\psi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ , para todo  $i \in I$ ;
- ii.  $\{U_i\}_{i \in I}$  é uma cobertura aberta para  $M$ , ou seja,

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i;$$

- iii. sempre que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , o mapa de transição  $\psi_{ji}$  ou  $\psi_{ij}$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$  e, em particular, quando  $r = \infty$  o mapa de transição é um difeomorfismo suave.

A existência de uma  $n$ -atlas de classe  $C^r$  é suficiente para que a definição anterior estabeleça  $M$  como uma variedade diferenciável de classe  $C^r$ , mas ainda é necessário garantir que a definição da variedade independa da escolha do atlas. Para lidar com isso, é definida a noção de compatibilidade. Seja  $\mathcal{A}$  um  $n$ -atlas de classe  $C^r$  em  $M$  e  $(U, \psi)$  uma outra carta, então  $(U, \psi)$  é compatível com  $\mathcal{A}$  se, e somente se,  $\psi \circ \psi_i^{-1}$  ou  $\psi_i \circ \psi^{-1}$  são de classe  $C^r$  para toda carta  $(U, \psi_i) \in \mathcal{A}$  e sempre que  $U_i \cap U \neq \emptyset$ . Se essa propriedade de compatibilidade vale entre as cartas dos atlas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  em  $M$ , então os atlas são compatíveis e portanto  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  ainda é um atlas em  $M$ . Neste sentido, um atlas  $\mathcal{A}$  em  $M$  é denominado *atlas maximal* se qualquer outro atlas  $\mathcal{A}'$  de  $M$  compatível com  $\mathcal{A}$  está contido em  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ .

**Definição 2.9** Dados um inteiro  $n \geq 1$  e algum inteiro positivo  $r$  ou  $r = \infty$ , uma **variedade diferenciável** de classe  $C^r$  e dimensão  $n$  consiste no espaço

topológico  $M$  junto com um atlas  $\mathcal{A}$  maximal. Qualquer  $n$ -atlas  $\mathcal{A}'$  em  $M$  compatível com  $\mathcal{A}$  é uma **estrutura diferenciável** de classe  $C^r$  para  $M$  e, em particular, quando  $k = \infty$  a variedade diferenciável é suave (ou dita de classe  $C^\infty$ ).

Além disso, por razões técnicas o espaço topológico  $M$  é Hausdorff e segundo-contável, isso garante que sempre há conjuntos abertos distintos em  $M$  contendo pontos distintos de  $M$  e sempre existe um conjunto enumerável de abertos em  $M$  de modo que cada aberto de  $M$  seja uma união dos abertos desse conjunto enumerável, o que caracteriza  $M$  como uma variedade topológica. Para os propósitos desta tese, os abertos a serem definidos serão tomados em quantidade finita, contendo apenas uma quantidade de abertos igual ao número de vértices da superfície triangularizada  $(X_0, J_0)$  e com dimensão  $n = 2$  (variedades diferenciáveis bidimensionais).

A definição 2.9 estabelece o conceito de variedade diferenciável supondo a priori a sua existência por meio do espaço topológico  $M$ , mas não é praticável realizar a construção por este caminho quando o conjunto  $M$  ainda é desconhecido a priori. Uma definição que considera inicialmente os domínios locais de parametrização relacionados por funções de transição para estabelecer a partir desses elementos a estrutura de variedade diferenciável é mais interessante para o aspecto concreto da construção. Essas construções de variedades diferenciáveis a partir dos domínios de parametrização surgiram pela primeira vez no âmbito de processamento geométrico através do artigo [4], para tratar de problemas envolvendo a construção de superfícies suaves por meio de aproximações realizadas em superfícies triangularizadas em  $\mathbb{R}^3$  como observado por [1]. A definição do conjunto de dados colantes segundo [12] e que será apresentada logo abaixo é mais completa e mais geral que a definição apresentada em [4]. É importante destacar que para a construção de uma superfície suave, objetivo de [1], o espaço topológico é desconhecido a priori, mas para os propósitos desta tese o espaço topológico é subjacente a triangulação da superfície base e o conjunto de dados colantes equipa o espaço topológico com um atlas suave e, portanto, transforma o espaço subjacente da superfície base numa variedade diferenciável suave.

**Definição 2.10** *Dados um inteiro  $n \geq 1$  e algum inteiro positivo  $r$  ou  $r = \infty$ . O conjunto de dados colantes é a tripla*

$$\mathcal{G} = ((\Omega_i)_{i \in I}, (\Omega_{ij})_{(i,j) \in I \times I}, (\psi_{ji})_{(i,j) \in H}),$$

onde  $I$  é um conjunto de índices não-vazio, enumerável (possivelmente infinito),  $H = \{(i, j) \in I \times I : \Omega_{ij} \neq \emptyset\}$  e tal que valham as seguintes propriedades:

- i. Para todo  $i \in I$ , o conjunto aberto  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  é denominado por **domínio de parametrização** e  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ , com  $j \in I$ ;
- ii. Para todo par  $(i, j) \in I \times I$ ,  $\Omega_{ij}$  é um subconjunto aberto de  $\Omega_i$ . Além disso,  $\Omega_{ii} = \Omega_i$  e  $\Omega_{ij} \neq \emptyset$  se, e somente se,  $\Omega_{ji} \neq \emptyset$ . Cada subconjunto não-vazio  $\Omega_{ij}$ , com  $i \neq j$ , é denominado por **conjunto colante**;
- iii. A função  $\psi_{ji} : \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji}$ , uma bijeção de classe  $C^r$ , é denominada por **função de transição** que satisfaz as propriedades:
  - (a)  $\psi_{ii} = \text{id}_{\Omega_i}$ , para todo  $i \in I$ ;
  - (b)  $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$ , para todo  $(i, j) \in H$ ;
  - (c) Para todo  $i, j, k$ , se  $\Omega_{ji} \cap \Omega_{jk} \neq \emptyset$ , então  $\psi_{ij}(\Omega_{ji} \cap \Omega_{jk}) = \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik}$  e  $\psi_{ki}(x) = (\psi_{kj} \circ \psi_{ji})(x)$ , para todo  $x \in \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik}$ .
  - (d) Para todo par  $(i, j) \in K$ , com  $i \neq j$ , para todo  $x \in \partial(\Omega_{ij}) \cap \Omega_i$  e  $y \in \partial(\Omega_{ji}) \cap \Omega_j$ , existem bolas abertas,  $V_x, V_y$ , centrada em  $x$  e  $y$ , tal que nenhum ponto de  $V_y \cap \Omega_{ji}$  é imagem de nenhum ponto de  $V_x \cap \Omega_{ij}$  pela função  $\psi_{ji}$ .

As duas principais diferenças entre a definição proposta em [12] e a definição de [4] estão na propriedade *iii.(d)* que estabelece uma condição necessária e suficiente para que o espaço construído por conjuntos de dados colantes seja Hausdorff e na propriedade *iii.(c)* que estabelece a *condição de co-ciclo*, necessária principalmente na demonstração do teorema que será enunciado em seguida.

**Teorema 2.1** Para todo conjunto de dados colantes,

$$\mathcal{G} = ((\Omega_i)_{i \in I}, (\Omega_{ij})_{(i,j) \in I \times I}, (\psi_{ji})_{(i,j) \in H}),$$

existe uma variedade diferenciável  $M_{\mathcal{G}}$  de classe  $C^\infty$ ,  $n$ -dimensional e cujas funções de transição são dadas por  $\psi_{ji}$ .

**Dem.:** Ver em [12].

A ideia da demonstração consiste em construir um conjunto quociente induzido pela relação de equivalência  $\sim$  na união disjunta  $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$  de modo que, para

todo  $x, y \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists (i, j) \in H \text{ t.q. } x \in \Omega_{ij}, y \in \Omega_{ji}, y = \psi_{ji}(x)$$

A classe de equivalência  $\bar{x}$  contém todos os elementos de  $\Omega_j$  associados com  $x \in \Omega_i$  pela função de transição  $\psi_{ji}$ , para todo  $(i, j) \in H$ . A condição de co-ciclo *iii.(c)* é essencial para verificar a transitividade nesta relação de equivalência, como mostrado em [12]. O conjunto  $M_G$  será definido como o conjunto quociente modulo a relação  $\sim$ ,  $M_G = \{\bar{x} : x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i\}$ . Deste conjunto, se constrói um atlas usando a aplicação quociente  $p : \bigcup_{i \in I} \Omega_i \rightarrow M_G$ , tal que  $p(x) = \bar{x}$ , para definir os homeomorfismos, se verifica que  $M_G$  é segundo-contável pela enumerabilidade das cartas e por fim se mostra que  $M_G$  é Hausdorff.

### 2.3

#### Energia de distorção

Os efeitos das distorções introduzidas pelas parametrizações das superfícies triangularizadas homeomorfas a discos podem ser quantificados por funcionais que buscam medir, em algum sentido, as distorções angulares e de comprimento, ou ainda uma combinação delas, podendo envolver a distorção de área. É importante enfatizar que a preservação de comprimento, ângulo e área não ocorre de modo independente umas das outras, como observado por [22], portanto um balanceamento entre essas quantidades pode ser necessário. Além disso, destaca que o controle da distorção apenas por um funcional que quantifique isoladamente a energia de distorção da área pode não ser apropriado para triângulos parametrizados sob efeitos de cisalhamento, onde ocorre distorção de ângulo e comprimento, mas não ocorre variação de área. Por outro lado, a quantificação independente do comprimento pode omitir informações sobre a distorção angular e da área. E ainda, a preservação do ângulo isoladamente não garante nada sobre comprimentos e áreas. Finaliza a argumentação observando que

Preservação de comprimento = Preservação de ângulo + Preservação de área,

onde a "soma" indica que as componentes devem ser concomitantes, mas agindo com independência. Neste sentido, o funcional proposto em [15] busca combinar essas informações introduzindo o funcional  $E_{combinada}$  que complementa o funcional  $E_{MIPS}$  proposto em [18].

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular homeomorfa a um disco e a aplicação  $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  com domínio  $\Omega$ .



**Definição 2.12** Seja  $\{\phi'(e_1), \phi'(e_2)\}$  uma base para o plano tangente a  $S$  em  $\phi(\omega)$ , considerando  $\omega \in \Omega$  e  $\{e_1, e_2\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . A **primeira forma fundamental** de  $\phi$  é representada pela matriz

$$I_\phi(\omega) = (\nabla\phi)^t \cdot (\nabla\phi)$$

**Definição 2.13** Se a parametrização  $\phi$  é suave e para todo  $\omega \in \Omega$

$$I_\phi(\omega) = \lambda(\omega) \cdot \text{Id},$$

onde  $\text{Id}$  denota a matriz identidade  $2 \times 2$ , então  $\phi$  é **conforme**.

**Definição 2.14** Se a parametrização  $\phi$  é suave e para todo  $\omega \in \Omega$

$$I_\phi(\omega) = \text{Id},$$

onde  $\text{Id}$  denota a matriz identidade  $2 \times 2$ , então  $\phi$  é uma **isometria**.

Uma propriedade importante das parametrizações conformes é a preservação de ângulos, de modo que para cada  $\omega \in \Omega$  as curvas dadas por pares de retas restritas a  $\Omega$ , ortogonais em  $\omega$  e paralelas aos vetores  $e_1, e_2$  são identificadas em  $S$  pela parametrização  $\phi$  com pares de curvas ortogonais no ponto  $\phi(\omega)$ , tais curvas são denominadas por isolinhas. A isometria é uma propriedade mais forte e assegura que além da preservação dos ângulos ocorre a preservação dos comprimentos e portanto das áreas, mas apenas superfícies desenvolvíveis admitem parametrizações totalmente isométricas [37]. Deste modo, o funcional proposto por [15] explora os análogos discretos para essas propriedades no caso de superfícies triangularizadas, nas próximas linhas desta seção serão sintetizadas as principais ideias apresentadas por [22] sobre a construção do funcional.

Considerando uma região limitada  $T \subset \Omega$  e  $\phi(T) \subset S$  então é razoável esperar que  $\phi$  preserve a área quando, e somente quando a

$$\text{área}(T) = \text{área}(\phi(T))$$

para toda região  $T$  escolhida. Mais especificamente, a área de uma região  $T$  é estabelecida em [37] como

$$\text{área}(\phi(T)) := \int_T |\phi_u \times \phi_v| du dv = \int_T \sqrt{\det I_\phi(\omega)} d\omega,$$

onde  $\omega = (u, v) \in \Omega$ . Neste sentido, uma parametrização suave  $\phi$  preserva a área se, e somente se

$$\det I_\phi(\omega) = 1,$$

para todo  $\omega \in \Omega$ .

Sejam  $\mathcal{M} = (K, X)$  e  $\mathcal{P} = (K, Y)$  duas superfícies triangularizadas lineares por partes, onde  $\mathcal{M}$  é homeomorfa a um disco,  $K$  armazena as relações de adjacências,  $X \subset \mathbb{R}^3$  e  $Y \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  é uma parametrização. A área de um triângulo  $\phi(t) \in \mathcal{M}$  neste contexto é estabelecida por

$$\text{área}(\phi(t)) := \int_t \sqrt{\det I_\phi(\omega)} d\omega = \sqrt{\det I_{\phi|_t}} \cdot \text{área}(t),$$

para todo  $t \in \mathcal{P}$ . Neste contexto,  $\phi$  preserva a área se, e somente se

$$\sqrt{\det I_{\phi|_t}} = \frac{\text{área}(\phi(t))}{\text{área}(t)} = 1,$$

para todo  $t \in \mathcal{P}$ .

A definição do funcional  $E_{\text{área}}$  que mede a energia de deformação da área numa parametrização  $\phi$  é estabelecida a partir de uma função de deformação da área  $e_{\text{área}} : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$E_{\text{área}}(\phi) := \int_S e_{\text{área}}(x) dx,$$

onde  $e_{\text{área}}(x) = f(\sqrt{\det I_\phi(\psi(x))})$ , para  $\psi := \phi^{-1}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo escolhida de modo a garantir que  $\det I_\phi = 1$ . Na parametrização da superfície linear por partes  $\mathcal{M}$  o cálculo de  $E_{\text{área}}(\phi)$  é realizado por

$$E_{\text{área}}(\phi) := \sum_{t \in \mathcal{P}} f(\sqrt{\det I_{\phi|_t}}) \cdot \text{área}(\phi(t))$$

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  foi escolhida como  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  pois no intervalo de interesse  $[0, +\infty]$  ela é convexa, positiva, com mínimo em  $x = 1$  e para valores de  $x \rightarrow 0$  ou  $x \rightarrow \infty$  a função  $f \rightarrow \infty$ . A figura 2.5 exibe o gráfico no intervalo de interesse.

O funcional  $E_{MIPS}$  apresentado em [18] se propõem a medir uma energia de distorção da isometria, como sugere o próprio nome "*Mustly Isometric Parametrizations*", na parametrização de superfícies triangularizadas, mas foi observado por [15] que o funcional  $E_{MIPS}$  tem valor mínimo em parametrizações apenas conformes e portanto um procedimento de otimização com este funcional apenas trata das distorções angulares.

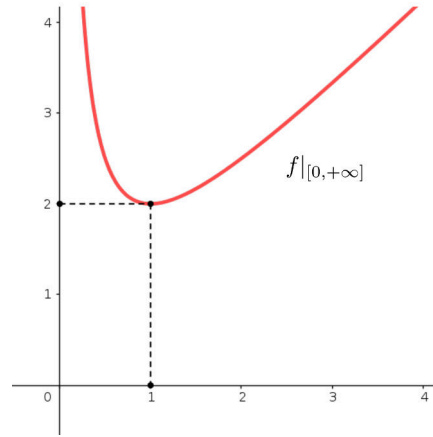


Figura 2.5: Função objetivo

A parametrização linear por partes  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  associa um triângulo  $t \subset \mathcal{P}$  com um triângulo  $\phi(t) \subset \mathcal{M}$  por meio de uma aplicação afim. A restrição de  $\phi$  no triângulo  $t$  é escrita como uma função afim  $\phi|_t(\omega) = A\omega + b$ , para cada  $\omega \subset t \subset \mathcal{P} \subset \Omega$  como observado por [14]. Neste sentido, [18] buscou um funcional  $E$  no conjunto dos funcionais que medem a distorção introduzida pela parametrização do triângulo dada por funções do tipo  $g(x) = Ax + b$ . O triângulo  $\phi(t)$  é representado no  $\mathbb{R}^3$  e deste modo  $A \in \mathbb{R}(3, 2)$ , mas num sistema de coordenadas apropriados o terceiro eixo estará ortogonal ao triângulo  $\phi(t)$  e isso permite que a matriz  $A \in \mathbb{R}(2, 2)$ .

As propriedades requeridas para o funcional  $E$  procurado são: (1) invariância por translações, (2) invariância por transformações ortogonais, especialmente rotações, e (3) invariância por semelhanças. Deste modo, decorre de (1) que  $E$  depende somente de  $A$ . Esta matriz  $A$  é decomposta por valores singulares [38] na forma  $A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} V^t$ , onde  $U, V$  são matrizes ortogonais e  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ , portanto decorre de (2) que  $E$  só depende dos valores singulares  $\sigma_1, \sigma_2$ . Além disso, por (3) é necessário que  $E$  esteja em função da razão  $\sigma_1/\sigma_2$  e [18] ainda destaca a relação da energia, que é dada em função da razão, com o número de condicionamento da matriz  $k_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1/\sigma_2$ . É importante destacar que como  $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$  então  $\sigma_1/\sigma_2 \geq 1$ , o que significa que  $E$  atingirá o menor valor quando  $\sigma_1 = \sigma_2$ . O número de condicionamento da matriz  $A$  foi interpretado por [18] pela norma de *Frobenius* [38], como segue,

por conta do custo computacional.

$$\begin{aligned} k_F(A) &= \|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} \\ &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \\ &= k_2(A) + \frac{1}{k_2(A)} \end{aligned}$$

O funcional proposto em [18] que mede a energia de distorção na parametrização de um triângulo obtido em função dos valores singulares e satisfazendo as propriedades será da forma

$$E(g) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

e a soma dessas energias verificadas em todos os triângulos fornecerá  $E_{MIPS}$ .

Pelo número de condicionamento  $k_F(A) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2}$  é possível deduzir uma bela fórmula, logo abaixo, para o funcional  $E$  envolvendo apenas os ângulos internos e os lados dos triângulos  $t$  e  $\phi(t)$ , respectivamente, como demonstrado por [14]. Bastando observar que  $A^t A$  é simétrica,  $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$  são os seus autovalores e os seus autovetores associados compõem as colunas da matriz  $V$ , portanto o numerador é o traço( $A^t A$ ). Além disso,  $\det(A) = \sigma_1 \sigma_2$ . Para realizar os cálculos é necessário criar um triângulo canônico  $t_{can}$  composto pelos lados  $e_1, e_2$  e aplicações  $\pi_1 : t_{can} \rightarrow t$ ,  $\pi_2 : t_{can} \rightarrow \phi(t)$  e por fim  $\phi|_t = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ , onde os ângulos e os lados estão indicados na figura 2.6

$$E(\phi|_t) = \frac{\cot \alpha |a| + \cot \beta |b| + \cot \gamma |c|}{2\text{área}(t)}$$

A fórmula permite calcular a energia de distorção da parametrização restrita ao triângulo  $t$  e a energia total é dada pela soma  $E_{MIPS} = \sum_{t \in \mathcal{P}} E(\phi|_t)$ .

Esse funcional é apenas conforme, como observado por [22], pois  $\lambda_1(\omega) = \sigma_1^2(\omega)$  e  $\lambda_2(\omega) = \sigma_2^2(\omega)$  são os autovalores de  $I_\phi(\omega)$ . Como o valor mínimo atingido pelo funcional  $E(\phi)$  ocorre com  $\sigma_1 = \sigma_2$  então  $\lambda_1 = \lambda_2$  caracterizando a conformidade do funcional. Com a mesma estratégia usada para a determinação de  $E_{\text{área}}$ , defini-se

$$E_{\text{ângulo}}(\phi) := \int_S e_{\text{ângulo}}(x) dx,$$

onde  $e_{\text{ângulo}} : S \rightarrow \mathbb{R}$  é a função de deformação tomada como

$$e_{\text{ângulo}}(x) = f\left(\frac{\sigma_1(\psi(x))}{\sigma_2(\psi(x))}\right) = \frac{\sigma_1(\psi(x))}{\sigma_2(\psi(x))} + \frac{\sigma_2(\psi(x))}{\sigma_1(\psi(x))},$$

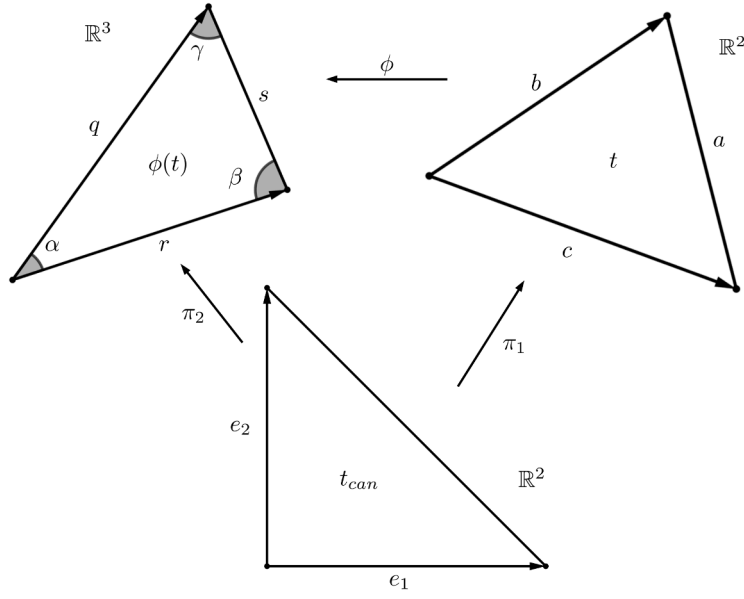


Figura 2.6: Esquema da parametrização restrita ao triângulo

onde  $\psi := \phi^{-1}$  e a função  $f$  escolhida anteriormente garante que o valor mínimo ocorra em 1.

Na parametrização linear por partes

$$E_{\text{ângulo}}(\phi) = \sum_{t \subset \mathcal{P}} e_{\text{ângulo}} \cdot \text{área}(\phi(t)),$$

onde  $e_{\text{ângulo}} = \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)} + \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}$ . Como observado por [22],  $E_{\text{ângulo}}$  difere de  $E_{MIPS}$  pois surgiu um fator de ponderação para cada  $t \subset \mathcal{P}$  dados pelas áreas de  $\phi(t)$ .

Com as componentes  $e_{\text{área}}$  e  $e_{\text{ângulo}}$  a função de deformação do comprimento é definida como o produto

$$e_{\text{comp}}(x) = e_{\text{área}}(x) \cdot e_{\text{ângulo}}(x)$$

e essa função tem mínimo em  $x = 1$ , pois  $f$  é positiva e atinge o mínimo com

$$\frac{\sigma_1(\psi(x))}{\sigma_2(\psi(x))} = 1 \text{ e } \sqrt{\det I_\phi(\psi(x))} = \sigma_1(\psi(x))\sigma_2(\psi(x)) = 1$$

Portanto,  $e_{\text{comp}}$  é mínima quando  $\lambda_1/\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  o que implica em  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . No ponto mínimo de  $e_{\text{comp}}(x)$  tem-se  $I_\phi(\psi(x)) = \text{Id}$ , que seria o caso ideal de isometria na parametrização.

A energia combinada apenas toma um expoente  $\mu \geq 0$  no funcional da

área permitindo maior ou menor influência

$$E_{combinada}(\phi) = \sum_{t \in \mathcal{P}} e_{\hat{angulo}}(t) \cdot e_{\hat{area}}(t)^\mu \cdot \text{área}(\phi(t)), \quad \mu \geq 0$$

onde

$$e_{\hat{area}}(t) = f(\sqrt{\det I_{\phi|t}}) = \frac{\text{área}(\phi(t))}{\text{área}(t)} + \frac{\text{área}(t)}{\text{área}(\phi(t))}$$

e

$$e_{\hat{angulo}}(t) = \frac{\cot \alpha |a| + \cot \beta |b| + \cot \gamma |c|}{2\text{área}(t)},$$

tal como foi obtido pelo *MIPS*. Esse funcional tem boas propriedades, como demonstrado por [22]. É invariante por rotação e translação, é diferenciável para os processos de otimização e não permite problemas de orientação durante o processo de otimização.

### 3

## Otimização hierárquica em superfícies com bordo

Neste capítulo será apresentada uma estrutura de multi-resolução construída com a parametrização hierárquica de superfícies triangularizadas com a topologia de um disco e realizada com uma triangulação de Delaunay restrita. Além disso, será apresentado o processo de otimização utilizado para reduzir as distorções introduzidas pela parametrização. O objetivo desse capítulo é preparar o leitor com alguns aspectos metodológicos importantes utilizados no tratamento do problema principal.

### 3.1

#### Descrição do problema

Considerando uma superfície triangularizada  $\mathcal{S} = (G, V)$  homeomorfa a um disco composta pelo complexo simplicial  $G$  e pelo conjunto  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^3$ , bem como, uma triangulação  $\mathcal{P} = (G, U)$  definida com as mesmas conectividades de  $G$  e pelo conjunto  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^2$ . A aplicação bijetiva  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $\phi(u_i) = v_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , é uma parametrização da triangulação  $\mathcal{S}$  quando  $\phi^{-1}$  associa triângulos de  $\mathcal{S}$  com triângulos não degenerados de  $\mathcal{P}$  mantendo a mesma orientação.

A estrutura de multi-resolução tratada neste capítulo consiste na hierarquia das superfícies triangularizadas com bordo único e representadas por  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ , de forma que para cada  $k \in \{1, \dots, N\}$  a relação entre as superfícies subsequentes  $\mathcal{S}_k \hookrightarrow \mathcal{S}_{k-1}$  seja estabelecida por modificações locais nos vértices de interior dos respectivos domínios paramétricos  $\mathcal{P}_k$  e  $\mathcal{P}_{k-1}$  de modo que

$$\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_{k-1} = \text{Star}(u_k, \mathcal{P}_k) \text{ e } \mathcal{P}_{k-1} - \mathcal{P}_k = \text{int}(\mathcal{T}_k),$$

com  $\mathcal{T}_k$  uma triangulação formada por um subcomplexo de  $\mathcal{P}_{k-1}$  que preenche a lacuna deixada pela remoção de  $u_k$  e tal que  $\partial\mathcal{T}_k = \text{Link}(u_k, \mathcal{P}_k)$ .

É desejável que a parametrização  $\phi$  preserve as propriedades geométricas ângulo e área. Entretanto, a manutenção dessas propriedades só é possível em superfícies desenvolvíveis [37], no caso das superfícies triangularizadas significa ter a soma dos ângulos incidentes em cada vértice interior totalizando até  $2\pi$ .

Em geral, as superfícies não são desenvolvíveis e, deste modo, as distorções de ângulo e área são introduzidas naturalmente pela parametrização produzindo um conflito de escolhas que precisa ser equilibrado na tentativa de reduzir as distorções. Neste sentido, a parametrização hierárquica viabilizada pela multi-resolução permite que o tratamento dos efeitos da distorção seja realizado com mais eficiência em diversos níveis de resolução.

## 3.2

### Construção da hierarquia

A parametrização hierárquica apresentada em [13] para superfícies com a topologia de um disco ocorre em duas etapas. Na primeira etapa são realizadas as simplificações na superfície  $\mathcal{S}$  que consistem nas remoções de vértices por meio das operações topológicas para colapso de semi-arestas onde é criada uma sequência de superfícies  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N = \mathcal{S}$  de modo que a diferença entre duas superfícies subsequentes esteja localizada apenas na vizinhança do vértice removido. Na etapa seguinte, é realizada a parametrização  $\phi_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{S}_0$  e, com isso, as demais parametrizações  $\phi_k$  que associam a triangulação  $\mathcal{P}_k$  com a superfície  $\mathcal{S}_k$  ficam bem determinadas pela operação topológica para divisão de vértices realizada em  $\mathcal{P}_{k-1}$ , para  $k \in \{1, \dots, N\}$ , que desfaz o colapso de semi-arestas e reinsere o vértice removido, bem como, reconstrói a sua vizinhança removida.

A modificação nas etapas propostas por [13] adéqua os mecanismos deste modelo hierárquico, dedicado à superfícies com bordo, aos mecanismos do modelo hierárquico mais geral, para superfícies sem bordo, que será apresentado no próximo capítulo. Neste sentido, a primeira etapa consiste na parametrização de  $\mathcal{S}$  por meio de uma correspondência biunívoca  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  e a segunda etapa consiste na simplificação da triangulação  $\mathcal{P}$  por meio de modificações locais realizadas pela operação topológica para remoção de vértices. Esta remoção é seguida pela re-triangularização da lacuna formada após a remoção do vértice e, por conseguinte, do interior de sua estrela. Esta simplificação ocorre consequentemente na superfície  $\mathcal{S}$  e nesta segunda etapa é registrado o histórico das modificações locais que foram realizadas pela simplificação tornando possível a reconstrução das superfícies subsequentes.

### 3.2.1

#### Parametrização por combinação convexa

A construção da parametrização  $\phi$  pelo mapa de combinação convexa foi originalmente apresentado por [39], inspirado em [40]. Nesta construção os vértices de bordo da superfície  $\mathcal{S}$  são mapeados biunivocamente nos vértices



de um polígono convexo planar e este polígono será o bordo da triangulação  $\mathcal{P}$  associada com  $\mathcal{S}$  pela parametrização  $\phi$ . Cada vértice  $v_i$  do interior de  $\mathcal{S}$  é associado com um vértice  $u_i$  do interior de  $\mathcal{P}$  por meio de uma combinação convexa de  $u_i$  com os demais vértices, de modo que  $m$  seja o número de vértices do interior,  $n$  seja o número total dos vértices e  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  as coordenadas  $\lambda_{ij}$  da combinação convexa são escolhidas como números reais tais que  $\lambda_{ij} > 0$ , se  $(i, j)$  é uma aresta de  $G$ , ou  $\lambda_{ij} = 0$ , se  $(i, j)$  não é uma aresta de  $G$ , e  $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 1$ . Com estas coordenadas é possível escrever cada vértice do interior de  $\mathcal{P}$  como combinação convexa dos demais vértices fazendo

$$u_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} u_j$$

e esta equação pode ser reescrita como

$$u_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} u_j + \sum_{j=m+1}^n \lambda_{ij} u_j$$

que permite explicitar o sistema linear  $Ax = b$  com

$$A = I_m - \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \lambda_{1(m+1)} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m(m+1)} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{m+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

onde  $A$  é uma matriz esparsa e não singular [39].

As coordenadas da combinação convexa foram escolhidas como coordenadas do valor médio de acordo com [32] e assim,

$$\lambda_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_{ij}}, \quad w_{ij} = \frac{\tan(\gamma_{ij}/2) - \tan(\delta_{ij}/2)}{\|v_i - v_j\|},$$

para cada aresta  $(i, j)$  de  $G$  onde  $\gamma_{ij}$  e  $\delta_{ij}$  são os ângulos internos aos triângulos de  $\mathcal{S}$  que compartilham a aresta  $(i, j)$  e que possuem o vértice  $v_i$  como ilustrado pela figura 3.1.

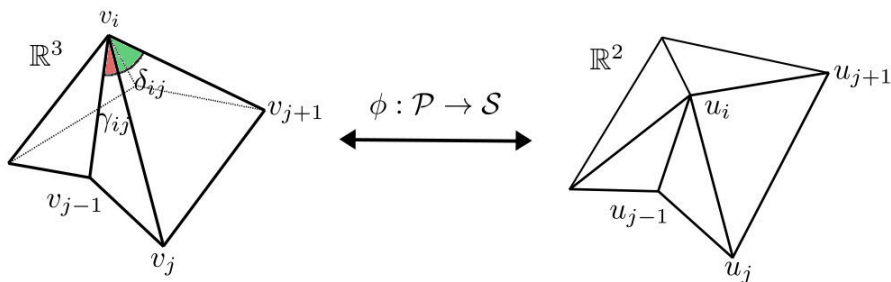


Figura 3.1: Parametrização do vértice  $v_i$  com coordenadas do valor médio

Essas coordenadas variam suavemente em relação aos vértices e garantem que o mapa de parametrização  $\phi$  seja bijetivo e preserve a orientação, como mostrado por [32]. A figura 3.2 exibe o resultado deste modelo de parametrização com as coordenadas do valor médio.

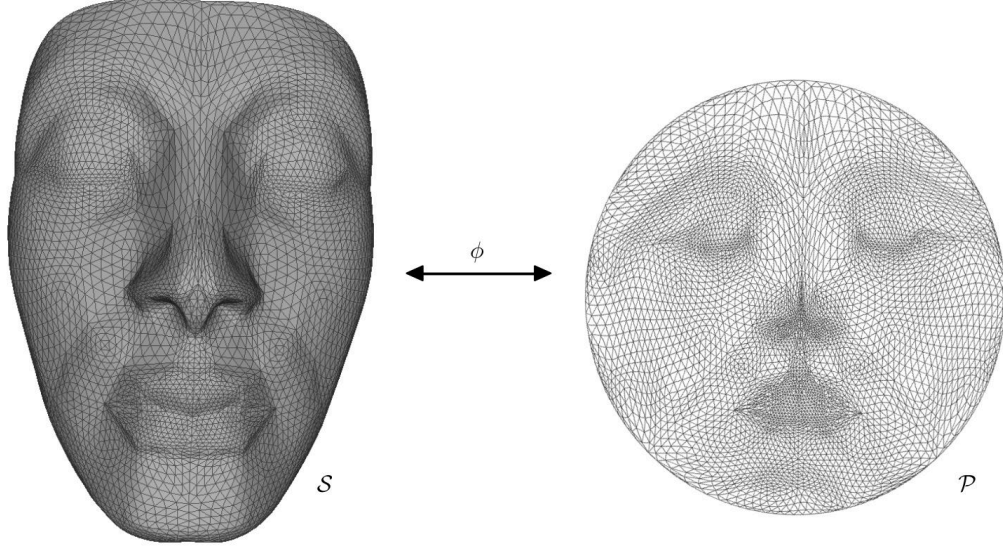


Figura 3.2: Parametrização  $\phi$  da superfície  $S$  no domínio  $P$

### 3.2.2

#### Parametrização por coordenadas polares

A construção da parametrização denominada neste capítulo como parametrização por coordenadas polares será apresentada detalhadamente no capítulo seguinte, pois é parte da construção proposta em [1]. Neste capítulo o interesse principal é apresentar a otimização hierárquica, na perspectiva de [15] para superfícies com bordo, portanto o uso dessa parametrização será apenas para extrair regiões homeomorfas a um disco e contidas em superfícies triangularizadas sem bordo.

Sejam  $\mathcal{M} = (J, X)$  uma superfície triangularizada composta pelo complexo simplicial  $J$  e por um conjunto finito  $X \subset \mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B} = (K, Y)$  uma superfície composta pelo complexo simplicial  $K$  e pelo conjunto  $Y \subset X$ , obtida de  $\mathcal{M}$  após um processo de simplificação de modo que  $|J|$  e  $|K|$  sejam topologicamente equivalentes. Seja  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$  uma aplicação que projeta todos os vértices pertencentes a  $X$  sobre  $\mathcal{B}$ , em particular, os vértices de  $X \cap Y$  são projetados por identidade. Considere  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  uma região triangularizada de  $\mathcal{M}$  cujos vértices estão inteiramente projetados por  $\rho$  em alguma estrela de  $\mathcal{B}$  centrada no vértice  $b$  e tal que  $\rho^{-1}(b) \in \mathcal{S}$ .

O objetivo é estabelecer a parametrização  $\phi : \Omega_b \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  e para isso é necessário estabelecer precisamente quais vértices de  $\mathcal{M}$  pertencem a região  $\mathcal{S}$ . Seguindo como em [1], considere um polígono regular triangularizado  $P_b$ , centrado na origem do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$  e isomorfo a  $Star(b, \mathcal{B})$  tal que o vértice  $b$  e os demais vértices de  $Star(b, \mathcal{B})$  correspondam, respectivamente, ao centro de  $P_b$  e aos vértices posicionados nas coordenadas

$$\left( \cos\left(\frac{2\pi i}{\omega_b}\right), \sin\left(\frac{2\pi i}{\omega_b}\right) \right) \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $i \in \{0, \dots, \omega_b - 1\}$  e  $\omega_b$  é a valência de  $b$ . Por este isomorfismo, a triangulação do polígono  $P_b$  fica estabelecida e a partir dele é possível definir um conjunto aberto  $\Omega_b$  sendo o interior do círculo centrado na origem  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$  e cujo raio é o tamanho do apótema de  $P_b$ , ou seja,

$$\Omega_b = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \cos^2\left(\frac{\pi}{\omega_b}\right) \right\}.$$

Para completar a construção, é necessário estabelecer uma correspondência  $\sigma$  entre os vértices projetados sobre  $Star(b, \mathcal{B})$  com o conjunto  $\Omega_b$ , ilustrado pela figura 3.3. Para criar essa correspondência, tome  $T = [(0,0), (1,0), (1/2, \sqrt{3}/2)]$  um triângulo equilátero em um espaço euclidiano,  $T$  será apenas um referencial usado para estabelecer a parametrização. Seja  $v \in \mathcal{M}$  um vértice projetado em algum triângulo de  $Star(b, \mathcal{B})$  de modo que  $b$  se identifique com  $(0,0)$  e sejam os demais vértices deste triângulo considerado em  $Star(b, \mathcal{B})$  contiguamente identificados com os vértices de  $T$  no sentido anti-horário.

Considere uma aplicação  $f$  entre o setor circular centrado em  $(0,0)$ , com o raio  $\cos(\pi/6)$  e restrito a  $T$  e o setor circular em  $\Omega_b$  centrado em  $(0,0)$ , com o raio  $\cos(\pi/\omega_b)$  e restrito ao triângulo  $[(0,0), (1,0), (\cos(2\pi/\omega_b), \sin(2\pi/\omega_b))] \subset P_b$ . Para simplificar os termos, as coordenadas cartesianas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  são convertidas para o sistema de coordenadas polares por

$$\Pi(x, y) = (\theta, r) \in (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+,$$

tal que  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Neste novo sistema de coordenadas a aplicação  $f$  é definida como

$$f : [0, \pi/3] \times (0, \cos(\pi/6)) \rightarrow [0, 2\pi/\omega_b] \times (0, \cos(\pi/\omega_b))$$

$$f(\theta, r) = \left( \frac{6}{\omega_b} \theta, \frac{\cos(\pi/\omega_b)}{\cos(\pi/6)} r \right)$$

que é um difeomorfismo entre os setores circulares considerados.

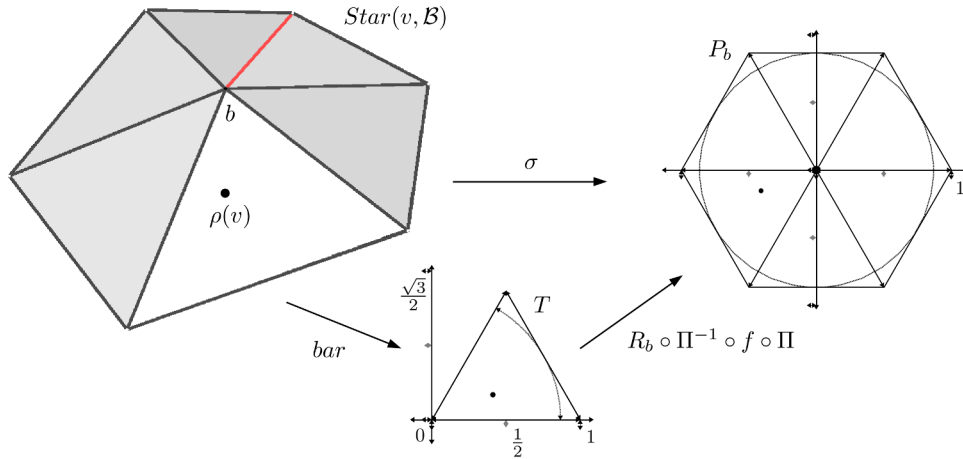


Figura 3.3: Correspondência  $\sigma$  entre  $Star(b, \mathcal{B})$  e  $\Omega_b$

Para que a correspondência  $\sigma$  fique completamente estabelecida é necessário escolher uma aresta de  $Star(b, \mathcal{B})$  para corresponder à aresta  $\overline{(0,0)(1,0)}$  em  $P_b$ . A figura 3.3, exemplifica esta correspondência em que a aresta de  $Star(b, \mathcal{B})$ , destacada em vermelho, foi escolhida. O vértice projetado  $\rho(v)$ , na figura, está no quarto triângulo visto em sentido anti-horário partindo do triângulo incidente à aresta destacada. Deste modo, o vértice será mapeado em  $T$  por coordenadas baricêntricas, em seguida, convertido para o sistema polar, identificado em  $P_b$  pela aplicação  $f$  e convertido para o sistema cartesiano. Sua posição final em  $P_b$  será definida pela composição de  $f$  com uma rotação que o posicione no triângulo de  $P_b$  correspondente, a menos de mudanças de coordenadas.

Seja  $R_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$R_b(x, y) = \left( x \cos\left(\frac{2\pi i}{\omega_b}\right) - y \sin\left(\frac{2\pi i}{\omega_b}\right), x \sin\left(\frac{2\pi i}{\omega_b}\right) + y \cos\left(\frac{2\pi i}{\omega_b}\right) \right)$$

a rotação em torno da origem  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$ , para a qual cada  $i \in \{0, \dots, \overline{\omega_b} - 1\}$  e  $\overline{\omega_b}$  é o número de arestas entre a aresta selecionada e a aresta incidente ao triângulo que contém o vértice  $\rho(v)$ , em sentido anti-horário. Para considerar a rotação inversa basta tomar  $i$  com sinal negativo.

A caracterização de  $\sigma$  está completa e a superfície  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  será a região composta pelos vértices  $v \in \mathcal{M}$  projetados sobre  $Star(b, \mathcal{B})$  e tais que quando mapeados em  $T$  com coordenadas  $(x, y)$  cumprem  $\sqrt{x^2 + y^2} < \cos(\pi/6)$ . Mais especificamente, um triângulo  $[v_0, v_1, v_2]$  de  $\mathcal{M}$  será triângulo de  $\mathcal{S}$  se, e somente se, os seus vértices  $v_s$  satisfazerem a propriedade  $\|bar(\rho(v_s))\| < \cos(\pi/6)$ ,  $s = 0, 1, 2$ . A aplicação  $bar$  associa biunivocamente as coordenadas de  $\rho(v)$  com as coordenadas correspondentes em  $T$ .

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : \mathcal{S} &\rightarrow \Omega_b \\ v &\mapsto (\sigma_b \circ \rho)(v)\end{aligned}$$

em que  $\sigma_b = R_b \circ \Pi^{-1} \circ f \circ \Pi \circ \text{bar}$ .

A parametrização por coordenadas polares é definida como a aplicação  $\phi : \mathcal{P} \subset \Omega_b \rightarrow \mathcal{S}$ , onde  $\mathcal{P}$  é a triangulação planar biunivocamente associada com  $\mathcal{S}$  (destacada na figura 3.4).

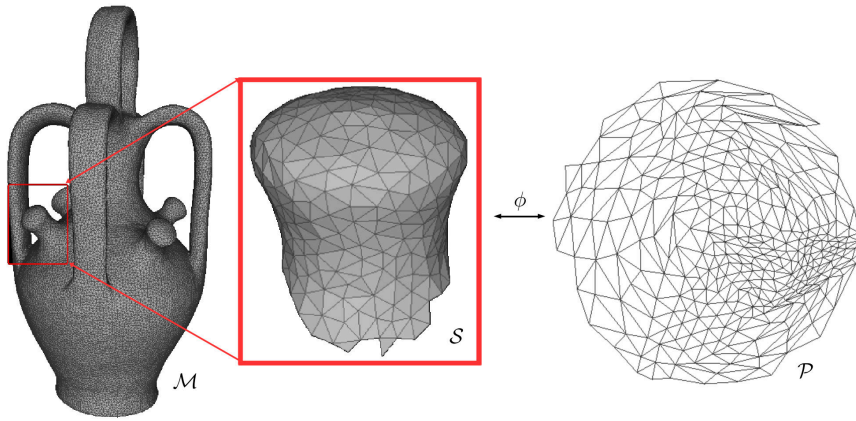


Figura 3.4: Parametrização  $\phi$  da superfície  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  no domínio  $\mathcal{P}$

### 3.2.3 Simplificação

Após a etapa de parametrização o conjunto das arestas da superfície  $\mathcal{S}$  é agrupado em uma fila de prioridades organizada de acordo com o comprimento de cada aresta. Este critério permite a escolha da aresta com o menor tamanho e, nesta aresta, é realizada a eliminação do vértice interior de  $\mathcal{S}$  que é o centro da estrela com a menor média dos comprimentos das suas arestas. A eliminação de cada vértice  $v_k$  em  $\mathcal{S}_k$  também ocorrerá por correspondência em  $\mathcal{P}_k$ , para  $k \in \{1, \dots, N\}$ , e destruirá a estrela centrada no vértice criando, assim, uma lacuna limitada pela curva poligonal que é o *link* dessa estrela removida.

O preenchimento da lacuna deixada em  $\mathcal{P}_k$  limitada pelo  $\text{Link}(u_k, \mathcal{P}_k)$  é realizado com uma triangulação de Delaunay restrita  $\mathcal{T}_k$  e produz a triangulação  $\mathcal{P}_{k-1}$ , esse procedimento também foi adotado na simplificação incremental realizada por [21]. Para a re-triangularização foi utilizado o algoritmo proposto em [41] por ser robusto para a restrição dada por polígonos convexos ou não-convexos e eficiente com  $\mathcal{O}(d \log(d))$ , sendo  $d$  a valência do vértice removido. Consequentemente, uma nova triangulação será refeita

em  $\mathcal{S}_{k-1}$ , como ilustrado na figura 3.5, e o procedimento das eliminações é repetido até que a simplificação atinja um limite desejado. Para cada remoção de vértices com valência  $d$  são removidos  $d$  triângulos e são criados  $d - 2$  novos triângulos.

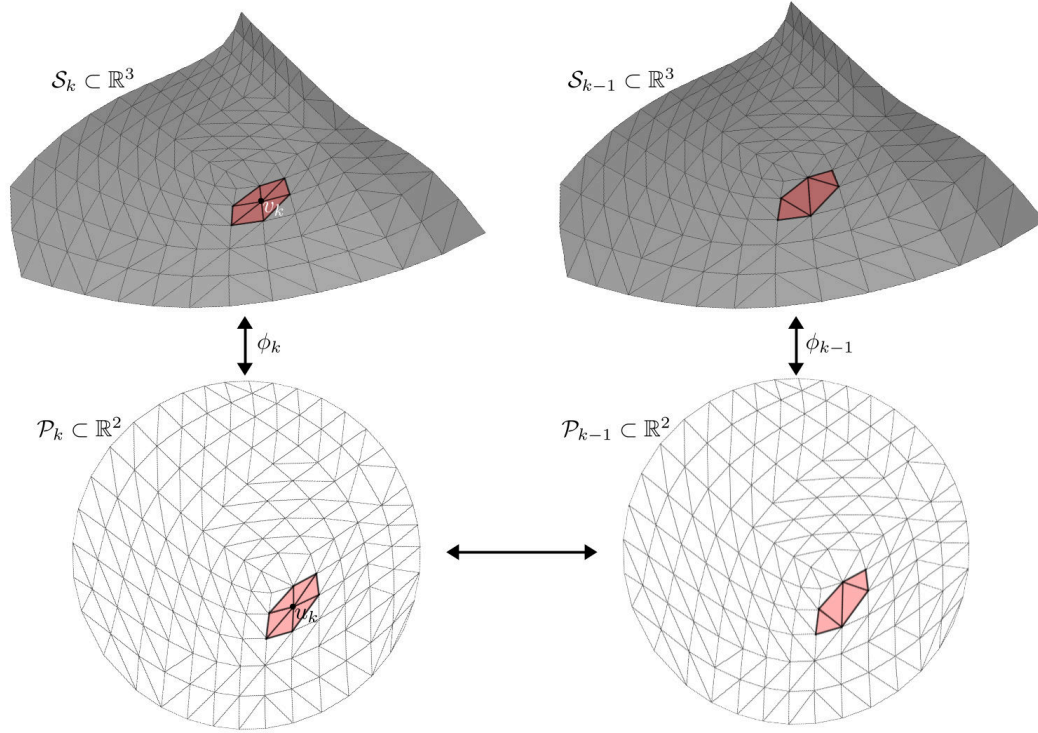


Figura 3.5: Modificação local em  $\mathcal{S}_k$  após remoção do vértice  $v_k$

Existe uma associação natural entre o vértice  $u_k$ , removido da triangulação  $\mathcal{P}_k$ , e um triângulo  $u_{k0}, u_{k1}, u_{k2}$  que compõem a nova triangulação  $\mathcal{T}_k$ . Este triângulo associado ao vértice  $u_k$  é exatamente aquele que contém a antiga posição geométrica deste vértice como mostrado na figura 3.6. Esse passo é fundamental para o processo inverso de refinamento e foi adotado em [13], [21], mas usando planificações locais [20] por tratarem de simplificação diretamente na superfície.

Assim, um histórico da simplificação é criado armazenando para cada remoção: (i) as coordenadas baricênticas do vértice removido em relação ao triângulo associado (relação indicada pelo pontilhamento na figura 3.6); (ii) os índices dos vértices do triângulo associado; (iii) os índices dos vértices do *link* da estrela removida. Com estas informações é possível partir da superfície simplificada  $\mathcal{S}_0$  e realizar, no sentido inverso, um refinamento progressivo que permite recuperar superfícies subsequentes até recuperar a superfície original  $\mathcal{S}_N = \mathcal{S}$ .

A figura 3.7 exemplifica em dois modelos, *Nefertiti* e *Duck*, três níveis da hierarquia dados pelo nível mais grosseiro desejado, por um nível intermediário

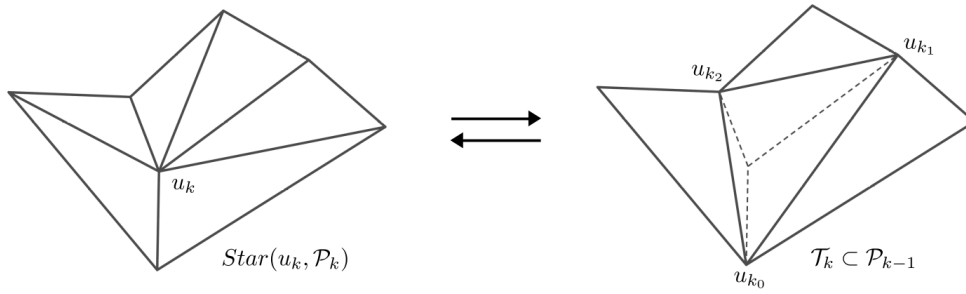


Figura 3.6: Associação do vértice removido  $u_k$  com a triangulação subsequente

e pela superfície original. Cada modelo possui uma curva de bordo que permite a sua parametrização num único domínio planar e foram parametrizados pelo procedimento da subseção 3.2.1.

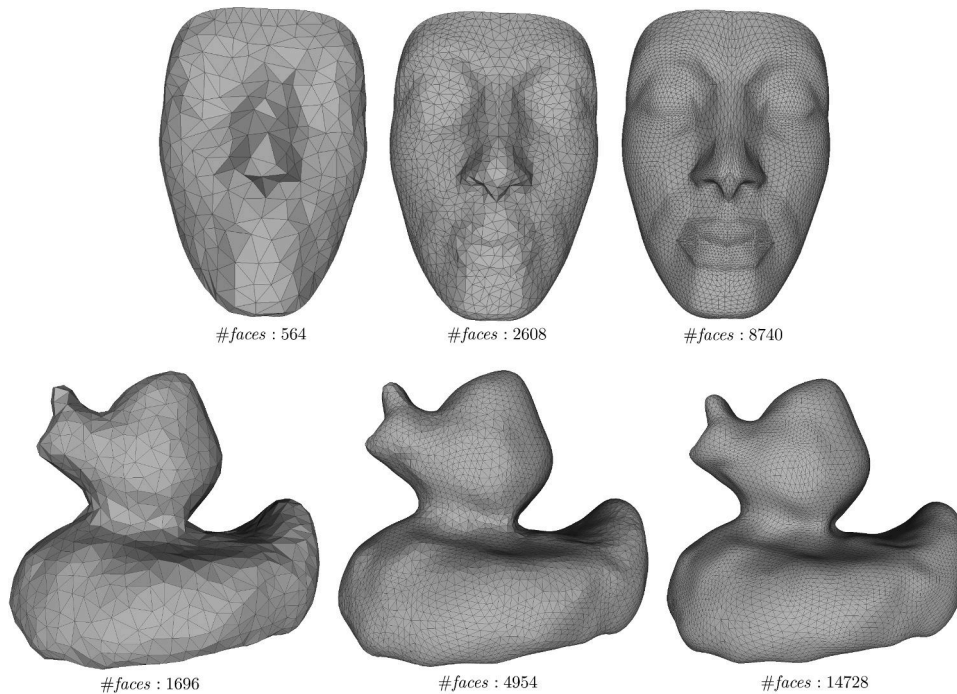


Figura 3.7: Representação hierárquica dos modelos *Nefertiti* e *Duck*

A figura 3.8 exemplifica uma região  $\mathcal{S}$  contida na superfície subjacente ao modelo *Botijo* (figura 3.4) em três níveis da hierarquia dados pelo nível mais grosseiro desejado, por um nível intermediário e pela superfície original. A parametrização foi realizada pelo procedimento da subseção 3.2.2.

### 3.3

#### Processo de otimização

Um método de parametrização para superfícies poligonais quase sempre associa uma superfície tridimensional a um domínio planar poligonalizado

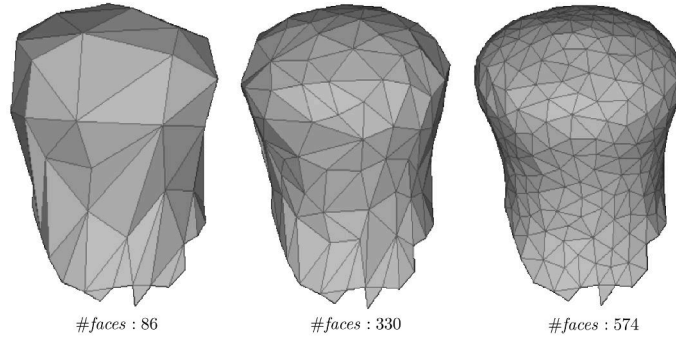


Figura 3.8: Representação hierárquica de uma região do modelo *Botijo*

cujos polígonos, em geral, não são congruentes aos seus correspondentes na superfície tridimensional. Em particular, o conjunto dos triângulos da superfície tridimensional  $\mathcal{S}$  é identificado ao conjunto de triângulos que compõem a triangulação  $\mathcal{P}$  pela parametrização  $\phi$ , contudo os triângulos de  $\mathcal{S}$  geralmente não são todos congruentes aos seus correspondentes na triangulação  $\mathcal{P}$  pois sofreram alguma deformação que provocou a distorção geométrica nos ângulos internos ou nas áreas.

Essas deformações ocasionadas não são apenas simultaneamente inerentes ao processo de parametrização escolhido, pois, a menos que a superfície  $\mathcal{S}$  tenha a curvatura gaussiana nula em todos os seus vértices, qualquer processo de parametrização não preservará de modo conjunto os ângulos internos e os comprimentos dos triângulos correspondentes. Esse fato é uma característica fundamental da geometria intrínseca das superfícies sendo justificado pelo teorema egrégio de Gauss [37].

O tratamento desse problema requer uma escolha que priorize amenizar os efeitos da distorção angular ou os efeitos da distorção na área buscando assim encontrar a solução para o problema de otimização que envolva uma função objetivo que combine energias que quantifiquem essas distorções. Foi usada a versão discreta do funcional  $E : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  para o tratamento das distorções, de modo que

$$E(\omega) := e_{\text{ângulo}}(w) \cdot e_{\text{área}}(w)^\mu,$$

onde  $e_{\text{ângulo}}$  e  $e_{\text{área}}$  são componentes que quantificam, respectivamente, uma energia de distorção angular e uma energia de distorção na área introduzidas pela parametrização, e  $\mu \geq 0$  é um parâmetro de flexibilidade que intensifica ou atenua a influência de energia da área. Esse funcional foi proposto por [15] e detalhado no capítulo 2.

Essa abordagem é bem adequada aos métodos de parametrização por



preservar a orientação dos triângulos ao longo do processo de otimização sem nenhum recurso adicional. Neste procedimento, as distorções acentuadas pelo processo de parametrização são reduzidas após o processo de otimização de modo que a triangulação planar associada mantenha uma mínima distorção, de acordo com o funcional, e seja composta por novos triângulos que são mais congruentes o possível dos triângulos correspondentes mantendo as mesmas conectividades originais.

O cálculo da energia  $E$  no modo discreto é restrito ao mapeamento entre cada triângulo desta superfície tridimensional com o seu correspondente na triangulação planar associada. A energia combinada da parametrização  $\phi$  calculada nos pontos do interior de cada triângulo de  $\mathcal{S}$  tem o valor constante dentro desses triângulos e isso se justifica por ser uma correspondência entre regiões planares. No entanto, a posição de um vértice  $u_i \in \mathcal{P}$  afeta a energia combinada da correspondência entre todos os triângulos da  $Star(u_i, \mathcal{P})$  com os seus respectivos da  $Star(v_i, \mathcal{S})$ , onde  $\phi(u_i) = v_i$ .

Assim, para cada vértice  $u_i \in \mathcal{P}$  o valor de  $E(\phi(u_i))$  no modo discreto é definido como

$$E(\phi(u_i)) = \sum_{t_{\mathcal{P}} \in Star(u_i, \mathcal{P})} e_{\text{ângulo}}(t_{\mathcal{P}}) \cdot e_{\text{área}}(t_{\mathcal{P}})^{\mu} \cdot \text{área}(\phi(t_{\mathcal{P}})),$$

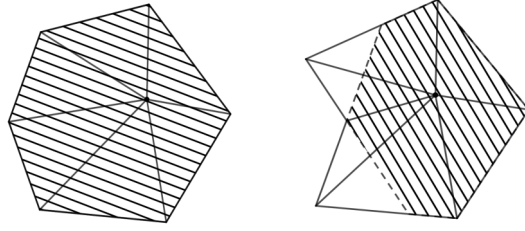
onde

$$e_{\text{ângulo}}(t_{\mathcal{P}}) = \frac{\cot \alpha |a|^2 + \cot \beta |b|^2 + \cot \gamma |c|^2}{2\text{área}(t_{\mathcal{P}})} \text{ e } e_{\text{área}}(t_{\mathcal{P}}) = \frac{\text{área}(t_{\mathcal{S}})}{\text{área}(t_{\mathcal{P}})} + \frac{\text{área}(t_{\mathcal{P}})}{\text{área}(t_{\mathcal{S}})}$$

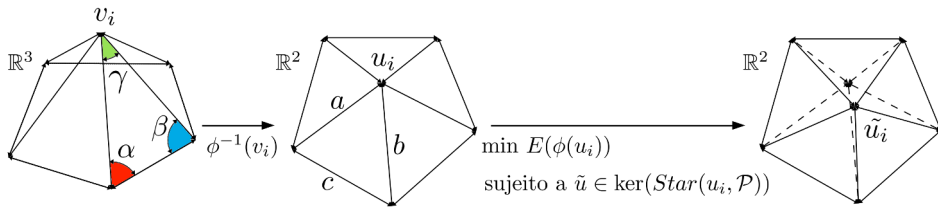
variam de acordo com a posição do vértice  $u_i = \phi^{-1}(v_i)$ , as medidas dos lados do triângulo  $t_{\mathcal{P}}$  são dadas por  $a$ ,  $b$  e  $c$  e as medidas dos ângulos internos do triângulo  $t_{\mathcal{S}}$  são representadas por  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  como foi apresentado no capítulo 2.

**Definição 3.1** *O núcleo de uma região poligonal de  $\mathbb{R}^2$  limitada pelo polígono  $A$  é o lugar geométrico dos pontos  $q$  estritamente pertencentes ao interior de  $A$  e tais que o segmento  $\overline{pq}$  está inteiramente contido na região poligonal para qualquer ponto  $p \in A$ .*

Particularmente, quando a região poligonal é uma estrela convexa então o núcleo coincide com a estrela e em estrelas não convexas o núcleo é uma região convexa contida na estrela conforme ilustrado pela figura 3.9. Para checar se  $u_i$  pertence ao núcleo de  $Star(u_i, \mathcal{P})$  é necessário verificar se os segmentos definidos por  $u_i$  e por todos os pontos pertencentes ao  $Link(u_i, \mathcal{P})$  estão inteiramente contidos dentro de  $Star(u_i, \mathcal{P})$ . Isso equivale a verificar se todos os triângulos da estrela com vértice em  $u_i$  possuem área sempre positiva.

Figura 3.9: Núcleo da estrela convexa ou não-convexa em  $\mathcal{P}$ 

O problema de otimização é resolvido localmente em cada vértice  $u_i = \phi^{-1}(v_i)$  e determina uma nova posição geométrica  $\tilde{u}_i$  que tem como restrição o núcleo de  $Star(u_i, \mathcal{P})$ . Esse reposicionamento introduz uma modificação local em  $\mathcal{P}$  que substitui  $Star(u_i, \mathcal{P})$  por  $Star(\tilde{u}_i, \mathcal{P})$ , como exemplificado na figura 3.10.

Figura 3.10: Otimização local da energia combinada do vértice  $v_i$ 

A convexidade do funcional garante que a mudança de posição reduza a energia combinada do vértice  $v_i$  e o procedimento realizado localmente garante que a energia de outros vértices fora do  $Link(v_i, \mathcal{S})$  seja preservada. Essas propriedades induzem um processo de otimização convergente que é realizado localmente, por exaustão e que promove a redução da energia total de  $\mathcal{S}$  monotonamente como será apresentado nas próximas duas subseções.

Nas subseções seguintes será apresentado o processo de otimização não-hierárquico pela parametrização  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  e o processo hierárquico que leva em conta as parametrizações  $\phi_k : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$  construídas com a estrutura hierárquica.

### 3.3.1

#### Não-hierárquico

O procedimento não-hierárquico é motivado pela ideia recursiva de escolher o vértice de maior energia, fixar os seus vizinhos e seguir com a escolha do próximo vértice não fixado com a maior energia. Deste modo, a redução da energia combinada em um vértice não fixado da superfície  $\mathcal{S}$  não será afetada pela redução de energia do próximo vértice escolhido e não afetará a redução de energia dos vértices não fixados escolhidos previamente. Este processo deve ser

realizado iterativamente, onde cada iteração é concluída após todos os vértices não fixados terem sido escolhidos.

Ao longo de cada iteração a energia dos vértices não fixados da superfície  $\mathcal{S}$  é minimizada e resulta num reposicionamento das coordenadas de textura  $u_i$  correspondentes em  $\mathcal{P}$  produzindo ao final de todas as iterações a triangulação  $\tilde{\mathcal{P}}$ . A soma das energias de todos os vértices é monotonamente decrescente em cada iteração pois tais vértices são selecionados numa lista ordenada que prioriza os de maior energia. Em contrapartida, o funcional assume valores sempre não-negativos em cada iteração e portanto o processo de otimização não-hierárquico é garantidamente monotonamente convergente. O algoritmo 1 sintetiza este procedimento não-hierárquico que configura uma etapa de relaxação dos vértices da triangulação  $\mathcal{P}$  conforme apresentado por [15].

---

**Algoritmo 1: OTIMIZAÇÃO NÃO-HIERÁRQUICA**


---

**Entrada:**  $\mathcal{S}, \phi$

**Saída:**  $\tilde{\mathcal{P}}$

```

1 início
2    $vec_{\mathcal{S}} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
3   para  $iter \leq maxIter$  faça
4     para  $v_i \in vec_{\mathcal{S}}$  faça
5       bloqueio( $v_i$ ) ← falso
6     fim
7     ordene( $vec_{\mathcal{S}}, E$ )
8     para  $i \leq n$  faça
9       se  $v_i \notin \text{bordo}(\mathcal{S})$  e bloqueio( $v_i$ ) == falso então
10         $\tilde{u}_i \leftarrow \min E(\phi(u_i))$  sujeito a  $\ker(Star(u_i, \mathcal{P}))$ 
11        se  $E(\tilde{u}_i) < E(u_i)$  então
12          para  $v_j \in Link(v_i, \mathcal{S})$  faça
13            bloqueio( $v_j$ ) ← verdadeiro
14          fim
15        fim
16      fim
17    fim
18  fim
19 fim
```

---

O algoritmo é composto pelo conjunto dos vértices de  $\mathcal{S}$  denominado  $vec_{\mathcal{S}}$  que possui coordenadas bidimensionais associadas e atribuídas previamente por um processo de parametrização. Esses vértices são registrados com uma variável booleana que identifica o seu bloqueio. São realizadas um número máximo de iterações,  $maxIter$ , e em cada iteração todos os vértices são inicialmente desbloqueados e ordenados de acordo com a sua energia combinada e nesta abordagem é incluída uma condição de bloqueio apenas

para os vértices na vizinhança do vértice candidato à otimização e cuja energia tenha sido reduzida.

### 3.3.2 Hierárquico

O tempo de convergência na abordagem não-hierárquica é diretamente proporcional ao número de vértices da superfície de entrada e ao grau de distorção produzido pela parametrização original. Por outro lado, a qualidade da parametrização final  $\tilde{\mathcal{P}}$  neste procedimento de otimização por exaustão está associada diretamente com os vértices selecionados e com a possibilidade de reduzir sua energia em cada etapa da otimização. Considerando uma superfície tridimensional  $\mathcal{S}$  cujo domínio de parametrização  $\mathcal{P}$  está altamente distorcido, o procedimento não-hierárquico aplicado neste contexto será menos eficiente se comparado com um processo de otimização que leva em conta a estrutura de multi-resolução de  $\mathcal{S}$  onde a energia de distorção é otimizada com mais flexibilidade em um nível mais grosseiro reduzindo possivelmente o esforço computacional nos níveis subsequentes.

O processo de otimização levando em conta uma estrutura de multi-resolução constituída pela hierarquia de superfícies  $\mathcal{S}_k$  é denominado *processo de otimização hierárquico* e neste processo os domínios  $\mathcal{P}_k$  associados pela parametrização  $\phi_k$  serão otimizados conforme o algoritmo 1 para alguns valores selecionados de  $k$ . A otimização hierárquica tal como apresentada, foi proposta em [15] como uma nova abordagem para a otimização hierárquica de [13].

A possibilidade de representação da superfície  $\mathcal{S}$  em um nível  $k_0 - 1$ , com menos detalhes que a sua forma original, permite que a triangulação  $\tilde{\mathcal{P}}_{k_0-1}$  produzida com o algoritmo 1 neste nível tenha triângulos mais congruentes o possível, de acordo com o funcional, aos da superfície  $\mathcal{S}_{k_0-1}$  correspondente e a redução da energia neste nível reduzirá o esforço computacional no nível seguinte. Durante o refinamento, a triangulação  $\tilde{\mathcal{P}}_{k_0}$  do nível posterior ao atual otimizado será obtida após a inserção do vértice  $u_{k_0}$  em algum triângulo associado do conjunto  $\tilde{\mathcal{P}}_{k_0-1}$ . Este triângulo teve a sua forma possivelmente modificada pelo algoritmo 1 e o seu novo formato que tende a ser mais equivalente ao correspondente na superfície  $\mathcal{S}_{k_0-1}$  posicionará o novo vértice  $u_{k_0}$  de acordo com as coordenadas baricêntricas armazenadas no histórico registrado na simplificação.

O refinamento ocorre no sentido inverso da simplificação e os vértices estão listados na ordem de remoção. Cada vértice  $v_k$  a ser reinserido durante o refinamento foi associado, na simplificação, com algum triângulo de nível

anterior  $k - 1$  pelo domínio de parametrização. O refinamento com o vértice  $v_k$  determinará uma região  $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{P}_{k-1}$  que contenha o triângulo de  $\mathcal{P}_{k-1}$  associado com  $u_k = \phi^{-1}(v_k)$ . Essa região será substituída por uma nova triangulação  $\widehat{\mathcal{T}}_k$  que compõem uma estrela centrada em  $u_k$  de modo que  $\partial\widehat{\mathcal{T}}_k = \partial\mathcal{T}_k$ . Essa modificação local transforma  $\mathcal{P}_{k-1}$  em  $\mathcal{P}_k$  e, por conseguinte,  $\mathcal{S}_{k-1}$  em  $\mathcal{S}_k$ . Para determinação da região uma *frente de avanço* é realizada em  $\mathcal{P}_{k-1}$  partindo do triângulo associado com  $u_k$  e levando em conta os índices dos vértices de  $\partial\widehat{\mathcal{T}}_k$  armazenado durante a simplificação.

Inicialmente a otimização ocorre em  $\phi_{k_0} = \phi_0$  e, em seguida, a superfície  $\mathcal{S}_0$  é refinada de acordo com a hierarquia até que em algum nível  $k_1 \leq N$  a parametrização  $\phi_{k_1}$  seja otimizada. Seguindo com o refinamento da superfície de acordo com a hierarquia sempre que um nível  $k \in \{k_2, k_3, \dots, k_r\} \subset \{1, \dots, N\}$  for alcançado, este será selecionado para a otimização da parametrização  $\phi_k$ . O procedimento se repete até que o nível máximo  $k = k_r = N$  seja atingido, neste caso a parametrização  $\phi_{k_r} = \phi_N = \phi$  será otimizada.

O conjunto dos níveis intermediários  $\{k_0, k_1, \dots, k_r\}$  selecionados para a otimização pode ser determinado por diversas maneiras. Para a realização dos experimentos que serão apresentados na próxima seção foi suficiente escolher apenas cinco níveis de resolução, partindo da superfície mais grosseira até a superfície original onde a quantidade de vértices entre os níveis escolhidos pôde variar como detalhado nos experimentos. O algoritmo 2 sintetiza as etapas realizadas no processo de otimização hierárquico.

---

**Algoritmo 2: OTIMIZAÇÃO HIERÁRQUICA**


---

**Entrada:**  $\mathcal{S}, \phi$

**Saída:**  $\tilde{\mathcal{P}}$

```

1 início
2   criaHierarquia( $\mathcal{S}, \phi$ )
3   para  $t \in \{0, 1, \dots, r\}$  faça
4      $\tilde{\mathcal{P}}_{k_t} \leftarrow \text{otimiza}(\phi_{k_t}, \mathcal{S}_{k_t})$ 
5     se  $t == r$  então
6       retorna  $\mathcal{P}_{k_r}$ 
7     fim
8      $\mathcal{S}_{k_{t+1}} \leftarrow \text{refina}(\mathcal{S}_{k_t}, \tilde{\mathcal{P}}_{k_t})$ 
9   fim
10 fim
```

---

As instruções  $\text{otimiza}(\mathcal{S}, \phi)$  produz a otimização pelo algoritmo 1 com os seus respectivos parâmetros de entrada,  $\text{criaHierarquia}(\mathcal{S}, \phi)$  constrói a hierarquia de superfícies por meio da simplificação de  $\mathcal{S}$  apresentada na seção 3.2 e  $\text{refina}(\mathcal{S}_{k_t}, \tilde{\mathcal{P}}_{k_t})$  realiza no sentido inverso da simplificação

um refinamento progressivo da superfície  $\mathcal{S}_{k_t}$  partindo do nível  $k_t$  com a triangulação correspondente  $\tilde{\mathcal{P}}_{k_t}$  até atingir o nível  $k_{t+1}$ . Ao final do algoritmo 2 a saída será uma triangulação  $\tilde{\mathcal{P}}_{k_r} = \tilde{\mathcal{P}}$  otimizada hierarquicamente.

### 3.4

#### Mapeamento de textura

O mapeamento de texturas é parte de uma metodologia natural que permite a visualização da qualidade dos resultados obtidos após o processo de otimização. A fidelidade entre a textura original e a textura aplicada sobre a superfície seria idealmente alcançada com a preservação da forma geométrica por esta parametrização. Nesta seção algumas aplicações serão realizadas com as texturas sobre superfícies triangularizadas com bordo e parametrizadas pelos métodos apresentados nas subseções 3.2.1 e 3.2.2, o funcional de energia combinada foi utilizado na otimização. As inferências da qualidade serão obtidas com a comparação dos dados da medição realizadas nas etapas pré e pós otimização.

O primeiro exemplo, ilustrado pela figura 3.11, representa as aplicações sobre o modelo *Júlio César* que foi preparado para ter a topologia de um disco e composto por 13721 vértices e 27136 faces. Esta superfície foi parametrizada pelo método apresentado na subseção 3.2.1 e simplificada até atingir um nível base com cerca de 7.1% da quantidade de vértices da superfície original. O processo de simplificação e construção da hierarquia foi realizado em 1.62 segundos.

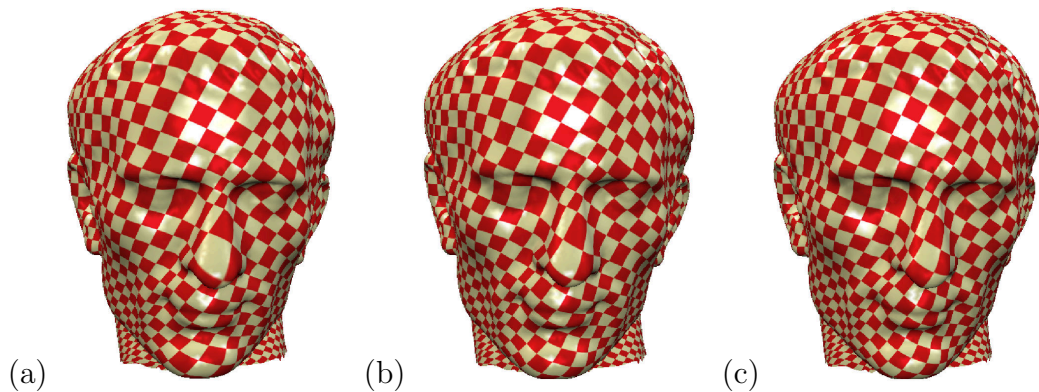


Figura 3.11: (a) Textura no modelo original (b) Textura com as coordenadas otimizadas sem hierarquia (c) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia

O segundo exemplo, ilustrado pela figura 3.12, representa as aplicações sobre o modelo *Clown Fish* que foi preparado para ter a topologia de um disco

e composto por 5629 vértices e 10976 faces. Esta superfície foi parametrizada pelo método apresentado na subseção 3.2.1 e simplificada até atingir um nível base com cerca de 33.5% da quantidade de vértices da superfície original. O processo de simplificação e construção da hierarquia foi realizado em 0.6 segundos.

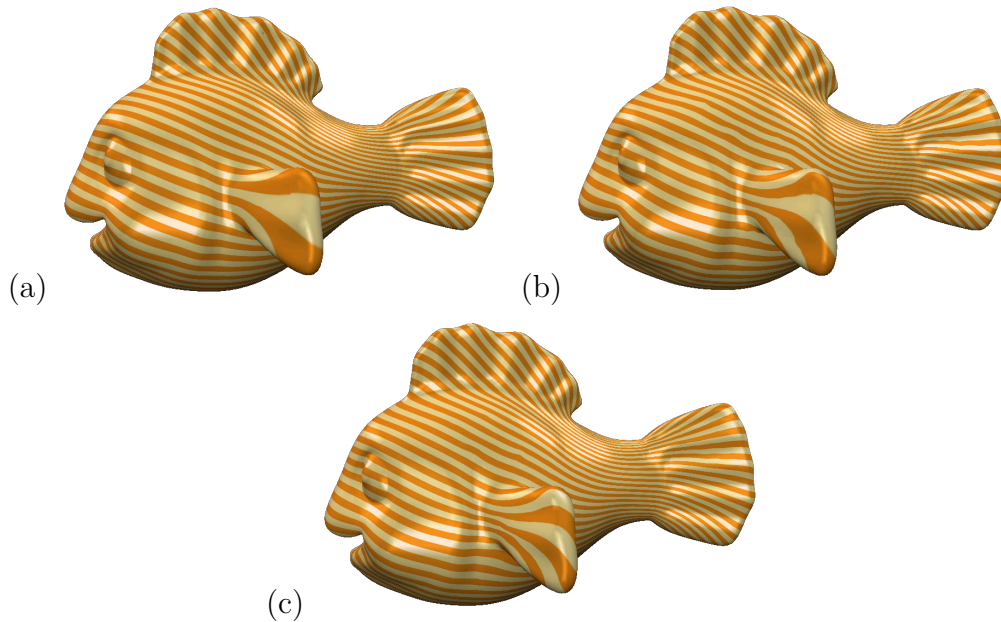


Figura 3.12: (a) Textura no modelo original (b) Textura com as coordenadas otimizadas sem hierarquia (c) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia

Após a simplificação e construção da hierarquia o nível mais grosseiro no modelo *Júlio César* ficou composto por 974 vértices e 1642 faces (figura 3.13 (b)) e no modelo *Clown Fish* ficou composto por 1884 vértices e 3486 faces (figura 3.14 (b)). O processo de otimização hierárquica foi realizado nos dois modelos com a mesma importância para a área e o ângulo e isso é representado pela escolha do parâmetro  $\mu = 1.0$  no funcional da energia. A textura foi aplicada sobre os modelos no nível final, respectivamente, e mapeada por suas coordenadas de parametrização. Em ambos os casos foram realizadas 1000 iterações no total distribuídas regularmente na hierarquia com 200 iterações por nível.

No primeiro exemplo, as regiões do "nariz" e do "queixo" salientam visualmente que a figura 3.11 (c) preserva melhor o padrão da textura original se comparada com o modelo original ou com o modelo otimizado sem hierarquia. Analogamente, no segundo exemplo, a região da "nadadeira" na figura 3.12 (c) preserva melhor a qualidade visual em relação aos modelos original e sem hierarquia. A tabela 3.1 exibe os níveis utilizados no processo

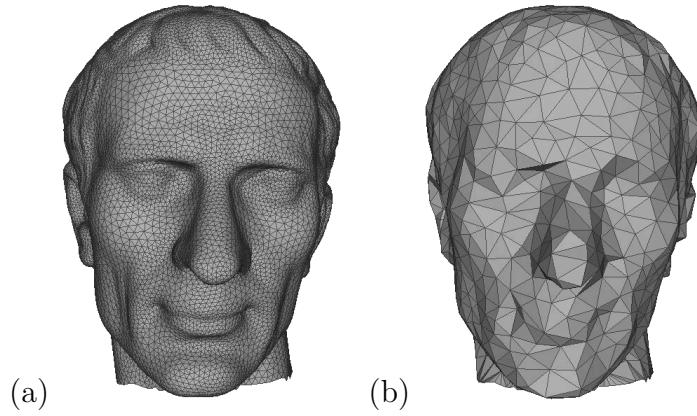


Figura 3.13: (a) *Júlio Cesar* original (b) *Júlio Cesar* simplificado

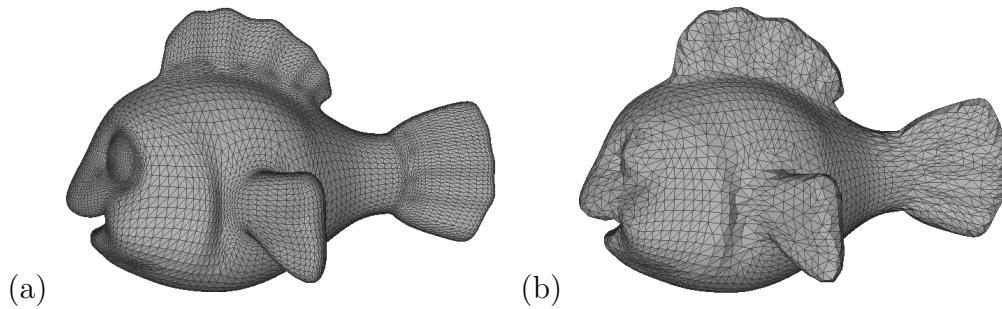


Figura 3.14: (a) *Clown Fish* original (b) *Clown Fish* simplificado

e indicados pela quantidade de vértices, bem como, o tempo transcorrido na execução da otimização hierárquica e não hierárquica.

Modelo	0	1	2	3	4	H	$\tilde{n}H$
<i>Júlio César</i>	974	3186	6373	9560	12747	6.4	10.9
<i>Clown Fish</i>	1884	2820	3756	4692	5629	3.50	3.62

Tabela 3.1: Seleção de níveis da hierarquia para a otimização e tempo de execução

O terceiro exemplo, ilustrado pela figura 3.15, é uma continuação das aplicações sobre o mesmo modelo *Clown Fish* ainda parametrizado pelo método apresentado na subseção 3.2.1. Nestes casos, as figuras 3.15 (a) e 3.15 (b) foram obtidas com o processo de otimização hierárquico em 2000 e 3000 iterações, respectivamente, realizadas pela hierarquia e regularmente distribuídas nos níveis considerados anteriormente. Em ambos os casos, o parâmetro  $\mu = 1.0$  foi considerado no funcional da energia. A região da "nadadeira", em ambas as aplicações, apesar de preservar melhor alguns trechos do padrão da textura original possui outros trechos com deformações.

O quarto exemplo, ilustrado pela figura 3.16, configura uma aplicação realizada sobre uma região  $\mathcal{S}$  da superfície  $\mathcal{M}$ . O modelo *bunny*, neste exemplo,



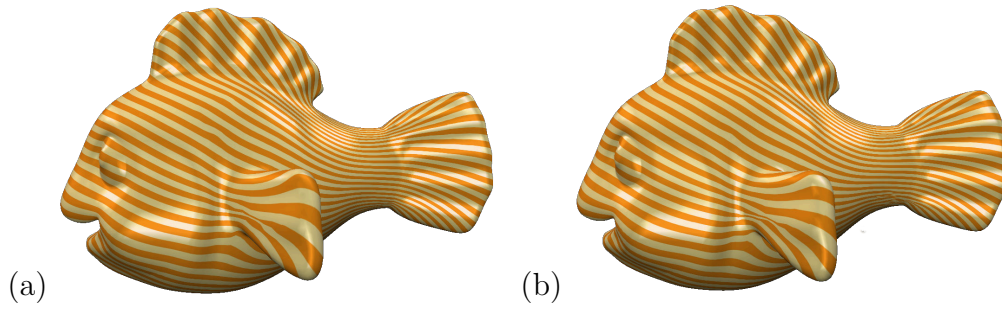


Figura 3.15: (a) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia em 2000 iterações (b) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia em 3000 iterações

representa a superfície  $\mathcal{M}$  e a superfície  $\mathcal{S}$  é representada por uma região da "orelha" conforme destacado na figura 3.17. A região  $\mathcal{S}$  é composta de 886 vértices e 1698 faces e foi parametrizada pelo método apresentado na seção 3.2.2. A simplificação gerou no nível base uma superfície com cerca de 26% da quantidade de vértices da superfície original e produzida em 0.14 segundos.

A tabela 3.1 sintetiza a quantidade de vértices em cada nível e o tempo transcorrido no processamento da otimização em minutos.

Modelo	0	1	2	3	4	H	$\tilde{n}H$
Região do <i>bunny</i>	234	397	560	723	886	0.6	0.8

Tabela 3.2: Seleção de níveis da hierarquia para a otimização e tempo de execução

Em ambas as figuras, 3.16 (b) e 3.16 (c), foram realizadas 1000 iterações e, particularmente, na figura (c) elas foram distribuídas regularmente ao longo da hierarquia. Nestes casos, o parâmetro  $\mu = 1.0$  foi usado indicando igual importância para a área e o ângulo no processo de otimização. A aplicação da textura sobre o modelo da figura (c) ainda preserva melhor o padrão da textura original por reduzir efeitos de distorção visualmente.

O último exemplo, ilustrado pela figura 3.18, representa a aplicação da textura sobre a região  $\mathcal{S}$  do modelo *botijo*, apresentado na figura 3.4, e parametrizado pelo método apresentado na seção 3.2.2 e posteriormente combinado com a simplificação apresentada na seção 3.2.3. A aplicação foi realizada sem a otimização ou otimizada hierarquicamente com igual importância de energia da área no funcional de otimização ( $\mu = 1.0$ ) ou com menos importância ( $\mu = 0.5$ ) ou com mais importância ( $\mu = 3.0$ ). A preservação do padrão da textura original varia nos casos apresentados e se comporta melhor na parte inferior da figura 3.18 (c) ou na parte superior da figura 3.18 (d).

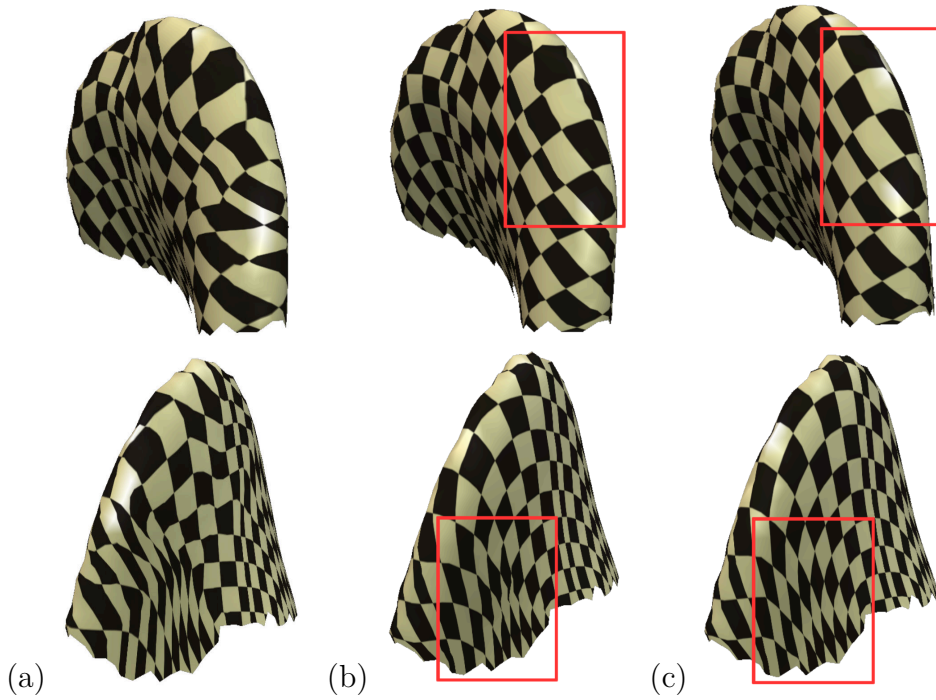


Figura 3.16: (a) Textura sem as coordenadas otimizadas (b) Textura com as coordenadas otimizadas sem hierarquia (c) Textura com as coordenadas otimizadas pela hierarquia

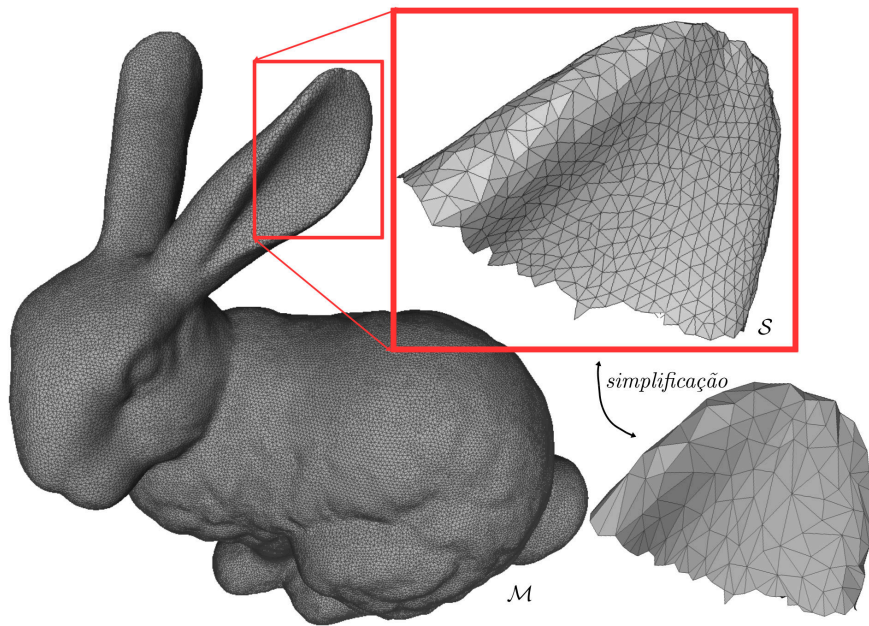


Figura 3.17: Região  $S$  na superfície  $\mathcal{M}$

Para quantificar a variação da energia combinada e comparar os processos de otimização hierárquico e não hierárquico são utilizados os gráficos que comparam o número de iterações em função da energia total e que versam sobre os exemplos anteriores. O comportamento desses processamentos ao longo da

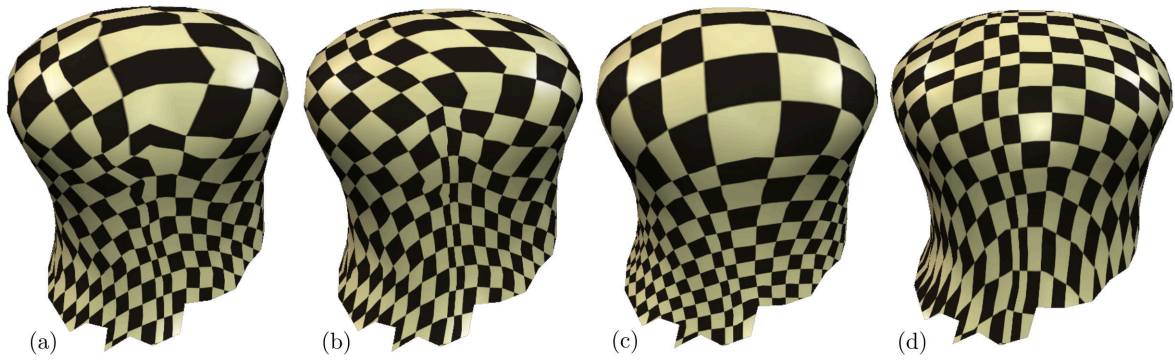


Figura 3.18: (a) Original (b)  $\mu = 0.5$  (c)  $\mu = 1.0$  (d)  $\mu = 3.0$

otimização não hierárquica e hierárquica são indicados, respectivamente, pelas curvas nas cores vermelha e azul. Esta energia total é calculada como a soma das energias de todos os vértices em cada iteração.

Os gráficos exibidos pelas figuras 3.19 (a), 3.19 (b) e 3.19 (c) representam a variação da energia total dos modelos *Júlio César*, Região do *bunny* e *Clown Fish*, respectivamente, ilustrados pelo mapeamento de textura das figuras 3.11, 3.16 e 3.12.

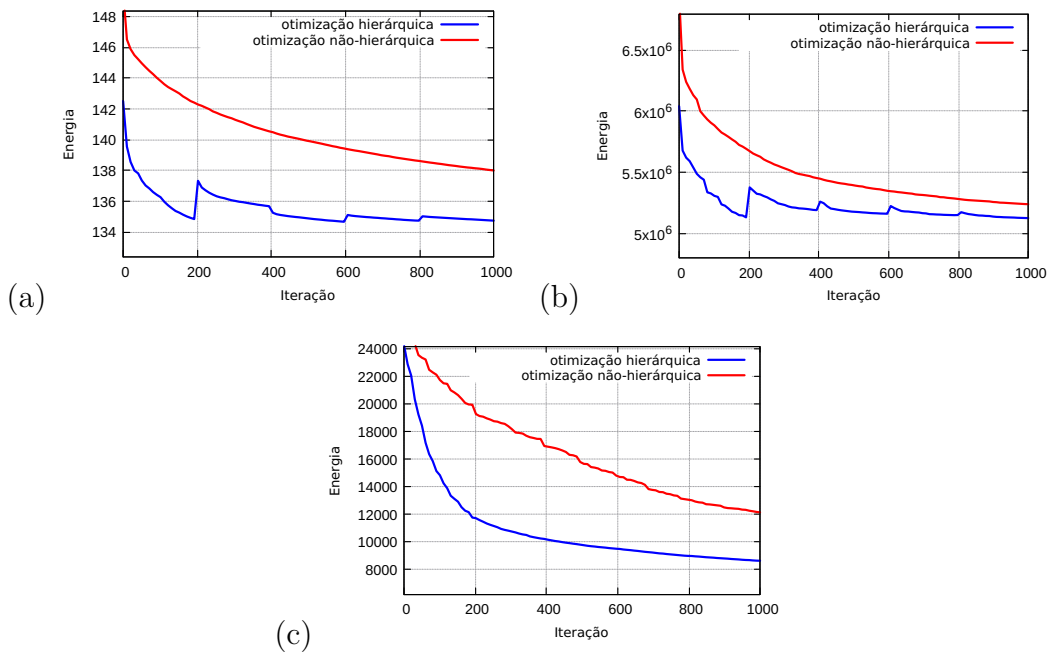


Figura 3.19: Variação de energia nos modelos (a) *Júlio César* (b) Região do *bunny* (c) *Clown Fish*

Em ambas as figuras fica evidenciado que o processo de otimização hierárquica tem um decaimento de energia mais robusto que o procedimento não hierárquico. As figuras (a) e (b) explicitam, pela curva em azul, um decaimento monótono por partes em que cada parte representa um novo nível

otimizado. Em contrapartida, a mudança de níveis ao longo da curva em azul na figura (c) é menos evidente e isso é justificado pela pequena variação da quantidade de vértices e faces entre os níveis do modelo *Clown Fish* e apresentado na tabela 3.1.

O procedimento de otimização hierárquica realizado no modelo *Clown Fish* e com a variação de energia total exibida na figura 3.19 (b) foi gerado com 1000 iterações distribuídas regularmente. A figura 3.20 exibe o processamento neste mesmo modelo mas com 1000 iterações distribuídas sem regularidade. A tabela 3.3 indica o número de iterações realizadas em cada nível e o tempo transcorrido. Neste caso, a irregularidade na distribuição das iterações entre os níveis resultou apenas em pequena variação de energia, destacado na figura 3.20, e em pequena redução de tempo se comparado com as iterações regularmente distribuídas. Essas pequenas variações não são perceptíveis, por exemplo, com o mapeamento de textura.

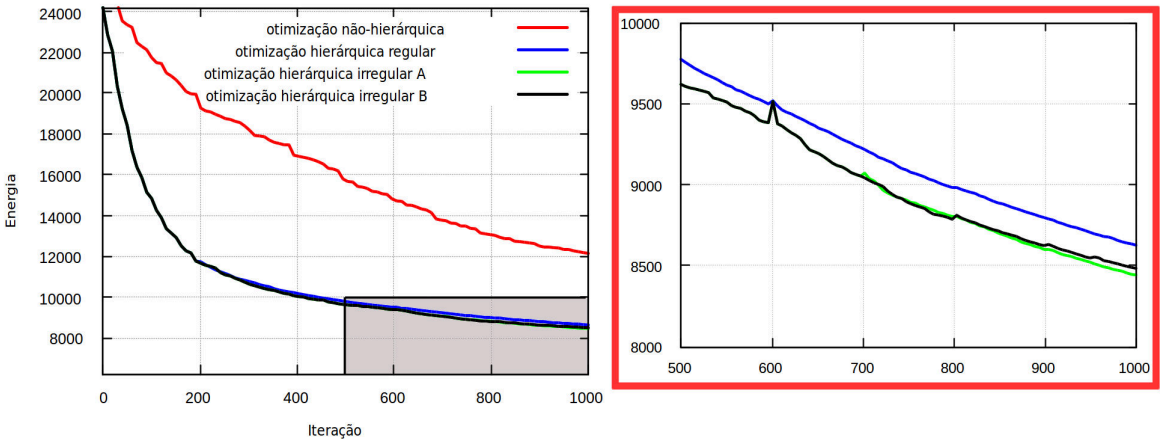


Figura 3.20: Variação de energia no modelo *Clown Fish* com iterações irregulares. A região hachurada corresponde ao *box* vermelho

	0	1	2	3	4	tempo(min)
Irregular A	600	100	100	100	100	2.40
Irregular B	600	200	100	50	50	2.23
Regular	200	200	200	200	200	3.10

Tabela 3.3: Número de iterações e tempo de execução

A comparação das medidas dos ângulos em torno de cada vértice e das distâncias nas arestas incidentes a cada vértice é agrupada por meio dos histogramas nas figuras 3.21 e 3.22, respectivamente, e representam a qualidade em termos de isometria para a parametrização do modelo representado na figura 3.17 nas etapas de pré e pós otimização. Para cada vértice da superfície

$\mathcal{S}$  são calculadas as diferenças entre os ângulos internos incidentes ao vértice nos triângulos de sua estrela com os seus correspondentes na triangulação  $\mathcal{P}$  e a maior destas diferenças de ângulo é atribuída a este vértice e, do mesmo modo, são calculadas as diferenças entre os comprimentos das arestas incidentes ao vértice de  $\mathcal{S}$  com os comprimentos das arestas correspondentes na triangulação  $\mathcal{P}$  e a maior destas diferenças de comprimento é atribuída ao vértice. As maiores diferenças de ângulo e comprimento para cada vértice são agrupadas em histogramas que relacionam a quantidade de vértices em  $\mathcal{S}$  pelas máximas diferenças calculadas.

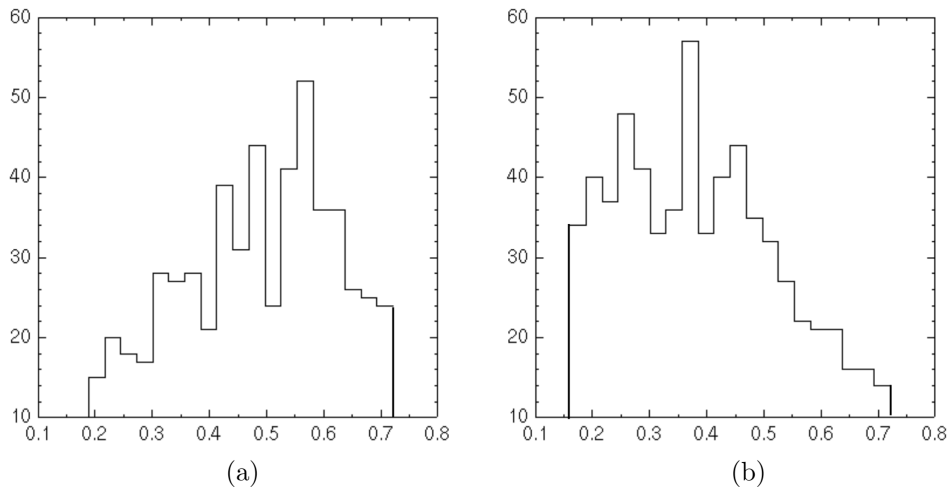


Figura 3.21: Comparação por ângulos da Região do *bunny* com as suas coordenadas de textura (a) sem otimização (b) com otimização hierárquica

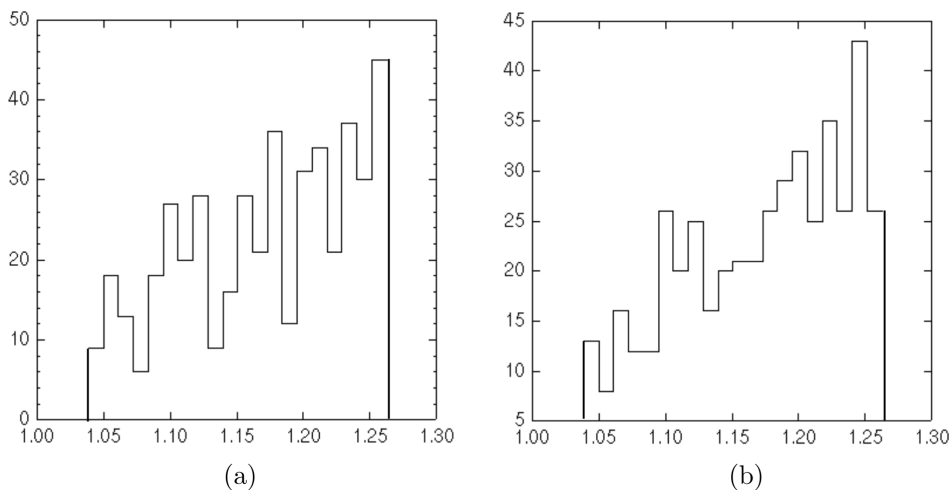


Figura 3.22: Comparação por arestas da Região do *bunny* com as suas coordenadas de textura (a) sem otimização (b) com otimização hierárquica

A figura 3.21 (b) indica que as máximas diferenças entre os ângulos correspondentes foram reduzidas após a otimização, mas na figura 3.22 (b) essa redução é menos evidente. As otimizações foram realizadas com o bordo fixado, ou seja, sem otimização no bordo e pode ter influenciado no ajuste dos comprimentos durante a otimização.

## 4

### Otimização hierárquica em superfícies sem bordo

Neste capítulo será apresentado o processo hierárquico de otimização desenvolvido para reduzir as distorções geométricas introduzidas pela construção de um sistema de cartas que define uma variedade diferenciável na estrutura topológica de uma superfície triangularizada sem bordo em  $\mathbb{R}^3$ . Para o desenvolvimento desse processo foram necessárias quatro etapas que serão discutidas ao longo deste capítulo: (1) Inicialmente é realizada a construção de uma estrutura de multi-triangulação na superfície triangularizada criada por um processo de simplificação incremental que relaciona hierarquicamente a superfície inicial com alguma superfície base. (2) Em seguida, cada novo vértice introduzido durante o processo inverso de refinamento é projetado sobre a superfície base. (3) As etapas do refinamento correspondem aos níveis da hierarquia e em cada nível selecionado são construídas triangulações de regiões da superfície e triangulações em domínios locais que são relacionadas por um sistema de cartas definidos por uma variedade diferenciável induzida pela superfície base. (4) Por fim, a parametrização local é otimizada em cada nível selecionado enquanto ocorre o refinamento até que a superfície original seja completamente alcançada.

#### 4.1

##### Descrição do problema

No capítulo 3 o problema apresentado envolvia superfícies triangularizadas em  $\mathbb{R}^3$  e homeomorfas a um disco. Naquele caso, era possível estabelecer uma parametrização que envolvesse apenas um único domínio, como foi mostrado lá, mas as coordenadas bidimensionais obtidas por qualquer método de parametrização, inclusive pelos que foram apresentados, não definem uma triangulação geometricamente equivalente a superfície tridimensional. Para lidar com essa incongruência, o processo de otimização contido em [15] e detalhado no capítulo anterior é bem adequado para reduzir a energia de distorção medida pelo funcional apresentado. A outra contribuição de [15] leva em conta uma estrutura de multi-resolução [13] que torna o processo ainda mais robusto por reduzir mais significativamente a energia de distorção medida e consequentemente convergindo mais rapidamente.

O problema de parametrizar uma superfície triangularizada sem bordo em  $\mathbb{R}^3$  não pode ser completamente solucionado com um único domínio bidimensional, pois nesse caso a superfície tridimensional é topologicamente equivalente a uma esfera ou a algum  $g$ -toro,  $g \geq 1$ . A solução geralmente adotada e comumente empregada em aplicações que dependam das coordenadas bidimensionais de parametrização é produzida com a partição de toda a superfície em pedaços homeomorfos a discos e que podem, portanto, ser parametrizados individualmente. Essas aplicações possivelmente vão exigir que hajam relações entre esses pedaços em alguma classe de diferenciabilidade especialmente nos vértices das regiões de "costura" ou "colagem" desses pedaços.

Neste sentido, uma abordagem baseada em variedades diferenciáveis definida em uma superfície discreta de  $\mathbb{R}^3$  contempla os requisitos necessários para diversas aplicações que exijam dos vértices da superfície algum cálculo num sistema de coordenadas de parametrização definidas em domínios euclidianos bidimensionais. Além disso, regiões da superfície identificadas em domínios bidimensionais distintos se comunicam por funções de transição de classe  $C^\infty$ .

Os domínios de parametrização construídos na abordagem por variedades diferenciáveis, geralmente, possuem distorções em relação as suas regiões correspondentes na superfície tridimensional introduzidas pelas parametrizações locais. Para algumas aplicações de remalhamento [9], por exemplo, que são obtidas com a estrutura diferenciável é importante que os triângulos nos domínios de parametrização sejam mais congruentes o possível aos triângulos nas regiões correspondentes da superfície triangularizada. Garantir que essa melhoria na equivalência se perpetue entre os triângulos de domínios distintos relacionados com uma mesma região da superfície não é tão imediato como aplicar somente o algoritmo 1 do capítulo anterior considerando os domínios de parametrização individualmente, sem levar em conta as relações existentes entre eles.

Este capítulo apresenta uma solução para a otimização das energias de distorção medidas nos domínios de parametrização discretos definidos pela variedade diferenciável desenvolvida por [1] construída a partir de uma superfície base triangularizada sem bordo  $\mathcal{B} = (J_0, X_0)$  em que  $J_0$  é o complexo simplicial obtido de simplificações e  $X_0 \subset \mathbb{R}^3$  é um subconjunto dos vértices da superfície inicial. O principal cuidado é reposicionar os vértices da triangulação em um domínio de parametrização de modo a reduzir a sua energia total de distorção e dentre estes vértices atualizar a posição dos seus vértices correspondentes, que estejam em outros domínios e relacionados por funções de



transição tentando evitar a inserção de triângulos com área negativa por essas atualizações. A contribuição de [15] com a otimização hierárquica é estendida para o contexto de variedades diferenciáveis de modo a compor um sistema de otimização hierárquica para os domínios de parametrização discretos definidos.

## 4.2

### Construção da hierarquia

A principal etapa na solução do problema apresentado está na construção da estrutura hierárquica que permite representar a superfície  $\mathcal{M}$  em diversos níveis de resolução  $\mathcal{B} = \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N = \mathcal{M}$ . Nesta hierarquia de superfícies, cada nível  $\mathcal{M}_{k-1} = (J_{k-1}, X_{k-1})$  é tal que  $J_{k-1}$  é um complexo simplicial obtido de  $J_k$  por modificação local e  $X_{k-1} \subset X_k \subset \mathbb{R}^3$  para cada  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

A construção dessa hierarquia é realizada em duas etapas concomitantes que consistem na simplificação da superfície  $\mathcal{M}$  e no registro das informações a serem utilizadas na projeção hierárquica que ocorre durante o refinamento da superfície  $\mathcal{B}$ . Estas informações são obtidas em cada passo da simplificação e, deste modo, a relação entre as superfícies subsequentes  $\mathcal{M}_k \rightleftharpoons \mathcal{M}_{k-1}$  será estabelecida por modificações locais realizadas diretamente na triangulação  $\mathcal{M}_k$  de forma que:

$$\mathcal{M}_k - \mathcal{M}_{k-1} = \text{Star}(v_k, \mathcal{M}_k) \text{ e } \mathcal{M}_{k-1} - \mathcal{M}_k = \text{int}(\mathcal{T}_k),$$

com  $\mathcal{T}_k$  sendo uma sub-triangulação de  $\mathcal{M}_{k-1}$  construída para preencher a lacuna deixada pela remoção de  $v_k$  e tal que  $\partial\mathcal{T}_k = \text{Link}(v_k, \mathcal{M}_k)$ .

### 4.2.1

#### Simplificação

As sucessivas remoções de vértices e retriangulações locais são gerenciadas pela estrutura de multi-triangulação orientada pela amostragem hierárquica por discos de Poisson (HPDS-MT) restrita à superfície discreta  $\mathcal{M}' = (J', X')$  que é composta pelo complexo simplicial  $J'$  e pelo conjunto finito  $X' \subset \mathbb{R}^3$ . Essa estrutura foi introduzida por [2] e é induzida por uma amostragem de pontos uniformemente distribuída e hierarquicamente produzida sobre a superfície ([25], [42]) e, além disso, combinada com um complexo de Delaunay localizado restrito [43] obtido com os pontos amostrados. O conjunto de pontos amostrados é livre de alinhamentos perceptíveis e possui baixas frequências de ruído no seu espectro de potência caracterizando um padrão de amostragem com ruído azul que tem o papel

essencial de prevenir os enviesamentos no posicionamento das arestas da triangulação a ser construída.

As principais ideias envolvidas na construção da HPDS-MT serão apresentadas aqui e alguns outros conceitos preliminares serão inicialmente revisados. Seja  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$  a superfície bidimensional compacta e conexa tal que  $\mathcal{W} = |J'|$ .

- i. O conjunto  $B_r(p) = \{q \in \mathbb{R}^3 : \|p - q\| < r\}$  é uma 3-bola aberta de raio  $r$  e centrada em  $p \in \mathcal{W}$  (figura 4.1);
- ii. A  $r$ -vizinhança  $N_r(p)$  de um ponto  $p \in \mathcal{W}$  é a componente conexa de  $B_r(p) \cap \mathcal{W}$  contendo  $p$ ;

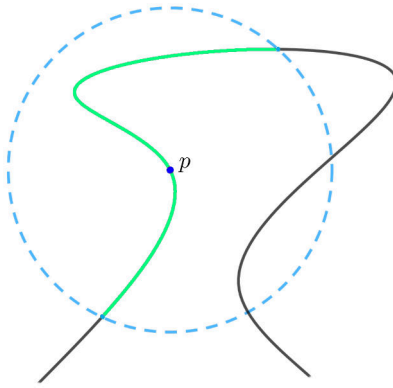


Figura 4.1:  $r$ -vizinhança localizada restrita

- iii. Um conjunto de pontos  $P = \{p_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathcal{W}$  é uma amostragem de pontos localizada restrita por  $(\alpha, \beta)$ -discos de Poisson (LRPDS), com  $\beta \geq \alpha > 0$ , se, e somente se, (1)  $\{N_\beta(p_i)\}_{i=1}^n$  é uma cobertura de  $\mathcal{W}$  e (2) cada  $N_\alpha(p_i)$  não contém nenhum ponto de  $P - \{p_i\}$ . Particularmente, quando  $r = \alpha = \beta$  o conjunto é uma amostragem de pontos localizada restrita por discos de Poisson com raio  $r$  (figura 4.2);

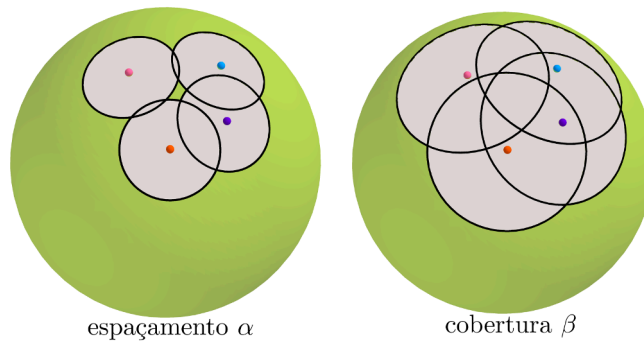


Figura 4.2:  $(\alpha, \beta)$ -LRPDS

- iv. A família de conjuntos  $\{P_k\}_{k=1}^{N'}$  sobre  $\mathcal{W}$  em que  $P_1 \subset \dots \subset P_{N'}$  é uma hierarquia na amostragem de pontos localizada restrita por discos de Poisson (HLRPDS) se, e somente se, cada conjunto  $P_k$  é uma LRPDS com os respectivos parâmetros  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ . Se nesta hierarquia  $P_{k-1} = P_k - \{p_k\}$ , para cada  $k$ , então a hierarquia é dita graduada. (figura 4.3)

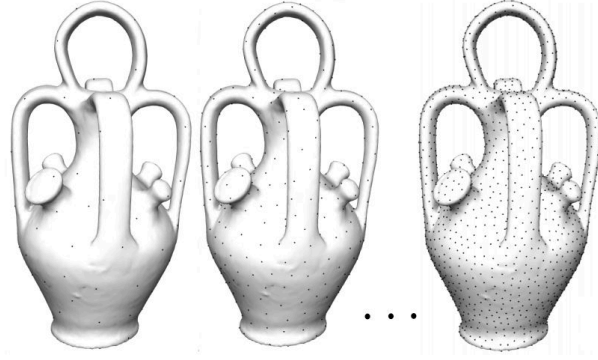


Figura 4.3: Família de conjuntos encaixantes [2]

A combinação desses conceitos define a estrutura hierárquica de uma amostragem de pontos sobre uma superfície  $\mathcal{W}$ , onde em cada nível  $P_k$  os pontos são distribuídos uniformemente e a distância entre quaisquer dois pontos distintos amostrados é maior que um raio mínimo  $\alpha_k$  fixado e, além disso, um raio  $\beta_k$  é escolhido para controlar a maximalidade desta distribuição.

Os próximos conceitos a serem revisados estabelecem uma partição de  $\mathcal{W}$ , relativa ao conjunto amostrado  $P_{N'}$ , pelo diagrama de Voronoi localizado restrito (LRVD) e, também, a extração do conjunto dual denotado pelo complexo de Delaunay localizado restrito (LRDC). Com ambos os complexos produzidos a partir de uma LRPDS é possível estabelecer uma superfície discreta  $\mathcal{M} = (J, X)$  na qual  $X = P_{N'}$  e onde o complexo simplicial  $J$  é determinado pela triangulação de Delaunay localizada restrita (LRDT). Esta nova triangulação resulta do remalhamento da superfície  $\mathcal{M}'$  que é auxiliado por LRVD. A triangulação de  $\mathcal{M}'$  e essa nova triangulação de  $\mathcal{M}$  são topologicamente equivalentes e, ainda, essa nova triangulação é composta por triângulos de boa qualidade que é verificada pela razão de aspecto medida em cada triângulo. Essas garantias topológicas e geométricas são detalhadas em [2].

- v. Seja  $P_{N'} = \{p_i^{N'}\}_{i=1}^n$  uma LRPDS sobre  $\mathcal{W}$ . Uma partição regular da superfície  $\mathcal{W}$  em regiões  $\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^n$  que considera  $P_{N'}$  é um LRVD( $P_{N'}$ ) se, e somente se, (1)  $p_i^{N'} \in \mathcal{V}_i$  para todo  $i$  e (2) para cada  $j \neq i$ , se  $q \in \partial\mathcal{V}_i \cap \partial\mathcal{V}_j$  então  $\|p_i^{N'} - q\| = \|p_j^{N'} - q\|$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana.

A geração do  $\text{LRVD}(P_{N'})$  não é unicamente determinada de acordo com a definição apresentada em (v). Uma partição da superfície em regiões de Voronoi condicionada a  $P_{N'}$  pode ser realizada particularmente inflando bolas  $B_{r_t}(p_i^{N'})$  ao longo do tempo  $t$  que aumenta com taxa constante. Inicialmente, em  $t = 0$ , um raio  $r_0$  é escolhido de modo que  $N_{r_0}(p_i^{N'}) \cap N_{r_0}(p_j^{N'}) = \emptyset$  para cada  $i \neq j$  e  $\mathcal{V}_i \leftarrow N_{r_0}(p_i^{N'})$ . Na propagação do tempo cada ponto da superfície é atribuído a primeira região designada pela  $N_{r_t}$  que o atinge. Um ponto atingido ao mesmo tempo por duas ou três regiões pertence a fronteira de interseção destas regiões. Além disso, quatro ou mais regiões podem se encontrar num ponto  $q$  da superfície e isso indica que cada ponto  $p_i^{N'}$  gerador das regiões correspondentes pertence a uma esfera centrada em  $q$ . O processo finaliza quando todo ponto da superfície pertence a pelo menos uma região ou a fronteira de interseção de duas ou mais regiões.

- vi. Seja  $\text{LRVD}(P_{N'})$  uma partição de  $\mathcal{W}$  em regiões de Voronoi  $\{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^n$ . O complexo dual tal que  $\zeta(\mathcal{V}_i) = p_i^{N'}$  constitui o complexo de Delaunay localizado restrito de  $P_{N'}$ . Em particular, o conjunto de triângulos definido por este complexo constitui a LRDT.

A  $\text{LRDT}(P_{N'})$  é uma triangulação obtida do  $\text{LRDC}(P_{N'})$  em que cada ponto  $p_i^{N'}$  representa o vértice central de uma estrela cujo *link* é formado pelos vértices localizados nos pontos geradores das regiões vizinhas e que compartilham uma aresta com  $\mathcal{V}_i$ . Se cada estrela centrada num vértice em  $p_i^{N'}$  é topologicamente equivalente a um disco, então o  $\text{LRDC}(P_{N'})$  coincide com a  $\text{LRDT}(P_{N'})$ . Além disso, se a superfície triangularizada  $\mathcal{M}'$  e a superfície  $\mathcal{M}$ , triangularizada por  $\text{LRDT}(P_{N'})$ , possuem o mesmo número de Euler então são topologicamente equivalentes [2].

A estrutura de multi-triangulação que originalmente foi proposta por [44] é utilizada com a HLRPDS para armazenar as modificações locais realizadas entre níveis consecutivos desta hierarquia graduada. Um fragmento da triangulação correspondente ao nível corrente é substituído por um novo fragmento configurando a nova triangulação do nível subsequente.

- vii. Seja  $\mathcal{T}_0 = \text{LRDT}(P_{N'})$  a triangulação de  $\mathcal{M}$  e  $\widehat{\mathcal{T}}_i$  uma triangulação contida em  $\mathcal{T}_0$ . A substituição da triangulação  $\widehat{\mathcal{T}}_i$  por  $\mathcal{T}_i$  é uma modificação local minimamente compatível realizada em  $\mathcal{T}_0$  e denotada por  $\mathcal{T}_0 \oplus \mathcal{T}_i$  se, e somente se, (1)  $\partial \widehat{\mathcal{T}}_i = \partial \mathcal{T}_i$  e (2)  $\mathcal{T}_i - \widehat{\mathcal{T}}_i = \text{int}(\mathcal{T}_i)$ .
- viii. A família de triangulações  $\{\mathcal{T}_s\}_{s=1}^m$  é uma sequência de modificações locais minimamente compatível se cada triangulação  $\mathcal{T}_i$  dessa família é uma modificação local minimamente compatível realizada em  $\oplus_{s=0}^{i-1} \mathcal{T}_s$ . Além

disso, essa sequência é não redundante se para cada triângulo  $\Delta \in \mathcal{T}_i$  implicar que  $\Delta \notin \mathcal{T}_j$ , sempre que  $i \neq j$ .

- ix. Uma multi-triangulação (MT) com relação a uma sequência de modificações locais minimamente compatível e não redundante  $\{\mathcal{T}_s\}_{s=1}^m$  é um grafo orientado acíclico com raiz em  $\mathcal{T}_0$  no qual (1) cada nó  $i \in \{1, \dots, m\}$  representa uma triangulação atualizada pela inserção de  $\mathcal{T}_i$  e (2) entre nós distintos  $i < j$  existe uma aresta  $(i, j)$  se, e somente se, há um triângulo em  $\mathcal{T}_i$  que pertence a  $\widehat{\mathcal{T}}_j$ .

Considerando a HLRPDS graduada  $\{P_k\}_{k=1}^{N'}$  onde cada  $\text{LRDC}(P_k)$  é denotado por  $D_k$ , para cada  $k$ . A simplificação local que converte  $D_k$  em  $D_{k-1}$  referente aos níveis consecutivos  $P_k$  e  $P_{k-1}$  consiste na modificação que substitui os simplexos de  $\text{Star}(p_k, D_k)$  por  $D_{k-1} - D_k$ . Em particular, quando  $\text{Star}(p_k, D_k)$  é topologicamente equivalente a um disco essa substituição na triangulação de  $\text{Star}(p_k, D_k)$  pela triangulação em  $D_{k-1} - D_k$  é uma modificação local minimamente compatível, conforme exemplificado na figura 4.4.

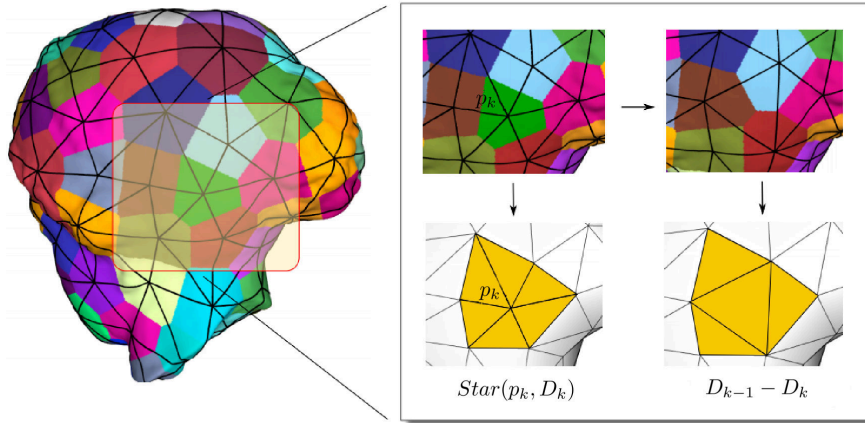


Figura 4.4: Modificação local por triangulação de Delaunay [2]

A equivalência  $\text{Star}(p_k, D_k) = D_k - D_{k-1}$  é garantida na HLRPDS graduada pois durante a construção do  $\text{LRVD}(P_k - \{p_k\})$  é necessário remover a região de Voronoi  $\mathcal{V}_k$  e atualizar as regiões de Voronoi que fazem fronteira com  $\mathcal{V}_k$  a fim de preencher a lacuna deixada. Deste modo, o complexo  $D_{k-1}$  é obtido com a manutenção dos simplexos de  $D_k$  tendo por exceção a  $\text{Star}(p_k, D_k)$ .

**A estrutura HPDS-MT:**

A multi-triangulação produzida a partir da superfície triangularizada  $\mathcal{M}$  e pelas modificações que são orientadas por uma HLRPDS graduada  $\{P_k\}_{k=1}^{N'}$  é a sequência de modificações locais minimamente compatível e não redundante  $\{\mathcal{T}_k\}_{k=1}^N$ , onde  $N \leq N'$ , e denotada por HPDS-MT. Essa sequência de modificações é construída a partir de cada  $\text{LRDC}(P_k)$ , denotado por  $D_k$ , a partir do algoritmo 3.

**Algoritmo 3: CONSTRUÇÃO DA HPDS-MT [2]**


---

**Entrada:**  $\mathcal{M}'$ ,  $\{P_k\}_{k=1}^{N'}$   
**Saída:**  $\{\mathcal{T}_i\}$

```

1 início
2    $\mathcal{T}_0 \leftarrow D_{N'}$ 
3    $Q \leftarrow P_{N'}$ 
4    $k \leftarrow N'$ 
5    $i \leftarrow 1$ 
6   enquanto  $k \geq 2$  faça
7      $\text{cond}_1 \leftarrow \text{Star}(p_k, D_k) = \text{Star}(p_k, \oplus_{s=0}^{i-1} \mathcal{T}_s)$ 
8     se  $\text{cond}_1$  então
9        $\text{cond}_2 \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
10      para  $p_l$  adjacente a  $p_k$  faça
11        se  $\neg \text{propDiscoTopo}(p_l)$  então
12           $\text{cond}_2 \leftarrow \text{falso}$ 
13        fim
14      fim
15      se  $\text{cond}_2$  então
16         $\mathcal{T}_i \leftarrow \overline{D_{k-1} - D_k}$ 
17         $Q \leftarrow Q - \{p_k\}$ 
18         $i \leftarrow i + 1$ 
19      fim
20    fim
21     $k \leftarrow k - 1$ 
22  fim
23 fim
```

---

A propriedade  $\text{propDiscoTopo}(p_l)$  verifica se todas as arestas incidentes a  $p_l$  é adjacente a exatamente dois triângulos numa nova configuração hipotética em que  $p_k$  seja removido, ou seja, se a remoção de  $p_k$  não interferirá na topologia local. Caso a propriedade do disco topológico não seja satisfeita, então não ocorre a remoção de  $p_k$  na sequência do algoritmo.

Em alguns casos,  $D_k$  pode não ser uma triangulação e isso ocorre quando não há um isomorfismo entre  $D_k$  e  $\oplus_{s=0}^{i-1} \mathcal{T}_s$  conforme indicado nos vértices destacados na figura 4.5. A coincidência entre a vizinhança de  $p_k$  em  $D_k$

com a vizinhança de  $p_k$  na triangulação  $\oplus_{s=0}^{i-1} \mathcal{T}_s$  é checada previamente para impedir que a atualização da multi-triangulação seja realizada, caso essa condição não ocorra. Neste caso, o vértice em  $p_k$  é mantido na triangulação,  $i$  não é incrementado, e o complexo  $D_{k-1}$  será investigado dando sequência a construção da multi-triangulação.

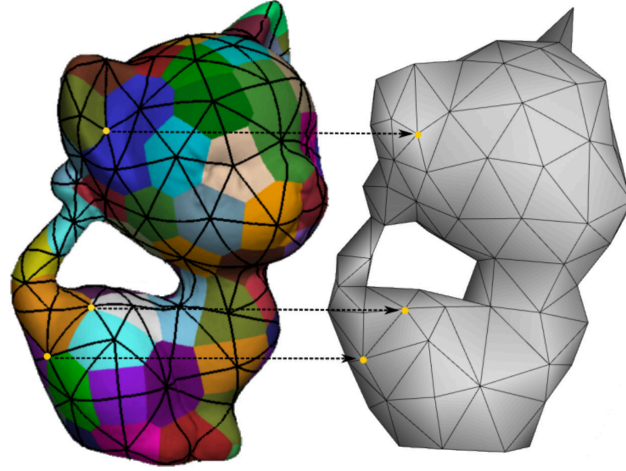


Figura 4.5: A aproximação das regiões de Voronoi é identificada em cores (esquerda), os vértices de conflito destacados estão mantidos e a triangulação  $\oplus_{s=0}^{i-1} \mathcal{T}_s$  correspondente é obtida (direita) [2]

As superfícies triangularizadas  $\{\mathcal{M}_k\}_{k=0}^N$  são determinadas, respectivamente, pelas triangulações  $\oplus_{s=0}^{N-k} \mathcal{T}_s$ , para cada valor de  $k$ . Essas triangulações são fornecidas pela HPDS-MT, que gerencia as modificações locais minimamente compatíveis realizadas a partir de  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_N$  e é orientada pela HLRPDS graduada.

#### 4.2.2

##### Projeção subsequente

Ao longo da construção auxiliada pela HPDS-MT de uma sequência de superfícies triangularizadas  $\{\mathcal{M}_k\}_{k=0}^N$  é armazenado um histórico contendo as informações da projeção de um vértice  $v_k \in \mathcal{M}_k$  sobre  $\mathcal{M}_{k-1}$ . Esta correspondência é viabilizada localmente durante a substituição da triangulação  $\hat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} \subset \oplus_{s=0}^{N-k} \mathcal{T}_s$  pela nova triangulação  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$ , onde  $\hat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)}$  é identificada com a  $Star(v_k, \mathcal{M}_k)$  e  $k \in \{1, \dots, N\}$ . O histórico das projeções em níveis subsequentes é necessário para que seja possível construir a projeção hierárquica que identifica todos vértices de  $\mathcal{M}_k$  sobre  $\mathcal{B}$ .

A aplicação  $pr|_{X_k} : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M}_{k-1}$  que projeta todos os vértices de  $X_k$  sobre  $\mathcal{M}_{k-1}$  associa esses vértices por identidade, exceto o vértice  $v_k \in X_k \cap X_{k-1}$ . A modificação que transforma  $\mathcal{M}_k$  em  $\mathcal{M}_{k-1}$  ocorre apenas na

triangulação limitada por  $\partial\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)}$  de modo que,  $\partial\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} = \partial\mathcal{T}_{N-(k-1)}$ . Por este motivo, é natural estabelecer a localização de  $pr(v_k)$  dentro de algum triângulo da triangulação  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$ .

Esse procedimento de localização foi utilizado no capítulo anterior (subseção 3.2.3) durante a simplificação da superfície a fim de armazenar as informações das modificações locais que permitiam realizar, no sentido inverso, o refinamento. Naquele caso, a superfície triangularizada admite uma identificação total da superfície com um domínio bidimensional por meio da sua parametrização, essa estratégia foi utilizada inicialmente por [21] e também em [13]. Essas parametrizações locais foram construídas com a aplicação conforme [20] que identifica uma estrela da superfície triangularizada isomorficamente com um polígono triangularizado num domínio bidimensional.

Para associar os vértices da triangulação  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)}$  com os vértices de um polígono bidimensional, seja  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} = \bigcup_{j=0}^{\omega_k-1} t_{k_j}$ , onde  $\omega_k$  é a valência do vértice  $v_k$  e  $t_{k_j} = [v_{k_j}, v_k, v_{k_{j+1}}]$  é um triângulo de  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)}$  com  $v_{k_{\omega_k}} = v_{k_0}$ , além disso, seja  $\theta_{k_j}$  um ângulo interno de  $t_{k_j}$  com vértice em  $v_k$  e, também,

$$\Theta_{k_0} = 0, \quad \Theta_{k_j} = \sum_{s=0}^{j-1} \theta_{k_s}, \quad \text{para } j > 0, \quad \Theta = \sum_{s=0}^{\omega_k-1} \theta_{k_s}$$

Deste modo, o mapeamento é definido nos vértices como

$$\xi(v_k) = 0 \text{ e } \xi(v_{k_j}) = \|v_{k_j} - v_k\|^\alpha e^{i\alpha\Theta_{k_j}},$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana,  $\alpha = \frac{2\pi}{\Theta}$  e  $i$  é a unidade imaginária. Essa aplicação tem vantagens como a bijetividade, a preservação de ângulos e a simplicidade computacional.

A triangulação  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  constitui isomorficamente o novo polígono bidimensional triangularizado obtido após remoção de  $v_k$ . Deste modo, o correspondente  $\xi(v_k)$  fixado no centro do plano complexo pertencerá a algum triângulo deste novo polígono. Assim como, na abordagem apresentada na subseção 3.2.3 as coordenadas baricêntricas de  $\xi(v_k)$  em relação aos vértices do triângulo que o contém são utilizadas para determinar a  $pr(v_k)$  no triângulo correspondente em  $\mathcal{M}_{k-1}$ . A figura 4.6 ilustra essa projeção.

Durante a simplificação são armazenadas, em uma lista indexada de acordo com as remoções de vértices no sentido da multi-triangulação, (i) as coordenadas baricêntricas de  $\xi(v_k)$  que determinam a projeção de  $v_k$  no triângulo associado de  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  e, também, (ii) os índices dos vértices desse triângulo ordenados de acordo com as coordenadas baricêntricas.



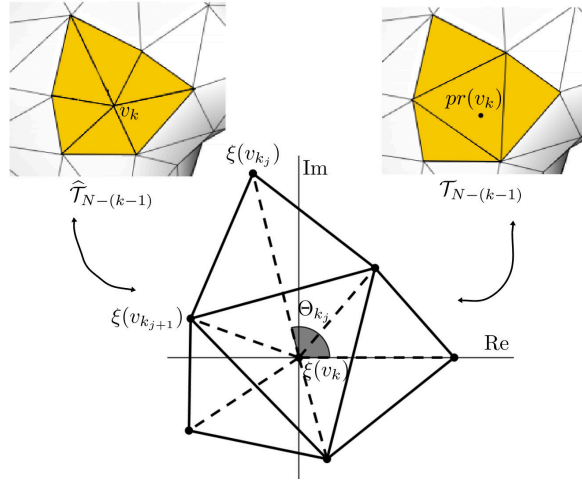


Figura 4.6: Projeção dos vértices em níveis subsequentes

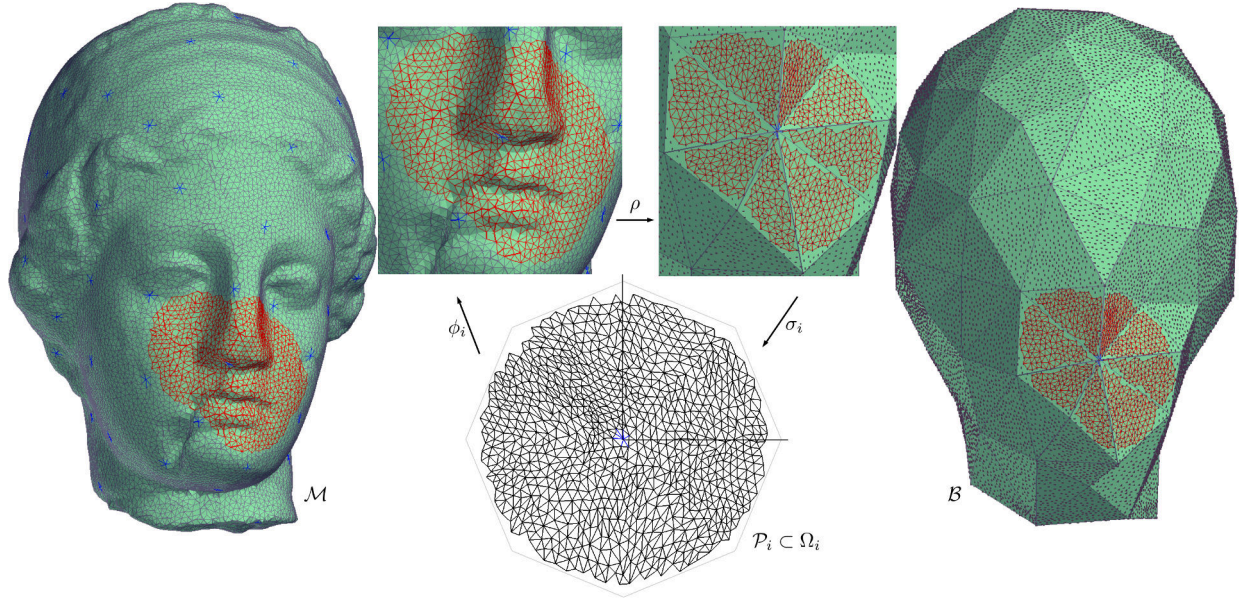
### 4.3

#### Projeção hierárquica

A construção de um sistema de parametrizações da superfície triangularizada  $\mathcal{M}$  envolvendo a estrutura da variedade diferenciável consiste no recorte da superfície em pedaços que sejam topologicamente equivalentes a um disco. Por esses pedaços são introduzidas as parametrizações que os identificam individualmente com sistemas de coordenadas bidimensionais. Para tanto, a estrutura apresentada em [1] e detalhada em [12] requer uma superfície base  $\mathcal{B} = (J_0, X_0)$  que seja topologicamente equivalente a  $\mathcal{M} = (J_N, X_N)$ . Além disso, é necessário que haja uma projeção  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$  que parametrize biunivocamente os vértices de  $X_N$  sobre o domínio não euclidiano  $|J_0|$ .

Essa localização biunívoca está necessariamente relacionada com a construção do sistema de parametrizações que identifica múltiplas regiões de  $\mathcal{M}$  num domínio bidimensional, em particular, foi apresentado na subseção 3.2.2 do capítulo anterior a construção da parametrização de uma região de  $\mathcal{M}$  para a qual foi assumida a existência de uma superfície base  $\mathcal{B}$  e uma projeção  $\rho$ . Seja  $X_k = X_0 \cup \{v_1, \dots, v_k\}$  o conjunto de vértices da superfície  $\mathcal{M}_k$  em que  $k \in \{1, \dots, N\}$  varia de acordo com a graduação da HPDS-MT. Particularmente,  $X_0 = \{v_{0_i}\}_{i=1}^n$  compõem a superfície base e  $k = N$  indexa a superfície original. Os vértices  $v_k \in X_N$  são identificados por  $\rho$  em  $|J_0|$  e cada  $\rho(v_k) \in |Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$  que é parametrizado no interior do conjunto aberto  $\Omega_i$  compõem a triangulação  $\mathcal{P}_i \subset \Omega_i$ . A figura 4.7 exemplifica a região de  $\mathcal{M}$  parametrizada em  $\Omega_i$  pela aplicação  $\phi_i$ .

As arestas destacadas em azul na triangulação  $\mathcal{M}$  incidem sobre os vértices de  $\mathcal{B}$  que sobreviveram ao processo de simplificação. A aplicação bijetiva  $\psi_i = \phi_i^{-1}$  associa triângulos de  $\mathcal{M}$  com triângulos não-degenerados

Figura 4.7: Projeção dos vértices de  $\mathcal{M}$  em  $\mathcal{B}$ 

de  $\mathcal{P}_i$ . A região de  $\mathcal{M}$  destacada em vermelho representa a pré-imagem da aplicação  $\psi_i$ . Essa construção é realizada para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  e permite identificar bijetivamente todos os triângulos de  $\mathcal{M}$  em algum domínio  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ .

#### A projeção $\rho_k : \mathcal{M}_N \rightarrow \mathcal{M}_k$

A metodologia de localização é apresentada inicialmente por [21] e consiste na construção de uma sequência composta pelas projeções da família  $\{\rho_k : \mathcal{M}_N \rightarrow \mathcal{M}_k\}_{k=0}^N$  que incrementalmente localiza, neste contexto de multi-triangulação graduada, os vértices de  $X_N$  sobre  $|J_k|$  ao longo da HPDS-MT. Neste caso, cada projeção  $\rho_{k-1}$  pressupõem que a projeção  $\rho_k$  já tenha sido efetuada,  $k > 0$ . Em especial,  $\rho_N$  é uma aplicação identidade e  $\rho_0 = \rho$  é a aplicação desejada.

Na construção segundo [21], se a projeção  $\rho_k$  for previamente considerada então para cada vértice  $v \in \mathcal{M}_N$  serão consideradas três hipóteses mutuamente excludentes: (1)  $v \in X_{k-1}$  (2)  $v \in X_k - X_{k-1}$  (3)  $v \in X_N - X_k$ . Com estas hipóteses, a projeção  $\rho_{k-1}(v)$  será calculada, respectivamente, assim:

- (1)  $\rho_{k-1}(v) = \rho_k(v) = v$ ;
- (2)  $\rho_{k-1}(v) = av_r + bv_s + cv_t$ , onde  $a, b, c$  são coordenadas baricêntricas obtidas após a parametrização de  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_k$  pela aplicação  $\xi$  da subseção 4.2.2 e  $[v_r, v_s, v_t]$  é um triângulo criado pela modificação local que produz  $\mathcal{T}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_{k-1}$  a partir da remoção de  $v = v_k$ ;

- (3)  $\rho_k(v) \notin X_k$  implica na existência de um triângulo  $[v_{r'}, v_{s'}, v_{t'}]$  em  $\mathcal{M}_k$  e coordenadas baricêntricas  $a', b', c'$  tal que  $\rho_k(v) = a'v_{r'} + b'v_{s'} + c'v_{t'}$ :
- (i) se o triângulo  $[v_{r'}, v_{s'}, v_{t'}]$  permanece em  $\mathcal{M}_{k-1}$ , ou seja,  $k \notin \{r', s', t'\}$ , então  $\rho_{k-1}(v) = \rho_k(v)$ ;
  - (ii) se o triângulo  $[v_{r'}, v_{s'}, v_{t'}]$  não permanece em  $\mathcal{M}_{k-1}$ , ou seja,  $k \in \{r', s', t'\}$ , então esse triângulo que compunha  $\hat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_k$  desaparece na modificação local que remove  $v_k$  e produz  $\mathcal{T}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_{k-1}$  e, ainda, com o auxílio da parametrização  $\xi$  é possível obter o triângulo  $[v_{r''}, v_{s''}, v_{t''}]$  de  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  e coordenadas baricêntricas  $a'', b'', c''$  tais que  $\rho_{k-1}(v) = a''v_{r''} + b''v_{s''} + c''v_{t''}$ .

A figura 4.8 exemplifica os casos considerados. A projeção  $\rho_{k-1}$  preserva, pelo caso (1), todos os vértices mantidos após a modificação local que transforma  $\mathcal{M}_k$  em  $\mathcal{M}_{k-1}$ , mas o vértice representado pela cor vermelha pertence a  $X_N - X_k$  e, portanto, é projetado pelo caso (3.ii) dentro do novo triângulo criado e o vértice representado pela cor azul pertence a  $X_k - X_{k-1}$  e, portanto, é projetado pelo caso (2).

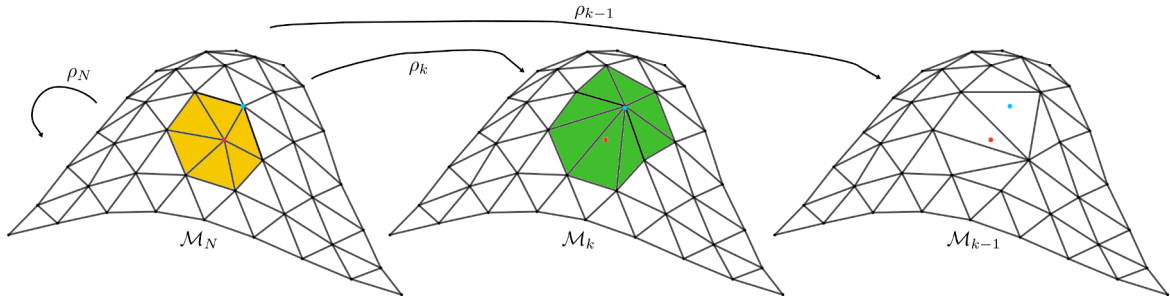


Figura 4.8: Projeção dos vértices de  $\mathcal{M}_N$  sobre  $\mathcal{M}_{k-1}$

Ao longo da simplificação regulamentada pela HPDS-MT em torno de cada  $v_k$  todos os vértices de  $\mathcal{M}_N$  são projetados em  $\mathcal{M}_k$  e somente após a realização de  $N$  passos de simplificação a projeção  $\rho : \mathcal{M}_N \rightarrow \mathcal{M}_0 = \mathcal{B}$  será alcançada. A posição de cada vértice em  $\mathcal{M}_k$  é identificada bijetivamente sobre  $\mathcal{M}_{k-1}$ , sobretudo na região  $\hat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_k$  em que o vértice  $v_k$  é biunivocamente projetado em algum triângulo de  $\mathcal{T}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_{k-1}$ . Essa bijetividade entre níveis subsequentes garante a bijetividade da aplicação  $\rho$ , mas nem sempre a orientação dos triângulos de  $\mathcal{M}_N$  é preservada por essa projeção e isso implica em falhas de orientação em algum  $\mathcal{P}_i$ . Neste caso, as posições projetadas sobre  $|J_0|$  podem ser reposicionadas, com algum procedimento adicional, em torno dos vértices projetados com problemas de orientação.

### A projeção $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$

A projeção que localiza os vértices de  $\mathcal{M}_k$  sobre  $|J_0|$  é fundamental para o processo de otimização hierárquica que será apresentado em outra seção mais adiante e é construído com duas etapas. A primeira etapa ocorre durante a simplificação e consiste no armazenamento de uma lista indexada por cada nível  $k$  contendo as informações da correspondência entre o vértice  $v_k$  de  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_k$  e algum triângulo da nova triangulação obtida pela modificação local  $\mathcal{T}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_{k-1}$ , subseção 4.2.2. A segunda etapa ocorre durante o refinamento da superfície base  $\mathcal{B}$  até atingir a superfície original  $\mathcal{M}_N$ , onde cada vértice  $v_k$  removido é reinserido no sentido contrário à remoção.

No refinamento, a triangulação  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  é desfeita e a triangulação  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)}$  é reconstruída e, simultaneamente, a projeção do vértice  $v_k$  sobre  $|J_0|$  é determinada como

$$\rho(v_k) = a_k v_{0_i} + b_k v_{0_{i+1}} + c_k v_{0_{i+2}},$$

onde  $[v_{0_i}, v_{0_{i+1}}, v_{0_{i+2}}]$  é algum triângulo selecionado em  $\mathcal{B}$  a partir do histórico de informações armazenadas e  $a_k, b_k, c_k$  são coordenadas baricêtricas,  $a_k + b_k + c_k = 1$ . A projeção  $\rho$  que em cada passo de refinamento localiza o vértice  $v_k \in X_k$  em  $|J_0|$  é a projeção hierárquica de  $\mathcal{M}$  em  $\mathcal{B}$ .

Na abordagem anterior, proposta por [21], após  $N$  passos de simplificação todos os vértices de  $X_N$  estarão projetados sobre  $|J_0|$  e ao longo do refinamento, portanto, cada conjunto  $\rho(X_k)$  estará totalmente determinado sobre  $|J_0|$ ,  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Especificamente, um nível  $k-1$  definindo por  $\mathcal{M}_{k-1}$  sofre uma modificação em  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  quando inserido o vértice  $v_k$  e se recupera localmente  $\widehat{\mathcal{T}}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_k$ . Neste momento,  $\rho(v_k)$  estará atribuído em algum triângulo de  $\mathcal{B}$  e, com isso,  $\rho(X_k)$  ficará completamente localizado sobre  $|J_0|$ . Caso os pontos do conjunto  $\rho(X_{k-1})$  tenham sido reposicionados eventualmente sobre  $|J_0|$  por algum processo intermediário então  $\rho(v_k)$  estará sensível a estas mudanças ocorridas no conjunto  $\rho(X_{k-1})$ , ou seja,  $(\sigma_i \circ \rho)(v_k)$  poderá introduzir vários problemas de preservação da orientação dos triângulos incidentes em  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$ , para algum  $i$ .

O reposicionamento de  $\rho(v_k)$  poderia ser feito adicionalmente a fim de que  $\mathcal{P}_i^k$  fosse uma triangulação bem determinada, mas esse ajuste teria que ser realizado na projeção dos próximos vértices inseridos para continuar garantindo a triangulação. Além disso, esse procedimento pode interferir na qualidade da projeção dos vértices sobre  $|J_0|$ . E ainda, um triângulo de  $\mathcal{M}$  pode ser identificado simultaneamente em até três domínios,  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i, \mathcal{P}_j^k \subset \Omega_j$  e

$\mathcal{P}_h^k \subset \Omega_h$ , respectivamente, pelas aplicações  $\sigma_i \circ \rho$ ,  $\sigma_j \circ \rho$  e  $\sigma_h \circ \rho$ , portanto um ajuste adicional da projeção de  $v_k$  teria que garantir a triangulação em todos os domínios alcançados.

A projeção hierárquica não pode ser previamente determinada sobre  $|J_0|$  sem que hajam tratamentos adicionais, no caso de eventuais reposicionamentos. Estes reposicionamentos ocorrerão naturalmente durante a otimização hierárquica e, portanto, a projeção hierárquica idealmente deverá preservar a integridade da triangulação parametrizada em cada domínio  $\Omega_i$ . A projeção hierárquica adequada deverá ser calculada em cada nível durante o refinamento e dependerá apenas dos vértices já projetados em níveis anteriores. Desse modo, quando um vértice  $v_k$  é inserido na triangulação a sua projeção  $\rho(v_k)$  deve ser calculada imediatamente sobre  $|J_0|$  e a sua posição dependerá da projeção subsequente de  $v_k$  em algum triângulo de  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  que foi armazenada em lista indexada pela ordem da simplificação. Durante o refinamento, os vértices desse triângulo subsequente já foram inseridos e projetados anteriormente sobre  $|J_0|$  e essas projeções conduzirão a projeção do novo vértice  $v_k$ .

O cálculo da projeção de  $v_k$  sobre  $|J_0|$  será realizado incrementalmente em função da projeção subsequente de  $v_k$  em  $|J_{k-1}|$ . Neste caso, para cada vértice  $v_k$  inserido na etapa de refinamento, existe um triângulo  $[v_r, v_s, v_t]$  na triangulação  $\mathcal{T}_{N-(k-1)} \subset \mathcal{M}_{k-1}$  e existem coordenadas baricêntricas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , respectivamente, relacionadas aos vértices do triângulo tais que a projeção subsequente é  $av_r + bv_s + cv_t$ . Os vértices  $v_r$ ,  $v_s$ ,  $v_t$  pertencem a  $X_{k-1}$  e portanto já foram reinseridos e projetados sobre  $|J_0|$ . A figura 4.9 exibe a sistematização da projeção em que o vértice  $v_k$  é levado em  $|J_0|$ , bem como, as parametrizações  $\phi_i$  nos níveis subsequentes  $k-1$  e  $k$ .

A determinação de  $\rho(v_k)$  suporá que  $\rho(v_r)$ ,  $\rho(v_s)$ ,  $\rho(v_t)$  já tenham sido determinados, portanto é necessário iniciar o processo incremental com a projeção dos vértices de  $X_0$  sobre  $|J_0|$ . Estes vértices devem ser projetados por identidade pois estão naturalmente sobre  $|J_0|$  compondo a superfície base. Em cada vértice  $v_k$  são atribuídas nele propriedades de localização que identificam a sua projeção sobre  $|J_0|$ : (i) índice do triângulo na superfície base, (ii) coordenadas do triângulo na superfície base e (iii) respectivas coordenadas baricêntricas. Inicialmente cada vértice  $v_{0_i}$  de  $X_0$  é projetado em um triângulo qualquer incidente em  $v_{0_i}$  com coordenadas baricêntricas  $(1, 0, 0)$  ou  $(0, 1, 0)$  ou  $(0, 0, 1)$  adequadas para o manter como vértice deste triângulo escolhido. Em seguida, três casos mutuamente excludentes serão considerados para calcular  $\rho(v_k)$ :

- (1) se  $\{v_r, v_s, v_t\} \subset X_0$  e  $[v_r, v_s, v_t]$  compõem um único triângulo de  $\mathcal{B}$  então



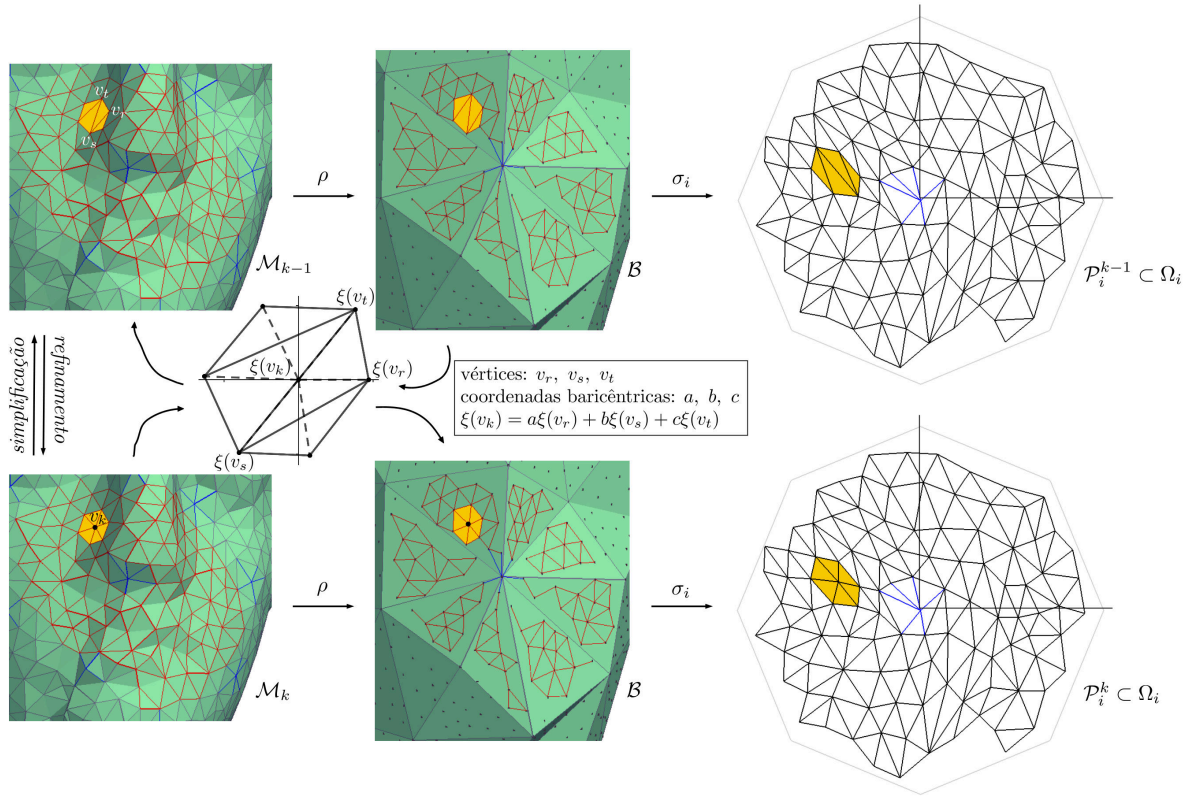


Figura 4.9: Projeção do vértice  $v_k$  sobre  $|J_0|$  e  $\psi_i = \sigma_i \circ \rho$  em  $\mathcal{M}_{k-1}$  e  $\mathcal{M}_k$

$\rho(v_r) = v_r, \rho(v_s) = v_s, \rho(v_t) = v_t$ , portanto

$$\rho(v_k) = a_k \rho(v_r) + b_k \rho(v_s) + c_k \rho(v_t) = a_k v_r + b_k v_s + c_k v_t$$

onde  $a_k = a, b_k = b, c_k = c$ ;

- (2) se  $\{v_r, v_s, v_t\} \not\subset X_0$  e  $\rho(v_r), \rho(v_s), \rho(v_t)$  pertencem a algum triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_{i+1}}, v_{0_{i+2}}]$  de  $\mathcal{B}$ , então

(i)  $\rho(v_k) = a\rho(v_r) + b\rho(v_s) + c\rho(v_t)$ ;

- (ii) calcular as coordenadas baricêntricas  $a_k, b_k, c_k$ , tais que,  $\rho(v_k) = a_k v_{0_i} + b_k v_{0_{i+1}} + c_k v_{0_{i+2}}$ ;

- (3) se  $\rho(v_r), \rho(v_s), \rho(v_t)$  pertencem a mais de um triângulo em  $\mathcal{B}$  então essas projeções não definem vértices de um triângulo contido em  $|J_0|$ . Deste modo, é necessário determinar uma triangulação  $\mathcal{R}_k = (X_{\mathcal{R}_k}, J_{\mathcal{R}_k})$  que contenha essas projeções, onde  $X_{\mathcal{R}_k} \subset X_0$  e  $J_{\mathcal{R}_k} \subset J_0$  e com ela:

- (i) construir uma aplicação bijetiva  $\varphi_k : \mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{Q}_k \subset \mathbb{R}^2$ ;

- (ii) calcular  $\varphi_k(\rho(v_r))$ ,  $\varphi_k(\rho(v_s))$ ,  $\varphi_k(\rho(v_t))$  em  $\mathcal{Q}_k$  usando as coordenadas baricêntricas armazenadas como propriedades de localização dos vértices  $v_r$ ,  $v_s$ ,  $v_t$ ;
- (iii) calcular  $\varphi_k(\rho(v_k)) = a\varphi_k(\rho(v_r)) + b\varphi_k(\rho(v_s)) + c\varphi_k(\rho(v_t))$  e buscar o triângulo  $[\varphi_k(v_{0_i}), \varphi_k(v_{0_{i+1}}), \varphi_k(v_{0_{i+2}})]$  em  $\mathcal{Q}_k$  que contenha  $\varphi_k(\rho(v_k))$ ;
- (iv) calcular as coordenadas baricêntricas  $a_k, b_k, c_k$ , tais que,  $\varphi_k(\rho(v_k)) = a_k\varphi_k(v_{0_i}) + b_k\varphi_k(v_{0_{i+1}}) + c_k\varphi_k(v_{0_{i+2}})$ ;
- (v)  $\rho(v_k) = a_kv_{0_i} + b_kv_{0_{i+1}} + c_kv_{0_{i+2}}$ .

Com essa metodologia, a projeção hierárquica  $\rho(X_k)$ , em cada nível  $k$ , produzirá triangulações que preserva quase sempre a orientação de  $\mathcal{M}_k$  nos domínios paramétricos  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Além disso, estará sempre adequada aos possíveis reposicionamentos ocorridos em  $\rho(X_{k-1})$ , pois o cálculo de  $\rho(v_k)$  é realizado no momento da reinserção de  $v_k$  e o posicionamento é assegurado pelas coordenadas baricêntricas armazenadas pela projeção subsequente obtida na simplificação. As figuras 4.10, 4.11 e 4.12 ilustram os casos de projeção adotados nesta metodologia.

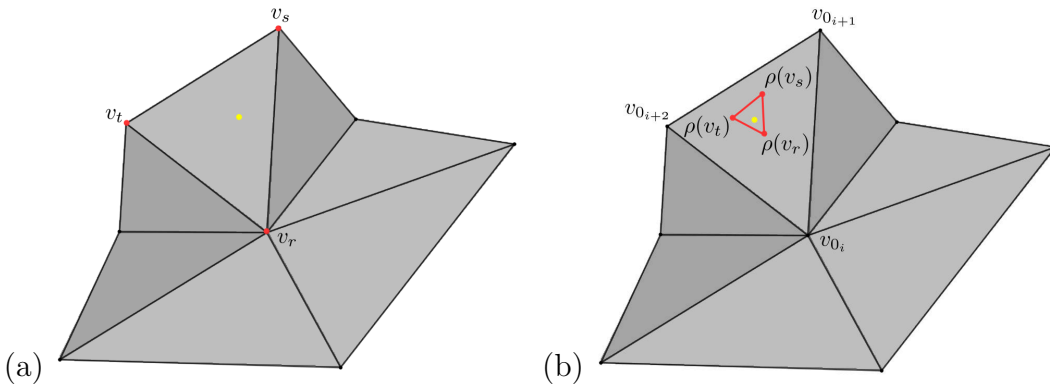
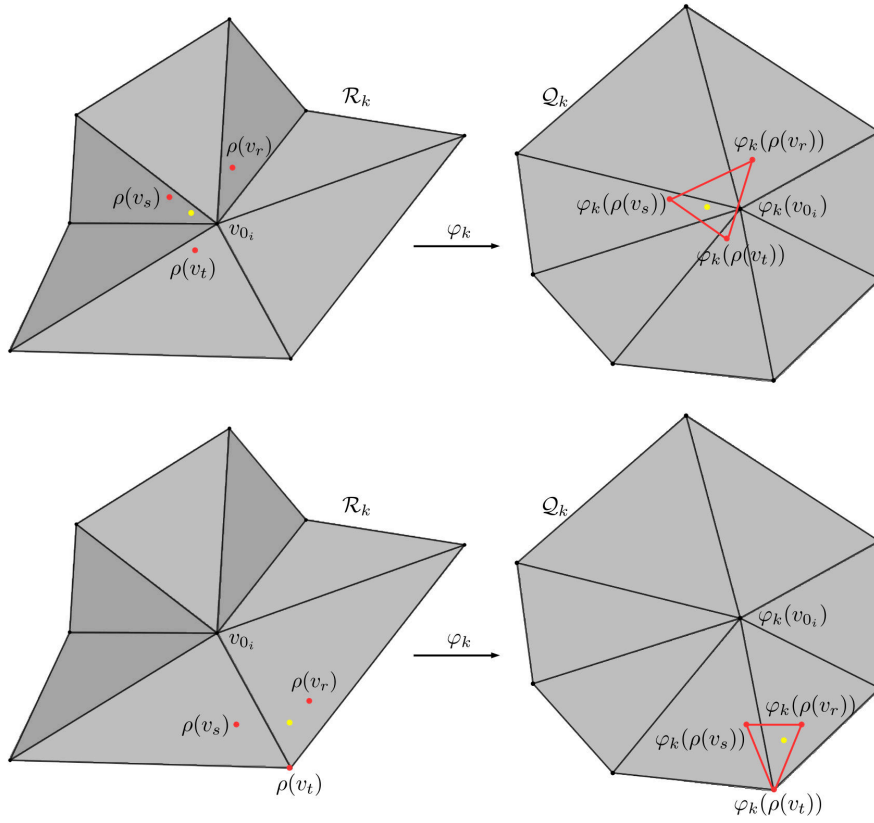
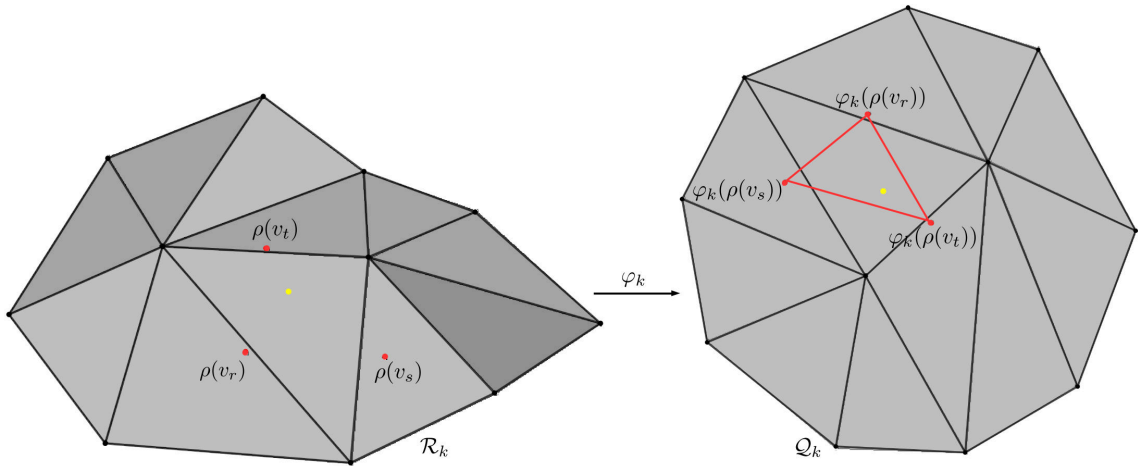


Figura 4.10: Projeções nos casos (a) 1 e (b) 2

A região  $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{B}$  é obtida com uma *frente de avanço* na triangulação  $\mathcal{B}$  partindo de um triângulo que contenha a projeção de  $\rho(v_r)$  em busca dos demais na redondeza que contenha  $\rho(v_s)$  ou  $\rho(v_t)$ , analogamente são verificadas as outras regiões partindo do triângulo que contenha  $\rho(v_s)$  em busca dos demais ou, ainda, que contenha  $\rho(v_t)$  em busca dos demais. Dentre as três regiões é escolhida a mais adequada por um critério geométrico, como região de menor área ou região mais plana. A aplicação bijetiva  $\varphi_k : \mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{Q}_k \subset \mathbb{R}^2$  é estabelecida com a parametrização por combinação convexa apresentada na subseção 3.2.1 do capítulo anterior que determina uma triangulação  $\mathcal{Q}_k \subset \mathbb{R}^2$

Figura 4.11: Projeções no caso 3 envolvendo uma única estrela de  $\mathcal{B}$ Figura 4.12: Projeção no caso 3 envolvendo mais de uma estrela de  $\mathcal{B}$ 

numa região convexa por meio das coordenadas do valor médio [32] que estabelecem uma parametrização  $\varphi_k^{-1}$  que preserva a forma da triangulação  $\mathcal{R}_k$ . A escolha por este sistema de parametrização para auxiliar a projeção é justificada pela garantia de um domínio  $\mathcal{Q}_k \subset \mathbb{R}^2$  convexo que permite assegurar que  $\varphi_k(\rho(v_k))$  sempre existirá dentro de algum triângulo de  $\mathcal{Q}_k$ .

Além disso, alguns cuidados adicionais são estabelecidos na



implementação para atender as possíveis triangulações  $\mathcal{B}$  compostas por "túneis" que implicariam em regiões  $\mathcal{R}_k$  topologicamente não homeomorfas à discos, o que impediria a parametrização por combinação convexa tal como mencionada anteriormente. A figura 4.13 exemplifica a projeção realizada nestes casos. É importante observar que esta junção não ocorre em uma única estrela durante a simplificação designada pela HPDS-MT [2] pois existem as suas garantias topológicas. Por outro lado, esses casos com mais de um estrela e casos com junção compondo "túneis" ocorrem com baixa frequência.

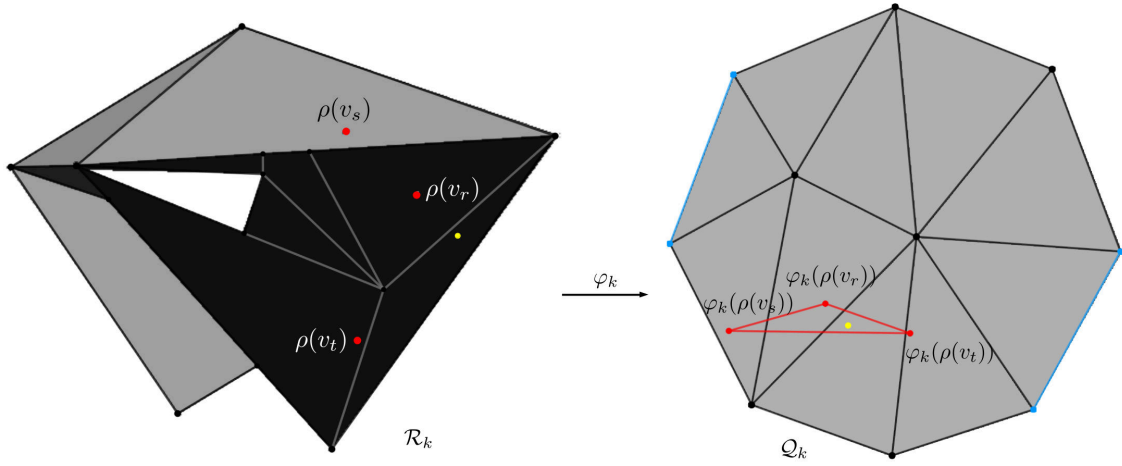


Figura 4.13: Projeção no caso 3 envolvendo mais de uma estrela de  $\mathcal{B}$  e formando um "túnel". Os elementos da junção estão destacados em cor azul na representação de  $\mathcal{Q}_k$ .

#### 4.4

##### Estrutura diferenciável

O aparelhamento da superfície triangularizada  $\mathcal{B} = (J_0, X_0)$  com uma estrutura diferenciável é realizado pela construção de um conjunto de dados colantes

$$\mathcal{G} = ((\Omega_i)_{i \in I}, (\Omega_{ij})_{(i,j) \in I \times I}, (\psi_{ji})_{(i,j) \in H})$$

que depende apenas da topologia subjacente  $|J_0|$ . Para tanto,  $I = \{1, \dots, n\}$  é o conjunto de índices para os vértices de  $X_0$ ,  $H = \{(i, j) \in I \times I : \Omega_{ij} \neq \emptyset\}$  e as componentes da tripla são denominadas por domínios de parametrização  $(\Omega_i)_{i \in I}$ , domínios colantes  $(\Omega_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$  e funções de transição  $(\psi_{ji})_{(i,j) \in H}$  entre os domínios colantes, tais que  $\psi_{ji} : \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji}$ .

O conjunto colante foi apresentado formalmente no capítulo 2 e representa uma estrutura diferenciável abstrata sobre  $|J_0|$ , e que permite a construção de uma partição concreta de  $\mathcal{M}$  em  $n$  regiões triangularizadas e parametrizadas em cada domínio  $\Omega_i$ . As regiões com interseção não vazia

em  $\mathcal{M}$  se comunicam por meio das funções de transição definidas entre os conjuntos colantes nos seus, respectivos, domínios de parametrização. Nos próximos parágrafos desta seção serão exibidos, de acordo com [1], alguns elementos componentes desta construção.

**Definição 4.1** *O domínio de parametrização  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$  é o conjunto*

$$\Omega_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \cos^2 \left( \frac{\pi}{\omega_i} \right) \right\},$$

onde  $\omega_i$  é a valência do vértice  $v_{0_i}$ , para todo  $i \in I$ .

**Definição 4.2** *Para cada  $Star(v_{0_i}, \mathcal{B})$ , tal que  $i \in I$ , existe uma triangulação  $P_i$  cujo bordo é composto pelos vértices de um polígono regular centrado na origem de  $\mathbb{R}^2$ , contendo um único vértice de interior localizado nesta origem e cujas arestas são definidas por um isomorfismo com essa estrela. Neste isomorfismo, a origem é associada com  $v_{0_i}$  e os demais vértices*

$$\left( \cos \left( \frac{2\pi l}{\omega_i} \right), \sin \left( \frac{2\pi l}{\omega_i} \right) \right) \in \mathbb{R}^2,$$

são associados contiguamente em sentido anti-horário com os demais vértices da estrela, onde  $l \in \{0, \dots, \omega_i - 1\}$  e  $\omega_i$  é a valência de  $v_{0_i}$ . Inicialmente o vértice  $(1, 0)$  será associado com algum vértice diferente de  $v_{0_i}$  escolhido na estrela.

Cada domínio de parametrização  $\Omega_i$  está inscrito no polígono que define  $P_i$  e, deste modo, é possível associar bijetivamente uma região contida em  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$  com o domínio  $\Omega_i$ . A construção desta associação foi brevemente relatada no capítulo anterior, subseção 3.2.2, e será reconsiderada aqui mais cuidadosamente. Em seguida, serão apresentadas as funções de transição entre os domínios  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  inscritos nos polígonos que definem  $P_i$  e  $P_j$  e associados com regiões contidas em  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$  e  $|Star(v_{0_j}, \mathcal{B})|$ , respectivamente, que compartilham a aresta  $[v_{0_i}, v_{0_j}]$  em  $\mathcal{B}$  e essas regiões, portanto, possuem interseção não vazia sobre  $|J_0|$ . Além disso, pode haver  $|Star(v_{0_h}, \mathcal{B})|$ , para algum triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  em  $\mathcal{B}$ , contendo uma região associada com  $\Omega_h$  inscrito no polígono que define  $P_h$ . Nestes casos, haverá funções de transição  $\psi_{ji} : \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji}$ ,  $\psi_{ih} : \Omega_{hi} \rightarrow \Omega_{ih}$  e  $\psi_{hj} : \Omega_{jh} \rightarrow \Omega_{hj}$  entre os domínios colantes em  $\Omega_i$ ,  $\Omega_j$  e  $\Omega_h$  que serão apresentados.

O triângulo canônico  $T = [(0, 0), (1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)]$  em  $\mathbb{R}^2$  é usado como um referencial na construção do conjunto colante e neste triângulo é definido um setor canônico com vértice em  $(0, 0)$ , raio  $\sqrt{3}/2$  e ângulo central  $\pi/3$ . Este setor canônico é relacionado com o setor circular  $A_i$  inscrito

no triângulo  $[(0, 0), (1, 0), (\cos(2\pi/\omega_i), \sin(2\pi/\omega_i))]$ , com vértice  $(0, 0)$ , raio  $\cos(\pi/\omega_i)$  e ângulo central  $2\pi/\omega_i$  por meio da aplicação  $g_i : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , para cada  $i \in I$ .

**Definição 4.3** *Seja  $\Pi : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+$  a aplicação que converte coordenadas cartesianas em coordenadas polares*

$$\Pi(x, y) = (\theta, r),$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e o argumento  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . A aplicação inversa  $\Pi^{-1} : (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  é

$$\Pi^{-1}(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

**Definição 4.4** *Seja  $g_i : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  dada por*

$$g_i(x, y) = (\Pi^{-1} \circ f_i \circ \Pi)(x, y),$$

onde  $f_i : (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+$  é

$$f(\theta, r) = \left( \frac{\omega_i}{6} \theta, \frac{\cos(\pi/6)}{\cos(\pi/\omega_i)} r \right).$$

A aplicação inversa  $g_i^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  é dada por

$$g_i^{-1}(x, y) = (\Pi^{-1} \circ f_i^{-1} \circ \Pi)(x, y),$$

onde  $f_i^{-1} : (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}_+$  é

$$f(\theta, r) = \left( \frac{6}{\omega_i} \theta, \frac{\cos(\pi/\omega_i)}{\cos(\pi/6)} r \right),$$

para cada  $i \in I$ .

**Observação:** As aplicações  $\Pi$  e  $f_i$  são da classe  $C^\infty$  garantindo que  $g_i$  também esteja.

Para todo  $i \in I$ , a aplicação  $g_i$  mapeia suavemente o setor canônico no setor circular  $A_i$ , excetuando o ponto  $(0, 0)$ , e isso possibilita a determinação de um conjunto aberto em  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$  homeomorfo ao domínio  $\Omega_i$ . Para isso, basta tomar cada triângulo incidente em  $v_{0_i}$  e o relacionar com o triângulo canônico por coordenadas baricêntricas e, deste modo, o interior do setor canônico determinará uma região em cada triângulo incidente em  $v_{0_i}$  e a união

dessas regiões delimitará um conjunto aberto em  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$ . Por outro lado, o interior do setor circular  $A_i$  é mapeado no setor canônico por  $g_i$  e se houver uma rotação destes mapeamentos em torno da origem, então o conjunto aberto  $\Omega_i$  ficará completamente identificado com o conjunto aberto construído na  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$ , onde  $v_{0_i}$  é identificado com  $(0,0)$ .

### Parametrizações

As coordenadas baricêntricas são unicamente determinadas, não negativas e nem todas nulas para cada ponto no interior de um triângulo ou no seu bordo e, reciprocamente, determinam um único ponto. Portanto, considerando um triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  em  $\mathcal{B}$  cujo vértice  $v_{0_i}$  é isomorfo a origem  $(0,0)$  e os demais são contiguamente isomorfos aos vértices do triângulo canônico em sentido anti-horário, as coordenadas baricêntricas de qualquer ponto do seu interior ou bordo determinará pontos unicamente no triângulo canônico e vise-versa. Os vértices do triângulo selecionado devem ser identificados num domínio bidimensional para a realização do cálculo das coordenadas baricêntricas de cada ponto. Deste modo, para saber quando um ponto de  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$  compõem o conjunto aberto em  $|Star(v_{0_i}, \mathcal{B})|$  é necessário calcular as suas coordenadas baricêntricas no triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  que o contém e checar pela correspondência com o triângulo canônico se tais coordenadas determinam um ponto no interior do setor canônico, em coordenadas polares  $(r, \theta)$  basta verificar se  $r < \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ . O vértice  $v_{0_i}$  já pertence ao conjunto aberto.

O isomorfismo  $\tau_i : Star(v_{0_i}, \mathcal{B}) \rightarrow P_i$  faz uma associação contígua e em sentido anti-horário entre os respectivos vértices das triangulações iniciando com  $\tau_i(v_{0_l}) = (1,0)$ , para algum  $l \in I$ , podendo ocasionalmente ser  $l = j$  ou  $l = h$ , e tal que  $[v_{0_i}, v_{0_l}]$  é uma aresta em  $Star(v_{0_i}, \mathcal{B})$ . O triângulo  $[\tau_i(v_{0_i}), \tau_i(v_{0_j}), \tau_i(v_{0_h})]$  em  $P_i$  é incidente na aresta  $[\tau_i(v_{0_i}), \tau_i(v_{0_j})]$  e  $\omega_{ij}$  é a quantidade de arestas contadas em sentido anti-horário entre as arestas  $[v_{0_i}, v_{0_l}]$  e  $[v_{0_i}, v_{0_j}]$ . O conjunto de pontos do interior de  $\Omega_i - \{(0,0)\}$  e limitado por esse triângulo de  $P_i$  será identificado no triângulo canônico pela aplicação  $g_i$  somente após uma rotação de ângulo  $-2\pi\omega_{ij}/\omega_i$  denotada por  $R_{ij}$ , bem como,  $R_{ij}^{-1}$  que será determinada com o ângulo  $2\pi\omega_{ij}/\omega_i$ ,  $\omega_i$  é a valência de  $v_{0_i}$ .

**Definição 4.5** *Seja  $\rho : |J_k| \rightarrow |J_0|$  uma aplicação bijetiva. A parametrização  $\phi_i : \Omega_i - \{(0,0)\} \rightarrow \phi_i(\Omega_i - \{(0,0)\}) \subset |J_k|$  é*

$$\phi_i(p) = (\rho^{-1} \circ bar \circ g_i \circ R_{ij})(p),$$

onde  $p \in \Omega_i - \{(0,0)\}$  é limitado pelo triângulo de  $P_i$  incidente na aresta  $[\tau_i(v_{0i}), \tau_i(v_{0j})]$ .

**Observação:** O vértice  $v_{0i}$  é associado bijectivamente com  $(0,0)$ .

A aplicação inversa  $\phi_i^{-1} : \phi_i(\Omega_i - \{(0,0)\}) \rightarrow \Omega_i - \{(0,0)\}$  é dada por

$$\psi_i(q) = \phi_i^{-1}(q) = (R_{ij}^{-1} \circ g_i^{-1} \circ \text{bar}^{-1} \circ \rho)(q)$$

para algum  $q \in |J_k|$  tal que  $(\text{bar}^{-1} \circ \rho)(q)$  tenha coordenadas polares  $(\theta, r)$  com  $r < \cos(\pi/6)$ . O conjunto  $\phi_i(\Omega_i - \{(0,0)\}) \cup \{v_{0i}\}$  é denominado por *vizinhança parametrizada* do vértice  $v_{0i} \in X_k \cap X_0$ .

**Definição 4.6** *Sejam  $X_k$  o conjunto discreto composto pelos vértices da superfície triangularizada  $\mathcal{M}_k$ ,  $\rho : X_k \rightarrow |J_0|$  a projeção hierárquica e  $\phi_i$  a parametrização que considera  $\rho$ . O domínio de parametrização discreto é uma triangulação  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  composta por triângulos cuja imagem dos seus vértices por  $\phi_i$  compõem uma triangulação  $\mathcal{S}_i^k$  estritamente contida na vizinhança parametrizada do vértice  $v_{0i}$ , para cada  $i \in I$  e para cada nível  $k \in \{1, \dots, N\}$ .*

A figura 4.9 relaciona os triângulos do domínio de parametrização discreto  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  com os triângulos de  $\mathcal{S}_i^k$  destacados em vermelho na superfície triangularizada  $\mathcal{M}_k$ . Quando  $k = N$  então  $\mathcal{P}_i^k = \mathcal{P}_i$  e  $\mathcal{S}_i^k = \mathcal{S}_i$ , como exemplificado na figura 4.7.

Nesta construção, são realizadas  $n$  parametrizações  $\phi_i$  por "pedaços" de  $|J_k|$  em domínios de parametrização  $\Omega_i$  que são identificados em cópias distintas de  $\mathbb{R}^2$ . Esses pedaços são as *vizinhanças parametrizadas* de cada vértice  $v_{0i}$  em  $\mathcal{M}$  e, portanto, como observado anteriormente, cada triângulo  $[v_{0i}, v_{0j}, v_{0h}]$  de  $\mathcal{B}$  definirá três vizinhanças parametrizadas, respectivamente, aos vértices  $v_{0i}$ ,  $v_{0j}$ ,  $v_{0h}$  e cuja interseção é não vazia sobre  $|J_k|$  para os grupos de índices  $\{i, j\}$ ,  $\{j, h\}$ ,  $\{i, h\}$  e  $\{i, j, h\}$ . Deste modo, os conjuntos de pontos comuns em vizinhanças parametrizadas distintas possuem coordenadas geralmente distintas nos respectivos domínios paramétricos, isto é, cada ponto de  $|J_k|$ , por essa estrutura, possui até três domínios de parametrização. Para tanto, funções de transição suaves entre esses domínios são fundamentais nessa estrutura.

Como visto anteriormente, a checagem sobre quais pontos de  $|J_k|$  pertencem a vizinhança parametrizada de um vértice  $v_{0i}$  é realizada apenas no triângulo canônico pela aplicação  $\text{bar}^{-1} \circ \rho$ . Portanto, para cada triângulo  $[v_{0i}, v_{0j}, v_{0h}]$  de  $\mathcal{B}$  é suficiente checar no triângulo canônico para decidir quais desses pontos são comuns às vizinhanças parametrizadas de  $v_{0j}$  ou  $v_{0h}$ .

### Funções de transição

Considerando os triângulos  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  e  $[v_{0_j}, v_{0_i}, v_{0_z}]$  em  $\mathcal{B}$  isomorfos aos triângulos  $[\tau_i(v_{0_i}) = (0, 0), \tau_i(v_{0_j}), \tau_i(v_{0_h})]$  e  $[\tau_i(v_{0_j}), \tau_i(v_{0_i}) = (0, 0), \tau_i(v_{0_z})]$  em  $P_i$ . O setor circular com vértice  $(0, 0)$ , ângulo central  $4\pi/\omega_i$  e raio  $\cos(\pi/\omega_i)$  está inscrito no quadrilátero  $[\tau_i(v_{0_i}) = (0, 0), \tau_i(v_{0_z}), \tau_i(v_{0_j}), \tau_i(v_{0_h})]$  que é delimitado pelas arestas não comuns destes triângulos, este será denominado por setor circular duplo. Do mesmo modo, o losango definido pelos vértices  $[(0, 0), (1/2, -\sqrt{3}/2), (1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)]$  será denominado por losango canônico e conterá o setor circular com vértice  $(0, 0)$ , ângulo central  $2\pi/3$  e raio  $\cos(\pi/6)$  que será denominado por setor circular canônico. A aplicação  $g_i$  associa os pontos do interior do setor circular duplo no interior do setor canônico duplo após uma rotação  $R_{ij}$  na aresta  $[\tau_i(v_{0_i}) = (0, 0), \tau_i(v_{0_j})]$  que gira o quadrilátero  $[\tau_i(v_{0_i}) = (0, 0), \tau_i(v_{0_z}), \tau_i(v_{0_j}), \tau_i(v_{0_h})]$  como exibido da figura 4.14.

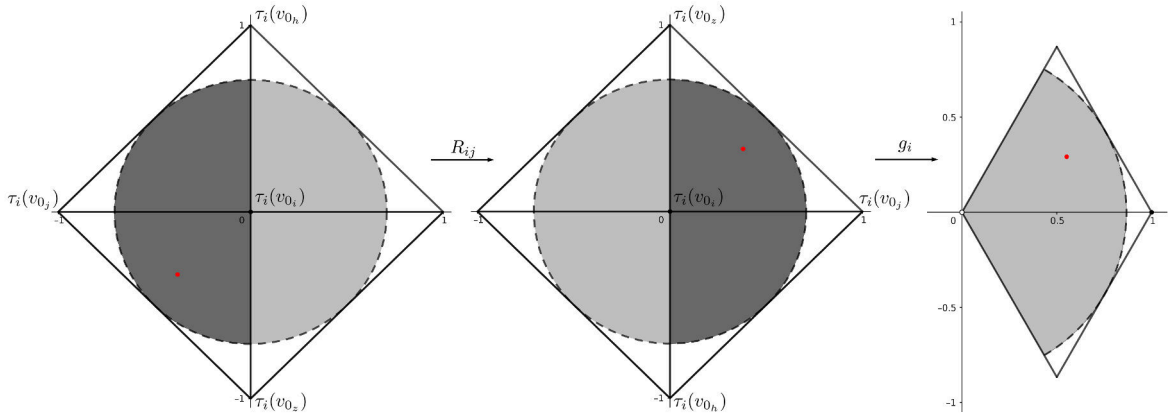


Figura 4.14: Aplicação  $g_i \circ R_{ij}$  sobre o setor canônico duplo

**Definição 4.7** A aplicação  $\vartheta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

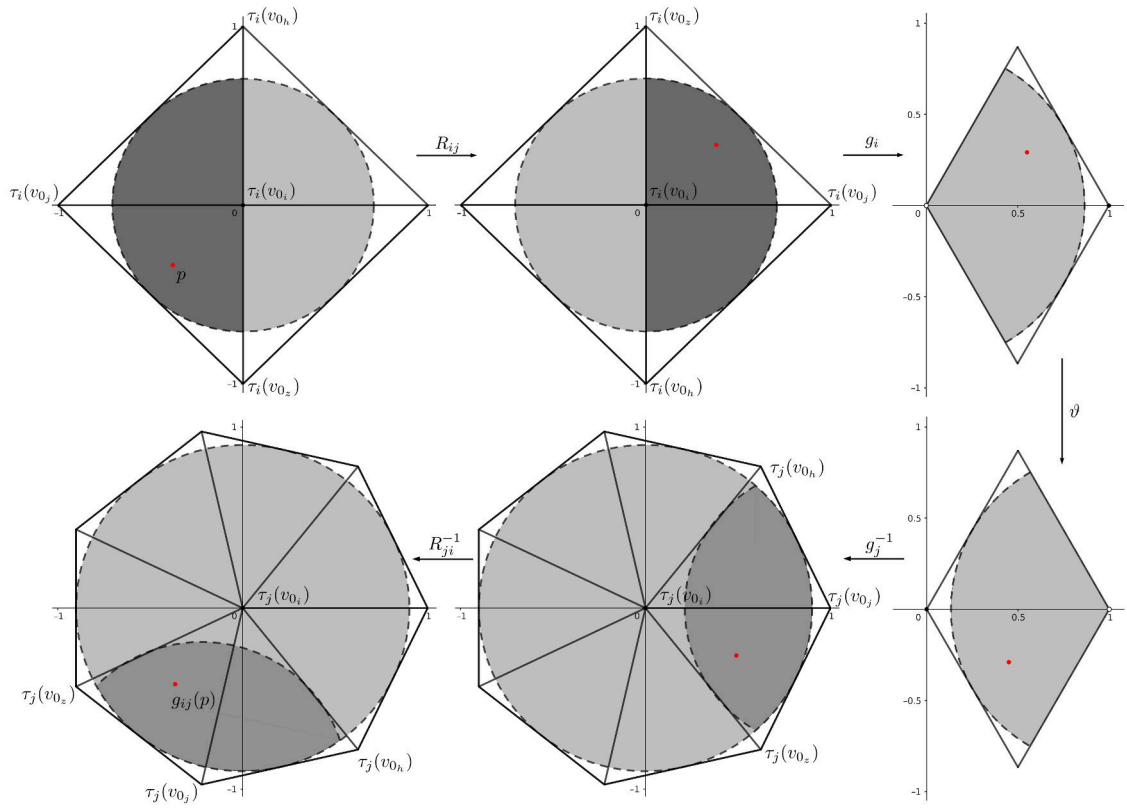
$$\vartheta(x, y) = (1 - x, -y)$$

é uma dupla reflexão no plano que reflete cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  em relação as retas  $y = 0$  e  $x = 1/2$ .

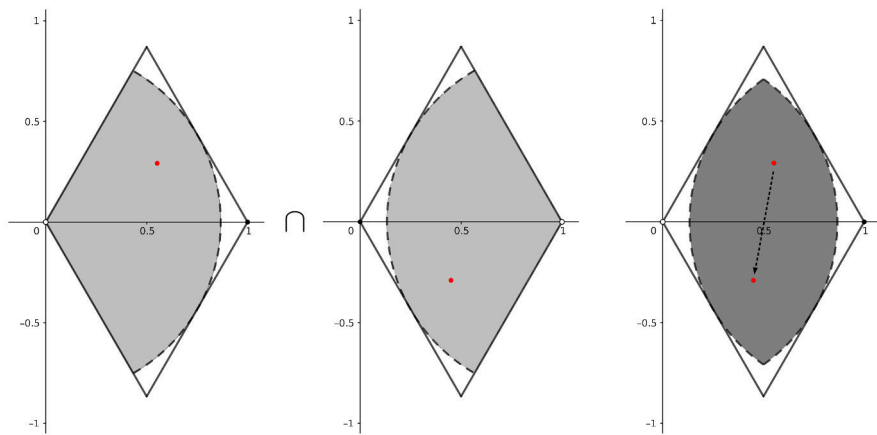
Os domínios  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  associados, respectivamente, com as vizinhanças parametrizadas de  $v_{0_i}$  e  $v_{0_j}$  pelas aplicações  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são relacionados pela aplicação  $g_{ij} : \Omega_i - \{(0, 0)\} \rightarrow g_{ij}(\Omega_i - \{(0, 0)\})$  de modo que

$$g_{ij}(x, y) = (R_{ji}^{-1} \circ g_j^{-1} \circ \vartheta \circ g_i \circ R_{ij})(x, y),$$

para todo  $(x, y) \in \Omega_i - \{(0, 0)\}$  como exemplificado pela figura 4.15.


 Figura 4.15: Aplicação  $g_{ij}$  sobre  $\Omega_j$ 

A composição  $g_i \circ R_{ij}$  associa o domínio  $\Omega_i$  com o conjunto  $C_0$  definido pelo interior do círculo centrado em  $(0,0)$  e raio  $\cos(\pi/6)$ , sem o centro  $(0,0)$ . A dupla reflexão  $\vartheta$  associa os pontos de  $C_0$  com o conjunto  $C_1$  definido pelo interior do círculo centrado em  $(1,0)$  e raio  $\cos(\pi/6)$ , sem o centro  $(1,0)$ . Portanto, a composição inversa  $R_{ji}^{-1} \circ g_j^{-1}$  apenas tomará pontos de  $C_0 \cap C_1$ , figura 4.16.


 Figura 4.16:  $C_0 \cap C_1$

**Definição 4.8** Para todo  $i, j \in I$ , o conjunto colante  $\Omega_{ij}$  é dado por

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} \Omega_i & \text{se } i = j, \\ g_{ji}(\Omega_j) \cap \Omega_i & \text{se } [i, j] \text{ é uma aresta de } \mathcal{B}, \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Observação:**  $\Omega_{ij} \neq \emptyset \Rightarrow \Omega_{ji} \neq \emptyset$

A definição de domínio colante, bem como, a observação apresentada são verificadas em [12] como bem adequadas com a definição de conjunto colante que é apresentada no capítulo 2. Desse modo, a próxima definição estabelece as funções de transição.

**Definição 4.9** A função de transição  $\psi_{ji} : \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji}$ , para cada  $(i, j) \in H$  e para todo  $p \in \Omega_{ij}$ , é tal que

$$\psi_{ji}(x, y) = \begin{cases} g_{ij}(x, y) & i \neq j, \\ (x, y) & i = j \end{cases}$$

Como a aplicação  $g_{ij}$  é bijetiva e é também uma composição de aplicações da classe  $C^\infty$  então  $\psi_{ji}$  é bijetiva e da classe  $C^\infty$ . A propriedade de co-ciclo apresentada na definição de conjunto colante, capítulo 2, é satisfeita por esta função de transição [12] e, portanto, bem adequada para relacionar os três possíveis domínios de parametrização vinculados com as vizinhanças parametrizadas definidas em torno dos vértices de cada triângulo da superfície base  $\mathcal{B}$ .

As funções de transição também agem particularmente entre os domínios de parametrização discretos relacionando os vértices da triangulação  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  com os vértices da triangulação  $\mathcal{P}_j^k \subset \Omega_j$ , especificamente aqueles que vivem em  $\Omega_{ij}$  e  $\Omega_{ji}$ . Os eventuais reposicionamentos nos vértices da triangulação  $\mathcal{P}_i^k$  restritos a  $\Omega_{ij}$  serão suavemente atualizados nas triangulações  $\mathcal{P}_j^k$  pelas funções de transição  $\psi_{ji}$ , para todo vértice  $j \in I$  tal que  $[v_{0_i}, v_{0_j}]$  é uma aresta de  $\mathcal{B}$ .

## 4.5

### Processo de otimização global

O problema das distorções introduzidas pelo processo de parametrização foi apresentado no capítulo anterior, sobretudo na parametrização por coordenadas polares, subseção 3.2.2. Foi analisada a eficiência da otimização hierárquica em comparação com o procedimento não-hierárquico para uma superfície triangularizada com bordo  $\mathcal{S}$  contida em outra superfície compacta



e triangularizada  $\mathcal{M}$  e parametrizada por uma aplicação  $\phi$  em um domínio de parametrização  $\mathcal{P}$ . A metodologia de otimização proposta em [15] é mais robusta na comparação com o procedimento não-hierárquico pois reduz melhor a energia de distorção medida e em menor tempo de processamento.

Nesta perspectiva, o problema se recoloca para tratar as distorções introduzidas pelo sistema de parametrizações naturalmente induzido pelas aplicações  $\phi_i$  que associam uma superfície triangularizada  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{M}$  com a triangulação  $\mathcal{P}_i \subset \Omega_i$  e cuja solução leva em conta as funções de transição apresentadas anteriormente. A ampliação do problema agrega a estrutura de multi-triangulação e, com isso, as triangulações  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  devem ser otimizadas em relação a superfície triangularizada  $\mathcal{S}_i^k \subset \mathcal{M}_k$  pela aplicação  $\phi_i$  e as funções de transição comunicam as regiões adjuntas, para cada  $i \in I$  e para cada nível  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

Cada vértice  $v$  da superfície  $\mathcal{M}$  compõem até três regiões  $\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{S}_j$  e  $\mathcal{S}_h$ , em  $\mathcal{M}$ , para algum  $i, j, h \in I$  tal que  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  é um triângulo de  $\mathcal{B}$ , figura 4.17. Sendo assim, podem existir  $\psi_i(v)$ ,  $\psi_j(v)$ ,  $\psi_h(v)$  nos respectivos domínios de parametrização discretos  $\mathcal{P}_i$ ,  $\mathcal{P}_j$ ,  $\mathcal{P}_h$  e em cada domínio o vértice  $v$  tem uma energia de distorção medida. Uma extensão da otimização local apresentada no capítulo anterior levará em conta as coordenadas de parametrização em todos os possíveis domínios.

Duas abordagens podem ser realizadas nesta solução, na primeira a otimização é realizada em cada domínio de parametrização e o controle das atualizações necessárias ocorre nos domínios de parametrização correspondidos pelas funções de transição. Esse procedimento é realizado por exaustão e reduz monotonamente a energia de distorção, como apresentado nas subseções 3.3.1 e 3.3.2, e os novos posicionamentos de  $\psi_i(v)$  ou  $\psi_j(v)$  ou  $\psi_h(v)$  são determinados com as restrições impostas em cada domínio. Na segunda abordagem, um novo funcional deve incorporar as três possíveis posições nos domínios de parametrização correspondentes e a energia de distorção deve ser otimizada simultaneamente considerando as restrições em cada domínio. A primeira abordagem será apresentada nos parágrafos seguintes e a segunda abordagem é um trabalho futuro.

#### 4.5.1

##### Não-hierárquico

O procedimento não-hierárquico é uma extensão daquele apresentado no capítulo anterior e levará em conta os diversos domínios de parametrização discretos. É motivado pela ideia que consiste em escolher a região  $\mathcal{S}_i$  de maior energia total, bloquear provisoriamente para possíveis escolhas as regiões

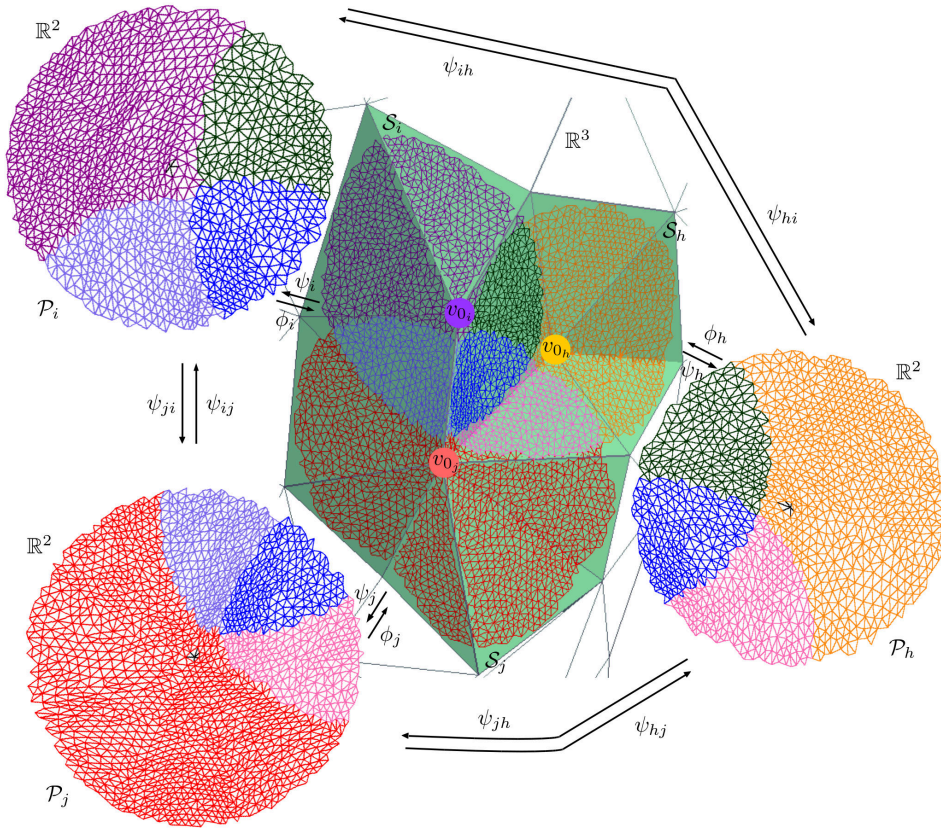


Figura 4.17: Regiões  $\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{S}_j$  e  $\mathcal{S}_h$  de  $\mathcal{M}$  projetadas sobre  $\mathcal{B}$  e relacionadas com os domínios  $\mathcal{P}_i$ ,  $\mathcal{P}_j$ ,  $\mathcal{P}_h$  que se comunicam pelas funções de transição. Os domínios colantes contêm porções das triangulações dos domínios de parametrização discretos. As cores azul claro e azul escuro representam as porções em  $\Omega_{ij}$  e  $\Omega_{ji}$ , azul escuro e rosa representam porções em  $\Omega_{hj}$  e  $\Omega_{jh}$ , verde e azul escuro representam porções em  $\Omega_{ih}$  e  $\Omega_{hi}$ .

vizinhas  $\mathcal{S}_j$  para cada  $j \in I$  tal que  $[v_{0_i}, v_{0_j}]$  é uma aresta em  $\mathcal{B}$ . Nesta região selecionada, o vértice  $v$  de maior energia que não pertence ao bordo da região deverá ser escolhido e os vértices imediatamente vizinhos ficam bloqueados provisoriamente para possíveis escolhas.

A otimização local do funcional que mede a energia de distorção deste vértice  $v$  no domínio  $\mathcal{P}_i$  busca reposicionar  $\psi_i(v)$  dentro do núcleo da  $Star(\psi_i(v), \mathcal{P}_i)$ , deste modo, a restrição impõem que a área dos triângulos incidentes em  $\psi_i(v)$  deverá ser mantida positiva. Entretanto, as restrições para a mudança da posição de  $\psi_i(v)$  em  $\mathcal{P}_i$  deverá, necessariamente, ser ainda observada no domínio de parametrização  $\Omega_j$  ou  $\Omega_h$  quando  $\psi_j(v)$  é um vértice de  $\mathcal{P}_j$  ou  $\psi_h(v)$  é um vértice de  $\mathcal{P}_h$ , sendo "ou" uma disjunção lógica e  $i, j, h \in I$ . Consequentemente, as restrições para a otimização no vértice  $v$  serão ampliadas e deverá levar em conta as áreas dos triângulos incidentes em  $(\psi_{ji} \circ \psi_i)(v)$  ou  $(\psi_{hi} \circ \psi_i)(v)$  que deverão ser mantidas positivas, respectivamente, em  $\mathcal{P}_j$  e  $\mathcal{P}_h$ .

Além de ampliar as restrições para a otimização, a modificação na posição de  $\psi_i(v)$  em  $\mathcal{P}_i$  implica na atualização da projeção  $\rho(v) \in |J_0|$ . A nova posição de  $\psi_i(v)$  em  $\mathcal{P}_i \subset \Omega_i \subset P_i$  significa o reposicionamento em  $P_i$  de tal modo que  $\psi_i(v)$  possa se mover dentro do triângulo  $[\tau_i(v_{0_i}), \tau_i(v_{0_j}), \tau_i(v_{0_h})] \subset P_i$  ou migrar para outro triângulo  $[\tau_i(v_{0_i}), \tau_i(v_{0_{j'}}), \tau_i(v_{0_{h'}})] \subset P_i$ . Esse reposicionamento implica na atualização da projeção  $\rho(v)$  no triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  pela composição  $\text{bar} \circ g_i \circ R_{ij}$  ou em mover para o triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_{j'}}, v_{0_{h'}}]$  pela composição  $\text{bar} \circ g_i \circ R_{ij'}$ , ambos os triângulos em  $\mathcal{B}$  como representado no esquema da figura 4.18.

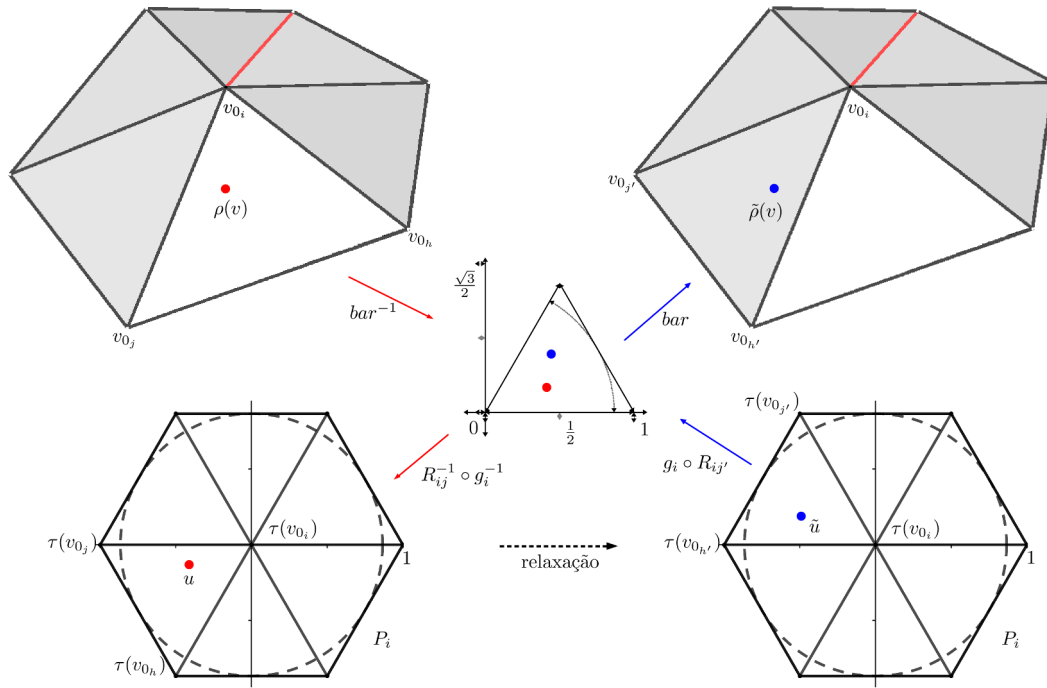


Figura 4.18: Atualização da projeção de  $v$  após relaxação.

Essa atualização também pode interferir na vizinhança parametrizada de  $v_{0_j}$  ou  $v_{0_h}$ , ou ainda, na estrutura da triangulação  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$ , podendo ser  $j = j'$  e  $h = h'$ , a depender do triângulo de  $P_i$  que hospeda a nova localização de  $\psi_i(v)$ . Essas possíveis interferências são resultados de algum dos seguintes cenários:

- (1) caso  $\psi_i(v)$ , reposicionado pela otimização, esteja dentro de  $\Omega_{ij}$  ou  $\Omega_{ih}$  então as posições  $\psi_j(v)$  ou  $\psi_h(v)$  serão calculadas, respectivamente, pelas composições  $(\psi_{ji} \circ \psi_i)(v) \in \Omega_j$  ou  $(\psi_{hi} \circ \psi_i)(v) \in \Omega_h$ :
  - i. caso  $\psi_j(v) = (\psi_{ji} \circ \psi_i)(v)$  ou  $\psi_h(v) = (\psi_{hi} \circ \psi_i)(v)$  sejam coordenadas de vértices do interior das respectivas triangulações  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$  então tais vértices apenas mudaram de posição mas permaneceram nos

seus núcleos originais de  $Star(\psi_j(v), \mathcal{P}_j)$  ou  $Star(\psi_h(v), \mathcal{P}_h)$  pelas restrições impostas na otimização;

- ii. caso  $\psi_j(v) = (\psi_{ji} \circ \psi_i)(v)$  ou  $\psi_h(v) = (\psi_{hi} \circ \psi_i)(v)$   $\psi_j(v)$  sejam coordenadas de vértices do bordo das respectivas triangulações  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$  então tais vértices já eram do bordo e foram apenas reposicionados ou estavam fora de  $\Omega_{ij}$  ou  $\Omega_{ih}$  e migraram para o interior dos respectivos domínios colantes e, neste caso, o bordo deve ser atualizado localmente como exemplificado na figura 4.19;

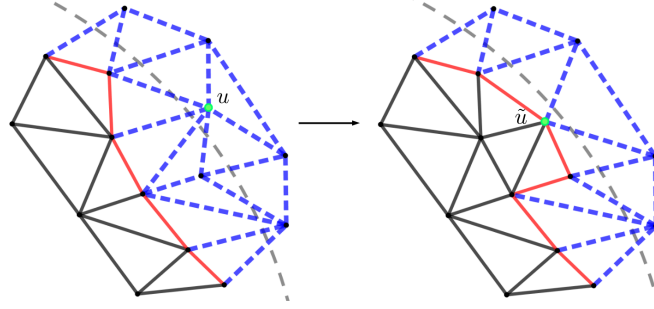


Figura 4.19:  $u = \psi_i(v)$  é reposicionado em  $\tilde{u}$ , migrando para dentro do domínio colante  $\Omega_{ij}$ , e o bordo na triangulação  $\mathcal{P}_j$  será atualizado localmente como indicado na região destacada.

- iii. caso  $\psi_j(v) = (\psi_{ji} \circ \psi_i)(v)$  ou  $\psi_h(v) = (\psi_{hi} \circ \psi_i)(v)$   $\psi_j(v)$  sejam coordenadas de vértices que não compõem as respectivas triangulações  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$  então tais vértices já estavam nesta condição e apenas foram reposicionados ou estavam fora de  $\Omega_{ij}$  ou  $\Omega_{ih}$  e migraram para o interior dos respectivos domínios colantes mas sem pertencer as respectivas triangulações  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$  como também se observa na figura 4.20 ou, ainda, podem ter sido vértices dos respectivos bordos e removidos desses bordos em alguma atualização local de bordo como ilustrado pelo ponto amarelo na figura 4.21;

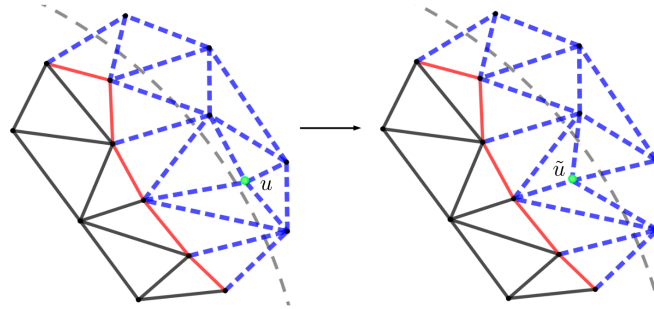


Figura 4.20:  $u = \psi_i(v)$  é reposicionado em  $\tilde{u}$ , migrando para dentro do domínio colante  $\Omega_{ij}$ , mas não há nenhum triângulo incidente a  $\tilde{u}$  totalmente contido em  $\Omega_{ij}$ , neste caso,  $\psi_{ji}(\tilde{u})$  pertence ao domínio de parametrização  $\Omega_j$  mas não pertence a triangulação  $\mathcal{P}_j$ .

- (2) caso  $\psi_i(v)$ , reposicionado pela otimização, esteja fora de  $\Omega_{ij}$  ou  $\Omega_{ih}$  então

ele já estava posicionado fora e permaneceu ou migrou para fora desses domínios colantes. Nesta segunda opção:

- i. caso  $(\psi_{ji} \circ \psi_i)(v) \in \Omega_j$  ou  $(\psi_{hi} \circ \psi_i)(v) \in \Omega_h$  fossem coordenadas de vértices componentes das respectivas triangulações  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$  então eles seriam vértices dos respectivos bordos e após a otimização estes bordos devem ser atualizados localmente sem tais vértices como ilustrado na figura 4.21 pelo movimento inverso ao observado na figura 4.19.

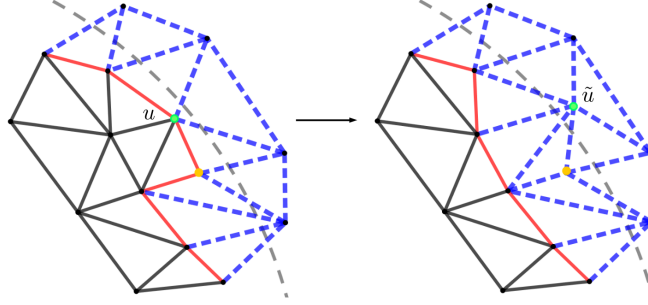


Figura 4.21:  $u = \psi_i(v)$  é reposicionado em  $\tilde{u}$ , migrando para fora do domínio colante  $\Omega_{ij}$ , e o bordo na triangulação  $\mathcal{P}_j$  será atualizado localmente como indicado na região destacada.

- ii. caso  $(\psi_{ji} \circ \psi_i)(v) \in \Omega_j$  ou  $(\psi_{hi} \circ \psi_i)(v) \in \Omega_h$  fossem coordenadas de vértices que não compunham as respectivas triangulações  $\mathcal{P}_j$  ou  $\mathcal{P}_h$  então após a otimização  $\psi_j(v)$  ou  $\psi_h(v)$  apenas deixam de existir nos respectivos domínios de parametrização, figura 4.22 representa o movimento inverso ao ilustrado na figura 4.20.

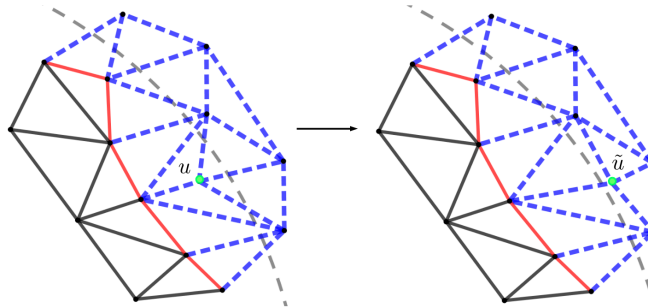


Figura 4.22:  $u = \psi_i(v)$  é reposicionado em  $\tilde{u}$ , migrando para fora do domínio colante  $\Omega_{ij}$ .

**Observação 1:** Um vértice de  $\Omega_i$  compõem a triangulação  $\mathcal{P}_i$  se, e somente se, existem pelo menos dois outros vértices em  $\Omega_i$  imediatamente vizinhos para cada  $i \in I$ .

**Observação 2:** Um vértice de  $\Omega_i$  compõem o bordo da triangulação  $\mathcal{P}_i$  se, e somente se, ele compõem a triangulação  $\mathcal{P}_i$  e existe algum vértice imediatamente vizinho que não compõem a triangulação  $\mathcal{P}_i$  para cada  $i \in I$ .

**Observação 3:** Cada operação nos respectivos domínios colantes  $\Omega_{ij}$  ou  $\Omega_{ih}$  são independentes, podendo ocorrer em apenas um desses domínios ou em ambos. Além disso, é importante enfatizar que os domínios colantes podem estar indexados por  $j = j'$  e  $h = h'$ , a depender do triângulo de  $P_i$  que hospeda a nova localização de  $\psi_i(v)$ .

O processo avança nesta região  $\mathcal{S}_i$  com a escolha do próximo vértice de maior energia e segue até que todos os vértices não bloqueados tenham sido escolhidos. Cada vértice escolhido nesta região terá a sua energia reduzida pela otimização do funcional que mede a distorção no domínio de parametrização discreto  $\mathcal{P}_i \subset \Omega_i$ . A redução da energia em cada vértice não bloqueado não afetará a energia dos vértices imediatamente vizinhos e não será afetada pela redução da energia de outros vértices não bloqueados desta região.

Após selecionar ordenadamente todos os vértices não bloqueados e otimizar as suas energias de distorção o passo seguinte consiste em desbloquear os vértices, escolher a próxima região não bloqueada de maior energia, bloquear as regiões imediatamente vizinhas e seguir até que todas as regiões não bloqueadas tenham sido escolhidas configurando uma iteração do processo de otimização global. Todas as regiões são desbloqueadas ao final de cada iteração.

O algoritmo 4 sintetiza as principais etapas do processo de otimização não-hierárquico realizado no contexto dos domínios de parametrização discretos. A relaxação do vértice  $u = \phi_i^{-1}(v)$  realizada no domínio  $\mathcal{P}_i \subset \Omega_i$  produz um novo vértice  $\tilde{u} \in \Omega_i$  limitado pelo bordo de  $\mathcal{P}_i$ . Essa relaxação será necessariamente realizada no conjunto  $\rho(X_N) \subset |J_0|$  pela composição  $\text{bar} \circ g_i \circ R_{ij}$ , onde  $i, j \in I$  e  $[\tau_i(v_{0_i}), \tau_i(v_{0_j})]$  é a aresta do triângulo em  $P_i$  que contém a nova posição  $\tilde{u}$  do vértice  $u$ . Após serem escolhidos todos os vértices possíveis para a otimização o conjunto resultante contendo o reposicionamento das projeções é denotado por  $\tilde{\rho}(X_N) \subset |J_0|$ , a figura 4.23 exemplifica alguns movimentos da relaxação sobre  $|J_0|$  destacados com cores em algumas estrelas projetadas e, particularmente, a estrela destacada na cor branca representa o movimento do vértice de  $X_N$  cuja projeção coincidia inicialmente com um vértice da superfície base  $\mathcal{B}$ .

A relaxação da projeção sobre  $|J_0|$  é fundamental no processo hierárquico pois na medida em que a superfície  $\mathcal{M}_{k-1}$  vai sendo refinada e o conjunto imagem da projeção  $\rho(X_{k-1})$  sobre  $|J_0|$  vai sendo relaxado, o novo conjunto  $\tilde{\rho}(X_{k-1})$  conterà os elementos  $\tilde{\rho}(v_r), \tilde{\rho}(v_s), \tilde{\rho}(v_t)$  necessários para o cálculo da projeção de  $v_k$  e este cálculo de  $\tilde{\rho}(v_k)$  já ocorre sob os efeitos da relaxação. Os passos de relaxação intermediários ao longo do refinamento contribuem significativamente com o processo de otimização.

**Algoritmo 4:** OTIMIZAÇÃO GLOBAL NÃO-HIERÁRQUICA**Entrada:**  $\mathcal{M}, \mathcal{B}, \rho$ **Saída:**  $\tilde{\rho}$ 

```

1  início
2   $\mathcal{S}[0] \leftarrow \emptyset$ 
3  para  $i \leq n$  faça
4       $\mathcal{S}_i \leftarrow \text{criaRegiao}(\text{Star}(v_{0_i}, \mathcal{B}), \rho) \ // \{v_{0_i}, \dots, v_{0_n}\} \subset X_0$ 
5       $(\mathcal{P}_i, \phi_i) \leftarrow \text{parametrizaRegiao}(\mathcal{S}_i, \text{Star}(v_{0_i}, \mathcal{B}), \rho)$ 
6       $\mathcal{S}[i] \leftarrow \mathcal{S}[i-1] \cup (\mathcal{S}_i, \phi_i) \ // \mathcal{M} = \cup_{i=1}^n \mathcal{S}_i$ 
7  fim
8   $\mathcal{G} \leftarrow \text{criaConjuntoColante}(\mathcal{B})$ 
9  para  $iter \leq \text{maxIter}$  faça
10      $E_{tot} \leftarrow \text{calculaEnergias\_porRegioes}(\mathcal{S})$ 
11      $// E_{tot}$  lista das energias totais medidas em cada  $\mathcal{S}[i]$ 
12      $\mathcal{S} \leftarrow \text{ordenaRegioes\_porEnergia}(\mathcal{S}, E_{tot}) \ // \text{max} \rightarrow \text{min}$ 
13     para  $i \leq n$  faça
14         bloqueio( $\mathcal{S}[i]$ )  $\leftarrow$  falso
15     fim
16     para  $i \leq n$  faça
17         se bloqueio( $\mathcal{S}[i]$ ) == falso então
18              $E \leftarrow \text{calculaEnergias\_porVertices}(\mathcal{S}[i])$ 
19              $// E$  lista das energias medidas em cada vértice
20             parametrizado por  $\phi_i$ 
21              $V_i \leftarrow \text{vertices}(\mathcal{S}_i)$ 
22              $V_i \leftarrow \text{ordenaVertices\_porEnergia}(V_i, E) \ // \text{max} \rightarrow \text{min}$ 
23             para  $j \leq \#V_i$  faça
24                 bloqueio( $v_j$ )  $\leftarrow$  falso
25             fim
26             para  $j \leq \#V_i$  faça
27                 se  $v_j \notin \text{bordo}(\mathcal{S}_i)$  e bloqueio( $v_j$ ) == falso então
28                      $\tilde{u}_j \leftarrow \text{minimiza}(E(\phi_i(u_j)), \mathcal{S}, \mathcal{G})$ 
29                     se  $E(\tilde{u}_j) < E(u_j)$  então
30                         para  $v_{j'} \in \text{Link}(v_j, \mathcal{S}_i)$  faça
31                             bloqueio( $v_{j'}$ )  $\leftarrow$  verdadeiro
32                         fim
33                     fim
34                 fim
35             se  $E_{tot}(\tilde{\mathcal{S}}[i]) < E_{tot}(\mathcal{S}[i])$  então
36                 para  $v_{0_{i'}} \in \text{Link}(v_{0_i}, \mathcal{B})$  faça
37                     bloqueio( $\mathcal{S}[i']$ )  $\leftarrow$  verdadeiro
38                 fim
39             fim
40         fim
41     fim
42 fim
43 fim

```



**Observações:**

Linha 4: a instrução *criaRegiao* determina quais triângulos de  $\mathcal{M}$ , cuja projeção dos vértices está restrita a estrela centrada em  $v_{0_i}$ , estão inteiramente contidos na vizinhança parametrizada do vértice  $v_{0_i}$  como estabelecido pela definição 4.6, estes triângulos compõem a região  $\mathcal{S}_i$ .

Linha 5: a instrução *parametrizaRegiao* determina o domínio de parametrização discreto  $\mathcal{P}_i$  correspondente com a região  $\mathcal{S}_i$  como estabelecido pela definição 4.5, ou seja, a parametrização dos triângulos de  $\mathcal{S}_i$  dentro do domínio  $\Omega_i$ .

Linha 27: o vértice  $\tilde{u}_j$  indica o reposicionamento de  $u_j = \phi_i^{-1}(v_j)$  em  $\tilde{\mathcal{P}}_i$  realizado após a otimização do funcional  $E(\phi_i(u_j))$  que mede a energia de distorção do vértice  $v_j$  no domínio  $\mathcal{P}_i$  e sujeito às restrições como foram apresentadas no início desta seção. Juntamente às restrições, são realizadas as atualizações, veiculadas pelas relações impostas por  $\mathcal{G}$ , nos domínios de parametrizações vizinhos, bem como, na projeção  $\rho$ . Ao final deste algoritmo a projeção dos vértices de  $\mathcal{M}$  sobre  $|J_0|$  estará totalmente atualizada.

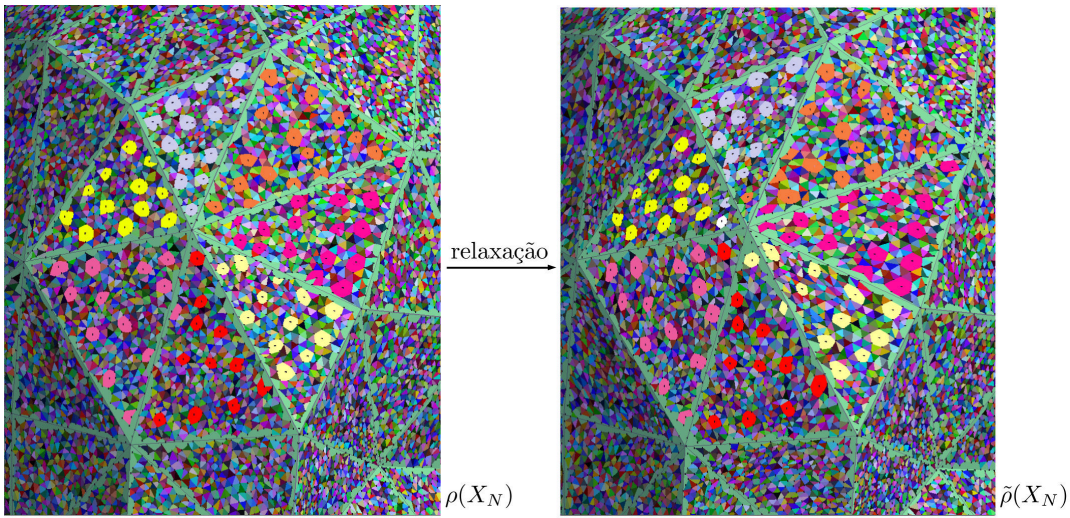


Figura 4.23: Relaxação do conjunto  $\rho(X_N)$  sobre  $|J_0|$ . Os triângulos coloridos estão inteiramente contidos em algum triângulo de  $\mathcal{B}$  e o movimento de algumas estrelas projetadas estão destacados em cores.

Apesar de ter caráter local, o processo de otimização dos vértices de  $\mathcal{M}$  é global por exaustão. Cada vértice de  $\mathcal{M}$  possui até três valores de energia medidos nos seus respectivos domínios de parametrização discretos e a soma total dos valores médios das energias de cada vértice é monotonamente não-crescente ao longo de cada iteração justificado pela própria tendência do método de otimização que sempre prioriza a escolha dos vértices de maior energia contidos nas regiões com maior energia total. A figura 4.24



exemplifica a variação da energia monotonamente não-crescente no processo não-hierárquico.

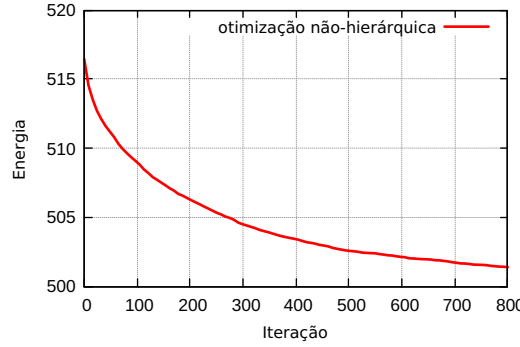


Figura 4.24: Variação da energia média na otimização global não-hierárquica com 800 iterações realizadas pelo algoritmo 4 no modelo *Egea* composto por 46045 vértices e 92086 triângulos.

#### 4.5.2

##### Hierárquico

O processo de otimização que ocorre em alguns níveis determinados pela estrutura HPDS-MT constituída por uma hierarquia de modificações locais minimamente compatíveis que induz uma simplificação da superfície triangularizada compacta  $\mathcal{M}$  até atingir uma superfície base  $\mathcal{B}$  é denominado por processo de otimização global hierárquico. Nesta abordagem, o problema das distorções introduzidas pelas parametrizações  $\phi_i$  que associam os domínios de parametrização discretos  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  com as regiões  $\mathcal{S}_i^k \subset \mathcal{M}_k$ , para cada  $i \in I$ , será tratado pelo algoritmo 4 para alguns valores de  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

A construção dos domínios de parametrização discretos  $\mathcal{P}_i^k \subset \Omega_i$  é viabilizada pela projeção hierárquica  $\rho : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{B}$ , deste modo, os domínios de parametrização discretos nos níveis subsequentes serão atualizados por meio das projeções dos novos vértices inseridos pelas modificações locais realizadas e orientadas pela HPDS-MT. Inicialmente a otimização ocorre em um nível  $k_0$  provocando a relaxação do conjunto  $\rho(X_{k_0}) \subset |J_0|$  e, em seguida, a superfície  $\mathcal{M}_{k_0}$  é refinada de acordo com a hierarquia até alcançar algum nível  $k_1 \leq N$ . Neste momento, os novos vértices de  $X_{k_1} - X_{k_0}$  inseridos foram projetados sobre  $|J_0|$ , a partir do conjunto  $\tilde{\rho}(X_{k_0})$  relaxado anteriormente, e compõem o conjunto  $\tilde{\rho}(X_{k_1})$ . Seguindo com o refinamento da superfície, de acordo com a hierarquia, sempre que um nível  $k \in \{k_0, k_1, \dots, k_l\} \subset \{0, \dots, N\}$  for alcançado este será selecionado para a otimização global e o conjunto dos vértices projetados nesta etapa é construído hierarquicamente com a projeção de cada novo vértice a partir do conjunto relaxado anteriormente. Esse novo conjunto alcançado é

relaxado de acordo com as modificações realizadas nos respectivos domínios de parametrização e o procedimento se repete até que o nível máximo  $k = k_l = N$  seja atingido.

O algoritmo 5 sintetiza as principais etapas realizadas no processo hierárquico de otimização global. Esse algoritmo supõem uma HPDS-MT  $\oplus_{s=0}^N \mathcal{T}_s$  construída a partir da superfície  $\mathcal{M}$ . A projeção subsequente de cada vértice  $v_k$  removido é realizada em algum triângulo da triangulação  $\mathcal{T}_{N-(k-1)}$  construída nesta modificação local e essas projeções subsequentes são utilizadas na instrução  $projeta(v_k, \mathcal{M}_0, \rho(X_{k-1}))$ ,  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Inicialmente os vértices da superfície base  $\mathcal{B} = \mathcal{M}_0$  são projetados em algum dos seus triângulos incidentes pela instrução  $projeta(X_0, \mathcal{M}_0)$ . A instrução da linha 12 é realizada pelo algoritmo 4.

A figura 4.25 exemplifica a variação da energia monotonamente não-crescente em cada nível do processo hierárquico realizado com 800 iterações. Foram considerados 4 níveis, respectivamente, distribuídos com 11685 vértices e 23168 triângulos, 23171 vértices e 46140 triângulos, 34657 vértices e 69112 triângulos, 46145 vértices e 92086 triângulos. Em cada nível foram realizadas, respectivamente, 500, 200, 50 e 50 iterações e economizou cerca de 43% do tempo de processamento em relação ao processo não-hierárquico.

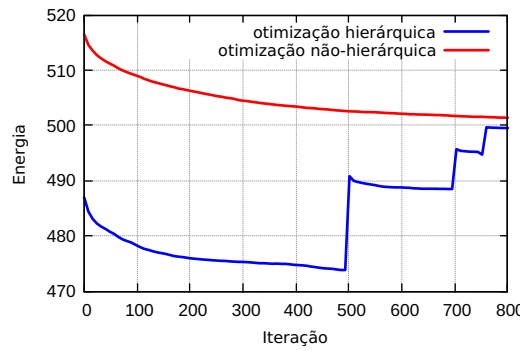


Figura 4.25: Variação da energia média na otimização global não-hierárquica comparada com a otimização global hierárquica, ambas realizadas com 800 iterações, respectivamente, pelos algoritmos 4 e 5 no modelo *Egea* composto por 46045 vértices e 92086 triângulos.

**Algoritmo 5:** OTIMIZAÇÃO GLOBAL HIERÁRQUICA**Entrada:**  $\oplus_{s=0}^N \mathcal{T}_s$ ,  $X_0 = \{v_{0_1}, \dots, v_{0_n}\}$ ,  $X_N = \{v_1, \dots, v_N\}$ **Saída:**  $\tilde{\rho}$ 

```

1  início
2  |  $\mathcal{M}_0 \leftarrow (\oplus_{s=0}^N \mathcal{T}_s, X_0)$ 
3  |  $\rho(X_0) \leftarrow \text{projeta}(X_0, \mathcal{M}_0)$ 
4  |  $k \leftarrow 1$ 
5  |  $t \leftarrow 0$ 
6  | enquanto  $k \leq N$  faça
7  |   |  $X_k \leftarrow X_{k-1} \cup \{v_k\}$ 
8  |   |  $\mathcal{M}_k \leftarrow (\oplus_{s=0}^{N-k} \mathcal{T}_s, X_k)$ 
9  |   |  $\rho(v_k) \leftarrow \text{projeta}(v_k, \mathcal{M}_0, \rho(X_{k-1}))$ 
10 |   | se  $k == k_t$  então
11 |   |   |  $\tilde{\rho}(X_{k_t}) \leftarrow \text{otimiza}(\mathcal{M}_{k_t}, \mathcal{M}_0, \rho(X_{k_t}))$ 
12 |   |   | se  $t == l$  então
13 |   |   |   | retorna  $\tilde{\rho}(X_{k_l})$ 
14 |   |   | fim
15 |   |   |  $\rho \leftarrow \tilde{\rho}$ 
16 |   |   |  $t \leftarrow t + 1$ 
17 |   | fim
18 |   |  $k \leftarrow k + 1$ 
19 | fim
20 fim

```

## 5

### Remalhamento semirregular

Neste capítulo será apresentada uma metodologia de remalhamento que aproxima a superfície triangularizada  $\mathcal{M}$ , com triangulação semirregular e cujas conectividades são definidas a partir da subdivisão da superfície base  $\mathcal{B}$ . O formato da nova superfície remalhada é extraído das parametrizações  $\phi_i$ , construídas no capítulo anterior, e combinadas com interpolações definidas por coeficientes interpolantes dados pelas funções peso  $\gamma_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujo suporte coincide com  $\overline{\Omega_i}$ , para cada  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ . A otimização global realizada nos domínios de parametrização discretos  $\mathcal{P}_i \subset \Omega_i$  contribui diretamente com a robustez geométrica desse remalhamento.

#### 5.1

##### Construção da superfície

Existem diferentes técnicas de remalhamento que permitem construir, a partir de uma superfície triangularizada, novas superfícies com triangulações compostas por características específicas exigidas em certas aplicações e cuja forma se aproxima da superfície original ([45], [29]). O remalhamento semirregular é uma parte das técnicas de remalhamento estruturado que se dedica a substituir a triangulação original de uma dada superfície por uma nova triangulação cuja estrutura de adjacências é bem comportada e viabiliza métodos mais simples de travessia pela estrutura ou de localização dos seus elementos componentes como detalhado em [29].

No caso semirregular, a triangulação  $\mathcal{B}'$  é originada de um processo recursivo de subdivisão aplicado em uma superfície base  $\mathcal{B} = (J_0, X_0)$ , mais simplificada que a superfície original  $\mathcal{M} = (J_N, X_N)$ , e tal que  $|J_0|$  e  $|J_N|$  são homeomorfas entre si. Cada triângulo da superfície  $\mathcal{B}$  é subdividido em quatro novos triângulos e todos os novos vértices inseridos nesta configuração são regulares (valência seis) exceto nos vértices originados de  $\mathcal{B}$  que podem ser irregulares (valência diferente de seis). Esse procedimento de subdivisão pode ser repetido  $L$  vezes recursivamente e, deste modo, uma hierarquia com  $L$  níveis de remalhamento é estabelecida naturalmente e a triangulação no nível  $L$  é identificada por  $\mathcal{B}'_L$  contendo  $m \cdot 4^L$  triângulos, onde  $m$  é o número de triângulos da superfície  $\mathcal{B}$  e  $L = 0$  identifica a superfície base original.

A estrutura de adjacências da nova superfície será equivalente a estrutura criada pela triangulação  $\mathcal{B}'_L$  mas a determinação da forma será construída a partir da superfície original  $\mathcal{M}$ . Neste sentido, o relacionamento entre  $|J_0|$  e  $|J_N|$  estabelecido por meio da projeção  $\rho$  viabiliza o cálculo das novas coordenadas para os vértices criados em  $\mathcal{B}'_L$ . No entanto, é necessário localizar, inicialmente, a posição de todos os novos vértices criados em  $\mathcal{B}'_L$  na triangulação  $\mathcal{B}$  original e essas localizações servirão como projeções, hierarquicamente estabelecidas, para os vértices da nova superfície sobre a superfície base.

### 5.1.1 Subdivisão 4:1

A subdivisão 4:1 é um esquema de multi-resolução e modificação de conectividades que combina duas operações geométricas em arestas, *split* e *flip*, realizadas, por exemplo, em superfícies triangularizadas e utilizada em problemas clássicos que envolvem subdivisão uniforme como aqueles destinados a aproximação [46] ou a interpolação [47], [48].

Neste contexto de remalhamento, o algoritmo de subdivisão realiza as operações geométricas na superfície triangularizada  $\mathcal{B}$  em duas etapas sintetizadas no algoritmo 6. A primeira etapa ocorre na instrução *split* (figura 5.1(b)) em que um novo vértice é inserido e posicionado uniformemente no ponto médio da aresta candidata, além disso, é registrada a história do novo vértice  $v$  em relação ao vértice central de uma estrela que o contém em  $\mathcal{B}$  (figura 5.1(a)). Esse registro é utilizado na instrução *projeta* (figura 5.1(d)) para determinar a localização da posição de  $v$  sobre  $|J_0|$ , onde ocorre uma busca na estrela de  $\mathcal{B}$  pelo triângulo que o contém e neste triângulo são calculadas as suas coordenadas baricêntricas. Essas informações são armazenadas como propriedades da projeção do vértice. Na segunda etapa, realizada pela instrução *flip* (figura 5.1(c)), é obtida a semirregularidade da subdivisão.

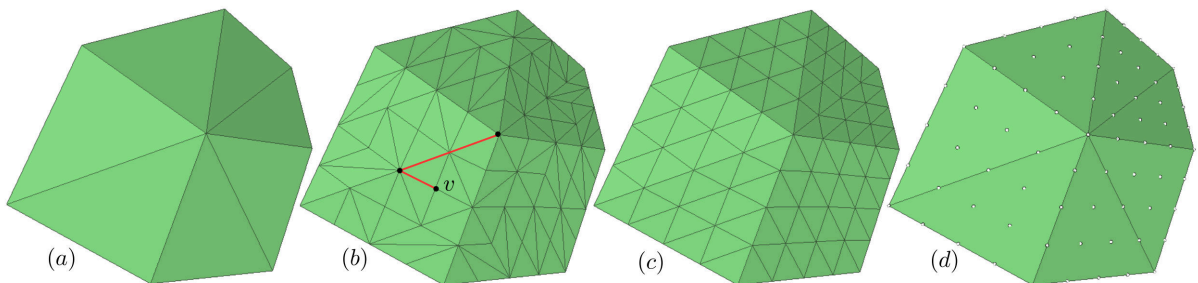


Figura 5.1: (a)Estrela de  $\mathcal{B}$  (b)*Split* ( $L = 2$ ) (c)*Flip* (d)Projeção dos novos vértices

**Algoritmo 6:** SUBDIVISÃO UNIFORME 4:1

---

**Entrada:**  $\mathcal{B}, L$   
**Saída:**  $\mathcal{B}'_L$

```

1 início
2    $\mathcal{B}'_0 \leftarrow \mathcal{B}$ 
3    $V \leftarrow \text{idVertices}(\mathcal{B}'_0)$ 
4    $E \leftarrow \text{idArestas}(\mathcal{B}'_0)$ 
5    $l \leftarrow 1$ 
6   enquanto  $l \leq L$  faça
7     para  $i \in V$  faça
8       //  $v_i \in \mathcal{B}'_{l-1}$ 
9        $v_i.\text{new} \leftarrow \text{falso}$ 
10    fim
11    para  $i \in E$  faça
12      //  $e_i \in \mathcal{B}'_{l-1}$ 
13       $e_i.\text{metade} \leftarrow \text{falso}$ 
14    fim
15    para  $i \in E$  faça
16      //  $e_i \in \mathcal{B}'_{l-1}$ 
17      se  $e_i.v_0.\text{new} == \text{falso}$  e  $e_i.v_1.\text{new} == \text{falso}$  então
18         $v \leftarrow \left\lfloor \frac{e_i.v_0 + e_i.v_1}{2} \right\rfloor$ 
19         $\text{split}(e_i, v, \mathcal{B}'_{l-1})$ 
20         $v.\text{new} \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
21         $e(v_0, v).\text{metade} \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
22         $e(v_1, v).\text{metade} \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
23        se  $e_i.v_0 \in \mathcal{B}'_0$  então
24           $v.\text{centro} \leftarrow e_i.v_0$ 
25        senão
26           $v.\text{centro} \leftarrow e_i.v_0.\text{centro}$ 
27        fim
28      projeta( $v, \mathcal{B}$ )
29    fim
30  fim
31  atualiza( $V, E$ )
32  para  $i \in E$  faça
33    se  $e_i.\text{metade} == \text{falso}$  então
34      se  $(e_i.v_0.\text{new} == \text{verdadeiro} \text{ e } e_i.v_1.\text{new} == \text{falso})$  ou
35       $(e_i.v_0.\text{new} == \text{falso} \text{ e } e_i.v_1.\text{new} == \text{verdadeiro})$  então
36         $\text{flip}(e_i, \mathcal{B}'_{l-1})$ 
37      fim
38    fim
39  fim
40   $\mathcal{B}'_l \leftarrow \mathcal{B}'_{l-1}$ 
41  resetaPropBooleanas( $\mathcal{B}'_l$ )
42   $l \leftarrow l + 1$ 
43 fim
44 fim

```

---

**Observações:**

Linha 9: o atributo *new* classifica os vértices criados pela subdivisão das arestas;

Linha 13: o atributo *metade* classifica as arestas criadas pela subdivisão;

Linha 20: a instrução *split* divide a aresta  $e_i$  no vértice  $v$  e cria dois novos triângulos;

Linhas 25,26: o atributo *centro* associa os novos vértices com algum vértice da estrela que o contém em  $\mathcal{B}$ ;

Linha 32: a instrução *atualiza* realiza atualizações nos *contêineres*.

**5.1.2****Interpolação**

Após a subdivisão da superfície base as coordenadas geométricas dos novos vértices que compõem  $\mathcal{B}'_L$  serão atualizadas de modo a transformar a triangulação obtida com  $L$  níveis na superfície remalhada  $\mathcal{M}'_L$  cuja forma se aproxima da superfície  $\mathcal{M}$  original. A medição de proximidade entre a superfície remalhada e a superfície original pode ser estimada pela distância de Hausdorff cujo erro cometido no cálculo da distância é verificado pelo *erro médio quadrático* (RMS) ([44]). Além desse indicador de qualidade fornecido pelo RMS, outros parâmetros de qualidade para a superfície remalhada serão analisados na próxima seção.

Por ora, a metodologia de construção por interpolação é inspirada em ([11]) e consiste na interpolação de triângulos a partir de um mapeamento bijetivo entre o conjunto dos novos vértices de  $\mathcal{B}'_L$  projetado sobre a superfície base  $\mathcal{B}$  e a triangulação original  $\mathcal{M}$ . Neste mapeamento os vértices do conjunto  $X_0 \cap X_N$ , que são componentes originais da superfície  $\mathcal{B}$  e simultaneamente da superfície  $\mathcal{M}$ , permanecem fixos sobre  $|J_N|$  em suas posições originais e os novos vértices de  $\mathcal{B}'_L$  que não pertencem ao conjunto  $X_0$ , para  $L > 0$ , serão posicionados em  $|J_N|$  pelas parametrizações  $\phi_i$ .

As projeções dos novos vértices de  $\mathcal{B}'_L$  sobre  $|J_0|$  pertencem às regiões  $(\text{bar} \circ g_i \circ R_{ij'}) (\Omega_i) \subset |J_0|$  para todo  $i \in I$  e para cada  $j' \in I$  tal que  $[v_{0_i}, v_{0_{j'}}]$  é uma aresta de  $\mathcal{B}$ . Neste caso, cada novo vértice  $v$  poderá pertencer a até três regiões como estas e definidas pelos vértices do triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  de  $\mathcal{B}$ . As pré-imagens de  $v$  nos possíveis domínios de parametrização discretos,  $\mathcal{P}_i \in \Omega_i$ ,  $\mathcal{P}_j \in \Omega_j$  ou  $\mathcal{P}_h \in \Omega_h$  recaem em triângulos que possuem correspondentes nas regiões  $\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{S}_j$  ou  $\mathcal{S}_h$  em  $\mathcal{M}$  parametrizados por  $\phi_i$ ,  $\phi_j$  e  $\phi_h$ , respectivamente.

Deste modo, se  $u_i$ ,  $u_j$  e  $u_h$  são as possíveis pré-imagens de  $v$  em  $\mathcal{P}_i \in \Omega_i$ ,  $\mathcal{P}_j \in \Omega_j$  ou  $\mathcal{P}_h \in \Omega_h$  então  $\phi_i(u_i)$ ,  $\phi_j(u_j)$  e  $\phi_h(u_h)$  terão suas imagens incidentes nos tais triângulos homólogos de  $\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{S}_j$  ou  $\mathcal{S}_h$ . Essas imagens pelas  $\phi'$ s nesses triângulos serão calculadas com coordenadas baricêntricas. A figura 5.2

esquemmatiza essas aplicações, para cada novo vértice  $v$ , entre  $|J_0|$  e os domínios de parametrização discretos correspondentes, bem como, entre estes domínios e a superfície triangularizada  $\mathcal{M}$ . A subdivisão uniforme 4:1 foi destacada, nesta figura, apenas no triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  onde os pontos amarelos e vermelhos foram inseridos, respectivamente, em  $L = 1$  e  $L = 2$ .

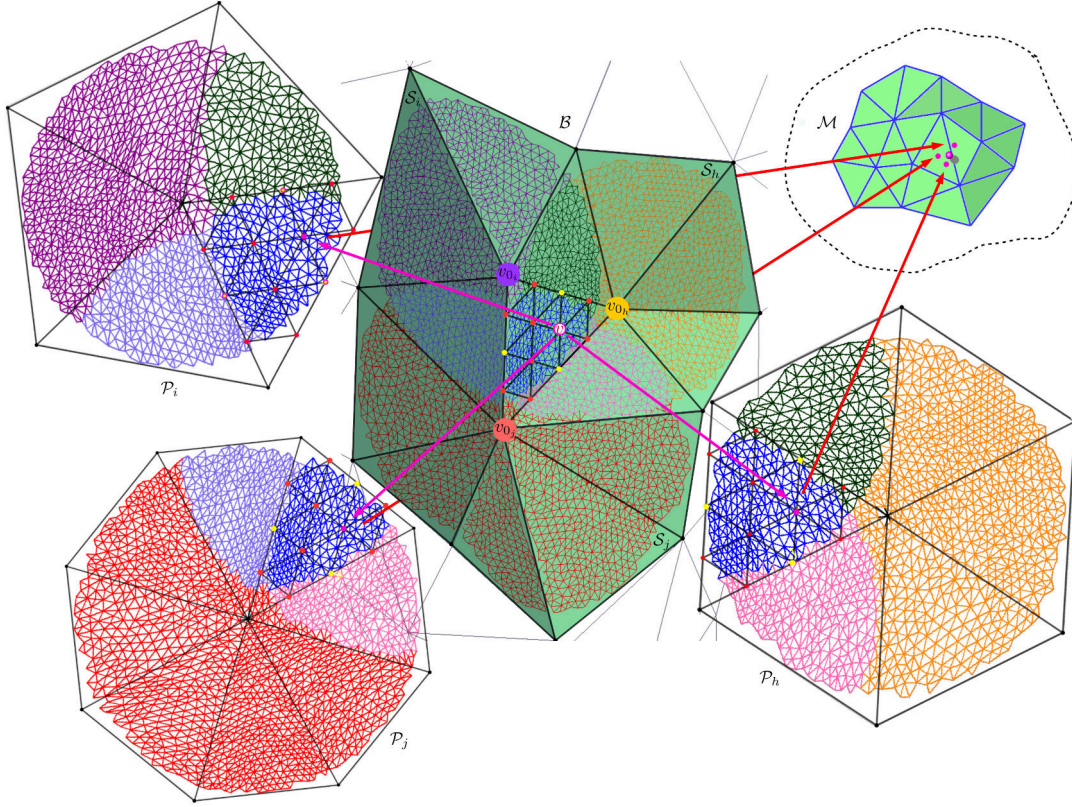


Figura 5.2: Reposicionamento dos vértices introduzidos pela subdivisão 4:1. Cada novo vértice  $v$  é mapeado nos seus respectivos domínios de parametrização discretos e a partir destes domínios são remapeados na superfície  $\mathcal{M}$ . As coordenadas de  $v$  são recalculadas por interpolação e representada pelo ponto de cor lilás sombreado.

A etapa fundamental é determinar quando um novo vértice  $v$  de  $\mathcal{B}'_L$  restrito ao triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  de  $\mathcal{B}$  e cuja pré-imagem está no domínio de parametrização  $\Omega_i$ , por exemplo, pertence ao domínio  $\mathcal{P}_i$ . Para tanto, é necessário checar se  $(\text{bar} \circ g_i \circ R_{ij})^{-1}(v)$  pertence ao polígono delimitado pelo bordo de  $\mathcal{P}_i$  ([49]) e, neste caso, determinar a qual triângulo de  $\mathcal{P}_i$  ele pertence. É necessário observar que a pré-imagem de  $v$  pode pertencer a  $\Omega_i$  mas não pertencer ao polígono de que se trata.

A busca na triangulação  $\mathcal{P}_i$  pela localização da pré-imagem de  $v$  pode ser realizada na "força bruta", passando por todos os triângulos, ou com a complexidade reduzida como proposta pelo algoritmo apresentado em [50] e, neste caso, é necessária a certeza sobre a pertinência da pré-imagem de  $v$  na triangulação  $\mathcal{P}_i$ . O algoritmo inicia na aresta escolhida em um triângulo de



$\mathcal{P}_i$  e investiga em qual dos dois semiplanos delimitado pela reta definida nesta aresta pertence o ponto procurado. Se pertencer ao semiplano que contém o terceiro vértice, então segue incrementalmente investigando nos semiplanos delimitados pelas retas definidas nas outras duas arestas com extremidade neste terceiro vértice e sempre em direção ao ponto procurado. Caso o ponto pertença ao semiplano que não contém o terceiro vértice, então faz-se a troca pelo triângulo oposto e segue, do mesmo modo, por este outro triângulo. Iniciar por um triângulo central, heurísticamente, reduz a complexidade do método e, portanto, a aresta escolhida em  $\mathcal{P}_i$  deve ser composta pelo ponto central  $(\text{bar} \circ g_i \circ R_{ij})^{-1}(v_{0_i})$  e, no outro extremo, pelo ponto mais próximo ao ponto procurado.

A última etapa deste processo consiste em determinar coordenadas únicas de um ponto próximo de  $|J_N|$  que interpole a posição de cada novo vértice considerando que quanto mais refinada for a triangulação  $\mathcal{M}$  mais próximos entre si estarão os remapeamentos de um novo vértice. O novo vértice  $v$  é remapeado sobre  $|J_N|$  pelas possíveis imagens  $\phi_i(u_i)$ ,  $\phi_j(u_j)$  e  $\phi_h(u_h)$ , onde  $u_i$ ,  $u_j$  ou  $u_h$  são as possíveis pré-imagens de  $v$  nos respectivos domínios de parametrização discretos. Cabe lembrar que  $v$  foi amostrado no triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  de  $\mathcal{B}$  e, portanto, as pré-imagens estarão definidas em pelo menos um dos domínios de parametrização discretos definidos a partir dos vértices indexados por  $I'_v = \{i, j, h\}$ . Deste modo, a posição geométrica  $p$  do remapeamento de  $v$  sobre  $|J_N|$  será interpolada por

$$p = \left( \sum_{b \in I'_v} \gamma_b(u_b) \right)^{-1} \sum_{b \in I'_v} (\gamma_b(u_b) \phi_b(u_b)),$$

onde  $\gamma_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função peso que determina coeficientes interpolantes. A figura 5.2 ilustra a nova posição interpolada para o vértice  $v$  numa proximidade de  $|J_N|$ .

**Definição 5.1** A função escalar  $\mathfrak{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\mathfrak{h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq \Delta_1, \\ \mathfrak{m} \left( \frac{\Delta_2 - x}{\Delta_2 - \Delta_1} \right) & \text{se } \Delta_1 < x \leq \Delta_2, \mathfrak{m}(x) = 3x^2 - 2x^3 \\ 0 & \text{se } x > \Delta_2 \end{cases}$$

é um interpolador spline cúbico suave para  $0 < \Delta_1 < \Delta_2 \leq 1$ .

A função escalar  $\mathfrak{h}$  é potencialmente importante quando combinada com a função  $\gamma_b$ ,  $b \in I'_v$ , por ser positiva, decrescente para todo  $x \in (\Delta_1, \Delta_2]$  e garantir o suporte compacto no domínio de parametrização  $\Omega_b$ , a função peso

$\gamma_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é reconhecida na literatura de Análise como uma *bump function*. A próxima definição estabelece  $\gamma_b$  a partir da função escalar  $\mathfrak{h}$ .

**Definição 5.2** Para cada  $b \in I$  a função peso  $\gamma_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que

$$\gamma_b(x, y) = \mathfrak{h}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e com  $\sqrt{x^2 + y^2}$  sendo a distância de  $(x, y)$  ao centro  $(0, 0)$  de  $\Omega_b$ .

A fim de fazer coincidir o suporte de  $\gamma_b$  com o fecho do domínio de parametrização  $\Omega_b$  o parâmetro  $\Delta_2$  é estabelecido como  $\Delta_2 = \cos(\pi/\omega_b)$  e uma cota para  $\Delta_1$  é tomada por  $\Delta_1 = 0.25 \cos(\pi/\omega_b)$ , onde  $\omega_b$  é a valência do vértice  $v_{0_b}$  ([1]). O suporte de  $\gamma_b$  é  $\text{supp}(\gamma_b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma_b(x, y) \neq 0\} = \overline{\Omega_b} = \overline{\Omega_b}$ . A figura 5.3 exibe os gráficos referentes as funções definidas anteriormente, particularmente, para  $\omega_b = 6$ .

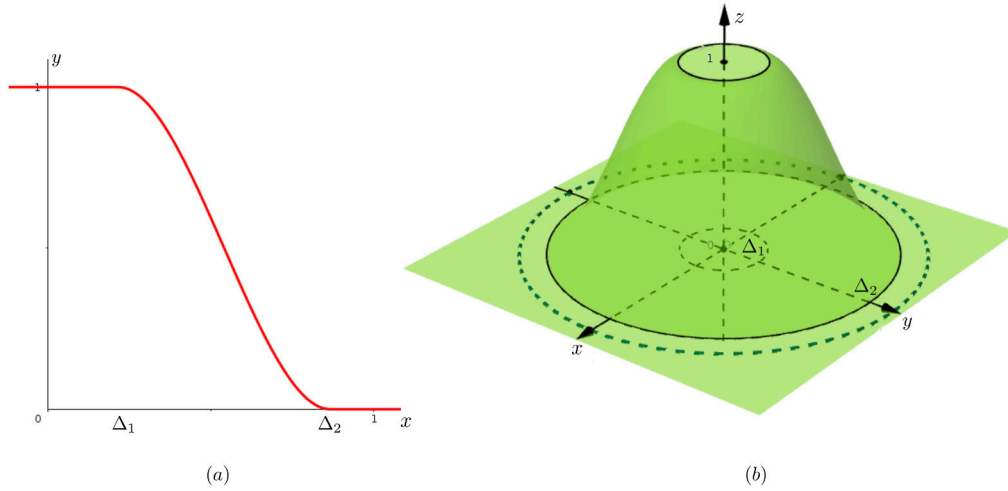


Figura 5.3: (a) Gráfico de  $\mathfrak{h}$  (b) Gráfico de  $\gamma_b$

A figura 5.4 exemplifica as etapas do remalhamento semirregular no modelo *Egea* representado originalmente na figura (c) com 46045 vértices 92086 faces. Os modelos (a) e (b), respectivamente, ilustram a subdivisão 4:1 uniforme com  $L = 4$  e o reposicionamento das coordenadas pela interpolação contendo 25090 vértices e 50176 faces.

## 5.2

### Comparações

A estrutura adotada nas técnicas de remalhamento semirregular segue, em geral, três etapas: a construção de uma superfície base a partir de uma superfície inicial, possivelmente irregular, obtida como uma versão aproximada

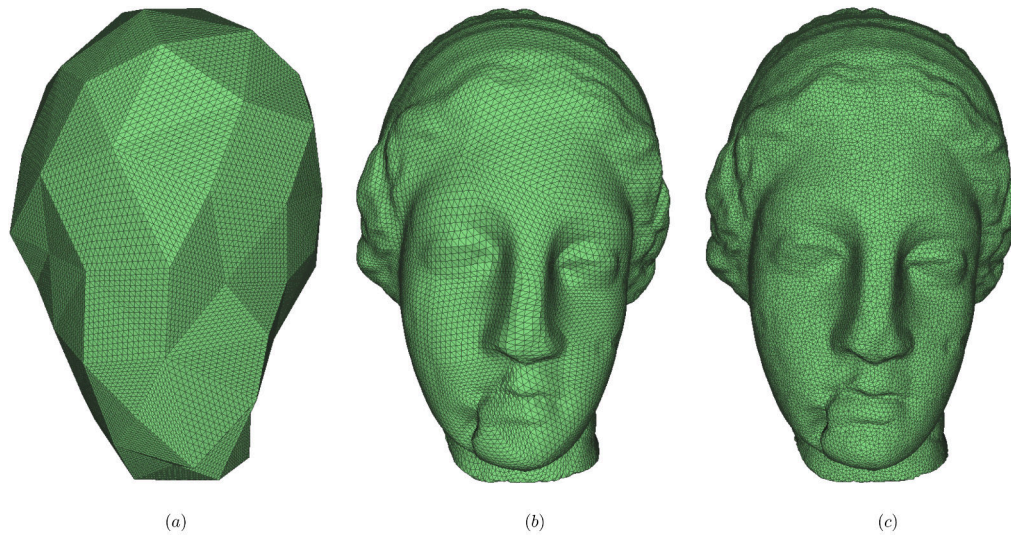


Figura 5.4: (a) Subdivisão 4:1 (b) Interpolação (c) Original

e mais grosseira, bem como, o refinamento semirregular desta superfície base, acompanhado pelo remapeamento que reposiciona os vértices da superfície semirregular através da parametrização da superfície inicial. As escolhas sobre quais mecanismos serão utilizados para compor o remalhamento é essencial para alcançar com relevância uma triangulação que preserva as principais propriedades do remalhamento semirregular, como apontado por [9].

Neste sentido, a avaliação dos efeitos da otimização hierárquica proposta nesta tese será realizada por meio do remalhamento semirregular como fruto da combinação da superfície base obtida do processo de simplificação direcionado pela HPDS-MT [2], com os domínios de parametrização locais otimizados hierarquicamente pela associação entre a projeção hierárquica e a estrutura diferenciável [1] e, por fim, com o remapeamento pela *bump function* construída com o interpolante *spline* cúbico [11] cujo suporte compacto é sugerido em [1]. Serão pontuados alguns comentários sobre os principais indicadores apontados por [9], em seguida, algumas aplicações em modelos reais e em comparação com [3], além disso, será verificado o comportamento do remalhamento obtido com a compressão da geometria realizada com o pacote apresentado em [51].

### Características da superfície base e parametrização

A influência da superfície base para este processo é imperativa uma vez que dela depende a definição dos domínios locais pela parametrização e a etapa de refinamento para o remalhamento. Alguns atributos são precípuos e, portanto, devem ser destacados, como a preservação da topologia da superfície original; a baixa cardinalidade dos vértices que interfere na quantidade de

domínios locais e na complexidade da estrutura diferenciável; a proximidade com a superfície original que interfere na qualidade da projeção hierárquica entre a superfície original e a superfície base e, por sua vez, na qualidade das triangulações dos domínios locais; o formato dos triângulos com baixa variância na razão de aspecto e a regularidade dos seus vértices que deve prevenir o alto desvio padrão das valências em relação a média  $\approx 6$ , ambos os atributos interferem nas deformações introduzidas nos domínios locais e, ainda, nos novos triângulos originados do refinamento.

A superfície base originada da HPDS-MT é bem adequada aos critérios desejados, como apresentados em [2], e é construída pelo processo de simplificação incremental que segue a hierarquia da amostragem de pontos por discos de Poisson realizada numa superfície de entrada, particionada em regiões de Voronoi localizada restrita cujo complexo dual define uma nova triangulação que é Delaunay localizada restrita (LRDT). As atualizações locais realizadas com a remoção dos pontos direcionada pela hierarquia segue critérios topológicos que garante a preservação de topologia da superfície de entrada em cada nível, além disso, as propriedades de espaçamento na amostragem dos pontos é observada como um dos fatores preponderantes para garantir a qualidade na forma dos triângulos e também na medida de proximidade entre a superfície de entrada e a LRDT. A LRDT extraída inicialmente representa a superfície inicial  $\mathcal{M}$  e em um nível mais simplificado representa a superfície base  $\mathcal{B}$ .

Os resultados experimentais exibidos em [2] exemplificam a qualidade da superfície base em comparação com outros métodos, inclusive frente a superfície base produzida em [3] que realiza simplificação incremental com operações locais de colapso em arestas. São verificadas nas superfícies bases de modelos triangularizados com diferentes quantidades de vértices as propriedades, ângulos internos mínimo-máximo, razão de aspecto, distância de Hausdorff e valência. Em cada propriedade avaliada a superfície base originada da HPDS-MT alcança as melhores estatísticas de média e desvio padrão.

Além da escolha da superfície base, a parametrização é a outra componente decisiva e com forte impacto na qualidade do processo pois estabelece, no caso do remalhamento, a conexão entre a superfície semirregular com a superfície inicial por meio das coordenadas bidimensionais concentradas nos domínios locais e, deste modo, herda as consequências dos problemas de distorção e suavidade como observado por [9]. Neste sentido, o remalhamento semirregular, tal como foi apresentado, evidencia experimentalmente a qualidade da otimização hierárquica quando observado o remapeamento pelos domínios otimizados em comparação com os domínios originais.

Supondo, hipoteticamente, que a parametrização da superfície inicial preservasse ângulo, área e comprimento no mapeamento dos seus triângulos nos domínios locais então a consequência na triangulação do remalhamento semirregular seria ângulos internos de  $60^\circ$ , razão de aspecto coincidente com o triângulo equilátero e desvio padrão nulo na variação das áreas e comprimentos, além do que, as linhas definidas pelas arestas dos triângulos ao longo da superfície seriam totalmente suavizadas. A preservação como foi suposta não é possível, em geral, mas a importância da otimização realizada está em reduzir a energia de distorção introduzida pela parametrização e é evidenciada quando verificadas as estatísticas em relação as medidas de ângulo, área, comprimento e razão de aspecto.

O refinamento da triangulação  $\mathcal{B}$  em  $L$  níveis produz a triangulação  $\mathcal{B}'_L$  cujos vértices introduzidos são parametrizados, respectivamente, no interior dos discos abertos inscritos em cada polígono  $P_i$ , para cada  $i \in I$ , e, portanto, identificados respectivamente nos seus domínios de parametrização discretos  $\mathcal{P}_i$ . A uniformidade dos novos vértices de  $\mathcal{B}'_L$  não se mantêm entre os triângulos de  $\mathcal{B}$  e tão pouco no remapeamento que é dependente dos domínios  $\mathcal{P}_i$ . A figura 5.2 exemplifica a posição dos novos vértices correspondentes com um triângulo  $[v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}]$  de  $\mathcal{B}$  em domínios locais  $\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j, \mathcal{P}_h$  e sendo  $v_{0_i}, v_{0_j}, v_{0_h}$  vértices com valências distintas. A suavidade das linhas definidas pelas arestas dos triângulos no remalhamento fica comprometida por estes fatos e pelas distorções das triangulações de cada  $\mathcal{P}_i$  em relação a superfície  $\mathcal{M}$ . Na figura 5.5 são ilustrados no modelo *Egea*, remalhado por esta metodologia com 4 níveis e são destacadas algumas diferenças de suavidade obtidas após as etapas de pré e pós otimização hierárquica dos domínios locais.

### Aplicação do remalhamento em superfícies triangularizadas

Algumas verificações experimentais foram realizadas inicialmente nos modelos *Egea* e *Bunny* cujas topologias da superfície subjacente são homeomorfas à esfera e, também, na *Vértebra* cuja topologia da superfície subjacente é homeomorfa ao toro. Os modelos foram simplificados pela HPDS-MT, a superfície original corresponde ao nível mais fino e a superfície base corresponde ao nível mais simplificado. A tabela 5.1 armazena as quantidades de vértices e triângulos das superfícies originais utilizadas nestes experimentos, das superfícies bases obtidas após as simplificações e das novas triangulações obtidas após os remalhamentos com  $L$  níveis. Na última coluna estão armazenados os percentuais de vértices irregulares (valência  $\neq 6$ ) do remalhamento em relação a cardinalidade dos vértices da superfície base, vale

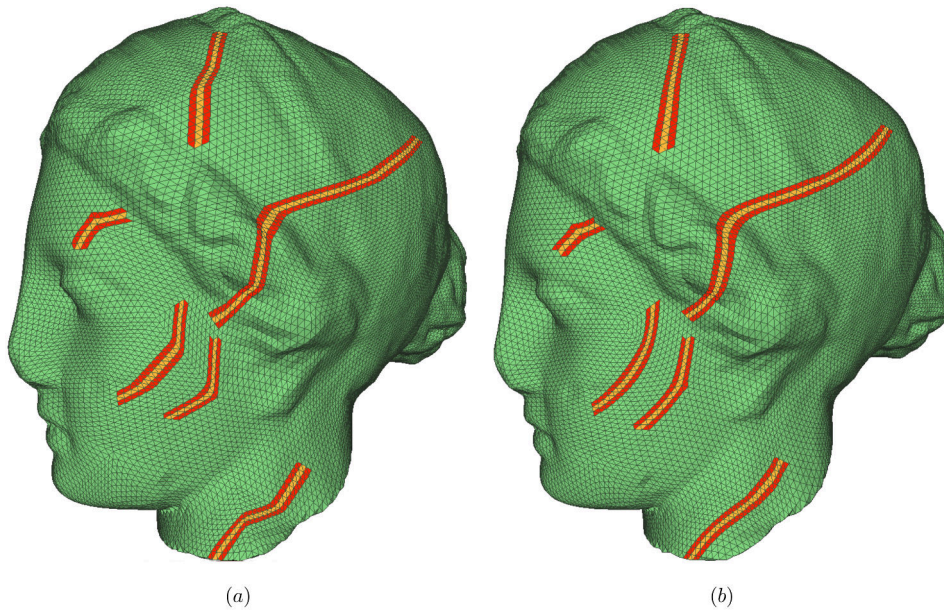


Figura 5.5: Comparação de suavidade das linhas com domínios (a) não otimizados e (b) otimizados hierarquicamente.

ressaltar que os vértices irregulares deste remalhamento são remanescentes da superfície base e portanto a sua quantidade é limitada pela cardinalidade de vértices das superfícies bases.

Modelo	$\#V_{original}$	$\#T_{original}$	$\#V_{base}$	$\#T_{base}$	$\#V_{remalhado}$	$\#T_{remalhado}$	$L$	$V_{irreg} (\%)$
Egea	46045	92086	100	192	25090	50176	4	56.00
Bunny	61451	122898	463	922	29506	59008	3	53.90
Vértebra	62481	124962	500	1000	32000	64000	3	52.40

Tabela 5.1: Cardinalidade de vértices e triângulos nos modelos originais, bases e remalhados.

As figuras 5.6, 5.7, 5.8 ilustram o resultado dos remalhamentos aplicados sobre os modelos elencados na tabela 5.1 e permitem visualizar a preservação da forma em relação aos modelos originais, inclusive alguns detalhes mais finos como as ondulações no topo da *Egea* e as pequenas depressões nas suas bochechas. As ondulações no corpo do *Bunny* e o detalhe na boca. Na *Vértebra*, as pequenas depressões na parte mais aplanada, renderizada em primeiro plano.

As comparações da qualidade entre os resultados do remalhamento obtidos com os domínios não otimizados, otimizados sem hierarquia e otimizados pela hierarquia estão sintetizados na tabela 5.2. As estatísticas dos ângulos foram obtidas entre os menores e os maiores ângulos calculados dentre todos os triângulos, a média de referência é  $60^\circ$  e o desvio padrão nulo indica a regularidade entre os ângulos internos. A razão de aspecto de cada triângulo é calculada pela razão normalizada entre o raio do círculo inscrito



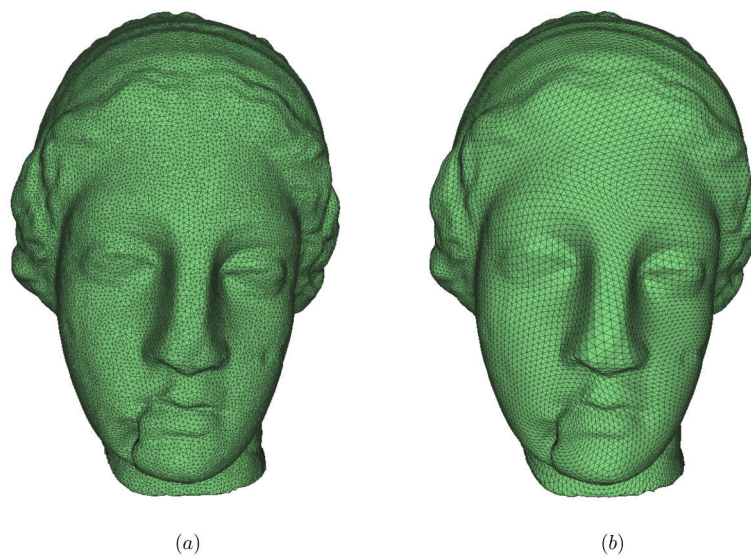


Figura 5.6: Modelo *Egea* original (a) e remalhado (b).

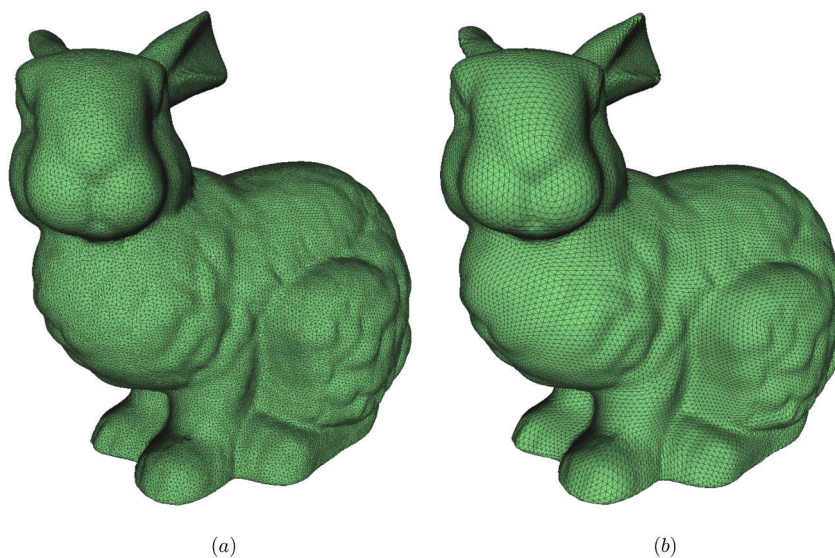
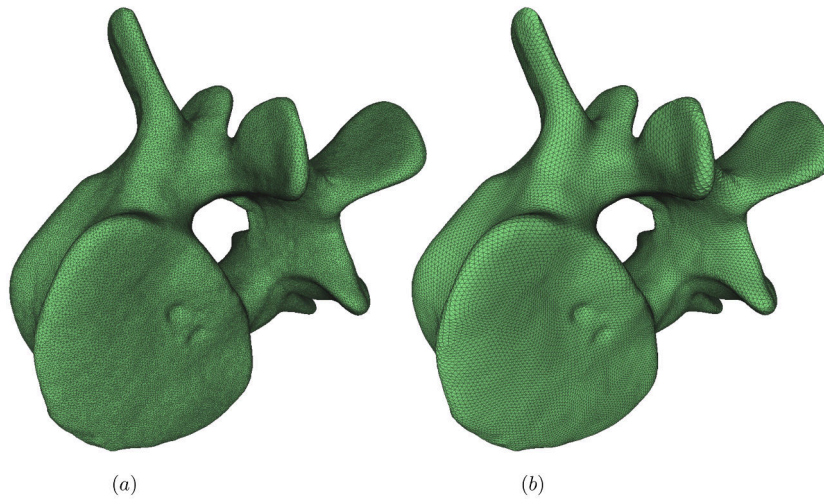


Figura 5.7: Modelo *Bunny* original (a) e remalhado (b).

pelo comprimento da maior aresta [11], a média de referência é unitária e o desvio padrão nulo indica a boa forma do triângulo equilátero. O menor erro médio quadrático (RMS) cometido no cálculo da máxima distância de Hausdorff avalia a melhor proximidade entre o modelo original e o modelo remalhado [52].

Figura 5.8: Modelo *Vértebra* original (a) e remalhado (b).

		Ângulo						Razão de Aspecto			Distância		
	Método	mín	$\mu$	$\sigma$	máx	$\mu$	$\sigma$	máx	$\mu$	$\sigma'$	máx	$\mu$	RMS
Egea	Não Otim.	16.91	45.42	6.36	130.93	78.42	9.65	0.99	0.81	11.27	55.5e-5	1.60e-5	2.8e-5
	Otim. nH	13.87	47.63	6.29	119.09	74.26	8.12	0.99	0.85	9.76	69.5e-5	1.50e-5	2.8e-5
	Otim. H	20.30	48.09	6.12	130.90	73.59	7.70	0.99	0.85	9.27	69.5e-5	1.50e-5	2.7e-5
Bunny	Não Otim.	14.78	46.56	7.28	142.46	75.75	9.78	0.99	0.83	11.92	79.71e-4	1.40e-4	2.85e-4
	Otim. nH	15.21	48.48	6.60	143.42	73.10	8.60	0.99	0.86	10.20	61.26e-4	1.33e-4	2.54e-4
	Otim. H	16.82	48.94	6.41	143.42	72.43	8.25	0.99	0.87	9.75	62.53e-4	1.31e-4	2.49e-4
		mín			máx			$\sigma' = 100 \cdot \sigma / \mu$ [%]					

Tabela 5.2: Comparações de ângulo, razão de aspecto e distância.

A tabela 5.3 apresenta os dados colhidos na medição da área e do comprimento das arestas dos triângulos e, em ambos os casos, os valores mínimo e máximo representados são o menor dos mínimos e o maior dos máximos e são exibidos como um percentual da média, de modo que 100% é o valor de referência. Neste caso, o desvio padrão nulo é a outra referência que indica regularidade na distribuição das áreas e dos comprimentos das arestas.

		Área			Comprimentos		
	Método	mín	máx	$\sigma$	mín	máx	$\sigma$
Egea	Não Otim.	46.52	246.27	23.32	54.96	195.96	18.86
	Otim. nH	23.87	294.95	24.18	26.29	208.37	17.82
	Otim. H	31.25	295.40	23.96	31.44	214.70	17.41
Bunny	Não Otim.	24.79	340.53	23.83	44.37	311.49	19.25
	Otim. nH	22.04	367.95	23.77	40.83	300.96	17.72
	Otim. H	22.04	367.36	23.85	46.49	325.78	17.33
Referência		100%		0%	100%		0%

Tabela 5.3: Comparações de área e comprimento de arestas.

Os valores experimentais são obtidos com a mesma superfície original e mesma superfície base. O processo de otimização sem hierarquia e pela hierarquia foi realizado, respectivamente, com 1000 iterações no modelo *Egea*



e com 900 iterações no modelo *Bunny*. A figura 5.9 apresenta os gráficos com a variação das energias totais de distorção medidas após cada iteração em ambos os processos de otimização, ou seja, o total das energias mínimas, máximas e das suas médias são calculadas, por iteração, em todos os vértices com relação as suas parametrizações nos três possíveis domínios locais. Os tempos dispensados para o processamento hierárquico nos modelos *Egea* e *Bunny* foram, respectivamente, cerca de 63% e 66% mais eficientes que o processamento não hierárquico. A influência da redução nas energias de distorção pelo processo hierárquico fica evidenciada nos dados sintetizados nas tabelas 5.2 e 5.3. Especialmente a tabela 5.2, que indica triângulos mais equiláteros e avalia o erro médio quadrático cometido na verificação da proximidade com o modelo original.

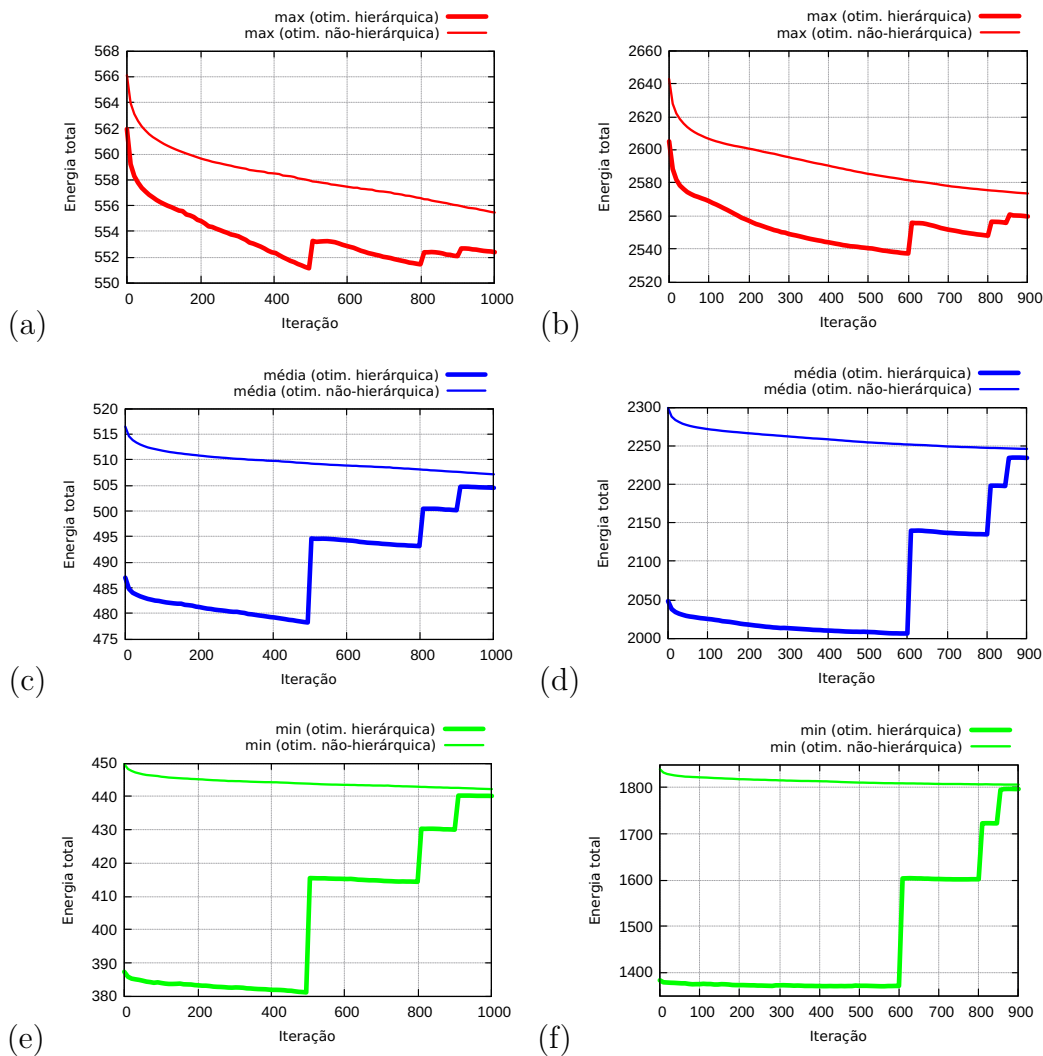


Figura 5.9: Variação da energia total máxima (a), (b); média (c), (d); mínima (e), (f), na otimização dos modelos *Egea* e *Bunny*.

Os gráficos exibem curvas monotonamente decrescente e,

particularmente, no caso hierárquico as variações abruptas são perfeitamente esperadas na mudança de nível, pois a superfície sofre modificações com a inserção dos novos elementos, mas entre os níveis o decrescimento ainda é monótono. Em ambos os casos, os experimentos foram processados com 4 níveis hierárquicos e mais a diante foram processados os mesmos exemplos envolvendo mais níveis na hierarquia. A variação da energia máxima é maior pela própria natureza do método que escolhe preferencialmente os vértices de maior energia em regiões com a maior energia total de distorção. A otimização pela hierarquia é mais flexível pois permite realizar mais iterações em níveis menos densos e o refinamento ocorre a partir de níveis previamente otimizados, isso influencia diretamente no tempo de processamento e também na qualidade da otimização. As figuras 5.10 e 5.11 exemplificam algumas sutis diferenças sinalizadas entre o resultado do remalhamento realizado nos modelos sem e com a otimização hierárquica.

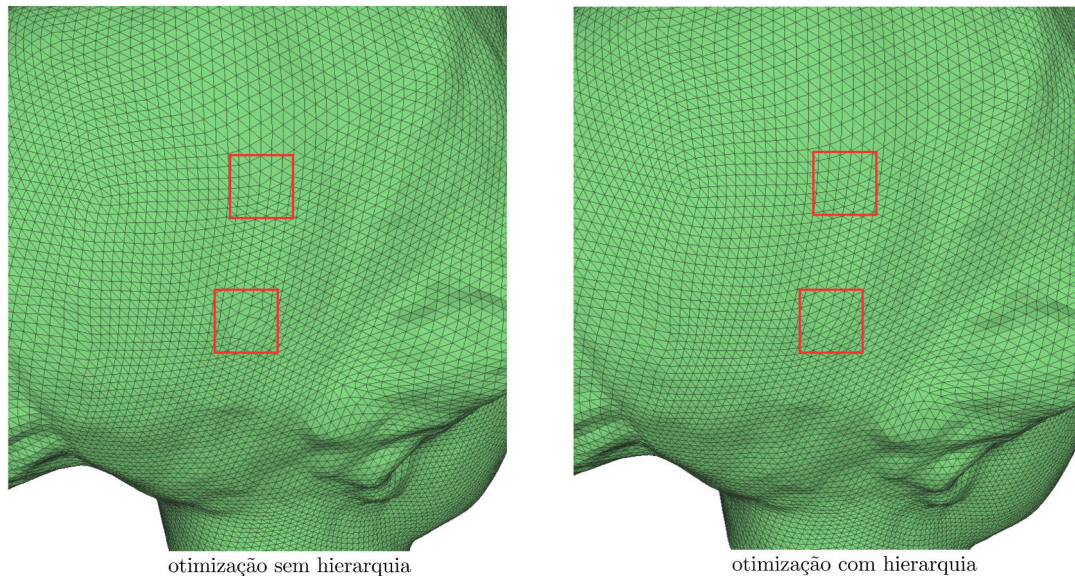


Figura 5.10: Algumas diferenças no remalhamento do modelo *Egea* pela hierarquia e sem hierarquia.

Os experimentos desta seção foram também comparados ao método proposto por [3] que produz um sistema de parametrizações utilizando um domínio base "abstrato", no sentido de considerar apenas a estrutura de adjacências e a geometria dos vértices diretamente na superfície original. A simplificação que origina o domínio base é realizada com operações para colapso de arestas e alguns tipos de polígonos regulares são utilizados para a construção dos domínios de parametrização bidimensionais. Esses domínios são otimizados com o funcional apresentado em [15], que também é utilizado na proposta de otimização hierárquica desta tese. A figura 5.12 exemplifica

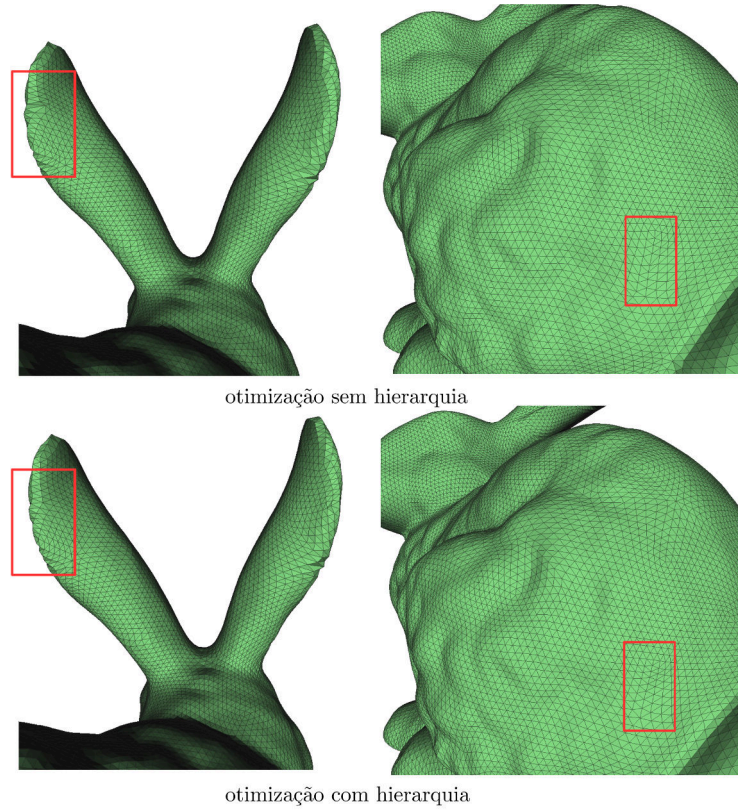


Figura 5.11: Algumas diferenças no remalhamento do modelo *Bunny* pela hierarquia e sem hierarquia.

o modelo remalhado com ambas as abordagens. A otimização hierárquica foi processada com 20 níveis e com 2000 iterações.

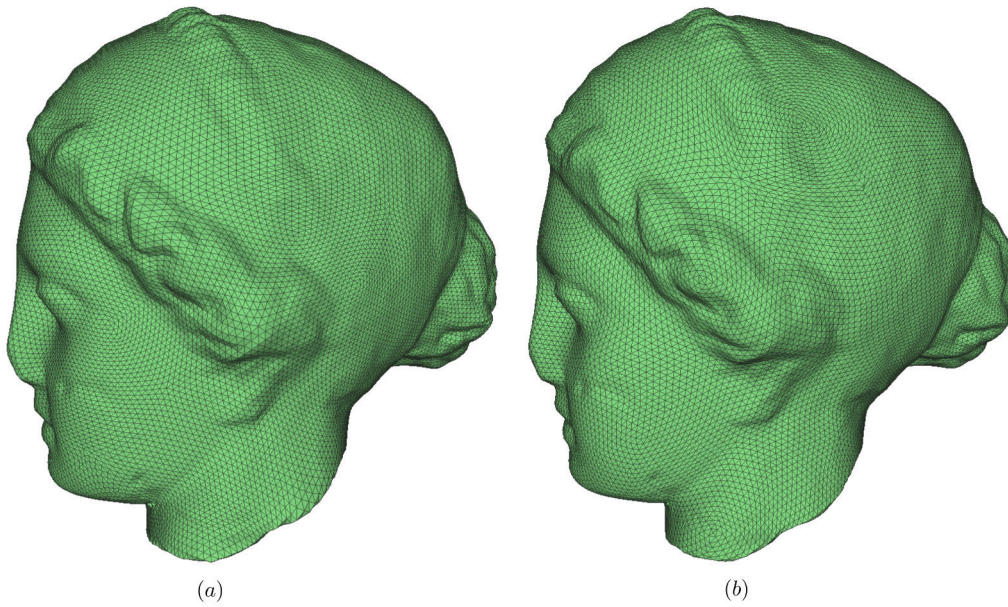


Figura 5.12: Remalhamento do modelo *Egea*: (a) Otim. H. ( $\#V_{base} = 100$ ) (b) Pietroni *et al.* [3] ( $\#V_{base} = 103$ )



A tabela 5.4 armazena os dados obtidos com o remalhamento realizado em [3] e com o sistema proposto para a otimização hierárquica, os modelos originais de entrada são os mesmos em cada aplicação. Nestes experimentos a regularidade dos ângulos internos, bem como, a forma equilátera dos triângulos ficam melhor preservadas pelo método aqui proposto e, do mesmo modo, o erro médio quadrático (RMS) cometido na distância de Hausdorff teve destaque no modelo *Vértebra* homeomorfo ao toro.

		Ângulo						Razão de Aspecto			Distância		
Modelo	Método	mín	$\mu$	$\sigma$	máx	$\mu$	$\sigma$	máx	$\mu$	$\sigma'$	máx	$\mu$	
	[3]	6.59	45.91	6.43	160.47	75.95	8.71	0.99	0.83	10.48	38.80e-5	1.40e-5	2.30e-5
Egea	Otim. H	22.08	49.29	5.75	117.36	71.67	6.62	0.99	0.87	8.06	55.90e-5	1.50e-5	2.60e-5
	[3]	7.24	45.85	7.18	157.16	75.63	9.47	0.99	0.83	11.66	46.33e-4	1.39e-4	2.21e-4
Bunny	Otim. H	19.09	50.68	5.60	127.17	70.17	6.99	0.99	0.89	8.08	60.53e-4	1.48e-4	2.68e-4
	[3]	18.02	45.56	7.10	129.30	76.38	9.78	0.99	0.82	11.89	24.88e-4	3.45e-4	4.33e-4
Vértebra	Otim. H	15.11	47.82	6.42	139.96	73.79	8.42	0.99	0.85	10.09	52.61e-4	0.92e-4	1.76e-4
	[3]	15.11	47.82	6.42	139.96	73.79	8.42	0.99	0.85	10.09	52.61e-4	0.92e-4	1.76e-4
		mín			máx			$\sigma' = 100.\sigma/\mu$ [%]					

Tabela 5.4: Comparações de ângulo, razão de aspecto e distância entre o método proposto em Pietroni *et al.* [3] e o remalhamento pela otimização hierárquica dos domínios locais.

As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 exemplificam por mapas de cores a variação da razão de aspecto entre o menor e o maior valor alcançado por ambos os sistemas.

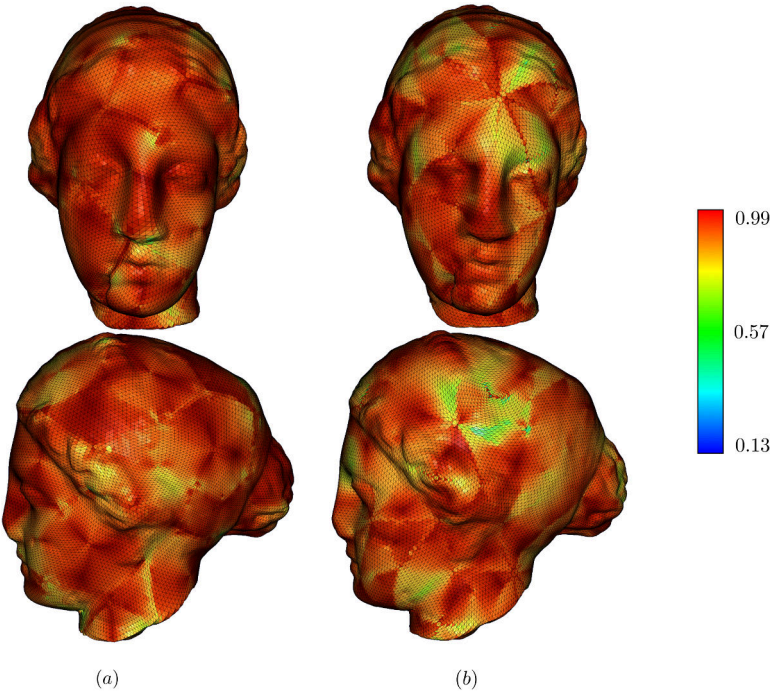


Figura 5.13: Mapa de cores na razão de aspecto: *Egea*. (a) Otim. H. (b) Pietroni *et al.* [3]

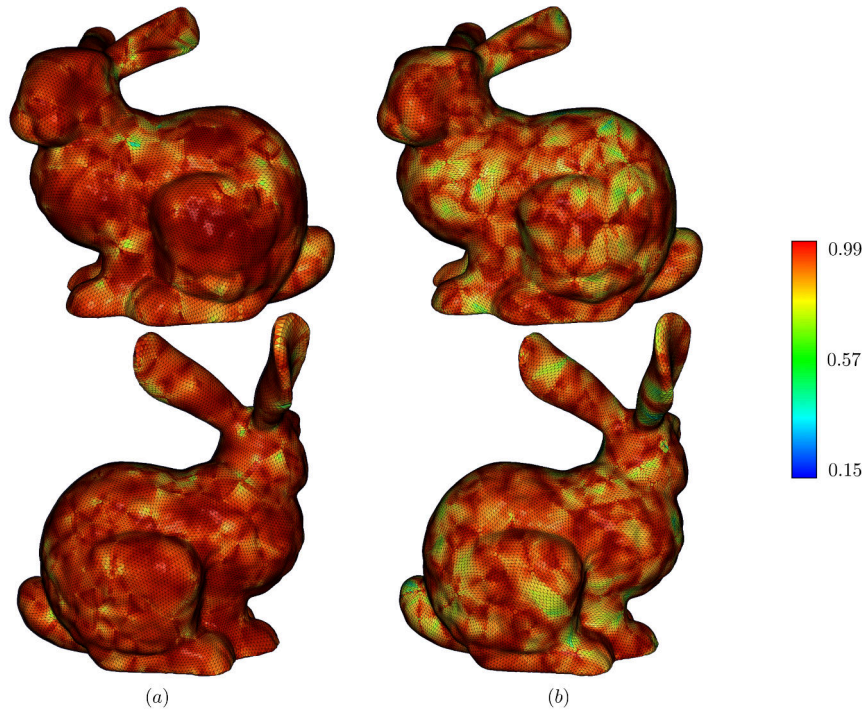


Figura 5.14: Mapa de cores na razão de aspecto: *Bunny*. (a) Otim. H. (b) Pietroni *et al.* [3]

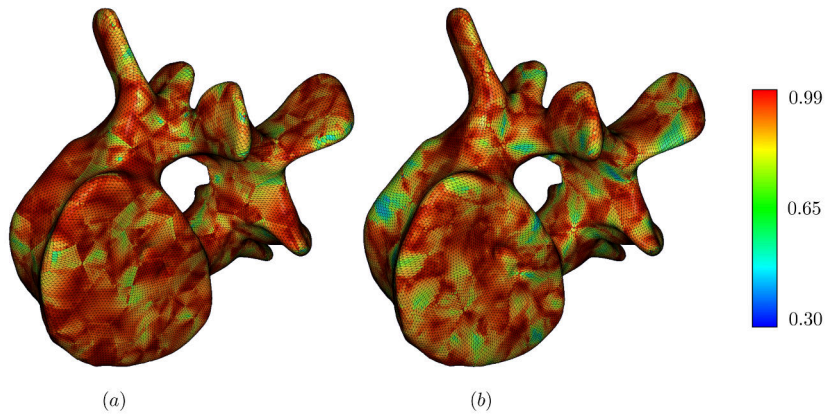


Figura 5.15: Mapa de cores na razão de aspecto: *Vértebra*. (a) Otim. H. (b) Pietroni *et al.* [3]

As imagens apresentam visualmente as cores mais quentes sobre as regiões de maior razão de aspecto. A otimização hierárquica foi gerada com 20 níveis e 2000 iterações. Na tabela 5.5 são exibidas nas últimas colunas as informações sobre as quantidades de vértices da superfície base construída e sobre as quantidades de vértices obtidas com o remalhamento em ambos os sistemas, dentre estes as estatísticas dos que são irregulares. Neste caso, as estatísticas indicam que mesmo quando o número de vértices da superfície base é maior o sistema proposto alcança mais vértices regulares.

		Área			Comprimentos			Valência				Vértices	
	Método	mín	máx	$\sigma$	mín	máx	$\sigma$	mín	máx	$\sigma'$	$\#V_{irreg}$	$\#V_{base}$	$\#V_{remalhado}$
Egea	[3]	27.70	161.17	10.91	48.52	195.59	15.33	3	9	1.30	70	103	24545
	Otim. H	34.46	326.64	24.35	40.77	233.98	16.68	4	8	0.91	56	100	25090
Bunny	[3]	27.90	254.41	11.52	44.68	241.02	16.15	3	10	2.30	274	409	30527
	Otim. H	32.07	330.03	23.46	47.54	285.95	15.69	3	9	1.91	249	462	29506
Vértebra	[3]	27.26	231.48	11.00	48.19	181.29	16.15	3	11	2.33	273	401	30075
	Otim. H	23.64	276.34	18.82	15.88	250.42	15.88	3	9	1.97	262	500	32000
Referência		100%		0%	100%		0%	$\sigma' = 100.\sigma/\mu$ [%]					

Tabela 5.5: Comparações de área e comprimento de arestas entre o método proposto em Pietroni *et al.* [3] e o remalhamento pela otimização hierárquica dos domínios locais.

Apesar de apresentar melhor regularidade dos comprimentos nos modelos *Bunny* e *Vértebra*, a regularidade das áreas não é um destaque no sistema proposto e isso é uma limitação que poderá ser melhorada tomando em conta domínios locais com a área proporcional as suas respectivas regiões de correspondência na superfície original e combinando com o aumento de influência da área no funcional apresentado em [15], como exemplificado na figura 3.18 do capítulo 3 e, possivelmente, levando em conta a otimização simultânea do vértice nos seus possíveis domínios locais de parametrização. É importante ressaltar que essas técnicas lidam com um conflito de escolhas entre a preservação de área e ângulo durante a otimização e que reflete, por exemplo, no remalhamento.

## Compactação

A compactação de modelos geométricos é a formulação que permite representar, com poucos dados, um modelo composto originalmente por grande volume de dados. Os elementos essenciais para esta construção envolve a compactação da estrutura de adjacências e a compressão das informações geométricas, como indicado por [9]. A estrutura de adjacências do remalhamento semirregular é intrinsecamente adequada, pois todos os seus elementos podem ser obtidos por construção a partir da estrutura da superfície base e o processo descrito por [51] realiza a compressão e a descompressão da geometria do modelo inicialmente semirregular.

A taxa da distorção introduzida neste processo é dada pelo erro médio quadrático na escala conveniente PSNR ( $= 20 \log(\text{bboxDiag}/\text{RMS})$ ) que considera os tamanhos das diagonais nas *bounding boxes* dos modelos originais em função do número de *bytes* alcançado por cada nível de descompressão, os maiores valores na escala PSNR indicam menores erros. Esse erro é

medido no cálculo da distância de Hausdorff entre o modelo original no nível máximo da HPDS-MT e cada modelo reconstruído nos níveis de descompressão. Essa medida de qualidade da compactação é referenciada por [9] como adequada para avaliar a qualidade do remalhamento. As figuras 5.16 exemplificam pelos gráficos a variação dessas taxas obtidas da compactação dos remalhamentos construídos com domínios otimizados e não otimizados, no modelo hierárquico foram utilizados 1000 iterações e na otimização 4 níveis. Os modelos considerados ao longo desta seção foram compactados pelo processo descrito em [51], apontado como adequado para modelos semirregulares, e os erros cometidos foram obtidos dos cálculos de distância segundo [52].

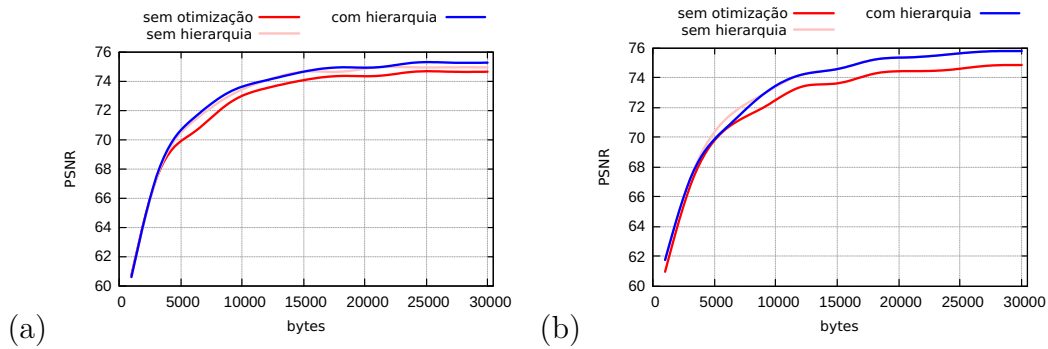


Figura 5.16: Taxa de distorção nos modelos (a) *Egea* e (b) *Bunny*.

Nos dois modelos verificados, a taxa de distorção se mostrou levemente superior nos experimentos produzidos com domínios otimizados pela hierarquia.

O principal problema tratado nesta tese consistiu em apresentar uma solução para a otimização das energias de distorção nos domínios de parametrização discretos definidos pela variedade diferenciável proposta em [1] e [12] construída a partir de uma superfície base triangularizada sem bordo  $\mathcal{B} = (J_0, X_0)$  em que  $J_0$  é o complexo simplicial obtido de simplificações em  $J$  e  $X_0 \subset \mathbb{R}^3$  é um subconjunto dos vértices  $X$  da superfície inicial  $\mathcal{M} = (J, X)$ . A estrutura hierárquica que direciona as simplificações na triangulação foi realizada com uma estrutura de multi-triangulação HPDS-MT [2] que produz triangulações de boa qualidade em todos os níveis e preserva a topologia da superfície inicial.

Para tanto, foi proposta uma metodologia de parametrização hierárquica da superfície  $\mathcal{M}_k$  sobre a superfície base  $\mathcal{B}$ , para cada nível  $k = 0, \dots, N$ , onde a parametrização dos vértices é graduada, de acordo com a HPDS-MT, e apenas depende dos vértices parametrizados sendo, portanto, adequada para o relaxamento dos vértices que ocorrem ao longo do refinamento e permitem particionar a superfície  $\mathcal{M}_k$  em regiões parametrizadas pelas cartas da variedade diferenciável induzida pela superfície  $\mathcal{B}$ .

Esta parametrização hierárquica foi associada com a estratégia de otimização compondo um algoritmo para a otimização hierárquica global realizada nestes domínios de parametrização. O funcional utilizado [15] trata de distorções de área e de ângulo, mas o algoritmo é independente do funcional. A principal vantagem da otimização ao longo da hierarquia é a flexibilidade durante a otimização, pois permite realizar mais iterações em níveis menos densos e, além disso, o refinamento de cada novo nível ocorre em níveis previamente otimizados influenciando em tempo e qualidade da otimização.

A construção do remalhamento semirregular combinando a qualidade da superfície base [2], com os domínios de parametrização construídos pela estrutura apresentada em [1] e [12], mais o interpolador *spline* cúbico sugerido em [11], com a otimização hierárquica destes domínios possibilitou uma nova técnica de remalhamento que apresentou melhores estatísticas que [3] em alguns quesitos, especialmente, envolvendo ângulos e triângulos mais equiláteros, mas apresentou limitação na regularidade das áreas da



triangulação de remalhamento.

A limitação das áreas percebidas no remalhamento provavelmente está relacionada com a área dos domínios de parametrização que não está proporcional a área da região na superfície original. A solução para torná-las proporcionais envolve algumas adaptações na estrutura implementada. Além disso outros funcionais podem ser experimentados em trabalhos futuros, como por exemplo ARAP++ [53].

Todos os algoritmos propostos nesta tese foram implementados em C++17, compilados com gcc 5.4.0 em um sistema operacional Ubuntu com processador Intel Core i7 2.70GHz e 8Gb em RAM. A estrutura de dados OpenMesh 8.1 [54] foi utilizada para o processamento das malhas e o software Algencan 3.1.1 [36] para a otimização.

## Referências bibliográficas

- [1] Marcelo Siqueira, Dianna Xu, Jean Gallier, Luis Gustavo Nonato, Dimas Martínez Morera, e Luiz Velho, *A new construction of smooth surfaces from triangle meshes using parametric pseudo-manifolds*, Computers & Graphics **33** (2009), no. 3, 331–340.
- [2] Esdras Medeiros e Marcelo Siqueira, *Good random multi-triangulation of surfaces*, IEEE transactions on visualization and computer graphics **24** (2017), no. 6, 1983–1996.
- [3] Nico Pietroni, Marco Tarini, e Paolo Cignoni, *Almost isometric mesh parameterization through abstract domains*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **16** (2009), no. 4, 621–635.
- [4] Cindy M Grimm e John F Hughes, *Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds*, Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 1995, pp. 359–368.
- [5] Ruimin Wang, Ligang Liu, Zhouwang Yang, Kang Wang, Wen Shan, Jiansong Deng, e Falai Chen, *Construction of manifolds via compatible sparse representations*, ACM Transactions on Graphics (TOG) **35** (2016), no. 2, 1–10.
- [6] Jos Stam, *Flows on surfaces of arbitrary topology*, ACM Transactions On Graphics (TOG) **22** (2003), no. 3, 724–731.
- [7] Lok Ming Lui, Yalin Wang, e Tony F Chan, *Solving pdes on manifolds with global conformal parametrization*, International Workshop on Variational, Geometric, and Level Set Methods in Computer Vision, Springer, 2005, pp. 307–319.
- [8] Matthew Brand, *Charting a manifold*, Advances in neural information processing systems, 2003, pp. 985–992.
- [9] Frédéric Payan, Céline Roudet, e Basile Sauvage, *Semi-regular triangle remeshing: A comprehensive study*, Computer Graphics Forum, vol. 34, Wiley Online Library, 2015, pp. 86–102.

- [10] Andrei Khodakovsky, Nathan Litke, e Peter Schröder, *Globally smooth parameterizations with low distortion*, ACM transactions on graphics (TOG) **22** (2003), no. 3, 350–357.
- [11] Igor Guskov, *Manifold-based approach to semi-regular remeshing*, Graphical Models **69** (2007), no. 1, 1–18.
- [12] Jean Gallier, Dianna Xu, e Marcelo Siqueira, *Parametric pseudo-manifolds*, Differential Geometry and its Applications **30** (2012), no. 6, 702–736.
- [13] Kai Hormann, Günther Greiner, e Swen Campagna, *Hierarchical parametrization of triangulated surfaces*, Proceedings of Vision, Modeling, and Visualization, vol. 1999, 1999, pp. 219–226.
- [14] K. Hormann, *Theory and applications of parameterizing triangulations*, Ph.D. thesis, Department of Computer Science, University of Erlangen, November 2001.
- [15] Patrick Degener, Jan Meseth, e Reinhard Klein, *An adaptable surface parameterization method.*, IMR **3** (2003), 201–213.
- [16] Nicolas Ray e Bruno Levy, *Hierarchical least squares conformal map*, 11th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 2003. Proceedings., IEEE, 2003, pp. 263–270.
- [17] Burak Aksoylu, Andrei Khodakovsky, e Peter Schröder, *Multilevel solvers for unstructured surface meshes*, SIAM Journal on Scientific Computing **26** (2005), no. 4, 1146–1165.
- [18] Kai Hormann e Günther Greiner, *Mips: An efficient global parametrization method*, France on 1-7 July 1999. Proceedings, Volume 1. Curve and Surface Design. F61775-99-WF068 (2000), 153.
- [19] Hugues Hoppe, *Progressive meshes*, Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (New York, NY, USA), SIGGRAPH '96, ACM, 1996, pp. 99–108.
- [20] Tom Duchamp, Andrew Certain, Antony DeRose, e Werner Stuetzle, *Hierarchical computation of pl harmonic embeddings*, preprint (1997).
- [21] Aaron WF Lee, Wim Sweldens, Peter Schröder, Lawrence C Cowsar, e David P Dobkin, *Maps: Multiresolution adaptive parameterization of surfaces*, Siggraph, vol. 98, 1998, pp. 95–104.

- [22] Patrick Degener, *Computing parameterizations of triangulated surfaces with minimal metric deformations*, Diplomarbeit, Institut für Informatik II, Universität Bonn, 2003.
- [23] Enrico Puppo, *Variable resolution triangulations*, Computational Geometry **11** (1998), no. 3-4, 219–238.
- [24] Luiz Velho e Jonas Gomes, *Variable resolution 4-k meshes: concepts and applications*, Computer Graphics Forum, vol. 19, Wiley Online Library, 2000, pp. 195–212.
- [25] Esdras Medeiros, Lis Ingrid, Sinésio Pesco, e Claudio Silva, *Fast adaptive blue noise on polygonal surfaces*, Graphical Models **76** (2014), no. 1, 17–29.
- [26] J Cotrina Navau e N Pla Garcia, *Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology*, Computer Aided Geometric Design **17** (2000), no. 7, 643–671.
- [27] Xianfeng Gu, Ying He, e Hong Qin, *Manifold splines*, Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling, 2005, pp. 27–38.
- [28] Giovanni Della Vecchia, Bert Jüttler, e Myung-Soo Kim, *A construction of rational manifold surfaces of arbitrary topology and smoothness from triangular meshes*, Computer Aided Geometric Design **25** (2008), no. 9, 801–815.
- [29] Pierre Alliez, Giuliana Ucelli, Craig Gotsman, e Marco Attene, *Recent advances in remeshing of surfaces*, Shape analysis and structuring, Springer, 2008, pp. 53–82.
- [30] Dawar Khan, Alexander Plopski, Yuichiro Fujimoto, Masayuki Kanbara, Gul Jabeen, Yongjie Zhang, Xiaopeng Zhang, e Hirokazu Kato, *Surface remeshing: A systematic literature review of methods and research directions*, IEEE transactions on visualization and computer graphics.
- [31] Igor Guskov, Kiril Vidimče, Wim Sweldens, e Peter Schröder, *Normal meshes*, Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 2000, pp. 95–102.
- [32] Michael S Floater, *Mean value coordinates*, Computer aided geometric design **20** (2003), no. 1, 19–27.
- [33] Ethan D Bloch, *A first course in geometric topology and differential geometry*, Springer Science & Business Media, 1997.

- [34] Thomas Lewiner, Hélio Lopes, Esdras Medeiros, Geovan Tavares, e Luiz Velho, *Topological mesh operators*, Computer Aided Geometric Design **27** (2010), no. 1, 1–22.
- [35] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John McDonald, e Werner Stuetzle, *Mesh optimization*, Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 1993, pp. 19–26.
- [36] Ernesto G Birgin e José Mario Martínez, *Practical augmented lagrangian methods for constrained optimization*, SIAM, 2014.
- [37] Manfredo P Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces: Revised and updated second edition*, Courier Dover Publications, 2016.
- [38] Gene H. Golub e Charles F. Van Loan, *Matrix computations*, third ed., The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [39] Michael S Floater, *Parametrization and smooth approximation of surface triangulations*, Computer aided geometric design **14** (1997), no. 3, 231–250.
- [40] William Thomas Tutte, *Convex representations of graphs*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1960), no. 1, 304–320.
- [41] Olivier Devillers, *On deletion in delaunay triangulations*, International Journal of Computational Geometry & Applications **12** (2002), no. 03, 193–205.
- [42] Jianwei Guo, Dong-Ming Yan, Xiaohong Jia, e Xiaopeng Zhang, *Efficient maximal poisson-disk sampling and remeshing on surfaces*, Computers & Graphics **46** (2015), 72–79.
- [43] Dong-Ming Yan, Guanbo Bao, Xiaopeng Zhang, e Peter Wonka, *Low-resolution remeshing using the localized restricted voronoi diagram*, IEEE transactions on visualization and computer graphics **20** (2014), no. 10, 1418–1427.
- [44] Leila De Floriani, Paola Magillo, e Enrico Puppo, *Efficient implementation of multi-triangulations*, Proceedings Visualization'98 (Cat. No. 98CB36276), IEEE, 1998, pp. 43–50.
- [45] Mario Botsch, Leif Kobbelt, Mark Pauly, Pierre Alliez, e Bruno Lévy, *Polygon mesh processing*, AK Peters/CRC Press, 2010.
- [46] Charles Loop, *Smooth subdivision surfaces based on triangles*, Master's thesis, University of Utah, Department of Mathematics (1987).

- [47] Nira Dyn, David Levine, e John A Gregory, *A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control*, ACM transactions on Graphics (TOG) **9** (1990), no. 2, 160–169.
- [48] Denis Zorin, Peter Schröder, e Wim Sweldens, *Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology*, Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 1996, pp. 189–192.
- [49] Luiz Henrique Figueiredo e Paulo César Pinto Carvalho, *Introdução à geometria computacional*, vol. 13, IMPA, 2000.
- [50] Peter J.C. Brown e Christopher T. Faigle, *A robust efficient algorithm for point location in triangulations*, Tech. Report UCAM-CL-TR-728, University of Cambridge, Computer Laboratory, February 1997.
- [51] Andrei Khodakovsky, Peter Schröder, e Wim Sweldens, *Progressive geometry compression*, Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 2000, pp. 271–278.
- [52] Paolo Cignoni, Claudio Rocchini, e Roberto Scopigno, *Metro: measuring error on simplified surfaces*, Computer graphics forum, vol. 17, Wiley Online Library, 1998, pp. 167–174.
- [53] Zhao Wang, Zhong-xuan Luo, Jie-lin Zhang, e Emil Saucan, *Arap++: An extension of the local/global approach to mesh parameterization*, Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering **17** (2016), no. 6, 501–515.
- [54] Mario Botsch, Stephan Steinberg, Stephan Bischoff, e Leif Kobbelt, *Openmesh-a generic and efficient polygon mesh data structure*, (2002).