

## 2 Introdução à Sísmica de Exploração

A Geofísica é uma ciência que estuda a Terra usando medidas físicas tomadas normalmente na sua superfície, envolvendo o estudo de partes profundas da Terra geralmente inacessíveis às observações diretas (SBGf, 2003). Através da interpretação das observações realizadas na superfície, são geradas informações úteis sobre a estrutura e a composição das zonas inacessíveis em grandes profundidades. Quase todo o conhecimento sobre áreas abaixo de profundidades limitadas por poços e minas subterrâneas provém de observações geofísicas. Grande parte das ferramentas e técnicas desenvolvidas para tais estudos tem sido aplicada em pesquisas acadêmicas sobre a natureza do interior da Terra. Entretanto, o grande avanço obtido nas técnicas geofísicas é, principalmente, devido à sua forte utilização na exploração de hidrocarbonetos e de minérios. Especificamente, dentre as técnicas geofísicas, na área de exploração de petróleo, a prospecção sísmica é a mais utilizada.

A forte utilização da sísmica na exploração e desenvolvimento de reservatórios de hidrocarbonetos deve-se à sua larga e densa amostragem tanto em área quanto em profundidade aliada ao contínuo refinamento de técnicas de tratamento e interpretação dos dados sísmicos. O desenvolvimento de tecnologias nas áreas de aquisição, processamento e interpretação dos dados sísmicos, aliado ao estudo das relações entre propriedades sísmicas, propriedades petrofísicas e condições ambientais, tornaram esta técnica indiscutivelmente a mais poderosa ferramenta de exploração e uma das mais importantes na caracterização de reservatórios de petróleo.

### 2.1. Análise sísmica

O método de reflexão sísmica consiste, basicamente, em gerar ondas sísmicas artificiais através de explosivos, canhões de ar comprimido ou outra fonte sísmica e registrar as reflexões provenientes das diversas interfaces em sub-superfície usando como receptores geofones ou hidrofones, equipamentos

estes análogos aos microfones. A onda gerada propaga-se pelo interior da terra, sendo parcialmente refletida ao encontrar interfaces entre camadas que apresentem contraste significativo de propriedades elásticas. Os tempos de chegada de cada reflexão são relacionados às velocidades de propagação da onda sísmica em cada camada e, em primeira aproximação, a amplitude registrada está relacionada ao contraste de impedância acústica, produto entre velocidade compressional e densidade das camadas que definem a interface.

O método de reflexão sísmica é análogo ao imageamento do corpo humano realizado pela ultra-sonografia, mas ao contrário da medicina onde os contrastes de densidade são imageados, na exploração sísmica o efeito das diferenças de velocidade é mais acentuado.

Segundo Yilmaz (Yilmaz, 2000), a análise sísmica é dividida em três partes:

- a. Aquisição sísmica
- b. Processamento sísmico
- c. Interpretação sísmica

Um levantamento sísmico consiste em um conjunto de vários tiros sísmicos realizados em diferentes localizações. A figura 1 ilustra um esquema de aquisição sísmica terrestre e a figura 2 de um marítimo. Em ambas, as ondas elastodinâmicas, após propagarem-se e se refletirem pelas diversas camadas do subsolo, são medidas e registradas através de sensores na superfície. A medida gravada em cada receptor, que é função do tempo de ida e volta da onda, é chamada de traço sísmico, enquanto o conjunto de traços gravado para cada onda gerada é chamado de tiro sísmico. Quando a aquisição sísmica é realizada através de uma única linha, como ilustrado na figura 1 ou 2, o tiro sísmico resulta em uma imagem bidimensional, como observado na figura 3, e diz-se que a aquisição é do tipo 2D. Já quando a aquisição é realizada por um conjunto de linhas em paralelo ou uma rede bidimensional de sensores diz-se que a aquisição é do tipo 3D e o resultado é a obtenção de um cubo sísmico. A figura 4 ilustra um esquema de aquisição sísmica 3D marítimo.

Especificamente para o caso do tiro sísmico exemplificado na figura 3, os geofones foram espaçados em 50 metros e cada traço sísmico foi gravado por 4 segundos. Como a fonte sísmica está localizada no centro da imagem, os possíveis refletores aparecem distorcidos graças ao deslocamento dos receptores em relação à fonte sísmica. Observa-se também a existência de um

nível alto de ruído no sinal. Para que a aquisição sísmica represente mais realisticamente a estrutura geológica da sub-superfície os tiros sísmicos devem ser ajustados. Este processo de ajuste é chamado de *processamento sísmico* ou imageamento, e diz-se que após os dados adquiridos serem devidamente processados formam uma linha sísmica para o caso 2D ou um cubo sísmico para o caso 3D.

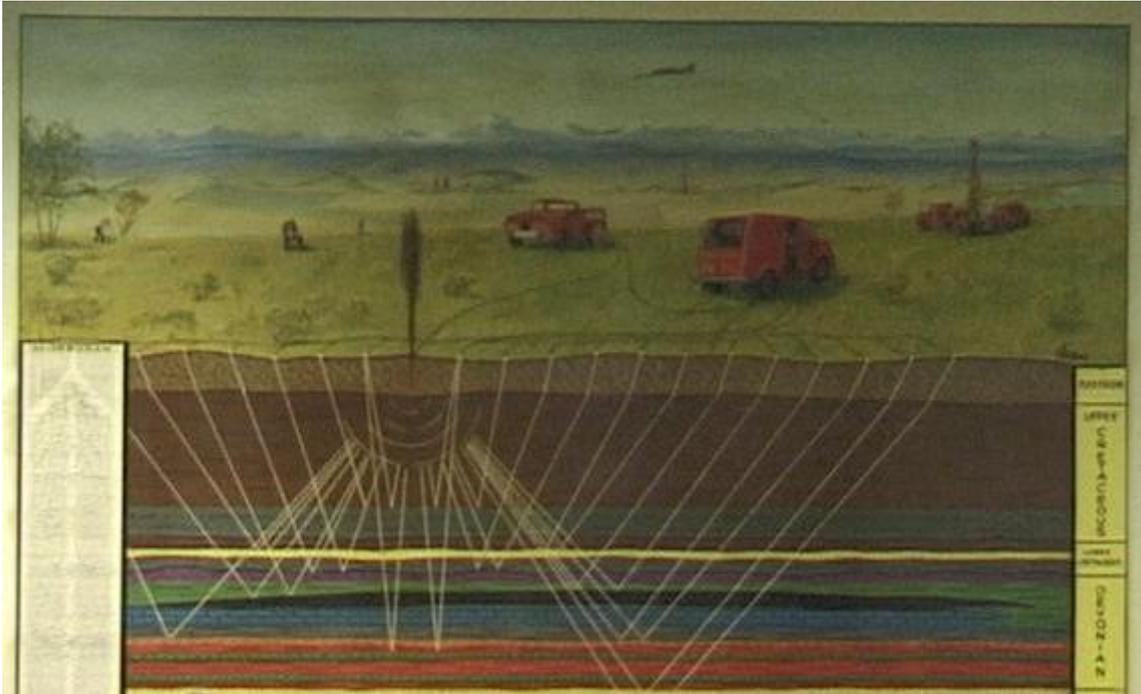


Figura 1: Esquema de aquisição sísmica terrestre (Museu virtual da SEG, 2003).

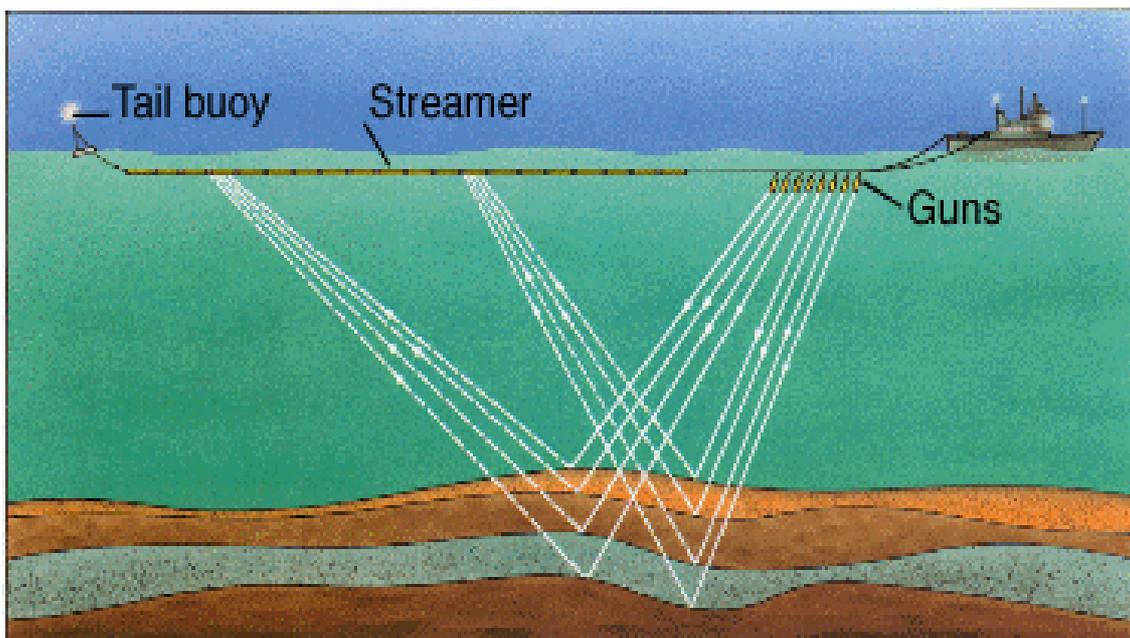


Figura 2: Esquema de aquisição de dado sísmico marítimo (Schlumberger Oilfield Glossary, 2003).

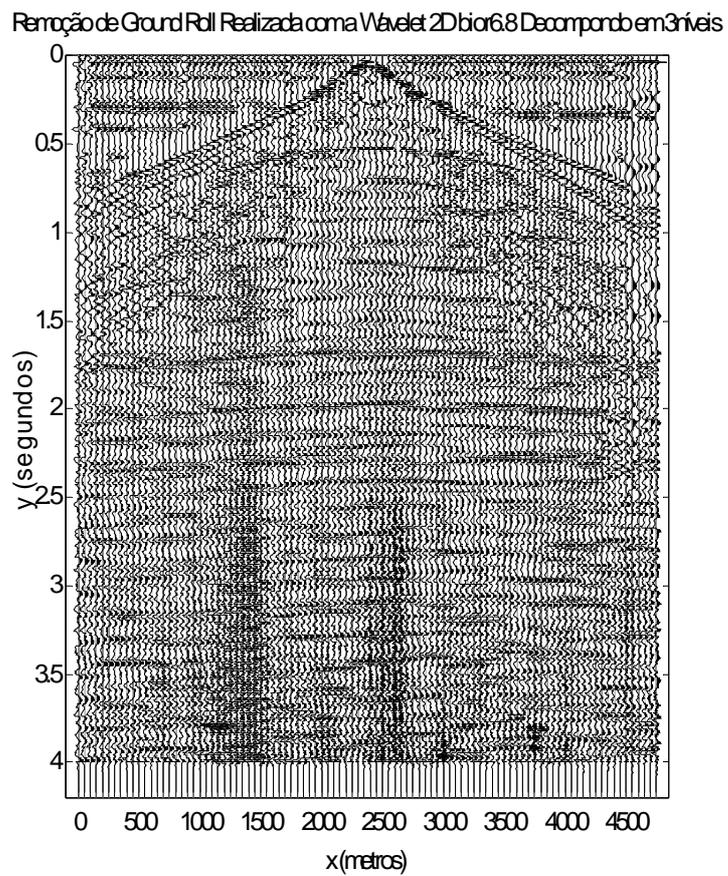


Figura 3: Exemplo de um tiro sísmico 2D terrestre (Yilmaz ozdata25).

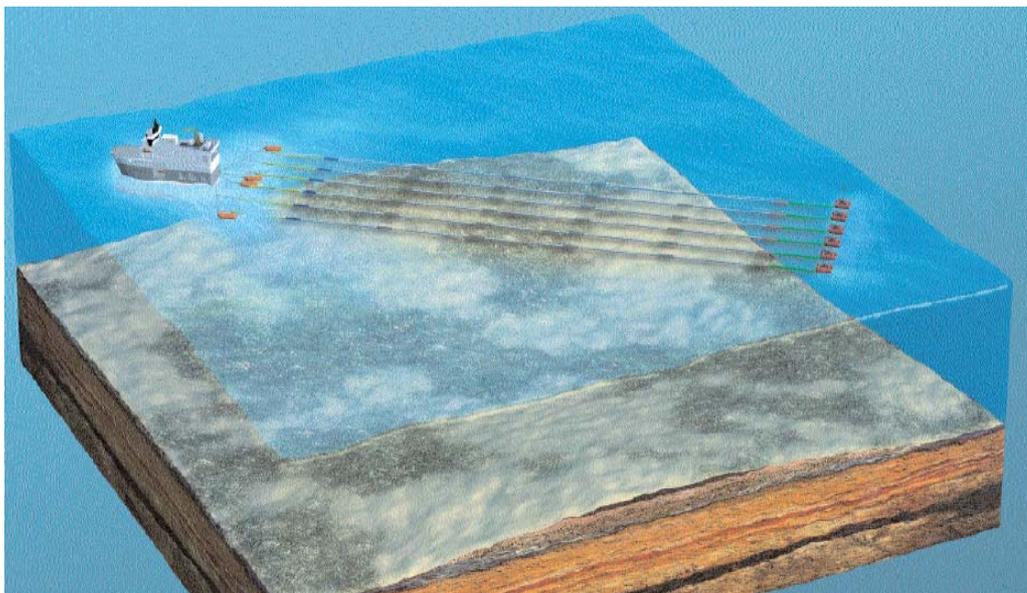


Figura 4: Esquema de aquisição 3D marítima (Sercel, 2003).

Já a interpretação sísmica consiste na análise das imagens processadas para exploração, caracterização e monitoramento dos reservatórios de petróleo. Estas análises são muito importantes para indústria petrolífera, pois é a partir delas que se decide a localização das reservas de óleo e/ou gás, avalia-se seu conteúdo e viabilidade de exploração. Recentemente, tem-se utilizado a sísmica para monitorar as reservas de modo a melhorar a capacidade de recuperação dos reservatórios em produção.

Na exploração sísmica, ou seja, na busca por óleo e/ou gás, as imagens sísmicas são analisadas detalhadamente pelos interpretes em busca de vestígios que possam indicar a presença de hidrocarbonetos. A interpretação sísmica parte da premissa que o contraste da impedância acústica na sub-superfície representado pelas imagens sísmicas tem a sua origem nas mudanças das composições das diferentes camadas de rochas, ou seja, a identificação e acompanhamento destas mudanças ao longo das diferentes imagens sísmicas formadas, sejam elas 2D ou 3D, ilustram o comportamento geológico do subsolo. A figura 5 ilustra um cubo sísmico com alguns eventos, chamados de horizontes mapeados. Observa-se que, para o entendimento geológico da região, outros horizontes diferentes dos que delimitam o reservatório são identificados e mapeados, tais como base, topo do sal e etc. A figura 6 ilustra a identificação e mapeamento do topo e base de um reservatório de petróleo, enquanto a figura 7 ilustra os mapas formados em tempo pelos respectivos horizontes. Nestes mapas, os tons vermelhos representam um tempo de ida e volta da onda propagada menor que as cores amarelas e estas menores que as verdes, i.e., os pontos com cor vermelha são pontos mais próximos da superfície que os amarelos e verdes. Logo, representam uma imagem estrutural do topo e da base do reservatório e funcionam como uma espécie de imagem topográfica do subsolo na região de interesse.

Existe, atualmente, uma tendência a se priorizar a utilização da sísmica 3D. Um dos fatores para isso é o avanço tecnológico, especialmente, na área de processamento de dados, face a possibilidade de um melhor entendimento geológico através da visualização das seções sísmicas e cortes horizontais que podem ser feitos ao longo de todo um cubo sísmico (Brown, 1999). O que não ocorre na sísmica 2D, vez que o espaçamento entre as diferentes seções não permite análises tão simplistas. Entretanto, a utilização das análises sísmicas 2D continua sendo de grande importância, principalmente, para análise estruturais de grandes áreas. A possibilidade de utilização de grandes cabos de aquisição, com mais de 10 Km, também permitem análise detalhada de toda a formação

geológica de uma extensa região (Fainstein, 2001). Nestes casos, a análise 3D funciona como uma ampliação de áreas identificadas como promissoras através de uma grande análise 2D.

Independente do tipo de aquisição e processamento realizados, a identificação de hidrocarbonetos não é uma tarefa fácil. Todavia, sob condições favoráveis, o acúmulo de hidrocarbonetos cria efeitos sísmicos que podem ser detectados, pois a sua presença nos espaços porosos das rochas diminui a velocidade sísmica e a densidade, além de aumentar a absorção. (Sheriff, 1992). Entretanto, estes indicadores de hidrocarbonetos, como são chamados, variam caso a caso, visto que a amplitude e a respectiva forma de onda refletida não dependem apenas da velocidade e densidade da rocha analisada, mas também do contraste existente com as rochas vizinhas. Na prática, indicadores conhecidos como a mancha brilhante (*"bright spot"*)(Duarte, 2003), inversão de polaridade e mudanças na forma de onda acabam sendo usados em conjunto como ferramentas para análise de um intérprete experiente. Portanto, a análise litológica das regiões de interesse pode ser realizada através de transformações matemáticas e da combinação de outras informações extraídas da sísmica. Estas informações são chamadas de atributos sísmicos.

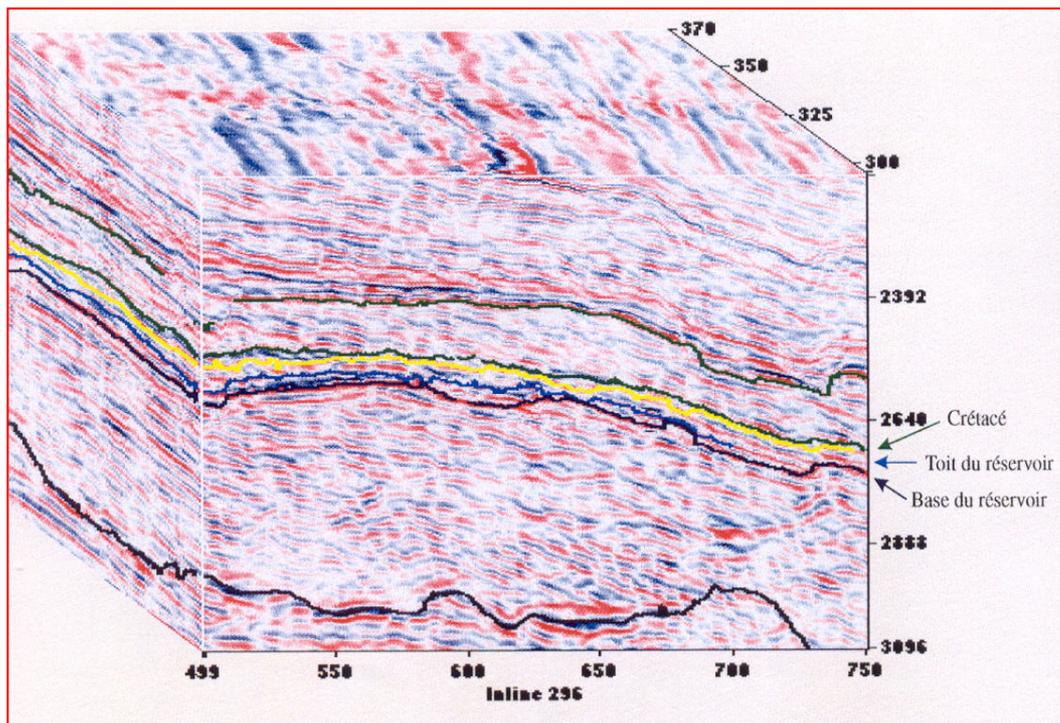


Figura 5: Exemplo de cubo sísmico 3D e alguns horizontes interpretados (Johann, 1999).

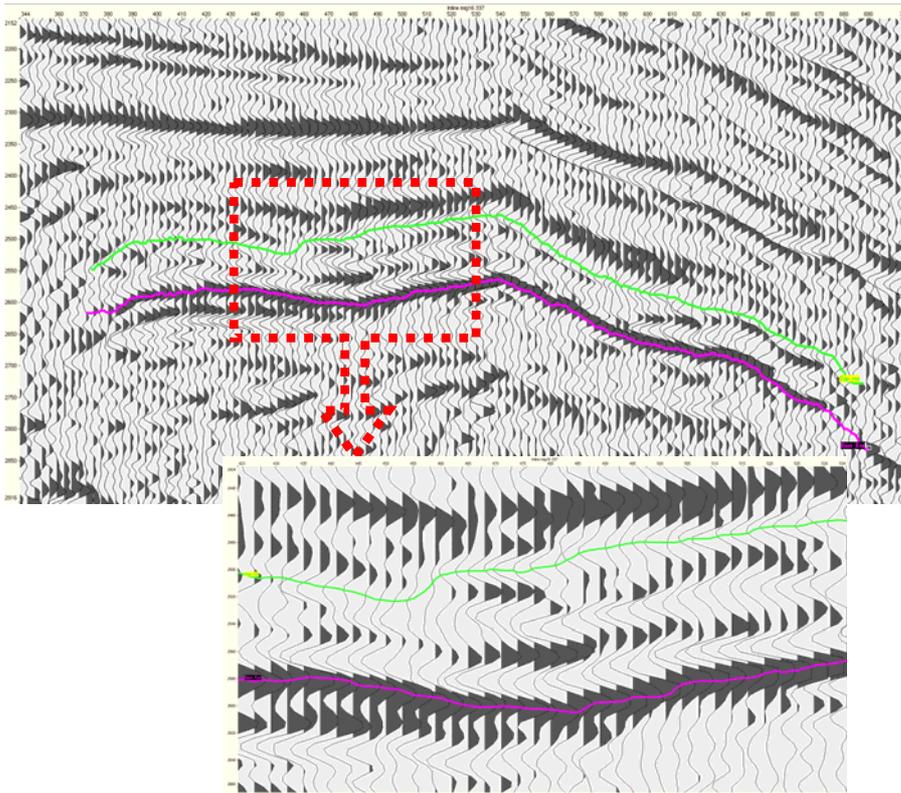


Figura 6: Identificação e mapeamento dos horizontes topo e base de um reservatório de petróleo.

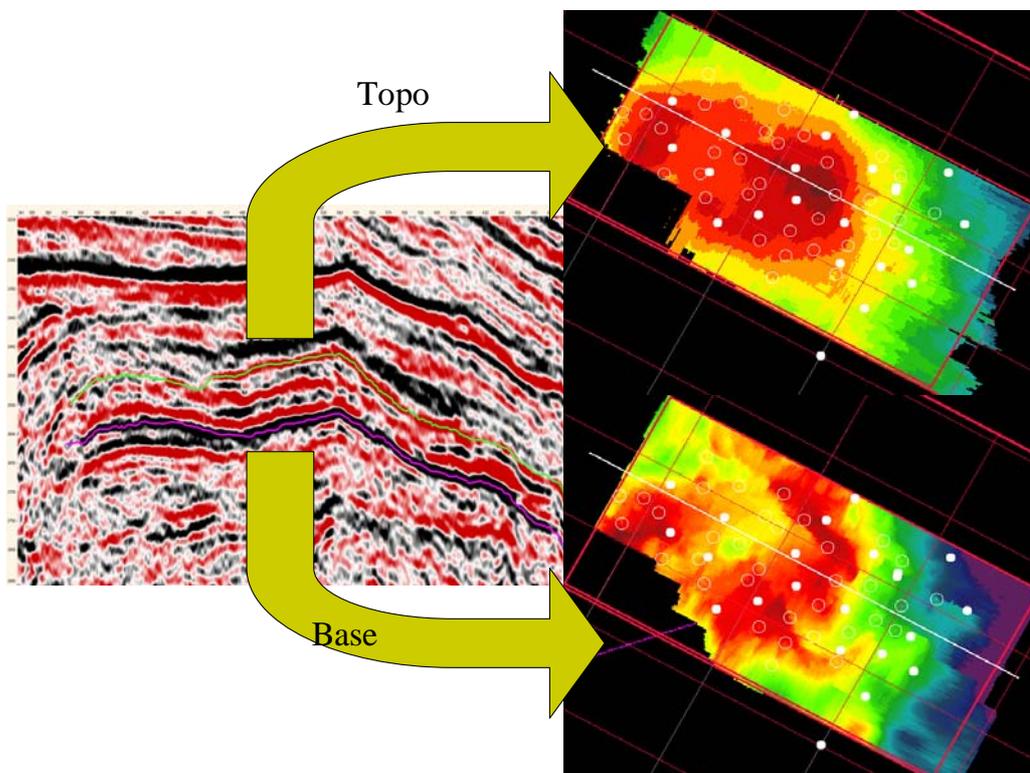


Figura 7: Mapas de interpretação do topo e da base do reservatório em tempo (ms).

## 2.2. Atributos sísmicos

Segundo Taner (Taner, 2000), “Atributos Sísmicos são quaisquer informações obtidas através de dados sísmicos, seja através de medições diretas, lógicas ou baseada na experiência e conhecimentos anteriores”. Os atributos sísmicos são gerados para se enfatizar a característica desejada, a qual não é diretamente identificada nos dados. Eles podem ser obtidos a partir de dados ainda não empilhados, como é o caso do conhecido atributo variação de amplitude com o deslocamento da fonte (“AVO: *amplitude variation with offset*”), ou podem ser obtidos a partir de dados já empilhados, como será o caso dos atributos usados e criados nesta tese.

Dentre os vários atributos existentes, alguns podem ser usados como indicadores de hidrocarbonetos, outros como indicadores de falhas geológicas, ou seja, dependendo do tipo de análise em questão, deve-se escolher o tipo adequado de atributo. Existem centenas de opções para a escolha do atributo, algumas ilustradas na figura 8 (Brown, 2001), mas nem sempre a relação entre a grandeza física e o atributo é conhecida, motivo pelo qual o processo de escolha costuma gerar uma grande confusão entre os geocientistas. Logo, o entendimento da geração dos atributos é fundamental para uma análise correta.

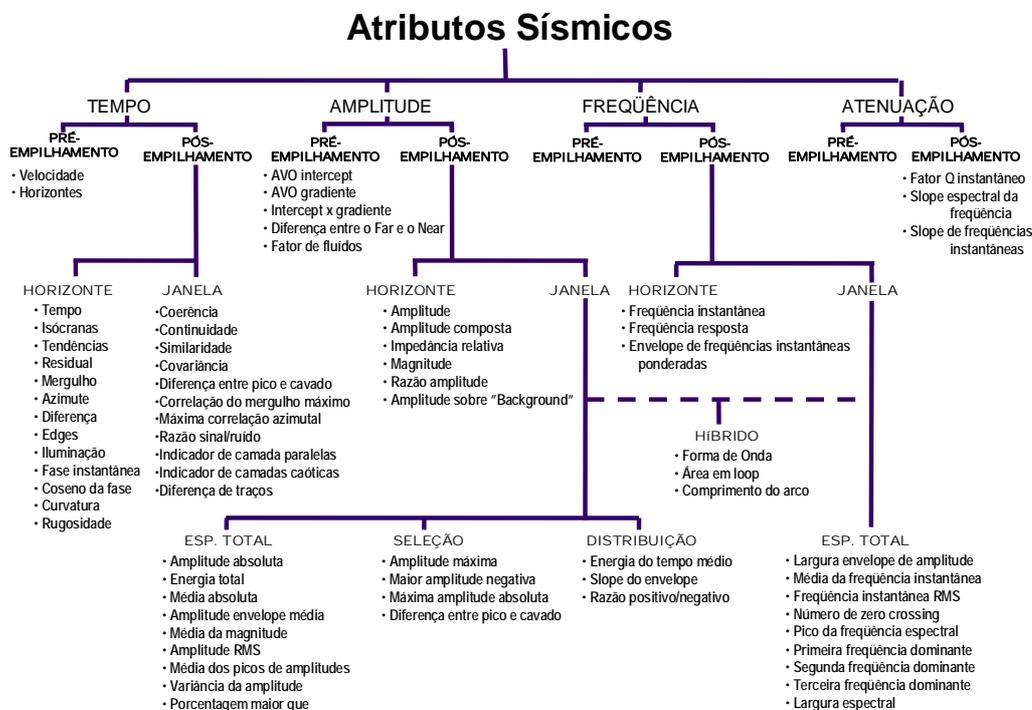


Figura 8: Classificação de atributos sísmicos segundo Brown (Brown, 2001).

Os atributos sísmicos podem ser gerados de diversas maneiras. Uma das formas de se classificar o modo como são gerados está esquematizada na figura 9, ou seja, dentre as várias formas de classificação, os atributos sísmicos pós-empilhamento podem ser classificados como (Chen e Sidney, 1997):

- baseados na seção sísmica;
- baseados em eventos ou horizontes;
- volumétricos.

Os atributos sísmicos baseados na seção sísmica são resultados de um processamento específico em toda uma seção com o objetivo de realçar alguma característica de interesse. Geralmente, são gerados a partir da análise do traço sísmico complexo (Taner et al., 1979), sendo que os mais utilizados são a amplitude da envoltória do traço sísmico complexo, a frequência instantânea, a frequência média, a fase instantânea e a polaridade aparente.

Os atributos sísmicos baseados em eventos são extraídos da sísmica usando um horizonte como referência. Podem ser criados da seguinte forma:

- usando valores instantâneos ao longo do evento de referência;
- usando valores em torno da superfície de referência usando um único traço; e
- usando valores em torno da superfície de referência usando vários traços sísmicos.

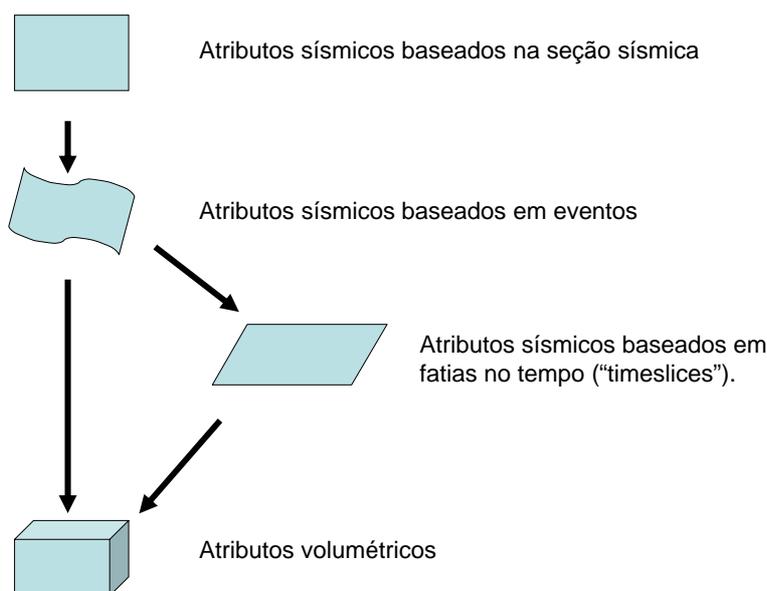


Figura 9: Classificação dos atributos (Chen e Sidney, 1997).

Os atributos sísmicos baseados em eventos instantâneos, via de regra, são gerados a partir da análise do traço sísmico complexo no local exato do evento de referência. A variação do atributo sísmico gerado ao longo da superfície pode indicar algum aspecto relevante para a análise em questão. Entretanto, esta análise instantânea costuma ser sensível ao ruído. Logo, a utilização de valores do traço sísmico em torno da superfície de interesse para o cômputo do atributo, como ilustrado na figura 10, serve para melhorar a relação sinal-ruído e para enfatizar os aspectos relevantes do atributo.

Existem diferentes maneiras para se definir a janela de onde serão extraídos os dados da sísmica para o cálculo do atributo sísmico. Na figura 11a são ilustradas algumas formas de se definir janelas com comprimento variável, onde o atributo é gerado em função de dois horizontes diferentes, tais como topo e base de uma zona estratigráfica. Na figura 11b é ilustrada outra forma de se definir a janela quando é tomada em torno de uma única superfície. Independente do tipo de janela utilizada, verifica-se que o tamanho da janela depende da aplicação e que não existe uma regra para a sua escolha. Conseqüentemente, deve-se tomar muito cuidado para que as amostras com grandes desvios no tempo em relação ao evento não prejudiquem a análise.

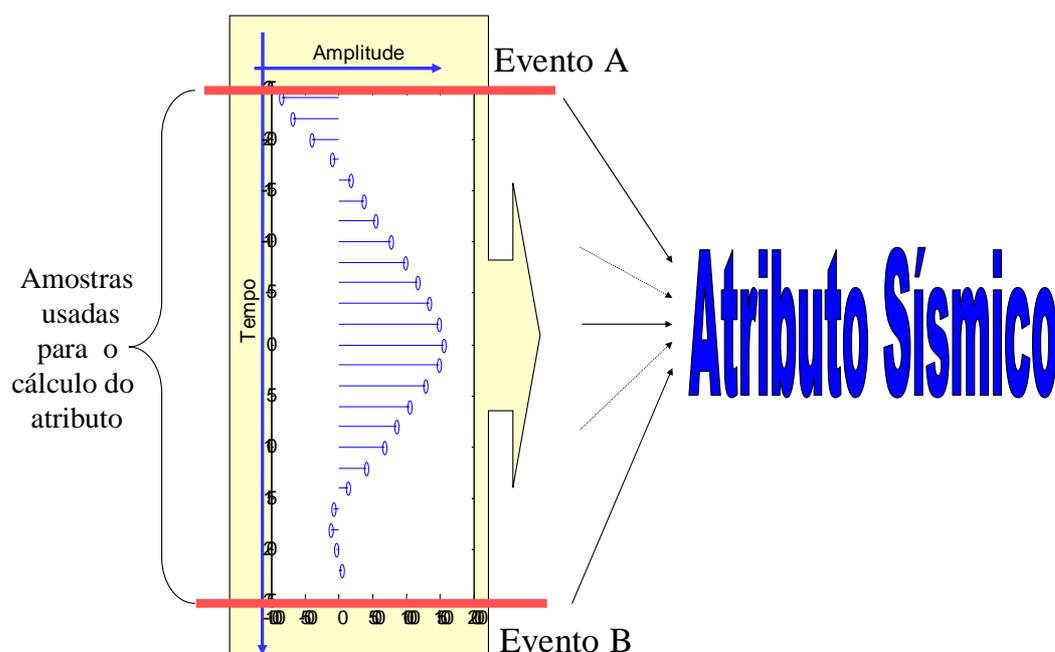


Figura 10: Cômputo do atributo sísmico utilizando valores de um traço sísmico em torno de uma superfície de interesse.

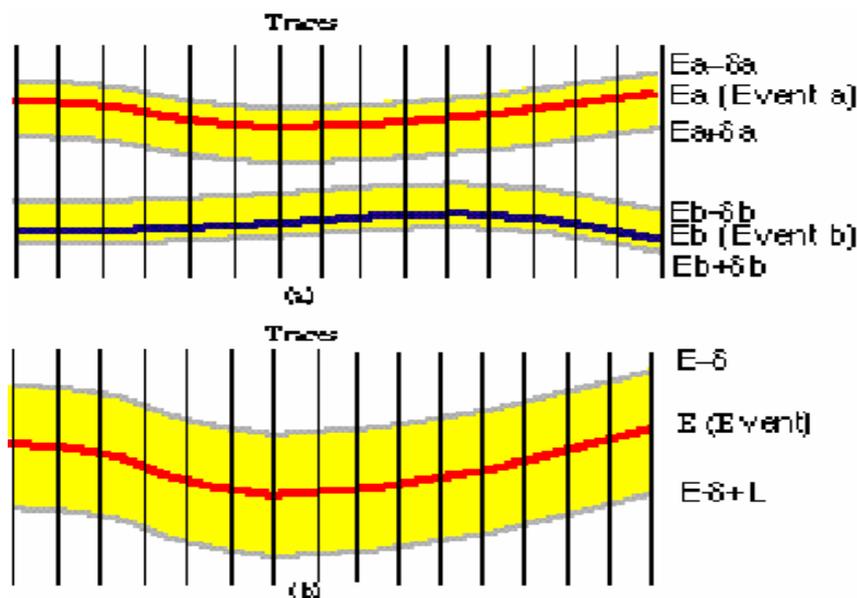


Figura 11: Tipos de janela usados para a obtenção do atributo sísmico baseado em eventos. (a) Com janelas variantes no tempo e deslocamento variáveis em relação ao evento; (b) Com janela fixa em torno de um determinado evento, com deslocamento variável em torno do evento; (Chen e Sidney, 1997).

Assim, como são tomadas janelas na direção vertical, também pode-se utilizar janelas horizontais, como ilustrado na figura 12a, para se enfatizar a variação espacial no cômputo do atributo. Neste caso, o atributo sísmico é atribuído ao ponto central da janela horizontal ao logo do horizonte. Na figura 12b são ilustradas oito formas diferentes de extração dos dados para a formação dos atributos sísmicos baseados em eventos multi-traços. Os atributos multi-traços podem ressaltar variações laterais tais como falhas, fraturas e anisotropias.

Já os atributos sísmicos volumétricos são uma extensão dos métodos baseados em eventos a todo o cubo sísmico. Na figura 13, são ilustradas duas formas diferentes de se gerar um volume de atributos sísmicos. Uma das principais aplicações é a geração de cubos de coerência (Bednar, 1998), (Mafurt et al., 1998) ou variância que indicam falhas geológicas.

Independente da forma como os atributos são extraídos, geralmente, eles são direta ou indiretamente calculados utilizando a análise do traço sísmico complexo.

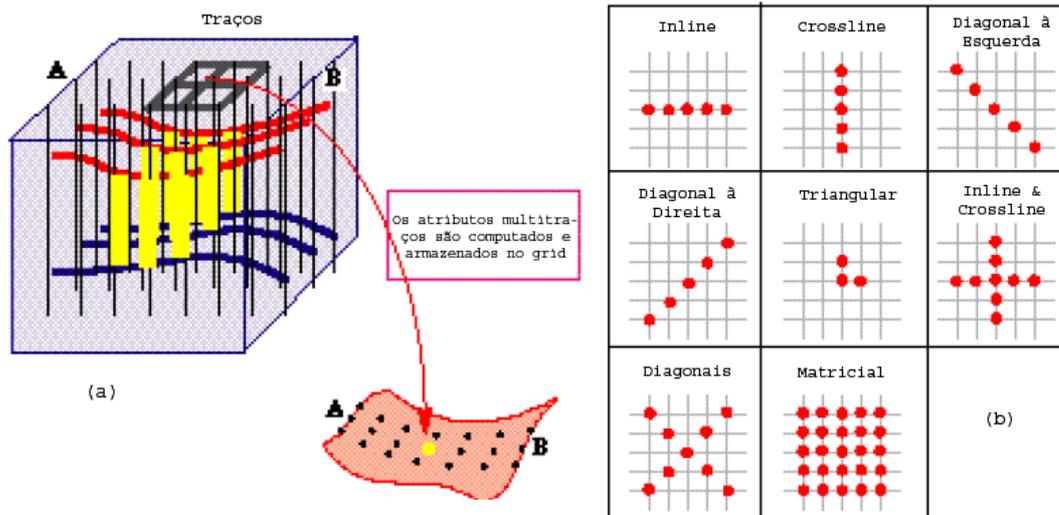


Figura 12: Extração de dados para a formação de atributos sísmicos multi-traços (Chen e Sidney, 1997).

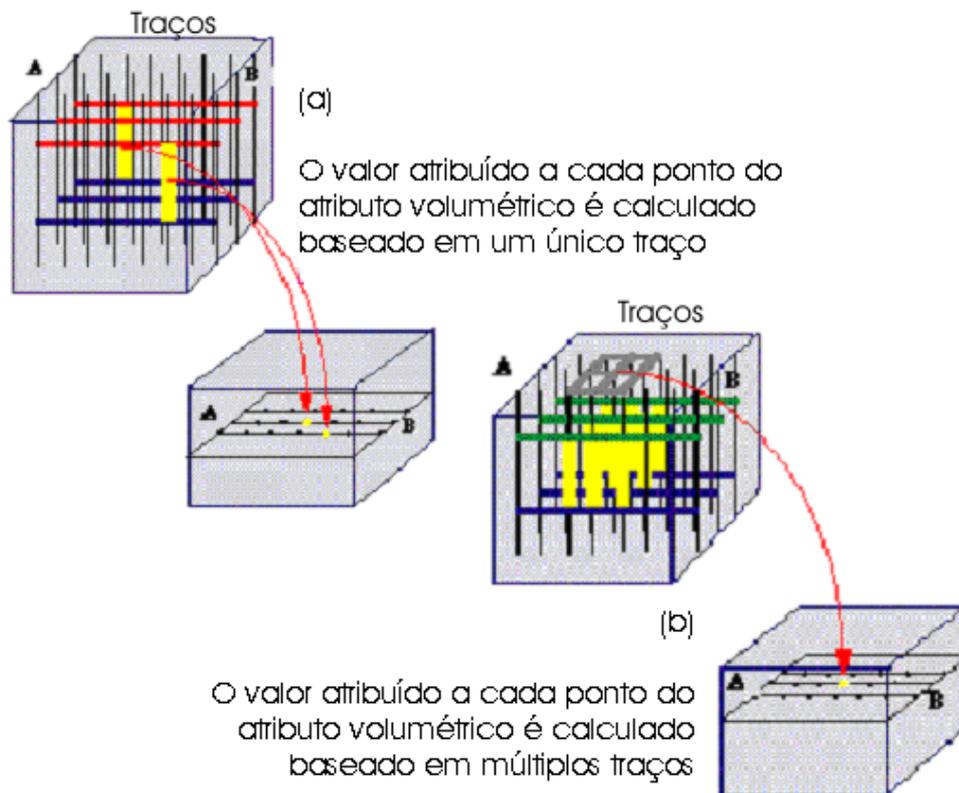


Figura 13: Formação de atributos volumétricos. (Chen e Sidney, 1997).

### 2.2.1. Análise do traço sísmico complexo

Na natureza, os fenômenos físicos são causais e as suas medidas através de sinais, como os obtidos na aquisição sísmica, são reais. Sabe-se da análise de Fourier que o espectro de sinais reais tem simetria complexa, i.e., a parte real é uma função par enquanto a parte imaginária é ímpar (Oppenheim, Schaffer e Buck, 1999), conforme ilustrado na figura 14a para sinais contínuos e na figura

14b para sinais discretos, que tem espectro periódico com período igual a  $2\pi$ . Observando que a parte negativa do espectro contém informações redundantes com respeito à parte positiva, define-se como sinal complexo ou analítico aqueles formados após a remoção da parte negativa do espectro do sinal contínuo real. O sinal complexo discreto resultante com espectro sem componentes negativas, como ilustrado na figura 14c, preserva todas as informações contidas no sinal real. Portanto, definir um sinal complexo ou analítico que mantenha as características do sinal real é bastante vantajoso para derivação de conceitos úteis na análise de sinais, como a fase e a frequência instantânea.

O sinal analítico complexo contínuo pode ser obtido a partir do sinal real  $x_R(t)$ , tomando-se a transformada de Fourier inversa do espectro do sinal analítico,  $X(f)$ , formado através da transformada de Fourier de  $x_R(t)$ ,  $X_R(f)$ , como descrito na eq.(1).

$$X(f) = \begin{cases} 2X_R(f), & \text{para } f > 0 \\ X_R(0), & \text{para } f = 0 \\ 0, & \text{para } f < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Logo, por construção, o sinal analítico é complexo e a sua parte real é idêntica ao sinal original. Nota-se também, que a energia do sinal original é preservada no sinal analítico e que o valor de  $X(f)$  para  $f=0$  é definido de forma a compensar a descontinuidade da transformada de Fourier na frequência zero (Marple Jr., 1999).

A parte imaginária do sinal analítico também pode ser obtida a partir do sinal real  $x_R(t)$  através da transformada de Hilbert, que é definida através da integral de Cauchy como:

$$x_I(t) = H\{x_R(t)\} = \oint \frac{1}{\pi(t-\tau)} x_R(\tau) d\tau \quad (2)$$

No domínio da frequência, a transformada de Hilbert pode ser obtida através da transformada de Fourier como:

$$x_I(t) = -j.F^{-1} \left[ \{ \text{sign}(\omega).F\{x_R(t)\} \} \right] \quad (3)$$

onde  $\text{sign}(\omega) = \{-1, 0, 1\}$  para  $\omega \in \{-\infty, 0, +\infty\}$ .

Observa-se da eq.(3), que a parte imaginária do sinal  $x_I(t)$  é um sinal em quadratura com  $x_R(t)$ , ou seja, a parte real e imaginária são ortogonais e o sinal complexo associado a  $x_R(t)$  é dado por:

$$x(t) = x_R(t) + j \cdot x_I(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad (4)$$

onde  $A(t)$  é amplitude do envelope do sinal analítico e  $\varphi(t)$  a fase instantânea.

Portanto, obtido o traço sísmico complexo  $x(t)$ , outros atributos sísmicos podem ser determinados (Taner, 2000), como, por exemplo, a frequência instantânea que é definida como a primeira derivada da fase instantânea.

Atualmente, grande parte dos sinais contínuos coletados na natureza são discretizados na própria aquisição e os sinais sísmicos não fogem a esta regra. Assim, as propriedades matemáticas dos sinais analíticos contínuos devem ser adaptadas para os sinais complexos discretos. Entretanto, embora os sinais complexos discretos não possam ser considerados analíticos no sentido matemático, eles podem compartilhar algumas propriedades dos seus geradores contínuos (Marple Jr., 1999).

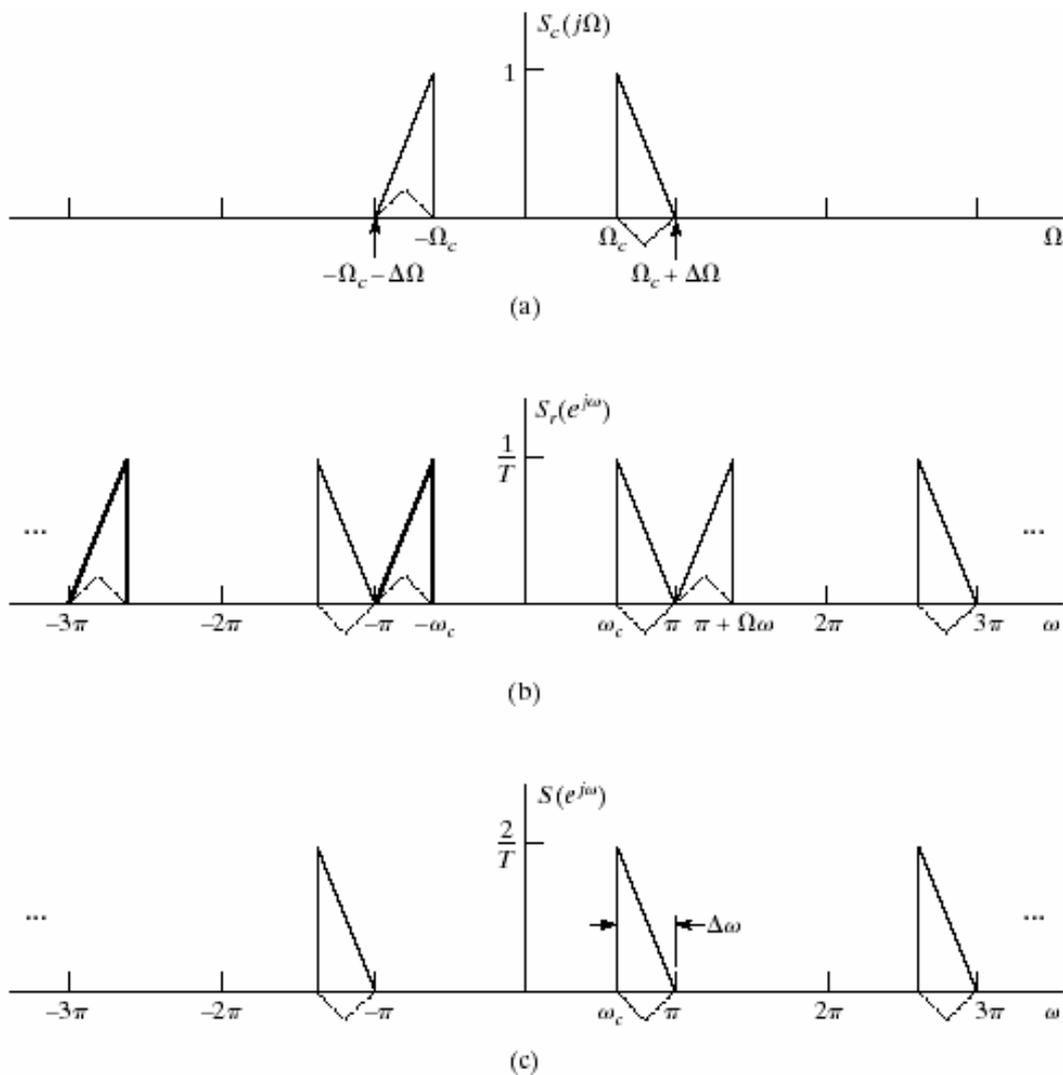


Figura 14: (a) Espectro de um sinal real contínuo passa-banda; (b) Espectro do sinal passa-banda em tempo discreto; (c) Espectro do sinal complexo formado. (Oppenheim et al., 1999).

A forma mais intuitiva para obtenção do sinal complexo discreto é inspirada na eq.(1), ou seja, o algoritmo para obtenção do sinal complexo discreto mantém a parte positiva do espectro e zera a parte negativa utilizando a Transformada de Fourier Discreta (DFT) conforme descrito pelos seguintes três passos (Marple Jr., 1999):

- 1) Tomar a DFT do sinal real:  $x_R[n] \xrightarrow{DFT} X_R[m]$ ;
- 2) Formar um sinal com as frequências negativas de  $X_R[m]$  zeradas, conforme descrito na eq.(5);

$$X[m] = \begin{cases} X_R[0], & \text{para } m = 0 \\ 2X_R[m], & \text{para } 1 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1 \\ X_R\left[\frac{N}{2}\right], & \text{para } m = \frac{N}{2} \\ 0, & \text{para } \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N - 1 \end{cases} \quad (5)$$

- 3) Obter o sinal complexo  $x[m]$  através da transformada discreta de Fourier inversa (IDFT) de  $X[m]$ .

A obtenção do sinal complexo utilizando a (DFT) mantém a propriedade da ortogonalidade entre a parte real e imaginária do sinal complexo além de manter a parte real idêntica ao sinal original.

Entretanto, este método tem como desvantagem as distorções geradas devido às características globais que a transformada discreta de Fourier (DFT) introduz. Estas distorções podem comprometer a obtenção de alguns parâmetros a partir do sinal complexo, conforme ilustrado nas figura 18 e 19. Outra desvantagem é que todo o sinal deve ser operado de uma só vez, o que inviabiliza o seu uso em dados com muitas amostras e aplicações em tempo real.

Em analogia com a sua versão contínua, o sinal discreto complexo  $x[n]=x_R[n]+jx_i[n]$  teria idealmente o espectro  $X(e^{jw})$  zerado para frequências negativas. Entretanto, como o espectro de sinais discretos é periódico com período  $2\pi$ , a análise em frequência de sinais discretos é realizada somente em intervalos de um período, ou seja de  $0$  à  $2\pi$  ou de  $-\pi$  à  $\pi$ . Logo o espectro ideal do sinal complexo é dado por:

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} X(e^{jw}), & \text{para } 0 < w < \pi \\ 0, & \text{para } -\pi < w < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Supondo conhecido o espectro do sinal complexo pode-se obter os espectros das partes real  $x_R[n]$  e imaginária  $x_i[n]$  através das eq.(7) e eq.(8):

$$X_R(e^{jw}) = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) + X^*(e^{-jw})] \quad (7)$$

e

$$jX(e^{jw}) = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) - X^*(e^{-jw})] \quad (8)$$

onde  $X^*$  é o conjugado complexo de  $X$ .

Das eq.(7) e eq.(8) obtém-se:

$$X(e^{jw}) = 2X_R(e^{jw}) - X^*(e^{-jw}) \quad (9)$$

e

$$X(e^{jw}) = 2jX_i(e^{jw}) + X^*(e^{-jw}) \quad (10)$$

Como  $X^*(e^{jw})=0$  para  $0 < w < \pi$ , então das eq.(6), eq.(9) e eq.(10), obtém-se:

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} 2X_R(e^{jw}), & \text{para } 0 < w < \pi \\ 0, & \text{para } -\pi < w < 0 \end{cases} \quad (11)$$

e

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{jw}), & \text{para } 0 < w < \pi \\ 0, & \text{para } -\pi < w < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Portanto, das eq.(11) e (12), observa-se diretamente que:

$$X_i(e^{jw}) = -jX_R(e^{jw}), \quad \text{para } 0 < w < \pi \quad (13)$$

por outro lado, como  $X(e^{jw}) = X_R(e^{jw}) + jX_i(e^{jw})$  e  $X(e^{jw})=0$  para  $-\pi < w < 0$ :

$$X_i(e^{jw}) = jX_R(e^{jw}), \quad \text{para } -\pi < w < 0 \quad (14)$$

Portanto, das eq.(13) e eq.(14), sabe-se que:

$$X_i(e^{jw}) = \begin{cases} -jX_R(e^{jw}), & \text{para } 0 < w < \pi \\ jX_R(e^{jw}), & \text{para } -\pi < w < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Logo a parte imaginária do sinal discreto complexo pode ser obtida a partir da parte real através de um sistema linear invariante no tempo, ou seja:

$$X_i(e^{jw}) = H(e^{jw})X_R(e^{jw}) \quad (16)$$

onde  $H(e^{jw})$  é a resposta em frequência do referido sistema dado por:

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} -j, & \text{para } 0 < w < \pi \\ j, & \text{para } -\pi < w < 0 \end{cases} \quad (17)$$

e  $h[n]$  é a resposta ao impulso:

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & \text{para } n \neq 0 \\ 0, & \text{para } n = 0. \end{cases} \quad (18)
 \end{aligned}$$

O processo de obtenção do sinal complexo no domínio da frequência conforme descrito anteriormente está ilustrado na figura 15 (Antoniou, 1993). O filtro digital descrito pelas eq.(17) e eq.(18) é conhecido como a transformada de Hilbert discreta,  $H\{.\}$ . Logo, o sinal complexo discreto também pode ser obtido através da eq.(19).

$$x[n] = x_R[n] + jH\{x_R[n]\} \quad (19)$$

A transformada de Hilbert pode ser considerada como um rotacionador de fase ideal de  $90^\circ$ , entretanto, a sua resposta ao impulso não é absolutamente somável (Oppenheim et al., 1999), ou seja, o filtro ideal de Hilbert não é causal e aproximações devem ser utilizadas para a implementação do mesmo. Normalmente, aproximações de filtros FIR com retardo de grupo constante são utilizadas, como a ilustrada na figura 16, onde o filtro de Hilbert foi aproximado com 31 coeficientes utilizando o algoritmo de Parks-McClellan (Oppenheim et al., 1999).

Baseando-se na eq.(1), outra forma de se obter o sinal discreto complexo consiste em utilizar a propriedade do deslocamento em frequência da transformada discreta de Fourier para sua obtenção, ou seja, se  $H_{pb}(e^{j\omega})$  é a DFT da seqüência  $h_{pb}[n]$ , então:

$$e^{j\omega_0 n} h_{pb}[n] \xleftrightarrow{F} H_{pb}(e^{j(\omega-\omega_0)}) \quad (19)$$

Logo, se um filtro passa baixas FIR com faixa de rejeição a partir de  $\pi/2$  tiver seus coeficientes multiplicados pela seqüência  $2e^{j\frac{\pi}{2}n}$ , ele terá sua resposta em frequência deslocada de  $\pi/2$ . Portanto, o sistema linear invariante no tempo criado desta forma pode ser utilizado diretamente para a obtenção do sinal complexo (Reilly, Frazer e Boashash, 1994), conforme ilustrado na figura 17 para o caso de um filtro passa-baixas com 31 coeficientes utilizando o algoritmo de Parks-McClellan.

Para efeito de comparação, foi gerado um sinal de teste com 512 amostras e os atributos envoltória do traço complexo e frequência instantânea foram gerados utilizando o método da DFT, a transformada de Hilbert utilizando filtro FIR e a transformada de Hilbert utilizando filtro FIR complexo. Os resultados

para o sinal de testes estão ilustrados nas figuras 18 e 19. Pode-se verificar que o melhor resultado foi obtido através do cômputo da transformada de Hilbert utilizando filtros FIR.

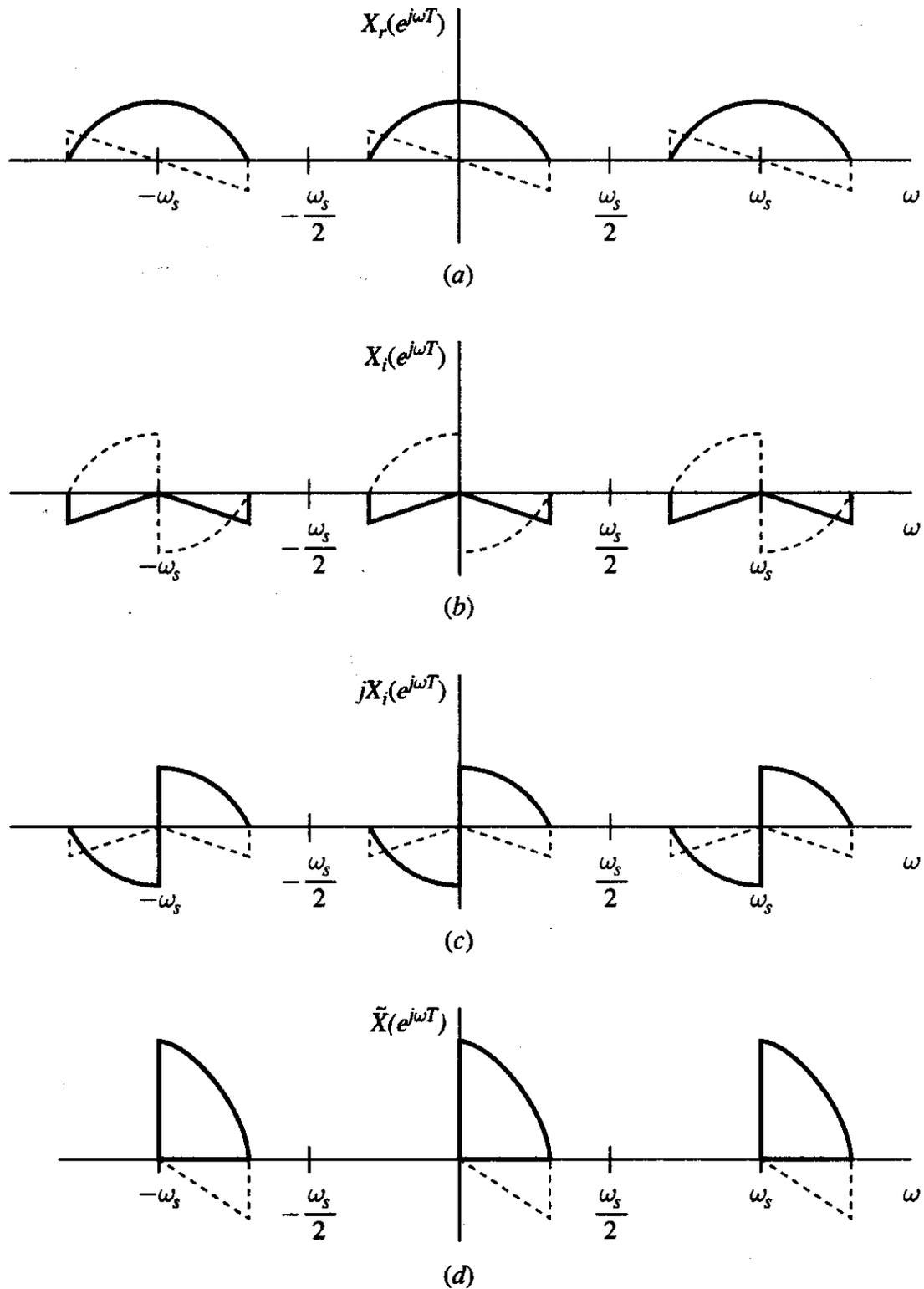


Figura 15: Obtenção do sinal complexo no domínio da frequência (Antoniou, 1993).

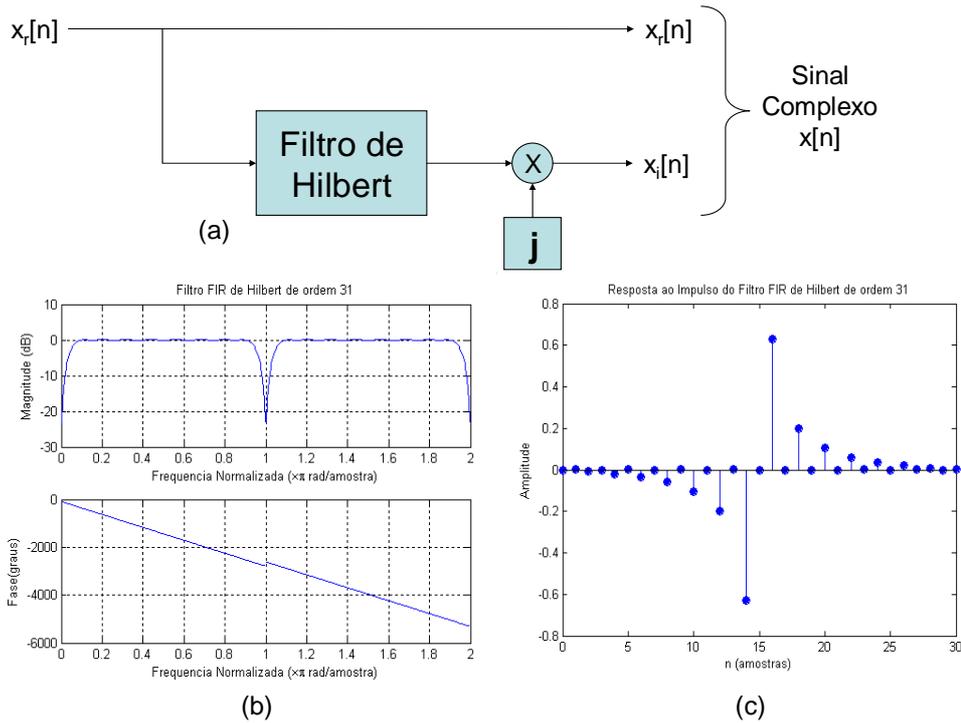


Figura 16: Aproximação do filtro de Hilbert utilizando filtro FIR; (a) Esquema para obtenção do sinal complexo a partir do filtro de Hilbert; (b) Resposta em frequência do filtro de Hilbert com 31 coeficientes; (c) Resposta ao impulso do filtro de Hilbert.

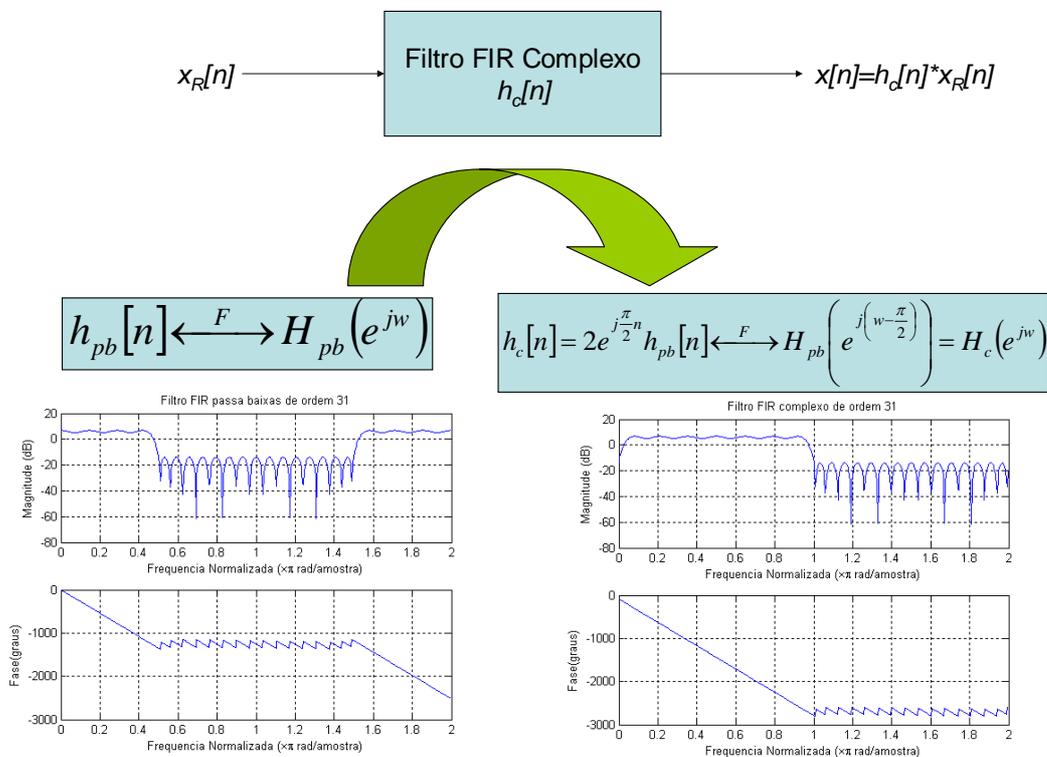


Figura 17: Obtenção do sinal complexo a partir de filtro FIR complexo.

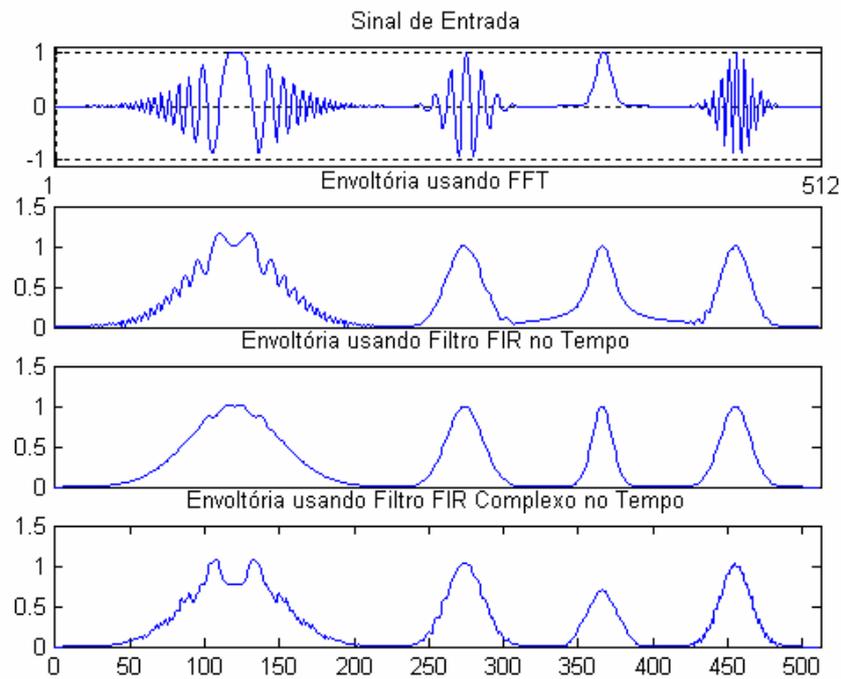


Figura 18: Envoltórias de um sinal de teste com 512 amostras obtidas através da DFT, da transformada de Hilbert com filtro FIR e da transformada de Hilbert com filtro FIR complexo.

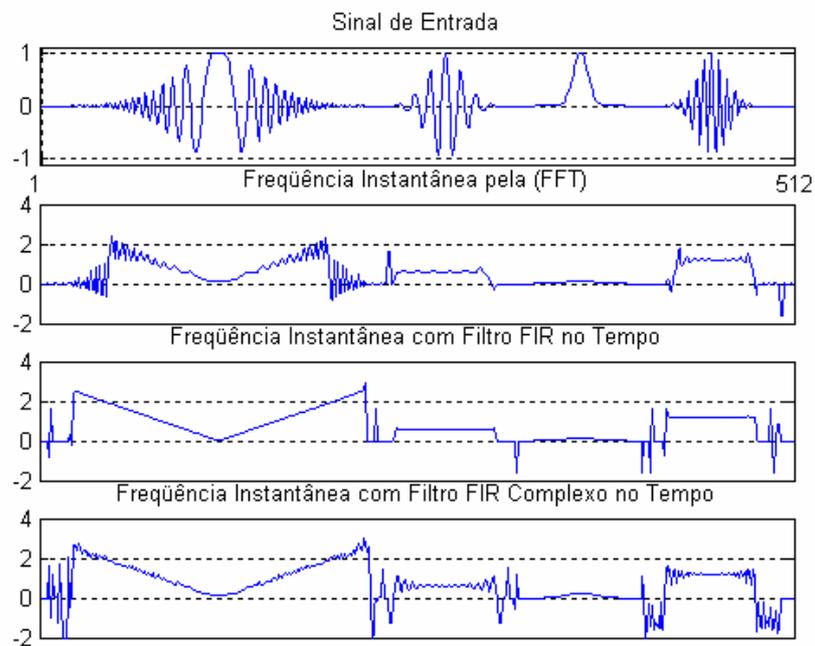


Figura 19: Frequência instantânea de um sinal de teste com 512 amostras obtidas através da DFT, da transformada de Hilbert com filtro FIR e da transformada de Hilbert com filtro FIR complexo.