



Nathalia Bürger de Albuquerque

**Construção e Comportamento Mecânico
de um Módulo de Ponte Tenségrita
utilizando Materiais Naturais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso
Coorientador: Cássio Marques Rodrigues Gaspar

Rio de Janeiro
Maio de 2020



Nathalia Bürger de Albuquerque

**Construção e Comportamento Mecânico
de um Módulo de Ponte Tenségrita
utilizando Materiais Naturais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada
pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Dr. Cássio Marques Rodrigues Gaspar

Coorientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Luís Eustáquio Moreira

Universidade Federal de Minas Gerais

Dr. Murillo Vinicius Bento Santana

Institut National des Sciences Appliquées de Rennes

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de maio de 2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Nathalia Bürger de Albuquerque

Graduada em Engenharia Civil pela Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio – em 2016. Principais áreas de interesse: Materiais Não Convencionais, Métodos Construtivos.

Ficha Catalográfica

Albuquerque, Nathalia Bürger de

Construção e Comportamento Mecânico de um Módulo de Ponte Tenségrita utilizando Materiais Naturais/ Nathalia Bürger de Albuquerque ; orientador: Daniel Carlos Taissum Cardoso ; coorientador: Cássio Marques Rodrigues Gaspar. – 2020.

165 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2020.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Tensegrity. 3. Ponte. 4. Bambu. 5. Sisal. 6. Método construtivo. I. Cardoso, Daniel Carlos Taissum. II. Gaspar, Cássio Marques Rodrigues. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. IV. Título.

CDD:624

Agradecimentos

Om Savitre Namaha – Agradeço àquele que é responsável pela vida.

Om Bhaaskaraya Namaha – Agradeço àquele que dá sabedoria e iluminação cósmica.

Om Khagaya Namaha – Agradeço àquele que está presente em tudo, que se move através do céu.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Daniel Carlos Taissum, o qual admiro verdadeiramente. Agradeço sua gentileza, receptividade e ensinamentos – sejam estes na engenharia, sejam na vida. Agradeço sua ética e compromisso. Obrigada pela oportunidade de trabalhar ao seu lado desde a graduação.

Agradeço imensamente ao meu coorientador, Cássio Marques Rodrigues Gaspar, por todo o apoio e parceria fornecida. Sou particularmente grata por todas as nossas conversas, nos mais variados temas, que me mostraram tantos novos olhares e saberes. Agradeço sua atenção e sua cortesia. Agradeço sua dedicação e seu esmero.

Agradeço ao Mário Seixas por ter sido parte fundamental desde trabalho. Sem a sua participação, este estudo seria apenas uma abstração. Obrigada pela sua disposição e entusiasmo em me mostrar um novo mundo – da construção, do lar, do ser. Também agradeço à equipe da Bambutec, que me acolheu desde o primeiro dia e não hesitou em compartilhar seus conhecimentos e seu espaço comigo.

Gostaria de agradecer ao Murillo Vinicius Bento Santana, cuja inovação e suporte viabilizaram tantos aspectos desta pesquisa. Obrigada pelo eterno bom-humor e prontidão em tirar minhas dúvidas.

Gostaria de agradecer ao Euclides, Zé, Rogério, Jhansen, Marques, Érica e todos aqueles que trabalham no LEM pelo auxílio, perspicácia, saberes e disposição em ajudar e fazer acontecer.

Agradeço ao apoio financeiro da PUC-Rio, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado. Agradeço a todos os professores e funcionários pelo belo trabalho que fazem diariamente. Me sinto feliz e honrada de ter tido a oportunidade de estudar nesta Universidade.

Agradeço aos meus pais, Bianca e Marcos, sem os quais eu nada seria, pelo amor inesgotável, pelo carinho e pela proteção. Gostaria de agradecer à minha avó, Luiza Maria, por ser uma das minhas melhores amigas, cujo afeto e vivacidade são lições diárias para mim. Agradeço à minha irmã, Isabella, por possuir a habilidade de

sempre me mostrar um novo olhar, por ser minha fiel escudeira, minha primeira melhor amiga. À toda família, minha gratidão eterna.

Agradeço aos meus amigos de longa data, Juliana, Marina Morena, Anna Luiza, Bernardo, Jorge Lucas, Ana Beatriz, Romulo e William, por estarem sempre presentes nos meus melhores e piores momentos, pelas risadas, pelas memórias e pela compreensão. Agradeço igualmente aos amigos mais recentes, Marina A., Isabela, Fernando, Manuel, Priscilla e João Marcos pela solidariedade e partilha.

Agradeço ao meu namorado, Henrique, cujo amor, paciência e companheirismo se mostraram infundáveis. O deserto que eu atravesssei, você me viu passar. Obrigada por fazer parte da minha jornada, por ter sido minhas mãos, minhas pernas e meus olhos em tantas ocasiões. Obrigada por ser meu amigo. Com você eu sou mais forte.

Gostaria de agradecer ao meu chefe, João Gabriel Hargreaves Ribeiro, pela compreensão e gentileza durante esse período de jornada dupla. Agradeço pela oportunidade de poder trabalhar em projetos que me engrandecem tanto a nível profissional quanto pessoalmente. Agradeço pelo apoio e pelos ensinamentos.

Por fim, gostaria de agradecer a mim mesma. Por ter sido minha amiga, por ter confiado em mim mesma e por ter insistido até sair do outro lado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Albuquerque, Nathalia Bürger de; Cardoso, Daniel Carlos Taissum; Gaspar, Cássio Marques Rodrigues. **Construção e Comportamento Mecânico de um Módulo de Ponte Tenségrita utilizando Materiais Naturais**. Rio de Janeiro, 2020. 165p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho, apresenta-se um estudo numérico e experimental sobre o comportamento estrutural de um módulo de ponte tensegrity para pedestres com materiais naturais. Inicialmente é apresentado o conceito de estruturas tensegrity, destacando-se seu surgimento e atual contexto, aplicações e estudos relacionados a este sistema estrutural. Também é apresentada a importância e os benefícios da utilização de materiais naturais na construção civil. Um projeto de ponte tensegrity para pedestres realizado previamente é selecionado como objeto de estudo. Com base em suas principais características, realiza-se um protótipo do módulo da ponte em escala 1:25. Propõe-se um método construtivo considerando técnicas ajustáveis para montagem e desmontagem. Posteriormente, um protótipo em escala de aproximadamente 1:6 é construído utilizando colmos de bambu da família *Phyllostachys aurea* para as estroncas e cordas de sisal para os cabos. O módulo é instrumentado e ensaiado estática e dinamicamente a fim de avaliar a influência das perdas de pretensão por fluência e relaxação sobre o comportamento da estrutura. Os resultados obtidos dos ensaios experimentais são comparados com as previsões numéricas obtidas com auxílio de modelo computacional quanto às tensões atuantes e os modos de vibração. Através do cruzamento dos dados foi possível determinar indiretamente o nível de pretensão aplicado no módulo tensegrity e avaliar a perda de pretensão ao longo do tempo. As investigações estática e dinâmica apresentaram considerável afinidade.

Palavras-chave

Tensegrity; Ponte; Bambu; Sisal; Método construtivo.

Abstract

Albuquerque, Nathalia Bürger de; Cardoso, Daniel Carlos Taissum (Advisor); Gaspar, Cássio Marques Rodrigues (Coadvisor). **Construction and Mechanical Behavior of a Tensegrity Pedestrian Bridge built with Natural Materials**. Rio de Janeiro, 2020. 165p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, a theoretical and practical study of the behavior of a tensegrity based pedestrian bridge constructed with natural materials is presented. Initially it is shown the concept of tensegrity structures, highlighting its emergence and current context, applications within civil engineering and studies related to this structural system. The importance and benefits of using natural materials in civil construction are also presented. A pedestrian bridge design made using tensegrity structure is designated as study object and a prototype of the bridge's module is built in 1:25 scale. A constructive method is proposed considering deployable techniques for assembly and disassembly. Subsequently, a prototype on a 1: 6 scale is built using *Phyllostachys aurea* bamboo culms for the struts and sisal ropes for the cables. The module is instrumented and tested statically and dynamically in order to understand the processes of loss of prestress and creep on the structure's behavior. The results obtained from the experimental tests are compared with the numerical predictions obtained with the aid of a computational model regarding the stresses and the vibration modes. Through the crossing of the data it was possible to indirectly determine the level of prestress applied in the tensegrity module and to evaluate the loss of prestress over time. The static and dynamic investigations showed considerable affinity.

Keywords

Tensegrity; Bridge; Bamboo; Sisal; Construction method.

Sumário

1. Introdução.....	22
1.1. Motivação.....	22
1.2. Objetivos	23
1.3. Organização da Dissertação	24
2. Revisão da Literatura.....	26
2.1. Conceito	27
2.2. Trabalhos Relacionados.....	33
3. Concepção da Estrutura	39
3.1. Configuração Inicial.....	39
3.2. Escolha dos Materiais e Caracterização	42
3.3. Modelo em Escala Reduzida.....	55
3.4. Método Construtivo	58
4. Princípios Teóricos e Descrição dos Ensaios Estático e Dinâmico ...	67
4.1. Investigação do Comportamento Estático.....	67
4.2. Investigação do Comportamento Dinâmico.....	72
5. Apresentação e Análise dos Resultados	89
5.1. Calibração Estática do Tensegrity no Programa Galileo	89
5.2. Análise Estática.....	93
5.3. Análise Dinâmica	106

6.	Conclusões e Trabalhos Futuros	129
6.1.	Conclusões	129
6.2.	Trabalhos Futuros	131
7.	Referências bibliográficas.....	132
8.	Apêndice A	142
8.1.	Fundamentação Teórica de Tensegrities	142

Lista de Figuras

Figura 2-1: Estrutura tensegrity elementar batizada de "prisma simplex"(BURKHARDT JR, 2008)	27
Figura 2-2: Decomposição do tensegrity: (a) tração ou atração contínua, (b) compressão ou repulsão descontínua, (c) sobreposição das forças e (d) configuração pretensionada e auto equilibrada (ESTRADA, 2007)	28
Figura 2-3: Peça "Needle Tower" por Kenneth Snelson (HEARTNEY, 2013).....	31
Figura 2-4: Peça "Easy K" por Kenneth Snelson (HEARTNEY, 2013)	31
Figura 2-5: Estádio Ciudad de La Plata (LEVY et al., 2013)	32
Figura 2-6: Kurilpa Bridge, Australia (BECK & COOPER, 2012)	32
Figura 3-1: Ponte tensegrity: (a) vista lateral (adaptado de RHODE-BARBARIGOS et al. (2010)) e (b) vista transversal (adaptado de KORKMAZ <i>et al.</i> (2012)).....	39
Figura 3-2: Vista isométrica do módulo (adaptado de KORKMAZ <i>et al.</i> (2012))	40
Figura 3-3: Trincas longitudinais ocasionadas pela degradação da lignina em colmo de <i>Phyllostachys aurea</i> (KRAUSE, 2009)	44
Figura 3-4: Set up do ensaio de compressão simples	45
Figura 3-5: Curva tensão vs. deformação do bambu <i>Phyllostachys aurea</i> para compressão	46
Figura 3-6: Modos de ruptura: (a), (b) trinca longitudinal por todo o comprimento e (c) ruptura local por embarrigamento (c)	47
Figura 3-7: Esquematização do setup do ensaio de flexão a quatro pontos.....	47
Figura 3-8: Configuração final do ensaio de flexão a quatro pontos	48
Figura 3-9: Modos de ruptura: trinca longitudinal na seção central (a) e cisão local ocasionada pelo apoio descentralizado (b)	49

Figura 3-10: Set up do ensaio de tração direta.....	53
Figura 3-11: Curva Tensão vs. Deformação dos cabos de sisal.....	53
Figura 3-12: Modos de ruptura da corda: (a) ruptura afastada do nó e (b) ruptura na base do nó	54
Figura 3-13: Módulo da ponte tensegrity em escala 1:25 com palitos de churrasco.....	56
Figura 3-14: Vistas do módulo da ponte tensegrity em escala 1:25 com palitos de churrasco e fios de nylon: (a) vista lateral, (b) vista superior e (c) vista frontal com simulação do tabuleiro.....	56
Figura 3-15: Esquematização do método TensegriToy adaptado: (a) entalhe nas extremidades da estronca e (b) passagem do cordone por entre os entalhos	57
Figura 3-16: Módulo da ponte tensegrity em escala 1:25 com varetas de bambu e cabos de cordone.....	58
Figura 3-17: Detalhe da sobreposição das estroncas principais.....	59
Figura 3-18: Vista superior (a) do pentágono formado pelas estroncas principais (S31 a S35) e cabos faceadores inferiores (C1 a C5) e (b) de uma tesoura com os quatro cabos-X	60
Figura 3-19: Layout inicial do módulo no plano	61
Figura 3-20: Passo (1) – Inserção da tesoura 6 e conexão dos cabos-X aos nós 3, 4 e 13	61
Figura 3-21: Passo (2) – Inserção da tesoura 7 e conexão dos cabos-X aos nós 4, 5 e 14	62
Figura 3-22: Passo (3) – Inserção da tesoura 8 e conexão dos cabos-X aos nós 5, 1 e 15	62
Figura 3-23: Passo (4) – Inserção da tesoura 9 e conexão dos cabos-X aos nós 1, 2 e 11	63
Figura 3-24: Passo (5) – Inserção da tesoura 10 e conexão dos cabos-X aos nós 2, 3 e 12	63
Figura 3-25: Módulo em escala 1:5,65 montado no plano.....	64
Figura 3-26: Elevação gradual da estrutura com o auxílio de polias: (a) estrutura dobra no plano, (b) módulo em fase de desdobramento e (c) estrutura completamente levantada	65
Figura 3-27: Módulo em escala 1:5,65 na posição final para ensaio	65

Figura 3-28: Esquematização do copo de bambu em conjunto com o método TensegrityToy	66
Figura 4-1: Esquematização de um extensômetro unidirecional (adaptado de BLANCO et al. (2008)).....	68
Figura 4-2: Ponte Wheatstone (adaptado de MORA et al. (2012)) ..	69
Figura 4-3: Montagem 1/4 de ponte (adaptado de MORA et al. (2012))	69
Figura 4-4: Módulo tensegrity com aproximadamente 170 cm de altura (aluna para escala)	70
Figura 4-5: Apoio do tensegrity	71
Figura 4-6: Instalação dos extensômetros nas estroncas de bambu: (a) utilização de conector Sindal 6mm para conexão do extensômetro à NI 9235 e (b) gabarito para colagem do sensor.....	72
Figura 4-7: Representação esquemática da caracterização do comportamento dinâmico de uma estrutura submetida a diferentes tipos de excitações (adaptado de MENDES (2008))	74
Figura 4-8: Oscilador com um grau de liberdade: (a) Componentes básicos e (b) Forças em equilíbrio (adaptado de CLOUGH & PENZIEN (2003)).....	74
Figura 4-9: Discretização genérica de uma viga (adaptado de CLOUGH & PENZIEN (2003)).....	77
Figura 4-10: Sistema linear como uma 'caixa preta' com sinais de tempo e equivalentes no domínio de Laplace (adaptado de BRANDT (2011))	80
Figura 4-11: Esquematização ilustrativa para transformação de uma equação do domínio do tempo para o domínio da frequência (ROCHA, 2015)	82
Figura 4-12: Set up para o ensaio experimental (adaptado de SHINN & HAMMOND (2008)).....	83
Figura 4-13: Sinal de (a) entrada, ou input, e (b) de saída, também chamado de output (adaptado de SHINN & HAMMOND (2008))	84
Figura 4-14: Resultados da FRF em módulo (a) e em radianos (b) da FRF com pré-processamento de sinais (adaptado de SHINN & HAMMOND (2008))	85
Figura 4-15: Acelerômetro (modelo 333B40) posicionado no nó 03	86

Figura 4-16: Martelo (modelo 086C03) aplicando uma carga impulsiva no nó 03.....	86
Figura 4-17: Geração da geometria do módulo tensegrity no ARTeMIS	87
Figura 4-18: Esquematisação da aplicação da carga impulsiva do martelo nos nós da estrutura	88
Figura 4-18: Esquematisação da aplicação da carga impulsiva do martelo nos nós da estrutura	88
Figura 4-19: Registro fotográfico da interface de resultados do software ARTeMIS Modal.....	88
Figura 5-1: Configuração deformada da ponte tensegrity metálica para pedestres.....	92
Figura 5-2: Curva deslocamento vertical vs. pretensão para ponte para pedestres metálica	92
Figura 5-3: Modelo computacional do módulo tensegrity fixado no nó 6 (índice 5 na imagem) e com carregamento de peso próprio....	94
Figura 5-4: Curva tensão vs. pretensão para as estroncas do módulo.....	95
Figura 5-5: Deformação das estroncas ao longo do ensaio estático	97
Figura 5-6: Deformação das estroncas durante a fase de montagem do módulo tensegrity	98
Figura 5-7: Deformação das estroncas após 1,5h do término da montagem do módulo	98
Figura 5-8: Deformação das estroncas após 168h do início do ensaio até 324h	100
Figura 5-9: Curva do $\sum Erro^2$ para diferentes pretensões.....	106
Figura 5-10: Curvas frequência vs. pretensão considerando os 10 primeiros modos de vibração.....	109
Figura 5-11: Primeiro modo de vibração ($f = 2,98$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão em (a) vista frontal (plano YZ), (b) vista lateral (plano XZ), (c) vista isométrica e (d) vista superior (plano XY).....	110
Figura 5-12: Segundo modo de vibração ($f = 3,10$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão em (a) vista frontal (plano YZ), (b)	112

vista lateral (plano XZ), (c) vista isométrica e (d) vista superior (plano XY).....	
Figura 5-13: Terceiro modo de vibração ($f = 5,50$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão em (a) vista frontal (plano YZ), (b) vista lateral (plano XZ), (c) vista isométrica e (d) vista superior (plano XY).....	114
Figura 5-14: AUTOMAC dos 10 primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para 5% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdade (dir. vertical)	115
Figura 5-15: MAC entre os 10 primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para 5% e 30% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdade (dir. vertical).....	117
Figura 5-16: MAC entre os 10 primeiros modos de vibração do tensegrity para 5% e 0,25% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdade (dir. vertical)	118
Figura 5-17: MAC entre os 10 primeiros modos de vibração do tensegrity para 0,25% e 30% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdades (dir. vertical).....	118
Figura 5-18: Sinal de força (a) e da aceleração (b) no domínio do tempo referente ao driving point	119
Figura 5-19: CMIF do módulo tensegrity logo após a montagem	120
Figura 5-20: CMIF do módulo tensegrity após 4 (quatro) dias da montagem.....	120
Figura 5-21: CMIF do módulo tensegrity após 14 (quatorze) dias da montagem.....	121
Figura 5-22: CMIF do módulo tensegrity após 52 (cinquenta e dois) dias da montagem	121
Figura 5-23: Combinação dos CMIFs do módulo tensegrity ao longo do tempo.....	122
Figura 5-24: Comportamento das frequências naturais conforme sucessão dos picos	123
Figura 5-25: Curva do $\sum Erro^2$ para diferentes pretensões	127
Figura 5-26: Diagrama de estabilização dos modos de vibração (método RFP-Z) referente ao ensaio logo após a montagem.....	128
Figura 8-1: Estrutura livre bidimensional (adaptado de (ZHANG & OHSAKI, 2015)).....	143

Figura 8-2: Energia potencial total e estabilidade de uma estrutura cinematicamente indeterminada: (a) Configuração estável quando $Q_m > 0$, (b) Configuração instável quando $Q_m = 0$ e (c) Configuração instável quando $Q_m < 0$ (adaptado de ZHANG & OHSAKI (2015)).....	160
Figura 8-3: Estrutura livre bidimensional super-estável (ZHANG & OHSAKI, 2015).	163
Figura 8-4: Estrutura tensegrity instável: (a) Vista superior e (b) Vista isométrica (ZHANG & OHSAKI, 2015).....	163

Lista de Tabelas

Tabela 3-1: Coordenadas nodais.....	40
Tabela 3-2: Conectividade entre nós.	41
Tabela 3-3: Valores obtidos no ensaio de compressão simples para a espécie <i>Phyllostachys aurea</i>	46
Tabela 3-4: Valores obtidos no ensaio de flexão a quatro pontos para a espécie <i>Phyllostachys aurea</i>	49
Tabela 3-5: Valores obtidos no ensaio de tração simples para a as cordas de sisal.....	54
Tabela 4-1: Diferenças entre as equações no domínio do tempo e no domínio da frequência (ROCHA, 2015)	82
Tabela 5-1: Propriedades da ponte para pedestres metálica	91
Tabela 5-2: Cargas de projeto para ponte de pedestres metálica ...	91
Tabela 5-3: Tensões axiais nas estroncas do módulo para diferentes níveis de pretensão.....	95
Tabela 5-4: Deformações das estroncas em períodos específicos do ensaio estático.....	97
Tabela 5-5: Deformações e tensões experimentais 1h após o fim da montagem do módulo	99
Tabela 5-6: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 31 e 35 considerando diferentes níveis de pretensão	102
Tabela 5-7: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 32 e 34 considerando diferentes níveis de pretensão	102
Tabela 5-8: Tensões numéricas e erros relativos para estronca 33 considerando diferentes níveis de pretensão	103
Tabela 5-9: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 36 e 45 considerando diferentes níveis de pretensão	103
Tabela 5-10: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 38 e 43 considerando diferentes níveis de pretensão	104

Tabela 5-11: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 40 e 41 considerando diferentes níveis de pretensão	104
Tabela 5-12: $\sum Erro^2$ referente às tensões atuantes para diferentes porcentagens de pretensão	105
Tabela 5-13: Frequências naturais e modos de vibração em função do valor de pretensão (S0)	107
Tabela 5-14: Frequências naturais e modos de vibração para pretensões de 0,25% e 30%.....	108
Tabela 5-15: Continuação da Tabela 5-14	109
Tabela 5-16: Deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa referentes ao primeiro modo de vibração ($f=2,98$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão.....	111
Tabela 5-17: Deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa referentes ao segundo modo de vibração ($f=3,10$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão.....	112
Tabela 5-18: Continuação da Tabela 5-17	113
Tabela 5-19: Deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa referentes ao terceiro modo de vibração ($f=5,50$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão.....	113
Tabela 5-20: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir dos picos dos CMIFs ao longo do tempo.....	123
Tabela 5-21: Frequências numéricas e erros relativos para os 10 primeiros modos de vibração considerando 0,25% pretensão	125
Tabela 5-22: Frequências numéricas e erros relativos para os 10 primeiros modos de vibração considerando 5% pretensão	125
Tabela 5-23: Frequências numéricas e erros relativos para os 10 primeiros modos de vibração considerando 25% pretensão	126
Tabela 5-24: $\sum Erro^2$ referente às frequências naturais para diferentes porcentagens de pretensão	127

Símbolos

m	Quantidade de membros
n	Número de nós livres
n^f	Número de nós fixos
d	Dimensão do espaço (d -dimensional)
C^s	Matriz de conectividade
C	Matriz de conectividade dos nós livres
C^f	Matriz de conectividade dos nós fixos
i_n	Vetor unitário
x, y, z	Vetores de coordenadas dos nós livres nas direções x, y e z
x^f, y^f, z^f	Vetores de coordenadas nós fixos nas direções x, y e z
u, v, w	Vetores de diferenças de coordenadas
l	Vetor de comprimento do membro
U, V, W	Versões diagonais dos vetores de diferenças de coordenadas
L	Versão diagonal do vetor de comprimento dos membros
D	Matriz de equilíbrio
p	Matriz de carregamentos externos aplicados aos nós
s	Vetor de forças dos membros
q	Vetor de densidade de força
Q	Versão diagonal do vetor de densidade de força
E	Matriz de densidade de força para os nós livres
E^f	Matriz de densidade de força para os nós fixos
\bar{r}^E	Deficiência de posto da matriz de densidade de força
n^s	Número de modos de pretensão independentes
n^m	Número de mecanismos infinitesimais independentes
n^b	Número de movimentos de corpo rígido
r^D	Posto da matriz de equilíbrio
Π	Energia potencial total
$\Delta\Pi_1$	Derivação de primeira-ordem da energia potencial total
$\Delta\Pi_2$	Derivação de segunda-ordem da energia potencial total
K	Matriz de rigidez tangente
\bar{K}	Matriz de rigidez dos membros
I_3	Matriz de identidade
K_E	Matriz de rigidez linear
K_G	Matriz de rigidez geométrica
Q_K	Forma quadrática da matriz de rigidez tangente
d	Vetor de deslocamentos

λ_i^E	Autovalores referentes à matriz de rigidez linear
λ_i^G	Autovalores referentes à matriz de rigidez geométrica
t	Valor arbitrário correspondente ao fator de escala da pretensão
λ_i^K	Autovalores referentes à matriz de rigidez tangente
Q_E	Forma quadrática da matriz de rigidez linear
Q_m	Forma quadrática da matriz de rigidez geométrica
M	Matriz de mecanismos
G	Matriz geométrica
Q_G	Forma quadrática da matriz de rigidez geométrica
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
F	Carga máxima aplicada
δ	Deflexão máxima no meio do colmo
E	Módulo de elasticidade
A	Área da seção transversal
L	Comprimento longitudinal
ε	Deformação
R	Resistência elétrica
K	Característica constante do extensômetro (de fator do sensor, FS)
V_m	Tensão elétrica entre os pontos A e B
E_s	Tensão elétrica entre os pontos C e D
$f(t)$	Carga externa aplicada
$f_i(t)$	Força de inércia
m	Massa do corpo
\ddot{u}	Aceleração
$f_a(t)$	Força de amortecimento
c	Constante de amortecimento
\dot{u}	Velocidade
$f_e(t)$	Força elástica
k	Rigidez da mola
u	Deslocamento
ω_n	Frequência natural angular característica do oscilador simples
T_n	Período natural de vibração
f_n	Frequência cíclica natural
ϕ_j	Ângulo de fase
$\hat{\phi}_j$	Matriz de modos de vibração
$\hat{\phi}_1$	Primeiro modo natural de vibração
$\hat{\phi}_2$	Segundo modo de vibração
$U(s)$	Deslocamento após transformada de Laplace
$F(s)$	Força após transformada de Laplace
$H(s)$	Função de transferência

ζ	Fator de o amortecimento
$h(t)$	Resposta de impulso
$H(\omega)$	Resposta em frequência
$U(\omega)$	Deslocamento após transformada de Fourier
$F(\omega)$	Força após transformada de Fourier
$\alpha(\omega)$	Função de receptância para um sistema com um grau de liberdade
$\alpha_{ks}(\omega)$	Resposta modal do sistema
η_j	Fator de perda modal
A_{ks}^j	Constante modal
ω_j	Frequência natural relativa ao j -ésimo modo de vibração
$F(t)$	Sinal de entrada da força
$a(t)$	Sinal de saída da aceleração
$H_1(f)$	Estimador da função de resposta em frequência
$A(f)$	Sinal relacionado à aceleração no domínio da frequência
S_0	Nível de pretensão
φ_A	Vetor modal
$\{\varphi_A\}_r$	Vetor modal φ_A referente ao modo r
φ_X	Vetor modal
$\{\varphi_X\}_q$	Vetor modal φ_X referente ao modo q
U_x	Deslocamentos modais na direção do eixo x
U_y	Deslocamentos modais na direção do eixo y
U_z	Deslocamentos modais na direção do eixo z

Foi um momento

*Assim a brisa
Nos ramos diz
Sem o saber
Uma imprecisa
Coisa feliz.*

Fernando Pessoa

1. Introdução

1.1. Motivação

Nas últimas décadas, estruturas tensegrity têm chamado a atenção de pesquisadores de diversos ramos. Da biologia à mecânica, da arquitetura à engenharia espacial, estes sistemas estão sendo estudados e aplicados em múltiplas áreas de conhecimento como uma nova forma de se pensar estruturas complexas (BANSOD *et al.*, 2014). Uma estrutura tensegrity, assim chamada a partir da união dos termos “tensional” e “integrity”, retrata um princípio estrutural para a criação de sistemas complexos, cujos elementos individuais atuam sob tração ou compressão de forma a proporcionar estabilidade e resistência para a estrutura como um todo. Além de sua estética arrojada e comportamento mecânico original, estruturas tensegrity possuem outro ponto de interesse no que diz respeito à engenharia: este sistema apresenta potencialidade de ser construído utilizando métodos dobráveis.

Segundo CHAI & TAN (2019), os setores de construção definem estrutura dobrável como aquela que tem a capacidade de transformar seus elementos estruturais em configurações predeterminadas, de forma segura e direcionada, de modo a exercer sua função arquitetônica. Essa técnica de construção oferece facilidade de transporte e montagem, mais espaço livre no canteiro de obra e maior rapidez na instalação e entrega. Posto que estruturas dobráveis podem ser montadas e desmontadas rapidamente, podem ser modularizadas e reutilizadas, são facilmente transportadas e demonstram alta eficiência na aplicação de materiais, estes sistemas podem ser classificados como sustentáveis (FRIEDMAN *et al.*, 2011). Este caráter de sustentabilidade é acentuado ao sobrepor o uso de materiais naturais locais nesse tipo de estrutura.

A utilização de novos materiais muitas vezes é um recurso valioso na solução de problemas de engenharia civil. A descoberta de metais ferrosos, por exemplo, permitiu tanto o desenvolvimento de estruturas inteiramente em aço e

quanto formulação de materiais singulares como o concreto armado e, posteriormente, o concreto protendido. Atualmente, observa-se o resgate do uso de materiais naturais na construção civil como uma forte tendência dentro dos campos de materiais não convencionais e de sustentabilidade. A indústria de construção, embora demonstre ações para minimizar ou compensar seus impactos negativos, continua sendo um segmento altamente consumidor de recursos e que produz uma pegada de carbono significativa (SPIGNARDI, 2016). Em contrapartida, os materiais bióticos desempenham um importante papel no desenvolvimento sustentável, apresentando alta eficiência energética (VICTOR *et al.*, 2018) e, em especial aqueles de base vegetal, atuando como excelentes sequestradores de carbono da atmosfera (KRAUSE, 2009). Desta forma, a aplicação de materiais naturais surge como uma opção segura, barata e ecologicamente correta para as construtoras.

Aliado ao uso materiais não convencionais, sobre tudo àqueles renováveis e de baixo custo energético, há, dentro das áreas de design, arquitetura e engenharia, um ressurgimento da construção vernacular, não mais como uma forma primitiva de execução, sem pensamento inteligente, mas como política de inclusão, capacitação e emancipação das pessoas, enaltecimento de saberes tradicionais e valorização do patrimônio cultural local (SANT'ANNA, 2013; LIMA, 2010).

Existe uma grande literatura sobre a geometria e o apelo arquitetônico dos sistemas estruturais de tensegrity, mas existe um estudo menor sobre a construção e a mecânica dessas estruturas, principalmente quando construídas com materiais naturais e técnicas frugais. Razões como o conceito de tensegrity, sua distribuição de tensões, sua propriedade dobrável e como estas características são influenciadas pelo uso de materiais bióticos e métodos construtivos alternativos podem ser listadas como aspectos de originalidade desta dissertação e evidenciam a necessidade em dar uma nova atenção para esta estrutura.

1.2. Objetivos

O presente trabalho possui como principal objetivo desenvolver e analisar o projeto de um módulo de uma ponte para pedestres em escala reduzida. Buscou-se elaborar uma estrutura leve e dobrável, que apresente facilidade em ser transportada e que seja rapidamente montável. Qualidades como alta inteligibilidade do processo

construtivo, uso pertinente de materiais naturais locais e fácil reprodução da solução também foram vinculadas ao projeto.

A viabilidade estrutural da ponte foi estudada utilizando o software Galileo (SANTANA, 2019). O programa, desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio para analisar especificamente estruturas dobráveis e tensegrities, é capaz de realizar análises estáticas e dinâmicas não lineares para esses tipos de sistema.

Para construção da estrutura, optou-se pela utilização de dois materiais principais: colmos de bambu da família *Phyllostachys aurea* nas peças comprimidas – chamadas de estroncas – e corda de sisal nos elementos tracionados – designados aqui como cabos. As propriedades mecânicas destes materiais foram obtidas através de ensaios experimentais e aplicaram-se técnicas construtivas singulares para bambu para a fabricação do módulo em escala reduzida, em especial para as juntas, para as quais utilizou-se um tipo de ligação criado no Laboratório de Investigação em Living Design (LILD). Posteriormente, a estrutura foi submetida a ensaios estático e dinâmico para avaliação das tensões atuantes nas estroncas, frequências naturais e modos de vibração do módulo, bem como a perda da pretensão dos cabos.

O uso de materiais naturais e técnicas vernaculares de construção na engenharia ainda é incipiente, porém demonstra significativo potencial para estruturas específicas. Desta forma, esse trabalho se propôs a reunir aprendizagens de diversas áreas de conhecimento, sintetizá-las de forma estruturada e aplicá-las de modo a se viabilizar o projeto e a construção de parte de uma ponte para pedestres, respeitando os preceitos de inovação¹, sustentabilidade e inclusão.

1.3. Organização da Dissertação

Esta dissertação foi organizada em seis capítulos, sendo o primeiro esta introdução.

- O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre estruturas tensegrity. Descreve-se o conceito de tensegrity, as principais aplicações práticas deste sistema e os fundamentos teóricos básicos para o funcionamento da estrutura.

¹ Aplicação da criatividade à fins práticos.

- O capítulo 3 aponta as principais características do projeto da ponte. Geometria inicial da estrutura, escolha e caracterização dos materiais adequados para construção do módulo, confecção do protótipo em escala reduzida e método construtivo desenvolvido são descritos em detalhe.

- O capítulo 4 trata dos ensaios estruturais realizados. São apresentados os referenciais teóricos para embasamento dos ensaios estático e dinâmico e é feita tanto a descrição das condições de contorno quanto o detalhamento das atividades executadas.

- O capítulo 5 realiza a comparação dos resultados obtidos entre o protótipo e o modelo computacional no que diz respeito às tensões atuantes nas estroncas, frequências naturais e modo modos de vibração do módulo e a determinação da pretensão ao longo do tempo.

- O Capítulo 6 expõe a conclusão dos temas discutidos nos capítulos anteriores, considerações finais e sugestões para próximos estudos.

2. Revisão da Literatura

Tensegrity
a structure for intimacy
a romantic equilibrium
energy expressing unity
spaces defining togetherness

a shelter for connection
a purity for tender hearts
floating amid life's tensions
compressing the trance of time

a twofold architecture
a stability of shared dreams
separately exploring life
integrally discovering truth
- Liam

Estruturas tensegrity costumam causar espanto e admiração entre seus espectadores e intrigam desde artistas até matemáticos e engenheiros. Seja porque estas estruturas parecem desafiar a gravidade enquanto assumem configurações intrincadas e evocativas que parecem se estender, impossivelmente, pelo espaço (HEARTNEY & SNELSON, 2009), ou seja por conta de seu comportamento original, altamente complexo geométrica e mecanicamente (MOTRO, 1992), estas estruturas merecem receber um segundo olhar.

Este capítulo destina-se, então, a apresentar o conceito desta estrutura – descrevendo seu princípio básico de funcionamento, principais vantagens, utilidades e aplicações práticas –, as equações matemáticas que governam seu comportamento – pautadas em princípios de equilíbrio e estabilidade – e as pesquisas realizadas sobre esse tema – linhas de estudos principais e tendências.

2.1. Conceito

Um tensegrity é um sistema em estado auto-equilibrado estável que compreende um conjunto descontínuo de elementos comprimidos inserido em um *continuum* de elementos tracionados (MOTRO, 2003), como mostra Figura 2-1.



Figura 2-1: Estrutura tensegrity elementar batizada de "prisma simplex" (BURKHARDT JR, 2008)

As primeiras peças tensegrity foram projetadas pelo artista Kenneth Snelson na década de 1940 (SNELSON, 2012; SNELSON, 1965), mas a terminologia “tensegrity” só foi introduzida formalmente por Richard Buckminster Fuller nos anos 60 como uma contração dos termos “*tensile*” e “*integrity*” (FULLER, 1975). Nas últimas décadas, esse tipo de estrutura tem recebido notável interesse entre pesquisadores de disciplinas distintas, como arquitetura, biologia, robótica, engenharia civil e aeroespacial (DE OLIVEIRA & SKELTON, 2009; SKELTON, 2002). De acordo com PUGH (1976), um tensegrity é constituído quando um agrupamento de componentes comprimidos descontínuos interage com um conjunto de elementos tracionados para definir um volume no espaço. Assim, entende-se que o princípio básico de funcionamento de uma estrutura tensegrity recai sobre dois componentes principais: membros individuais atuando sob compressão, batizados de estroncas, e membros interconectados sob tração, aqui denominados simplesmente por cabos.

O equilíbrio entre as forças contínuas de tração e descontínuas de compressão pode ser utilizado para representar diversos modelos físicos, desde átomos de carbono e moléculas de água, passando pelo próprio corpo humano, a

domos geodésicos e outras estruturas de engenharia (VICTOR *et al.*, 2018). De forma genérica, os esforços de tração e compressão podem ser entendidos como forças de atração e repulsão, respectivamente, e os pontos de interseção podem ser considerados juntas sem massa, ou seja, nós. A Figura 2-2 ilustra como as forças em uma estrutura tensegrity interagem. A rede contínua de forças de atração (Figura 2-2a) e os elementos descontínuos de repulsão (Figura 2-2b) se combinam (Figura 2-2c) para criar uma configuração auto-equilibrada (Figura 2-2d). Nota-se que a geometria apresentada na imagem se deve apenas ao balanceamento das forças internas, sem que sejam considerados apoios e/ou carregamentos externos. As grandezas escalares para os esforços de tração e compressão que auto equilibram a estrutura não são únicas, entretanto a configuração pretensionada auto-equilibrada é determinada respeitando-se o mapa afim e a homografia do sistema (ESTRADA, 2007).

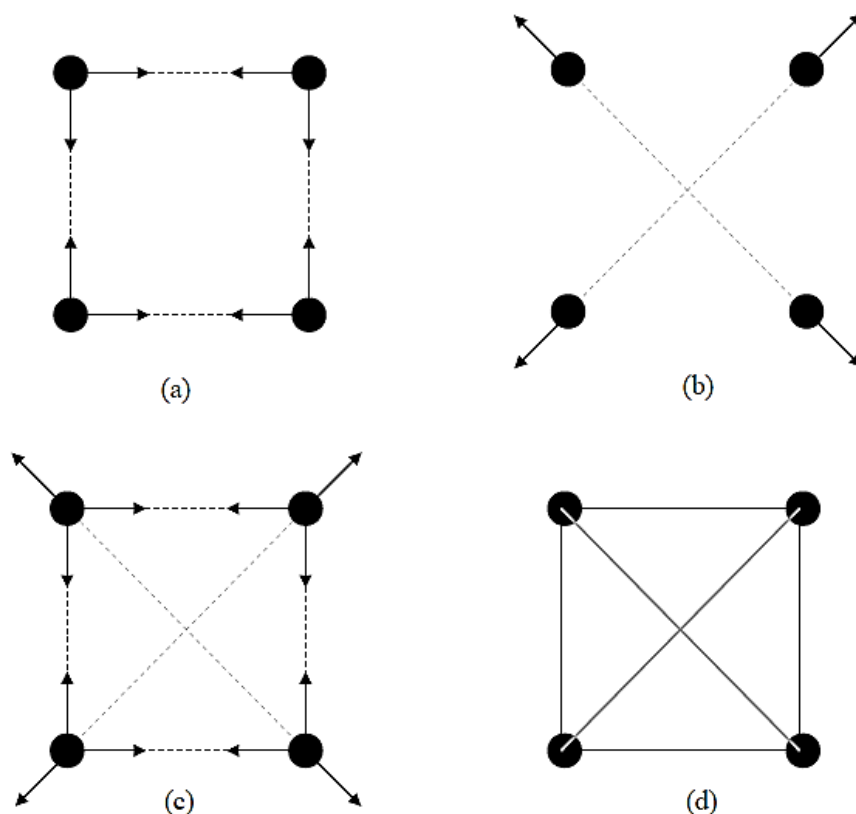


Figura 2-2: Decomposição do tensegrity: (a) tração ou atração contínua, (b) compressão ou repulsão descontínua, (c) sobreposição das forças e (d) configuração pretensionada e auto equilibrada (ESTRADA, 2007)

Além de ser uma estrutura que opera apenas com dois tipos de elementos – cabos sob tração e estroncas sob compressão – MOTRO (2003) introduziu mais uma característica fundamental ao complementar que o tensegrity é um sistema em

que sua rigidez é resultado do estado de auto-equilíbrio pretensionado e que esta é independente de qualquer campo de força (ver detalhamentos da fundamentação teórica de tensegrities no Apêndice A). Assim, tensegrities são classificados como estruturas espaciais, articuladas, leves e modulares, em que a estabilidade e a rigidez são obtidas por um estado de equilíbrio auto-tensionado, ou seja, cabos e estroncas são carregados por forças iniciais que fornecem uma configuração estável para o sistema (DE OLIVEIRA & SKELTON, 2009).

A popularidade de estruturas tensegrity tem crescido nos últimos 50 anos. Segundo SKELTON (2002) várias razões podem ser apontadas para explicar o destaque que este sistema tem recebido:

- Tensegrities possuem enrijecimento por tensão (*stress stiffening*): conforme os cabos são tensionados, a estrutura tende a ganhar rigidez. Assim, um tensegrity apresenta alta razão rigidez/massa ao aproveitar-se do uso de elementos tracionados.

- Tensegrities são eficientes: tradicionalmente as estruturas são concebidas e construídas de forma retilínea, como é o caso das vigas, lajes e pilares que tendem a ser conectadas ortogonalmente (MICHELL, 1904 *apud* SKELTON, 2002). Contudo, o material é necessário apenas nos caminhos de força essenciais, não nos caminhos ortogonais das estruturas convencionais. Estruturas tensegrity usam membros longitudinais dispostos em padrões muito incomuns (e não-ortogonais) para obter o máximo de força com o mínimo de massa.

- Tensegrities são dobráveis: materiais de alta resistência tendem a ter uma capacidade de deslocamento muito limitada. Como os membros comprimidos desse tipo de estrutura são disjuntos ou conectados um nó articulado, grandes deslocamentos, capacidade de desdobramento e armazenamento em um volume compacto são virtudes imediatas dos tensegrities (OPPENHEIM & WILLIAMS, 1997; FURUYA, 1992 *apud* SKELTON, 2002).

- Tensegrities são ajustáveis: a técnica de desdobramento também permite fazer pequenos retoques para o ajuste fino da pretensão nas estruturas carregadas ou executar simples correções em uma estrutura danificada.

- Tensegrities podem ser modelados com maior simplicidade: além de todos os membros da estrutura serem carregados axialmente, nenhum apresenta momento fletor na teoria (embora excentricidades nas ligações possam gerar flexão nas estroncas e, globalmente, o tensegrity seja passível de sofrer momento). Assim, a

modelagem feita apenas com elementos de treliça tende a ser mais simples quando comparada à com outros elementos (LU & SKELTON, 1998 *apud* SKELTON, 2002).

- Tensegrities promovem a interdisciplinaridade: os membros de uma estrutura tensegrity podem servir diferentes propósitos. Podem, até mesmo concomitantemente, ser um elemento de transporte de força da estrutura, um sensor (de medição de tensão ou deformação), um atuador (como fio de níquel-titânio), um isolador térmico ou um condutor elétrico. Em outras palavras, um único projeto de tensegrity pode integrar habilidades das mais diversas áreas.

- Tensegrities são inspirados na natureza: pode-se observar que a seda da teia de aranha é composta por dois tipos de aminoácidos, um que forma as folhas β plissadas (elementos descontínuos que sofrem compressão) e outro que forma finíssimos fios (que formam uma rede sob tração) (TERMONIA, 1994; SIMMONS *et al.*, 2010 *apud* SKELTON, 2002). Portanto, a microestrutura da seda da teia de aranha é um tensegrity. Inclusive, segundo INGBER (1997a; 1997b; 1993) o tensegrity é a arquitetura fundamental da construção da vida.

Além de apresentar alta eficiência geométrica e estrutural, devido à sua considerável capacidade de carga e aplicação otimizada de material, como mencionado acima, tensegrities ainda possuem uma aparência minimalista e elegante, características que chamam a atenção tanto de designers e arquitetos quanto de engenheiros estruturais (SNELSON, 2012; MOTRO, 2012) e as aplicações atuais podem ser vistas em cúpulas, torres, telhados, estruturas temporárias e pavilhões de exposições (VICTOR *et al.*, 2018).

Exemplo de uma estrutura tensegrity conhecida mundialmente é a Needle Tower. Projetada por Kenneth Snelson em 1968, a estrutura, localizada nos Estados Unidos, é feita de alumínio e aço inoxidável e possui mais de 18m de altura. De acordo com o conceito de tensegrity, os tubos de alumínio atuam em compressão, mantidos sob tensão pelos cabos de aço passados nas extremidades, conforme ilustrado na Figura 2-3. A escultura Easy K (Figura 2-4) também é uma peça artística marcante de Snelson. A estrutura possui 6.5 x 6.5 x 32 m e foi instalada na Holanda em 1970.

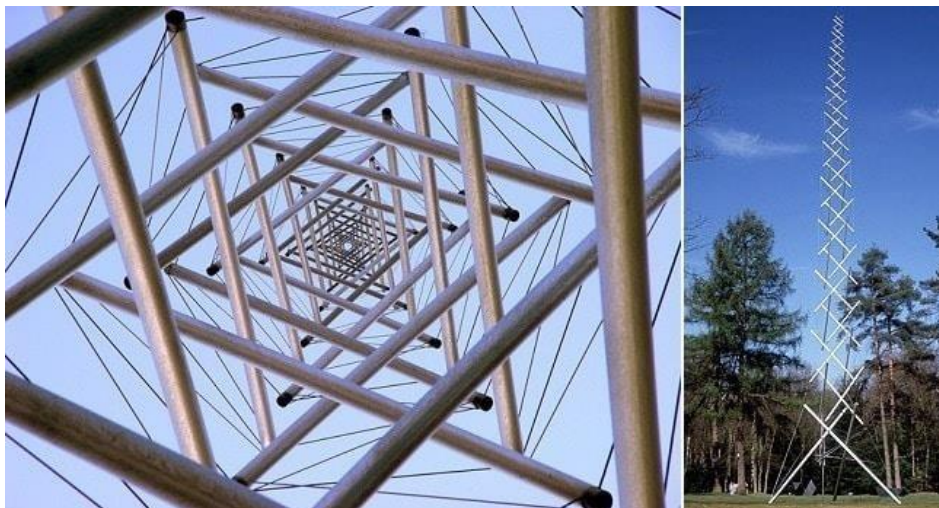


Figura 2-3: Peça "Needle Tower" por Kenneth Snelson (HEARTNEY, 2013)



Figura 2-4: Peça "Easy K" por Kenneth Snelson (HEARTNEY, 2013)

Outro exemplo importante de estrutura tensegrity sendo empregada em estruturas de cobertura é o estádio da cidade La Plata, na Argentina, baseado em um conceito premiado desenvolvido pelo arquiteto Roberto Ferreira (LEVY *et al.*, 2013). A estrutura, inaugurada em 2011, representa a primeira adaptação de uma estrutura tensegrity para produzir um telhado com pico duplo, e é o primeiro estádio coberto de politetrafluoroetileno (PTFE) na América do Sul. A cobertura mostra a beleza, a eficiência e a versatilidade das estruturas tensegrity com membranas e demonstra a inovação que pode ser alcançada por meio de uma colaboração internacional de profissionais de design. A estrutura atinge vãos longos com uma

quantidade mínima de material e a ventilação natural e o teto translúcido minimizam o consumo de energia. A cobertura é ilustrada na Figura 2-5.



Figura 2-5: Estádio Ciudad de La Plata (LEVY et al., 2013)

No campo das pontes, algumas propostas de estrutura tensegrity foram feitas, como a Passerella TorVergata em Roma, The Splash Bridge de Joel Cullum e a National Building Museum Footbridge de Wilkinson Eyre e Arup em Washington DC (PLEȘCAN *et al.*, 2018), mas poucas foram realmente construídas. O projeto tensegrities em sistemas de camada dupla resultou em uma solução interessante para viabilizar a construção de pontes. Uma conquista recente a este respeito é a ponte Kurilpa (Figura 2-6) em Brisbane, Austrália (GÓMEZ-JÁUREGUI *et al.*, 2012). Inaugurada em outubro de 2009, é a maior ponte tensegrity do mundo, na qual a sinergia entre tração e compressão cria uma estrutura leve e resistente.

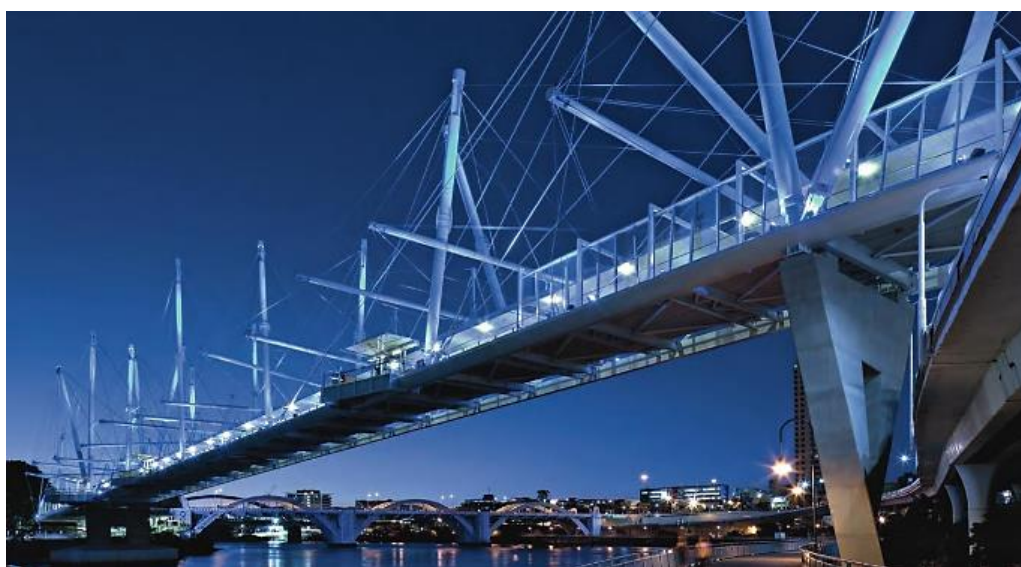


Figura 2-6: Kurilpa Bridge, Australia (BECK & COOPER, 2012)

2.2. Trabalhos Relacionados

O projeto de uma estrutura tensegrity possui três principais etapas. A primeira etapa, chamada de determinação da forma, consiste em encontrar uma configuração auto-equilibrada pretensionada, conforme mostrado na seção 8.1.1. A segunda fase se refere à estabilidade estrutural que inclui a identificação de mecanismos internos e modos de pretensão. A última etapa consiste na análise da estrutura sob carregamentos externos, em que questões como ressurgimento de mecanismos e se tensões adicionais promovem maior estabilidade ou instabilidade são estudadas. Deve-se ressaltar que estas etapas não são consecutivas, mas sim interdependentes, de modo que resultados ao longo do processo retroalimentam as fases anteriores (SCHENK, 2005). As seções a seguir apresentam um apanhado de pesquisas desenvolvidas em cada uma das três categorias mencionadas acima. Além disso, apresentam-se alguns estudos recentes que indicam uma tendência na avaliação de estruturas tensegrity.

2.2.1. Determinação da Forma

Segundo MALIK *et al.* (2019), nas últimas duas décadas, a busca por métodos de determinação da forma despontou como uma das linhas de pesquisa mais proeminentes na área de estruturas tensegrity. A fase de determinação da forma consiste no processo de encontrar um estado estável para o tensegrity de modo que a estrutura seja capaz permanecer em pé sem auxílio de apoios. Um dos primeiros recursos desenvolvidos para encontrar esta configuração estável foi o método da densidade de força (VASSART & MOTRO, 1999), em que diversas geometrias são obtidas para determinado nível de pretensão, conforme mostrado no capítulo 8.1.1.3. Desde então, um grande número de procedimentos foi desenvolvido para a determinação da forma de tensegrities e duas macro categorias podem ser elencadas: métodos cinemáticos e métodos estáticos.

De acordo com TIBERT & PELLEGRINO (2011), dentro da categoria dos métodos cinemáticos encontram-se as técnicas de soluções analíticas, relaxação dinâmica e programação não linear. CONNELLY & TERRELL (1995) utilizaram soluções analíticas para determinar a forma de diversos tensegrities assumindo que a estrutura é globalmente rígida, de forma que nenhuma outra configuração pode satisfazer as restrições impostas para os cabos e estroncas. Contudo, soluções

analíticas são adequadas somente para tensegrities regulares e simétricos (TIBERT & PELLEGRINO, 2011). Os métodos de relaxação dinâmica podem ser usados para determinar o estado de repouso de um sistema sujeito a um impulso, considerando que esse estado é o limite de sua evolução dinâmica dissipativa. Para sistemas tensegrity, o comprimento dos componentes de tração é considerado constante e cada etapa do método incremental corresponde a um aumento no comprimento dos elementos comprimidos que resulta no deslocamento de suas extremidades. Esse deslocamento inicia o movimento (MOTRO, 1990). Em outras palavras, o comprimento dos cabos é considerado constante e o tamanho das estroncas é gradualmente alongado até que se crie um estado de pretensão na estrutura.

OHSAKI & ZHANG (2015) utilizam uma abordagem de otimização para encontrar a forma de tensegrities. É mostrado que várias formas de equilíbrio podem ser facilmente encontradas, resolvendo um problema de análise de deformação forçada formulado como um problema de minimização, considerando as coordenadas nodais como variáveis de projeto. A função objetivo é definida em termos dos comprimentos dos membros e pode ser considerada como a energia de deformação total correspondente às propriedades fictícias do material elástico. As forças de auto-equilíbrio podem ser encontradas nas condições de otimização do problema de programação não-linear.

Em contrapartida aos métodos cinemáticos, os métodos estáticos se caracterizam como técnicas em que se estabelece uma relação entre as configurações de equilíbrio de uma estrutura para dada geometria e as forças atuantes nos membros. Como mencionado, um dos métodos estáticos mais conhecidos é o método de densidade de força. Esta técnica é mais fácil de se trabalhar pois torna lineares as equações de equilíbrio iniciais através de coeficientes de tensão. Embora seja adequado para determinação de diferentes formas para o tensegrity, este método apresenta dificuldade em controlar a configuração final da estrutura (ROTH & WHITELEY, 1981). Métodos de energia utilizam o conceito que uma estrutura estável com o mínimo local de energia potencial total está no estado de (auto-) equilíbrio (CONNELLY, 1982). Portanto, o auto-equilíbrio da estrutura pode ser garantido por uma configuração estável. Entre os métodos de energia, muitos fazem uso de técnicas de otimização para procurar o mínimo local

da energia da estrutura (OHSAKI *et al.* 2014). Segundo TIBERT & PELLEGRINO (2011), métodos de densidade de força e energia potencial são equivalentes.

A maioria dos métodos existentes para determinação da forma de tensegrities é baseada em métodos numéricos, dado que estes são mais flexíveis do que as técnicas analíticas (ZHANG & OHSAKI, 2015). ESTRADA *et al.* (2006) apresentam um procedimento em que apenas o tipo de membro (estronca ou cabo) e a conectividade dos nós precisa ser conhecida. A geometria de equilíbrio e as densidades de força são, então, calculadas iterativamente. Similarmente, TRAN & LEE (2010) desenvolveram um método em que a topologia e os tipos de membros são as únicas informações requeridas no processo de busca. A decomposição dos autovalores da matriz de densidade de força e a decomposição SVD da matriz de equilíbrio são realizadas iterativamente para encontrar os conjuntos viáveis de coordenadas nodais e densidades de força que satisfazem as deficiências mínimas exigidas das matrizes de densidade de força e matrizes de equilíbrio, respectivamente. Recentemente, algoritmos genéticos têm ganhado espaço na pesquisa de métodos numéricos. De modo geral, o processo de determinação da forma da estrutura é transformado em um problema de otimização com restrição e um algoritmo genético é usado como técnica de busca. O método mostra-se apropriado para encontrar configurações para tensegrities irregulares e é capaz de dar origem a novas configurações desconhecidas (XU & LUO, 2010; KOOHESTANI, 2012).

2.2.2. Estabilidade Estrutural

Em se tratando de estabilidade, diferentes critérios podem ser propostos, como mostrado anteriormente no capítulo 8.1.2. Estas categorias partem de uma conjectura comprovada matematicamente (ROTH & WHITELEY, 1981; CONNELLY & WHITELEY, 1996). Muitas vezes há uma interseção entre os conceitos de estabilidade apresentados pela ótica da engenharia e pela da matemática, porém com enfoques diferentes. ZHANG & OHSAKI (2007) apresentam uma condição necessária de estabilidade considerando os movimentos afins que se encontram no espaço nulo da matriz de rigidez geométrica. Os autores demonstram que a condição é equivalente à derivada da teoria da rigidez matemática (CONNELLY, 1982).

Para estruturas tensegrity, a determinação da estabilidade está intimamente relacionada à pretensão. GUEST (2011), por exemplo, estudou como a rigidez – proveniente da alteração do comprimento dos membros ou devido à reorientação das forças quando membros já pretensionados rotacionam – de estruturas tensegrity se comporta conforme o nível de pretensão de um membro varia. O artigo mostra que, para altos níveis de pretensão, um tensegrity originalmente estável pode passar a ter rigidez zero ou, inclusive, se tornar instável. Os resultados corroboram aqueles exibidos no capítulo 8.1.2.3. A estabilidade não depende somente da conectividade dos membros, além do nível de pretensão, parâmetros como proporção entre altura dos membros e raio (círculo que circunscreve o tensegrity) e rigidez individual influenciam no comportamento da estrutura (ZHANG *et al.* 2009).

À medida que a pesquisa sobre tensegrities está se afastando das estruturas estáticas para as ativas, novas estratégias de ativação e teorias para descrever o comportamento dessas estruturas estão sendo desenvolvidas. MOORED & BART-SMITH (2009) introduzem o conceito de ativação por *cluster* e apresentam novas formulações para as equações de equilíbrio. Os autores observam que a estabilidade da estrutura tensegrity original não é mantida necessariamente após a ativação e, portanto, condições de estabilidade para estruturas tensegrity ativas por *clusters* foram apontadas.

2.2.3. Comportamento sob Carregamento Externo

De acordo com MOTRO (2003), o comportamento mecânico de estruturas tensegrity é não-linear devido à sua flexibilidade, o que implica em uma alteração na rigidez da estrutura devido aos deslocamentos dos nós. KEBICHE *et al.* (1999) aplicaram um método de cálculo desenvolvido previamente para estruturas com grandes deformações e deslocamentos para investigar o comportamento de estruturas tensegrity sob carregamentos estáticos de tração, compressão, flexão e torção. Os autores observaram que, exceto para a compressão, a estrutura enrijece conforme o carregamento aumenta. Ainda em carregamentos estáticos, KAHLA & KEBICHE (2000) introduziram um procedimento para análise elastoplástica não linear utilizando formulação Lagrangeana atualizada e método de Newton-Raphson modificado. TRAN & LEE (2011) também utilizaram formulações Lagrangeanas

para apresentar um método numérico para analisar grandes deflexões incluindo não linearidade geométrica e do material. Os resultados mostram que as forças nos membros e os deslocamentos são altamente influenciados pelo tamanho do vão e níveis de pretensão.

Métodos Lagrangeanos também costumam ser utilizados para a análise dinâmica de tensegrities. MURAKAMI (2001) investigou o comportamento elástico de um tensegrity cilíndrico. Concluiu-se que os comportamentos estático e dinâmico da estrutura são caracterizados pelos modos de mecanismos infinitesimais e de pretensão. Mais recentemente, ZHAO & HERNANDEZ (2019) incorporaram ligas com memória de forma como elementos tracionados na estrutura tensegrity para dissipação de energia. As estroncas são projetadas com propriedades tais que as ligas atinjam máxima tensão durante o ciclo de carregamento e descarregamento. Os autores observam que esta tensão máxima pode ser ajustada de modo que as ligas com memória de forma passem pela transformação completa da fase pseudoelástica, porém sem atingir sua tensão de ruptura.

2.2.4. Tendências

Nos últimos anos, muitos trabalhos na área de vibração têm sido desenvolvidos para avaliar as propriedades dinâmicas de estruturas tensegrity. ASHWEAR & ERIKSSON (2014) estudaram o efeito do nível de pretensão sobre as frequências naturais da estrutura tensegrity utilizando elementos de viga de Euler – Bernoulli, que incluem o efeito da força axial na rigidez transversal. Os modos de vibração mostram que quando a força nos elementos comprimidos se aproxima da carga crítica de flambagem, o tensegrity possui frequências de vibração menores. As frequências de vibração também podem ser utilizadas como diretrizes de projeto de tensegrities. FAROUGHI & TUR (2015) desenvolveram um algoritmo que encontra os valores ótimos dos parâmetros de projeto, como a força de pretensão, a área de seção transversal dos elementos, etc., que satisfazem as propriedades vibracionais desejadas para a estrutura. Os valores finais são aceitos quando as condições de projeto – como restrição à flambagem e à tensão de ruptura dos elementos – são totalmente satisfeitas.

No trabalho de SYCHTERZ & SMITH (2018), a detecção e a localização de um cabo rompido em uma passarela tensegrity são estudadas através do

monitoramento de alterações no comportamento dinâmico da estrutura. A posição dos nós e os valores de carga axial dos elementos são medidos antes, durante e após o rompimento de um cabo. O ensaio de vibrações ambientais durante a fase de implantação da estrutura e de vibrações forçadas na fase em operação levou à detecção do cabo rompido. Métodos de correlação usando medições de tensão também foram bem-sucedidos em localizar o cabo rompido. Durante a vida útil de um tensegrity, a folga nos cabos e a proximidade da carga crítica de flambagem nas barras precisam ser monitoradas para evitar um colapso repentino. ASHWEAR & ERIKSSON (2017) discutem como projetar tensegrities para torná-las viáveis para os métodos de monitoramento da vibração. De acordo com os autores, o padrão e o nível pretensão são parâmetros importantes que afetam a rigidez e a dinâmica das estruturas tensegrity. Ao longo do tempo, contudo, a configuração da pretensão pode ser alterada por muitos fatores diferentes, como fatores ambientais ou carregamentos externos. Os resultados mostram que diferentes perdas de pretensão afetam de forma diferente o primeiro modo de vibração da estrutura.

KURKA *et al.* (2018) compararam o desempenho mecânico de tensegrities convencionais – compostos apenas por cabos e estroncas – e tensegrities com membrana. Análises estáticas são feitas para incorporar a pretensão no modelo elementos finitos. A análise modal aponta que, para níveis de pretensão mais baixos, o comportamento de alguns modos de vibração da estrutura tensegrity com membrana é diferente daquele apresentado pelos tensegrities convencionais. Observa-se que, nestes casos, a frequência natural do tensegrity com membrana é menor. MARTINS & GONÇALVES (2019) também trabalharam com estruturas tensegrity não convencionais. Para tornar o tensegrity adaptável à excitação externa, um dos cabos de aço foi substituído por um cabo de liga com memória de forma, permitindo que as características dinâmicas do sistema fossem alteradas de acordo com uma corrente elétrica aplicada. Várias configurações para a colocação do cabo com memória de forma foram estudadas com o objetivo de reduzir as amplitudes de vibração para a excitação de força harmônica. A metodologia se comprovou adequada para controle do comportamento dinâmico da estrutura.

3. Concepção da Estrutura

Conforme visto no Capítulo 2, tensegrities são objetos de estudo pertinentes, cativantes e atuais. Desta forma, neste trabalho procurou-se investigar melhor o comportamento dessa classe de estrutura, sobretudo ao acoplar o uso de materiais naturais e sistemas de construção basilares em sua montagem. O Capítulo 3 introduz a configuração inicial da estrutura tensegrity estudada e apresenta os materiais adotados e suas respectivas caracterizações. Também são demonstrados os processos de aprendizagem e desenvolvimento feitos para estabelecer o método construtivo através da técnica de modelo em escala reduzida.

3.1. Configuração Inicial

A configuração da passarela adotada no presente trabalho se baseia na proposta da ponte para pedestres de RHODE-BARBARIGOS *et al.* (2010). Trata-se de uma estrutura tensegrity, composta por quatro módulos individuais idênticos, com capacidade de vencer um vão de 20 metros, conforme mostra a Figura 3-1.

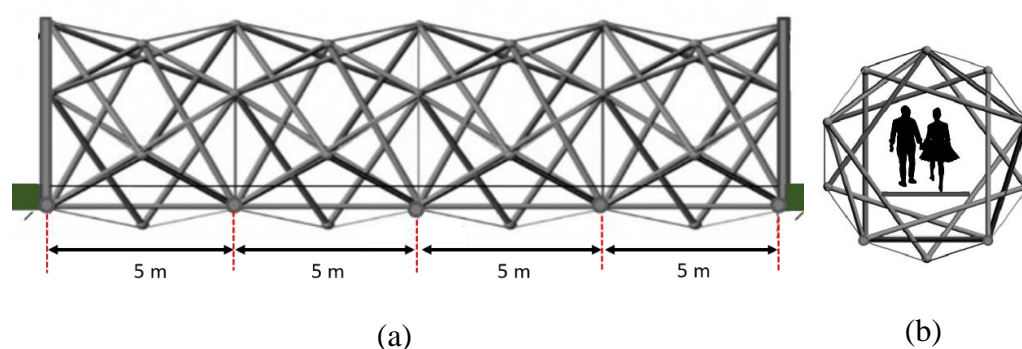


Figura 3-1: Ponte tensegrity: (a) vista lateral (adaptado de RHODE-BARBARIGOS *et al.* (2010)) e (b) vista transversal (adaptado de KORKMAZ *et al.* (2012))

Cada módulo é composto por três superfícies pentagonais sobrepostas, conectadas através de 15 estroncas e 30 cabos. As estroncas podem ser separadas em dois grupos: (i) estroncas principais e (ii) tesouras. O primeiro grupo compreende os elementos comprimidos que conectam os pentágonos exteriores, enquanto que o segundo retrata os pares de estroncas que ligam o pentágono

intermediário aos externos. Similarmente, os cabos também são separados em duas categorias de acordo com o papel desempenhado no módulo. Os cabos faceadores formam a superfície dos pentágonos exteriores, já os cabos-X conectam as tesouras aos pentágonos externos. A visualização do módulo em perspectiva pode ser observada na Figura 3-2. Cada módulo possui 500 cm longitudinalmente. Estroncas principais e tesouras têm 678 cm de comprimento, cabos faceadores apresentam 458 cm em extensão e cabos-X possuem 347 cm. Estas dimensões garantem que haja espaço livre suficiente para dois pedestres caminharem em paralelo sobre a ponte, como mostra a Figura 3-1b.

Interessantemente, nesta estrutura todos as estroncas se tocam, formando um circuito fechado. Da mesma forma, todos cabos são interligados, de modo que a rede de elementos tracionados poderia, inclusive, ser construída a partir de um único cabo. Entretanto, definiu-se para o escopo deste trabalho que tanto as estroncas quanto os cabos serão tratados como membros individuais na construção do módulo. A lista completa das coordenadas nodais é apresentada na Tabela 3-1. Em seguida, a Tabela 3-2 mostra a relação entre nós.

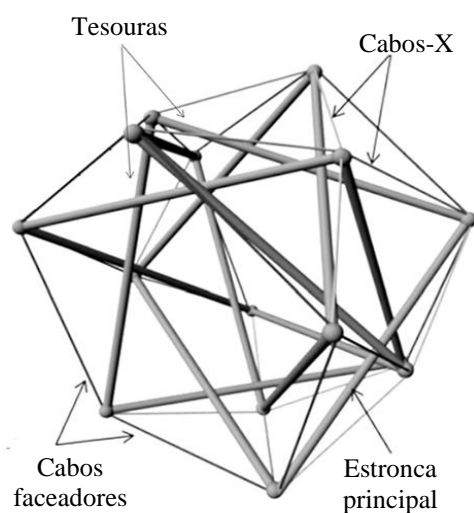


Figura 3-2: Vista isométrica do módulo (adaptado de KORKMAZ *et al.* (2012))

Tabela 3-1: Coordenadas nodais.

Nós	x (cm)	y (cm)	z (cm)
1	0.00	0.00	389.40
2	0.00	370.30	120.30
3	0.00	228.90	-315.00
4	0.00	-228.90	-315.00
5	0.00	-370.30	120.30
6	250.00	0.00	-389.40
7	250.00	-370.30	-120.30
8	250.00	-228.90	315.00
9	250.00	228.90	315.00
10	250.00	370.30	-120.30
11	500.00	0.00	389.40
12	500.00	370.30	120.30
13	500.00	228.90	-315.00
14	500.00	-228.90	-315.00
15	500.00	-370.30	120.30

Tabela 3-2: Conectividade entre nós.

Elemento	Nó Inicial	Nó Final	Categoria
1	1	2	Cabo faceador
2	2	3	Cabo faceador
3	3	4	Cabo faceador
4	4	5	Cabo faceador
5	5	1	Cabo faceador
6	11	12	Cabo faceador
7	12	13	Cabo faceador
8	13	14	Cabo faceador
9	14	15	Cabo faceador
10	15	11	Cabo faceador
11	1	9	Cabo-X
12	11	9	Cabo-X
13	2	9	Cabo-X
14	12	9	Cabo-X
15	2	10	Cabo-X
16	12	10	Cabo-X
17	3	10	Cabo-X
18	13	10	Cabo-X
19	3	6	Cabo-X
20	13	6	Cabo-X
21	4	6	Cabo-X
22	14	6	Cabo-X
23	4	7	Cabo-X
24	14	7	Cabo-X
25	5	7	Cabo-X
26	15	7	Cabo-X
27	5	8	Cabo-X
28	15	8	Cabo-X
29	1	8	Cabo-X
30	11	8	Cabo-X
31	1	12	Estronca principal
32	2	13	Estronca principal
33	3	14	Estronca principal
34	4	15	Estronca principal
35	5	11	Estronca principal
36	15	9	Tesoura
37	9	3	Tesoura
38	11	10	Tesoura
39	10	4	Tesoura
40	12	6	Tesoura
41	6	5	Tesoura
42	13	7	Tesoura
43	7	1	Tesoura
44	14	8	Tesoura
45	8	2	Tesoura

A construção deste módulo foi balizada por uma premissa fundamental que guiou todas as tomadas de decisão ao longo do projeto: a de que o sistema construtivo desta estrutura deveria ser autônomo. Isto significa que o indivíduo comum deve se sentir empoderado em sua capacidade de fabricar e montar a estrutura utilizando técnicas, ferramentas e materiais que estão ao seu dispor. Nas seções seguintes, o detalhamento dos recursos, procedimentos e escala empregados para cumprir com a proposição deste trabalho é apresentado.

3.2. Escolha dos Materiais e Caracterização

A natureza (...) é a primeira mestra do ser humano.

Carlos Bernardo González Pecotche

Celulose, lignina, queratina e colágeno. Bambu, madeira, chifre e osso. Materiais naturais são, em sua essência, sustentáveis, posto que são produzidos com mínima energia, além de serem recicláveis e biodegradáveis. Entretanto, talvez um ponto ainda mais interessante que seu caráter ecológico seja sua singular eficiência. Durante o funcionamento habitual das plantas e animais, os materiais naturais são submetidos a solicitações altamente complexas, sejam elas: suportar cargas estáticas e dinâmicas criadas pela própria massa do organismo ou pela carga do vento, armazenar e liberar energia, flexionar-se através de grandes ângulos ou resistir à flambagem e à fratura. Materiais naturais não só atendem a todas estas solicitações como o fazem utilizando o mínimo de material possível (WEGST & ASHBY, 2004).

Do ponto de vista de desempenho mecânico, os materiais naturais base, como hemicelulose, pectina, colágeno, queratina, cálcio e sílica, não apresentam um comportamento particularmente notável. As fibras de celulose, por exemplo, têm módulos de elasticidade próximos ao do nylon, a matriz lignina-hemicelulose possui propriedades semelhantes às da resina epóxi e a hidroxiapatita tem uma resistência à fratura comparável à da cerâmica. É justamente a estrutura e arranjo desses materiais base em componentes mais intrincados, como osso e madeira, que dão origem à impressionante eficiência dos materiais naturais (WEGST & ASHBY, 2004).

Dentre todos os materiais naturais aplicáveis à construção civil e considerando que o método construtivo visa ser desenvolvido gerando o mínimo de

impacto para ambiente e o mínimo de resíduos, bem como utilizando técnicas singelas apropriadas ao clima e realidade local, optou-se pela utilização do bambu e da corda de sisal para a construção do módulo citado no Capítulo 3.1.

3.2.1. Bambu

O bambu é um material natural milenar amplamente utilizado na Ásia, sobretudo na China e na Índia, na construção de casas, barcos, pontes, entre outros. Nas sociedades ocidentais, entretanto, este material auspicioso para a construção civil, haja vista suas propriedades físicas e mecânicas e seu alinhamento às premissas atuais de sustentabilidade enquanto tecnologia não poluente, facilmente acessível e de baixo impacto ambiental (MOREIRA, 1991), ainda é pouco disseminado devido à falta de normas específicas.

Com exceção da Europa, todos os demais continentes possuem espécies de bambu nativas. Nas Américas existem cerca de 290 espécies que se espalham desde os Estados Unidos até o Chile e Argentina. Dentre essas, a *Phyllostachys aurea* é uma das mais conhecidas. Encontrada na América do Sul, América Central, Taiwan e Japão, esta espécie atinge alturas de 6 a 12 m e diâmetros entre 3 e 7 cm, possui coloração amarelo esverdeada e apresenta internós menores na base e maiores na seção intermediária e topo (OHRNBERGER, 1999). Em termos botânicos, o bambu é uma gramínea. Trata-se de uma planta tropical renovável, que pode ser produzida anualmente sem a necessidade de replantio. Além de ser um eficiente sequestrador de carbono, apresenta excelentes características físicas, químicas e mecânicas. Além disso, o bambu é o recurso natural que se renova em menor intervalo de tempo, não havendo nenhuma outra espécie florestal que possa competir com ele em velocidade de crescimento e de aproveitamento por área (PEREIRA & BERALDO, 2016).

Outro aspecto notável do bambu é sua funcionalidade graduada (NOGATA & TAKAHASHI, 1995), isto é, este material aprimorou suas características como diâmetro, distância entre nós, variação da quantidade de fibras, entre outras, de modo a otimizar o volume de material necessário para resistir aos esforços da natureza. O resultado final de muitos anos de evolução darwiniana é um material leve com ótimas capacidades mecânicas. Paralelamente a estas qualidades, o bambu ainda apresenta seção tubular, atributo que, em se tratando de desempenho estrutural, revela alta eficiência. Esta eficácia está relacionada justamente à

geometria de sua seção transversal, que possui capacidade de resistir às altas solicitações de esforços axiais, torção e efeitos combinados de maneira efetiva proporcionando, ainda, economia de material (MENDES *et al.*, 2012).

À vista disso, o bambu apresenta-se como um excelente candidato para a construção do módulo tensegrity. Contudo, vale ressaltar algumas limitações deste material natural (KRAUSE, 2009):

- Por ser um material natural, as barras apresentam uma imperfeição inicial considerável;
- O bambu possui ótimas propriedades mecânicas, porém a resistência ao cisalhamento na direção das fibras é relativamente baixa;
- Com o passar do tempo, trincas longitudinais tendem a surgir nos colmos (Figura 3-3). Suscitadas por esforços externos, variação térmica, ou pela degradação da lignina, as trincas não só comprometem a resistência das barras como possibilita a entrada de água, o que aumenta a suscetibilidade ao ataque químico e de micro-organismos.



Figura 3-3: Trincas longitudinais ocasionadas pela degradação da lignina em colmo da espécie *Phyllostachys aurea* (KRAUSE, 2009)

A seguir são apresentados os métodos de confecção dos corpos de prova e as relações constitutivas do bambu escolhido para montagem do sistema estrutural proposto na seção 3.1. Foram realizados ensaios de compressão simples, a fim de se avaliar a resistência à compressão ($\sigma_{máx}$), e de flexão a quatro pontos, para determinação do módulo de elasticidade (E). Os corpos de prova foram confeccionados a partir de colmos da espécie *Phyllostachys aurea*, adquiridos em Três Rios, no estado do Rio de Janeiro. As varas foram cortadas com 3 anos de idade, sem distinção entre base, meio e topo, e tratadas mediante cozimento (imersão em água quente). Possuem 150 cm de comprimento e aproximadamente 3,5 cm de diâmetro. A escolha do bambu com estas propriedades geométricas específicas foi feita de modo a permitir a compatibilização do módulo em escala reduzida considerando as opções disponíveis para este material no mercado.

3.2.1.1. Ensaio de Compressão Simples

Para o ensaio de compressão simples, três colmos foram selecionados arbitrariamente do lote comprado. Os corpos de prova confeccionados, B1, B2 e B3, foram ensaiados com o objetivo principal de se obter a média da resistência máxima à compressão ($\sigma_{m\acute{a}x}$).

Os ensaios foram realizados numa máquina de ensaios universais MTS modelo 810 com garras hidráulicas e capacidade de carga de 500 kN (MTS 810/500), de acordo com a norma ISO 22157-1:2004, conforme ilustrado na Figura 3-4. Os corpos de prova foram cortados com altura igual ao seu diâmetro externo e as dimensões dos diâmetros externos e internos foram calculadas a partir da média das medidas feitas com paquímetro digital em dois eixos perpendiculares, alinhados o máximo possível aos de maior e menor diâmetro, em três alturas diferentes. Após o corte, os corpos de prova foram nivelados com massa plástica. Conforme orientação da norma, dois extensômetros foram instalados diametralmente opostos um ao outro para obtenção das deformações longitudinais. Os sensores foram conectados a um sistema de aquisição de dados da National Instruments e as medidas de força e deslocamento foram registradas automaticamente no programa LabView 8.5. Cada corpo de prova foi posicionado no centro do gabarito da MTS 810/500 e uma carga de 0,5 kN foi aplicada para acomodar o espécime. Em seguida, aplicou-se um deslocamento contínuo a uma taxa de 0,01 mm/s até a falha do mesmo.

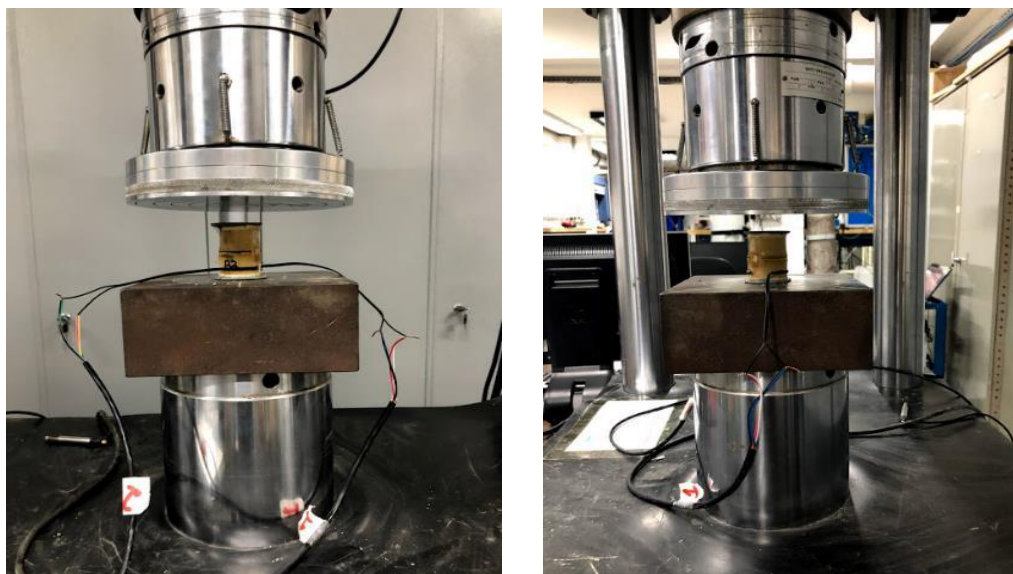


Figura 3-4: Set up do ensaio de compressão simples

Com base nos valores lidos durante o ensaio de compressão, foi possível gerar uma curva tensão (MPa) x deformação (mm/mm). A Tabela 3-3 mostra as áreas das seções transversais, as tensões máximas obtidas e suas respectivas deformações para os corpos de prova ensaiados.

Tabela 3-3: Valores obtidos no ensaio de compressão simples para a espécie *Phyllostachys aurea*

CP	Área transversal (mm ²)	$\sigma_{m\acute{a}x}$ (MPa)	Deformação em $\sigma_{m\acute{a}x}$ (mm/mm)
CP_B1	396,44	71,32	0,044
CP_B2	253,48	65,18	0,040
CP_B3	208,24	69,78	0,038
Valor Médio	286,05	68,76	0,041
Desvio Padrão	80,21	2,61	0,0025

Os espécimes manifestaram relativa conformidade no intervalo linear da curva. Observa-se que, neste trecho, há uma bipartição da reta para os três corpos de prova ensaiados, suscitada, possivelmente, por nucleação de fissuras longitudinais. Analisando as curvas de tensão x deformação, nota-se que os bambus apresentaram razoável tenacidade e que a resistência média obtida foi de 68,76 MPa, propriedades estas alinhadas com as encontradas na literatura.

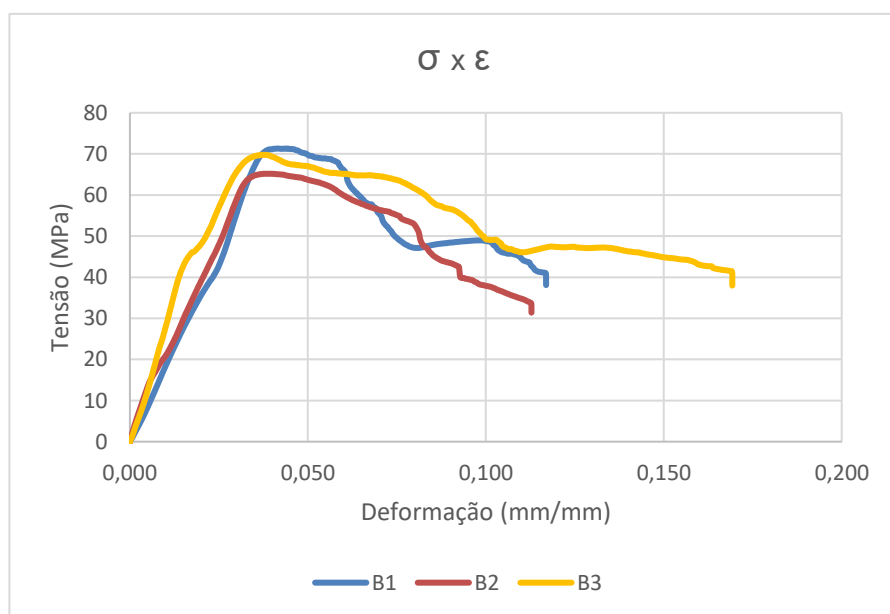


Figura 3-5: Curva tensão vs. deformação do bambu *Phyllostachys aurea* para compressão

Com relação ao modo de ruptura, dois efeitos distintos podem ser observados. O primeiro modo de falha caracteriza-se pelo surgimento de trincas em todo o diâmetro do corpo de prova. Algumas dessas trincas se estendem por todo o comprimento da amostra (Figura 3-6a), formando cunhas (Figura 3-6b). Já o segundo modo de ruptura diz respeito à flambagem local da parede externa do espécime, como mostra a Figura 3-6c.

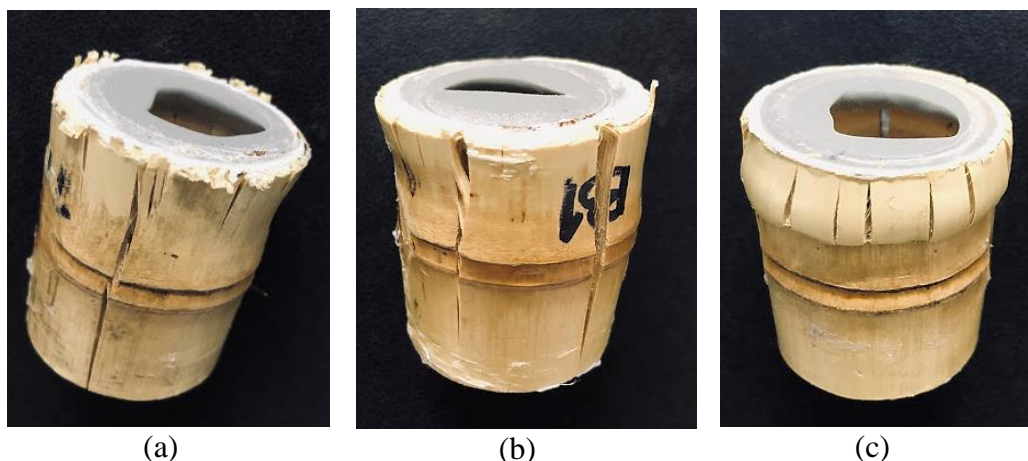


Figura 3-6: Modos de ruptura: (a), (b) trinca longitudinal por todo o comprimento e (c) ruptura local por embarrigamento (c)

3.2.1.2. Ensaio de Flexão a Quatro Pontos

Os ensaios de flexão foram executados com atuador servo hidráulico MTS modelo 204.63 com capacidade de carga de 100 kN, de acordo com a ISO 22157-1:2004.

Cinco colmos foram escolhidos aleatoriamente e preparados segundo orientações da norma, com o objetivo de estipular-se o módulo de elasticidade (E) dos espécimes ensaiados. Respeitou-se o limite mínimo de vão livre (pelo menos trinta vezes o valor do diâmetro externo), bem como a configuração exigida para transferência de carregamento, como ilustram as Figuras 3-7 e 3-8.

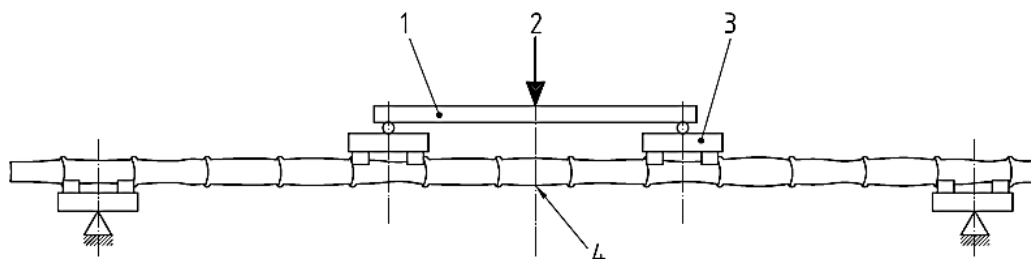


Figura 3-7: Esquematização do setup do ensaio de flexão a quatro pontos

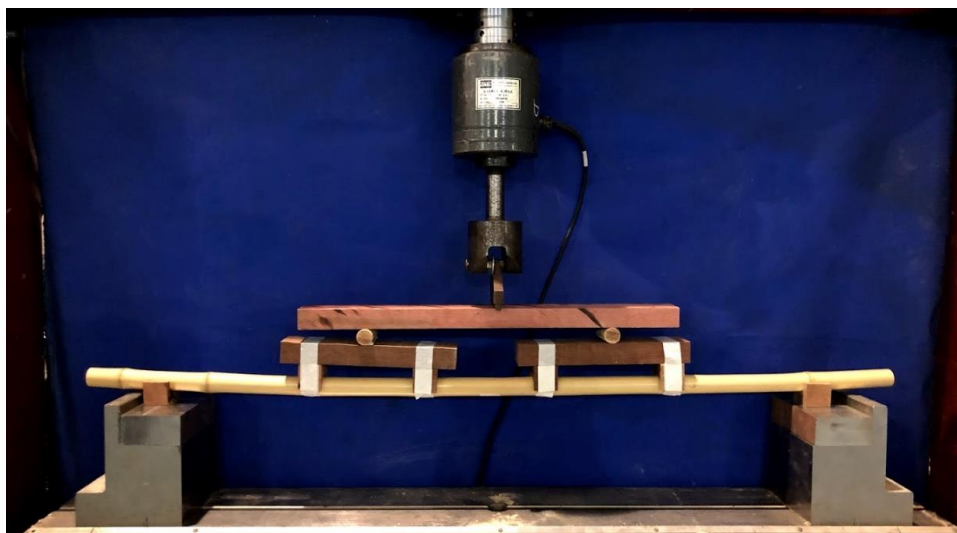


Figura 3-8: Configuração final do set up do ensaio de flexão a quatro pontos

Foram confeccionados apoios, vigas de transferência de carregamento e roletes em maçaranduba de modo a garantir que estes elementos não tivessem influência na deformação do colmo devido a sua alta rigidez. Cada corpo de prova foi posicionado no centro do gabarito da MTS 810/500 e uma carga de 0,5 kN foi aplicada para acomodar o espécime. Em seguida, aplicou-se um deslocamento contínuo a uma taxa de 0,5 mm/s até a falha do mesmo. Assim como mencionado anteriormente, a aquisição de dados deu-se através da National Instruments e as medidas de força e deslocamento – medido através do próprio deslocamento da máquina – foram registradas automaticamente no programa LabView 8.5. Com base nos valores lidos durante o ensaio de flexão, montou-se a Tabela 3-4 com informações compiladas de carga máxima aplicada (F), deflexão máxima no meio do colmo (δ) e módulo de elasticidade (E) para os corpos de prova ensaiados. Os módulos de elasticidade foram calculados considerando o trecho linear da curva de acordo com a equação fornecida pela ISO 22157-1:2004 abaixo:

$$E = \frac{23 \times F \times L^3}{1296 \times \delta \times I_B} \quad \text{Eq. (3-1)}$$

No momento em que o corpo de prova atinge sua máxima resistência, a seção central do colmo se divide em lascas longitudinais, como mostra a Figura 3-9a. Observando a imagem verifica-se que o modo de ruptura se caracteriza pelo surgimento de fissuras na direção das fibras no meio do vão. As fissuras são interrompidas ao se aproximarem dos nós adjacentes, onde a resistência é maior.

Tabela 3-4: Valores obtidos no ensaio de flexão a quatro pontos para a espécie *Phyllostachys aurea*

CP	Carga máxima (N)	Deflexão máxima (mm)	E (GPa)
CP 1	1845,73	59,58	21,35
CP 2	1283,29	45,10	24,77
CP 3	1710,52	48,26	27,08
CP 4	1620,90	76,01	18,92
CP 5	1968,47	79,97	18,01
Valor Médio	1685,78	61,78	22,03
Desvio Padrão	233,37	14,14	3,44

Vale ressaltar que o posicionamento adequado dos apoios de transição é fundamental para garantir o correto funcionamento do ensaio. Em dois corpos de prova, este apoio ficou ligeiramente deslocado do eixo central do nó. Como consequência, houve um esmagamento súbito do colmo rente ao nó (Figura 3-9b), comprometendo o restante do ensaio. O esmagamento pontual do colmo ocorreu nos corpos de prova CP 2 e CP 3, incidente este que afetou diretamente os valores de deflexão e módulo de elasticidade como pode ser constatado na Tabela 3-4. Posto isto, optou-se por descartar os resultados obtidos para esses espécimes, de modo que a média dos módulos de elasticidade ficou estabelecida em 19,43 GPa.

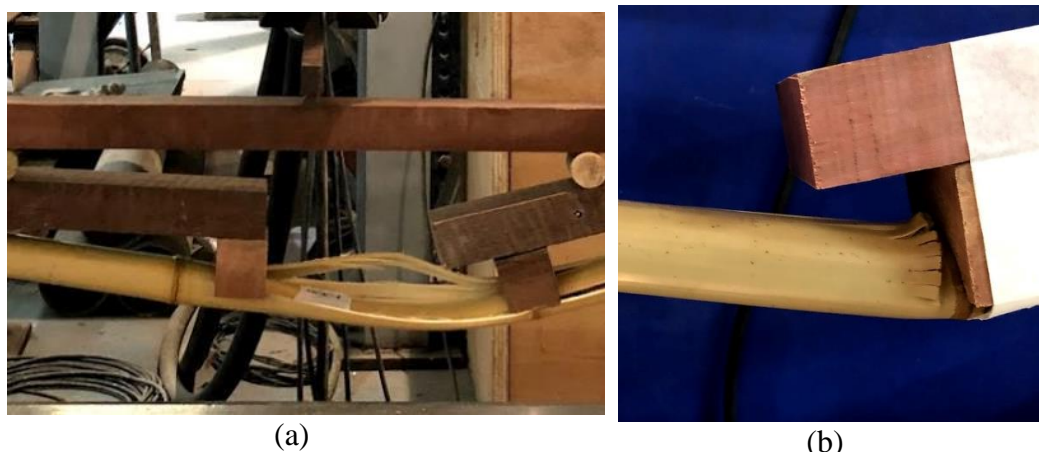


Figura 3-9: Modos de ruptura: trinca longitudinal na seção central (a) e cisão local ocasionada pelo apoio descentralizado (b)

3.2.2. Sisal

A busca por soluções ecológicas e eficientes energeticamente tem incentivado a pesquisa sobre fibras naturais atualmente, posto que apresentam qualidades fundamentais a estas demandas, como biodegradabilidade, inocuidade ao meio ambiente e maior viabilidade financeiramente do que as fibras sintéticas (TEIXEIRA *et al.*, 2019). No que diz respeito à aplicação destes materiais na atualidade, as fibras vegetais estão sendo empregadas na fabricação de compósitos e na extração de lignina e celulose para aplicação na área médica, construção civil, mecânica de automóveis, entre outras (MIRANDA *et al.*, 2015 *apud* AMORIM *et al.*, 2018). Fibras celulósicas como linho, sisal, juta, fibra de coco, de banana, de palma, de cana-de-açúcar, etc., estão disponíveis na maioria dos países e apresentam boa relação custo-benefício (YAN *et al.*, 2016). No Brasil, particularmente, o sisal tem recebido grande destaque ao longo dos anos. Considerada a fibra dura mais comercializada no mundo, o Brasil é um dos seus maiores exportadores, de modo que a agaveicultura constitui fonte de renda e emprego para muitos trabalhadores, mantendo aquecida a economia local (MARTIN *et al.*, 2009).

O sisal, nome popular da *Agave sisalana*, é uma planta nativa do México que veio para o Brasil no início do século XX, da qual se utiliza principalmente as fibras provenientes de suas folhas. O gênero *Agave* abrange cerca de 300 espécies nativas de zonas tropicais e subtropicais das Américas do Norte e do Sul (MEDINA, 1954 *apud* SILVA *et al.*, 2008; POTES & SALINAS, 1991). O sisal pertence ao subgênero *Euagave*, família *Agavaceae*, subfamília *Agavoidea*, série *Liliflorea* e classe *monocotiledônea*. Uma planta de sisal produz cerca de 200 a 250 folhas e cada folha contém de 1000 a 1200 feixes de fibra (LI *et al.*, 2000). Da folha, de 3 a 5% de seu peso é obtido em fibra, enquanto que o restante passa a ser resíduo do beneficiamento, podendo ser utilizado como adubo orgânico, ração para animais ou ainda na síntese da cortisona (MARTIN *et al.*, 2009).

A fibra do sisal, como mencionado anteriormente, é dura. As fibras duras – como as fibras de coco, cana-de-açúcar, banana – são obtidas dos feixes vasculares das folhas, apresentam textura rígida e costumam possuir teor de lignina superior ao das fibras macias – como o linho, mamona e soja (AMORIM *et al.*, 2018). Como a maioria dos demais materiais naturais, absorve água com grande facilidade,

possibilitando ataque de fungos e bactérias que podem comprometer sua integridade. A fibra possui uma coloração amarelo pálido e é composta por fibrilas elementares que tem de 1,5 a 4 mm de comprimento e diâmetro de 10 a 30 μm (MARTIN *et al.*, 2009).

Os principais produtores de sisal no Brasil se encontram na região Nordeste, sobretudo nos estados da Bahia, Paraíba e Rio Grande no Norte. A planta se adequou ao clima semi-árido e oferece resultados econômicos satisfatórios numa região em que as condições climáticas e de solo são pouco favoráveis e onde há escassez de alternativas para a exploração de outras culturas (SILVA *et al.*, 2008). Nessas regiões, o cultivo e exploração do sisal se desenvolveram com mínima tecnologia, de forma que, tecnicamente, a cultura é relativamente simples. O beneficiamento da planta costuma ser feito por pequenos produtores, normalmente de base familiar, que veem na atividade uma razão para se fixar ao território nordestino. A cultura do sisal gera empregos diretos e indiretos ao longo de toda sua cadeia de serviços, desde a manutenção das lavouras, passando pela colheita e beneficiamento, até culminar na industrialização e confecção de artesanato a partir das fibras (MARTIN *et al.*, 2009).

Uma das aplicações práticas do sisal é na área de cordoalhas, que inclui fabricação de fios, barbantes, cordeis e cordas para diferentes setores da indústria. Segundo SILVA *et al.* (2008), aproximadamente 2/3 da produção da fibra de sisal se destina a baling twine². Além disso, a fibra também é utilizada na fabricação de barbantes – fio comercial ou não oleado mais fino –, cordéis – formados por dois ou três fios não oleados retorcidos – e cordas – fabricadas tanto com fios oleados ou secos e com diâmetros variáveis.

Por ser um material natural, a fibra de sisal apresenta variabilidade em suas características morfológicas, fato que interfere diretamente no seu comportamento mecânico. Questões como eficiência da produção, condições do meio ambiente, métodos de extração e condições de processamento refletem nos valores de resistência à tração e módulo de elasticidade. Todavia, esta fibra apresenta tensões de tração maiores que 249 MPa e módulos de Young acerca de 19 GPa, classificando-a como fibra de alto desempenho (TEIXEIRA *et al.*, 2019). Segundo FIDELIS *et al.* (2013), com base nos artigos de SILVA *et al.* (2008; 2010), a

² Fio de sisal ou sintético de pequeno diâmetro usado para ligar uma quantidade de material fibroso (como feno ou palha) a uma forma mais compacta e facilmente empilhada.

resistência à tração e o módulo de elasticidade médios da fibra de sisal foram relatados como 400MPa e 19GPa.

Embora haja muito conteúdo sobre as propriedades morfológicas e comportamento mecânico das fibras, o mesmo não pode ser dito sobre o desempenho das cordas de sisal. Segundo KELLY (1994), a resistência à ruptura das fibras individuais de vidro, grafite, boro, entre outras, é muito maior do que a de feixes do mesmo material. Ou seja, é possível que todos os materiais sejam mais fortes quando em forma de fibras únicas. Deste modo, faz-se necessário realizar uma investigação sobre o comportamento mecânico da corda de sisal escolhida para ser empregada no módulo tensegrity.

3.2.2.1. Ensaio de Tração Direta

O ensaio de tração direta foi realizado em quatro corpos de prova de corda de sisal visando obter-se a resistência à tração ($\sigma_{m\acute{a}x}$) e módulo de elasticidade (E) médios do material. Os corpos de prova foram confeccionados a partir de um rolo de corda de sisal de 20 metros, disponível em estabelecimentos comerciais voltados para o ramo de cordas. A corda de 6 mm de diâmetro nominal é composta por três pernas e não recebeu qualquer tipo de tratamento. Ao todo foram confeccionados quatro corpos de prova com comprimento de 150 cm cada um. A escolha do sisal com estas propriedades geométricas específicas foi feita de modo a permitir a compatibilização do módulo em escala reduzida considerando as opções (muitas vezes reduzidas) disponíveis para este material no mercado.

Os espécimes foram ensaiados numa máquina de ensaios universais MTS modelo 311.11 com garras hidráulicas com capacidade de carga de 1000 kN (MTS 311), conforme ilustrado na Figura 3-10. Uma anilha metálica foi fixada em cada extremidade do corpo de prova com um nó e, em seguida, introduzida na garra da MTS311. Decidiu-se utilizar o nó do fiel duplo, também chamado de nó constritor, devido à sua particularidade de ficar cada vez mais apertado à medida que se aplica mais tensão em seu cabo. O ensaio foi realizado aplicando um deslocamento contínuo a uma taxa de 150 mm/minuto de acordo com o regulamento técnico TDC8(5628)P3 proposto pelo órgão de normatização da Tanzânia. A aquisição de dados foi feita em um sistema da National Instruments e as medidas de força e deslocamento foram registradas automaticamente no programa LabView 8.5. Com base nos valores lidos durante o ensaio de tração, foi possível gerar as curvas tensão

(MPa) x deformação (mm/mm) para cada corda de sisal ensaiada, como ilustra a Figura 3-11.



Figura 3-10: Set up do ensaio de tração direta

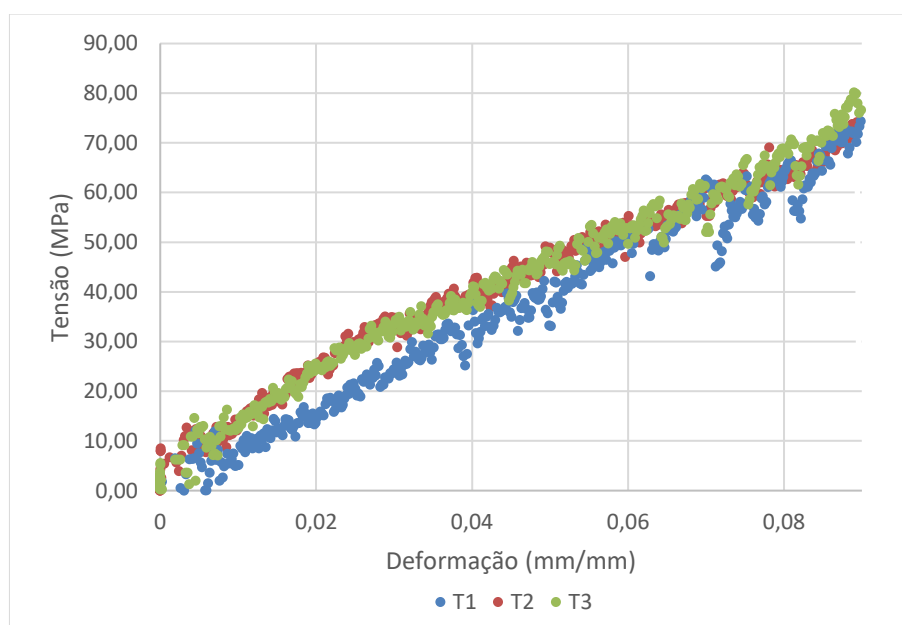


Figura 3-11: Curva Tensão vs. Deformação dos cabos de sisal

Nota-se a partir do gráfico acima que os corpos de prova apresentaram certa regularidade no que diz respeito ao seu comportamento durante o trecho linear. Após o rompimento da primeira perna da corda, há uma queda brusca na resistência à tração, porém, como ainda há parte do material incólume, o corpo de prova ainda apresenta uma capacidade portante residual. Finalmente, quando todas as pernas estão comprometidas, a corda não apresenta mais nenhuma resistência. Analisando

as curvas de tensão versus deformação foi possível obter diretamente a tensão de ruptura do material, bem como encontrar o módulo de elasticidade através de regressão linear, como mostra a Tabela 3-5. A média das tensões de ruptura foi de 79,59 MPa, enquanto que o módulo de elasticidade médio ficou estabelecido em 1,05 GPa.

Tabela 3-5: Valores obtidos no ensaio de tração simples para as cordas de sisal

CP	$\sigma_{m\acute{a}x}$ (MPa)	Deformação em $\sigma_{m\acute{a}x}$ (mm/mm)	E (GPa)
CP_T1	84,47	0,10	0,81
CP_T2	74,11	0,089	1,11
CP_T3	80,19	0,093	1,23
Valor Médio	79,59	0,094	1,05
Desvio Padrão	4,25	0,0045	0,18

Para todos os corpos de prova, a falha se deu a partir do rompimento de uma das três pernas que compõem a corda. A única diferença é que, para o CP_T3, a ruptura ocorreu em um ponto afastado do nó (Figura 3-12a), enquanto que para os demais, o rompimento se localizou junto à amarração (Figura 3-12b).



(a)



(b)

Figura 3-12: Modos de ruptura da corda: (a) ruptura afastada do nó e (b) ruptura na base do nó

3.3. Modelo em Escala Reduzida

Em posse da geometria do módulo e conhecendo as propriedades e comportamentos mecânicos dos materiais naturais designados para a construção do mesmo, deu-se início ao processo de combinação destes fatores de modo a se obter uma estrutura funcional. Para tanto, optou-se por utilizar a metodologia do modelo em escala reduzida. O termo “modelo em escala reduzida” convém justamente à ideia de uma representação da estrutura de verdadeira grandeza em menor tamanho. Este método consiste na construção de um modelo reduzido para investigar o funcionamento da estrutura, prever dificuldades que poderão aparecer durante a construção do modelo em escala real e desenvolver soluções para viabilizar a concretização do mesmo (CARNEIRO, 1993). O modelo pode ser concebido como croqui, maquete ou modelo computacional, entre outros. Para este trabalho, optou-se por fazer uma miniatura física a fim de se observar o comportamento da estrutura no ambiente.

É interessante, ainda nesta fase, utilizar materiais que se aproximem ao máximo daqueles que serão empregados no modelo real. Entretanto, vale ressaltar que nem sempre é possível cumprir com este objetivo, seja pela indefinição de quais insumos serão utilizados na construção da estrutura, seja pela falta de acessos a esses materiais nesta etapa do projeto. De qualquer modo, o propósito primordial do modelo em escala reduzida é fazer com que a estrutura se submeta às leis da natureza, isto é, que passe por manipulações, transformações de energia, desgastes, deformações sob ação da gravidade, etc. (YAMAKI, 2012). O modelo reduzido permite que as qualidades e as deficiências da estrutura sejam reveladas de antemão. É possível observar a estrutura sob novos ângulos, o volume gerado, a movimentação dos elementos no processo de montagem e como cada membro se conecta. Segundo YAMAKI (2012), o manuseamento direto do modelo em escala reduzida traz maior familiaridade, confiança e domínio das técnicas aplicadas para o pesquisador. Ainda que em menor escala, grande parte do gestual que será aplicado na construção do modelo em escala real já é ensaiado.

O primeiro modelo reduzido do módulo da ponte para pedestres foi feito em escala 1:25, inteiramente com palitos de churrasco, como ilustra a Figura 3-13. Neste momento, a preocupação com os materiais a serem utilizados e suas respectivas conexões ainda estava em segundo plano. A principal meta era entender

a espacialidade da estrutura no ambiente. Um gabarito das coordenadas em x e y foi marcado em um bloco de isopor e a altura das coordenadas em z foi fixada com palitos de churrasco cravados no gabarito. Para conexão dos elementos, foi utilizada massa de modelar.

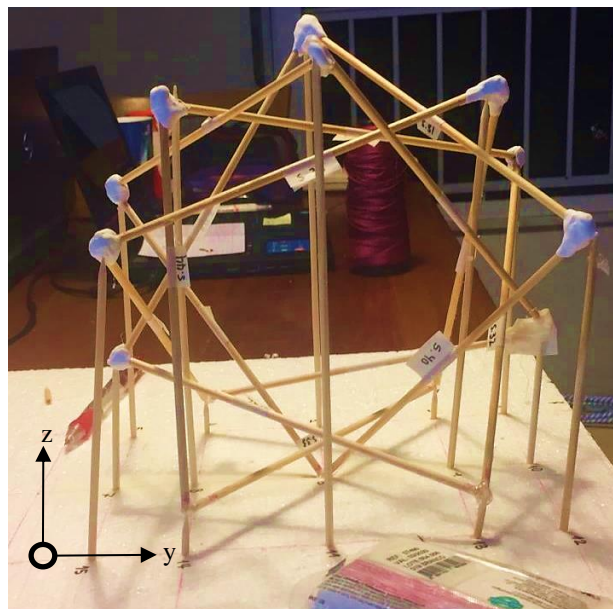


Figura 3-13: Módulo da ponte tensegrity em escala 1:25 com palitos de churrasco

A partir deste modelo, algumas melhorias já puderam ser implementadas. Primeiramente, substitui-se os palitos de churrasco que atuavam nas posições dos cabos por fios de nylon. Além disso, a conexão entre os elementos passou a ser feita por meio de um furo no palito, através do qual o fio de nylon passa e dá um nó em si mesmo (Figura 3-14). Estas modificações já começaram a levar em conta questões referentes à veracidade do módulo em tamanho real, como ligações mais práticas e materiais com comportamento mecânico mais similar ao do produto final.

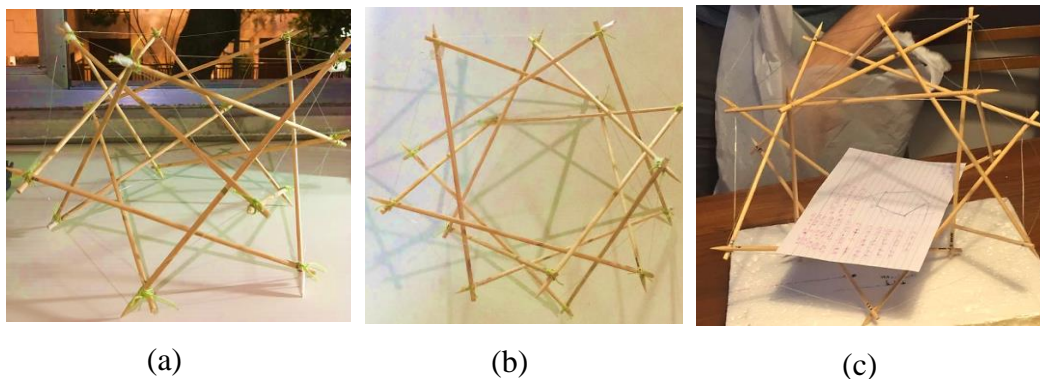


Figura 3-14: Vistas do módulo da ponte tensegrity em escala 1:25 com palitos de churrasco e fios de nylon: (a) vista lateral, (b) vista superior e (c) vista frontal com simulação do tabuleiro

Contudo, ainda havia espaço para aperfeiçoamentos. De antemão, novos materiais foram elegidos para confecção do modelo, de modo a se aproximar daqueles que serão usados no módulo final. Para as estroncas, empregaram-se varetas de bambu e para os cabos utilizou-se cordone Urso glacê extraforte nº0. Outra mudança fundamental foi a conexão entre os elementos, para a qual foi feita uma adaptação do método TensegriToy. O TensegriToy é um kit de montagem de estruturas tensegrity desenvolvido por Cary Kittner e Stuart Quimby, que consiste em um conjunto de pequenas hastes de madeira – que atuam como elementos comprimidos – e tiras elásticas – que agem como elementos tracionados. As hastes de madeira possuem um entalhe em ambas as extremidades por onde os elásticos se prendem e uma pequena camisa de alumínio trava essas pontas (HAGGERTY, 1989).

Neste modelo, fez-se o entalhe nas duas extremidades da vareta de bambu. O cordone passa por uma das pontas da estronca, percorre todo o comprimento da vara e adentra o entalhe na outra extremidade. O cordão fica preso à vareta por meio de um nó em cada ponta que impede que o cordone escorregue através do entalhe. Este processo permite que tanto os cabos se conectem à estronca, passando transversalmente por entre o entalhe, quanto outras estroncas, cujo talho encaixa no cordone da estronca original.

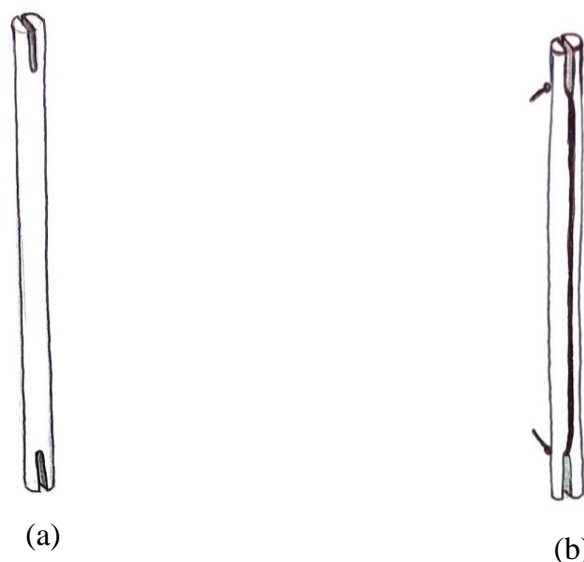


Figura 3-15: Esquemática do método TensegriToy adaptado: (a) entalhe nas extremidades da estronca e (b) passagem do cordone por entre os talhos

Por fim, queria-se, além disso, eliminar o gabarito de isopor do método de construção. Para tal, foi desenvolvido um processo de montagem no plano, no qual

todos os elementos são conectados ainda no chão e, depois, ergue-se a estrutura. O detalhamento do processo construtivo é apresentado a seguir na seção 3.4.

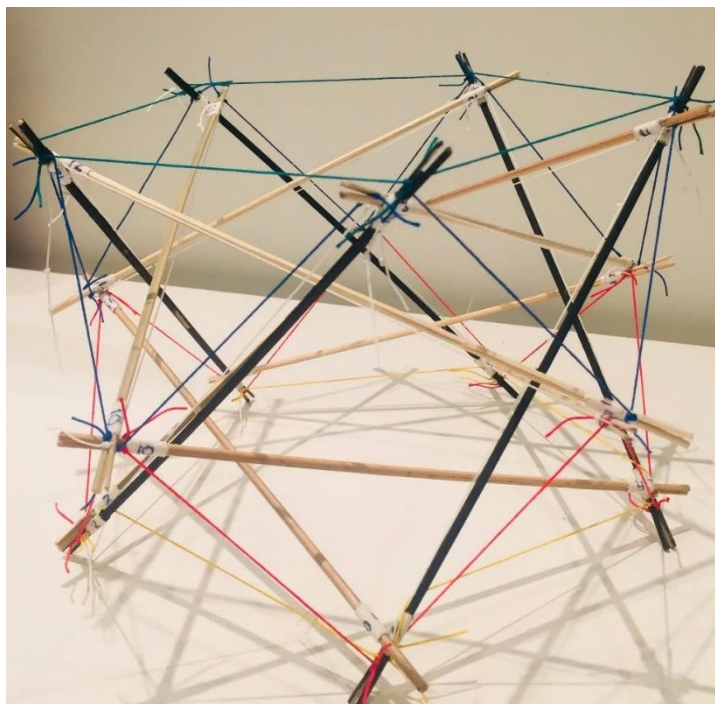


Figura 3-16: Módulo da ponte tensegrity em escala 1:25 com varetas de bambu e cabos de cordone

3.4. Método Construtivo

Muitas lições foram aprendidas com o modelo reduzido sobre o funcionamento da estrutura, de modo que já era possível dar o próximo passo e aumentar a escala do módulo. Definiu-se para o novo modelo uma escala de 1:5,65, isto é, estroncas com 120 cm de comprimento, cabos faceadores com 81 cm e cabos-X com 61,5 cm e 5% de pretensão³. A determinação destes novos parâmetros levantou duas questões principais: (i) como viabilizar a fabricação e montagem desta construção e (ii) que tipos de sistemas estruturais, conexões e técnicas construtivas devem ser desenvolvidas para tal? Vale ressaltar que o foco deste trabalho não é produzir um procedimento com viés mercatório, que pode ser comercializado apenas por pessoal ou firma especializada neste tipo de estrutura, mas sim que incite a autonomia das pessoas sobre o processo construtivo. Posto isto, esta estrutura foi desenvolvida de modo que sua fabricação e montagem fossem pautadas em “*técnicas de baixo impacto ambiental, simples de serem aprendidas,*

³ Em função da tensão de ruptura do cabo de sisal.

absorvidas e que utilizam ferramental manual de fácil aquisição. São técnicas que empregam a matéria vegetal e mineral pouco processada, conforme é encontrada em fonte próxima ao local de construção.” (Prof. José Luis Mendes Ripper).

A seguir, o método construtivo desta estrutura é descrito. Todos os detalhes relativos à fabricação e montagem foram abordados de forma minuciosa com a esperança de que a esquematização feita seja a mais didática possível.

- Passo #1: *Mise en place*

O modelo é primeiramente separado por tipos de elementos: estroncas principais, tesouras, cabos faceadores e cabos-X. Em seguida, uma codificação por cores foi aplicada para cada categoria. Os cinco cabos faceadores que compõem o pentágono inferior foram coloridos de amarelo. Da mesma forma, os cinco cabos faceadores que formam o pentágono superior foram coloridos de verde. Os cabos-X foram divididos em dois subgrupos: dez cabos vermelhos que conectam os nós das tesouras ao pentágono inferior e dez cabos azuis que conectam os mesmos nós ao pentágono superior. As estroncas principais foram pintadas de preto e as tesouras ficaram com sua coloração bege inicial.

- Passo #2: Layout inicial

O método de construção começa com a disposição das estroncas principais formando um pentágono no chão. A primeira estronca a ser deitada é a nº 31 (ver Tabela 3-2), em seguida coloca-se a estronca 32 inclinada a 108° da estronca anterior. É importante notar que o pentágono inferior é formado pelos nós 1 a 5 e o pentágono superior pelos nós 11 a 15, dessa forma, quando a estronca 32 é inserida, o nó 2 deve ficar por baixo do nó 12, conforme ilustra a Figura 3-17. Esta dinâmica se repetirá com todas as demais estroncas principais, ou seja, o nó 3 da estronca 33 deverá ficar por baixo do nó 13 da estronca 32 e assim por diante.

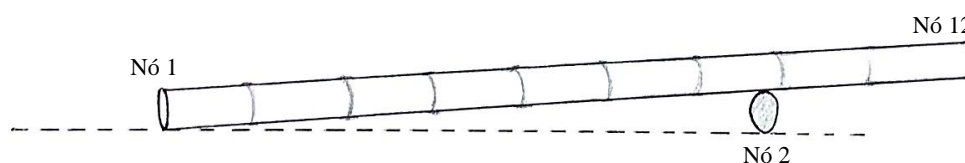


Figura 3-17: Detalhe da sobreposição das estroncas principais

Quando a estronca 35 fechar a superfície do pentágono, pode-se iniciar a passagem dos cabos faceadores. O primeiro cabo faceador conecta os nós 1 e 2, o segundo cabo, os nós 2 e 3, o terceiro cabo liga os nós 3 e 4, o quarto cabo, os nós

4 e 5 e, finalmente, o quinto cabo conecta os nós 5 e 1. A Figura 3-18a mostra o resultado final desta montagem. Paralelamente, as tesouras e cabos-X são preparados. As tesouras são compostas por duas estroncas que compartilham um nó intermediário – nós 6 a 10. As estroncas 36 e 37, por exemplo, possuem o nó 9 em comum. Ao conectá-las nesse ponto, elas passam a agir como um sistema único, ao qual foi dado o nome de tesoura. Nesta dupla, uma estronca vai de encontro ao pentágono inferior e outra ao pentágono superior. Do nó partilhado pelas pernas da tesoura saem quatro cabos-x (Figura 3-18b). Utilizando como exemplo novamente os elementos citados anteriormente, tem-se que a estronca 36 se conecta com o pentágono de cima, enquanto que a 37 se liga ao de baixo, deste modo, do nó 9 da estronca 36 saem dois cabos-x (azuis) que se ligarão a dois nós do pentágono superior, ao passo que do nó 9 da estronca 37 saem dois cabos-x (vermelhos) que farão conexão com dois nós do pentágono inferior na próxima etapa da montagem.

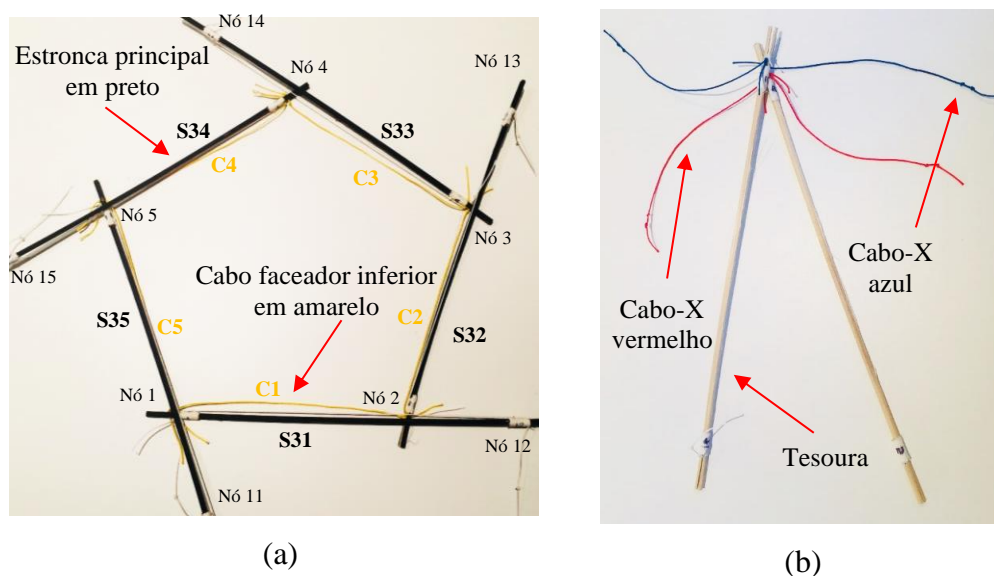


Figura 3-18: Vista superior (a) do pentágono formado pelas estroncas principais (S31 a S35) e cabos faceadores inferiores (C1 a C5) e (b) de uma tesoura com os quatro cabos-X

• Passo #3: Entrecruzado

Concluído o setup inicial, o próximo passo é o entrecruzado entre tesouras e pentágono. Sequencialmente, cada tesoura é inserida no ponto médio das estroncas 31 a 35 e os cabos-X são conectados aos seus nós vizinhos à esquerda e à direita tanto no nível inferior (nós de 1 a 5) quanto no superior (nós de 11 a 15). A tesoura formada pelas estroncas 40 a 41, por exemplo, “corta” a estronca 33. O nó 5 da estronca 41 se conecta ao nó 5 da 35 e o nó 12 da estronca 40 se conecta ao nó 12 da estronca 31. Do nó 6 – partilhado pela tesoura – saem dois cabos-X

inferiores, que se conectam ao nó 3 e nó 4, e dois superiores, que vão em direção ao nó 3 e 14. Este processo se repete para todas as cinco tesouras. As Figuras 3-19 a 3-24 a seguir mostram o tutorial da inserção de cada tesoura juntamente com a ligação dos cabos-X.

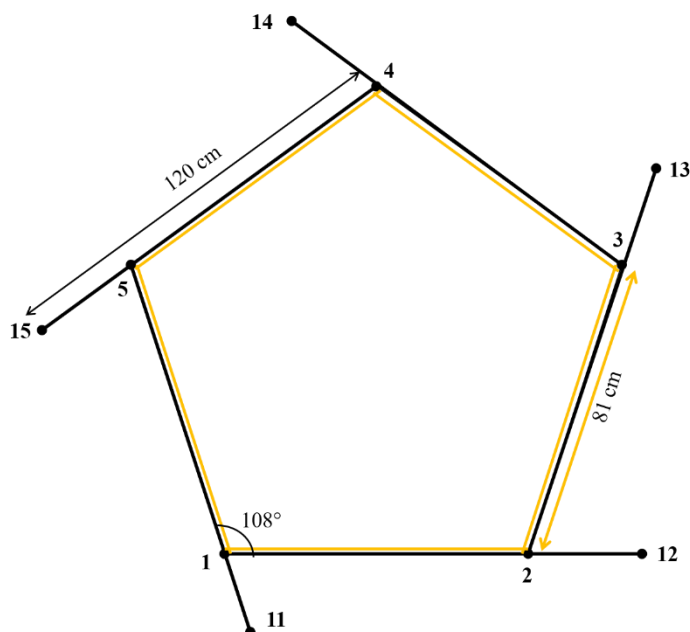


Figura 3-19: Layout inicial do módulo no plano

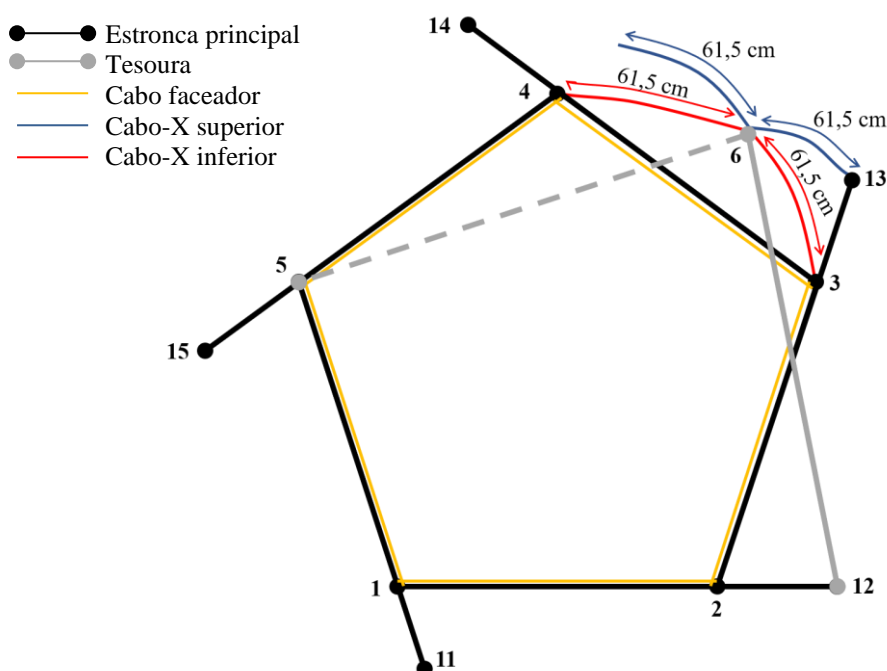


Figura 3-20: Passo (1) – Inserção da tesoura 6⁴ e conexão dos cabos-X aos nós 3, 4 e 13

⁴ Linha tracejada indica a perna da tesoura que passa por baixo da estronca principal e se liga a um nó do pentágono inferior, enquanto que a linha cheia indica a perna que passa por cima e se conecta a um nó do pentágono superior.

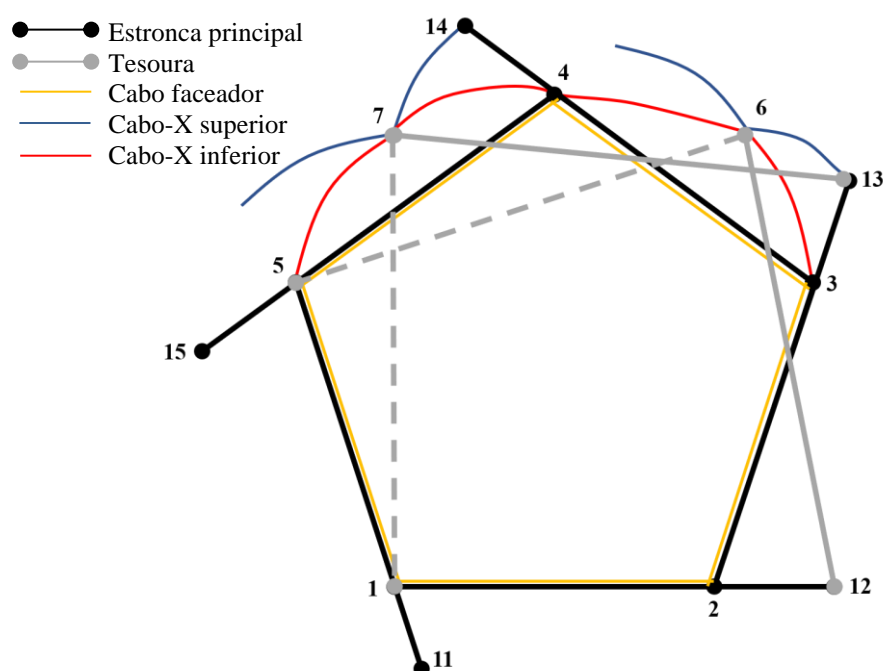


Figura 3-21: Passo (2) – Inserção da tesoura 7 e conexão dos cabos-X aos nós 4, 5 e 14

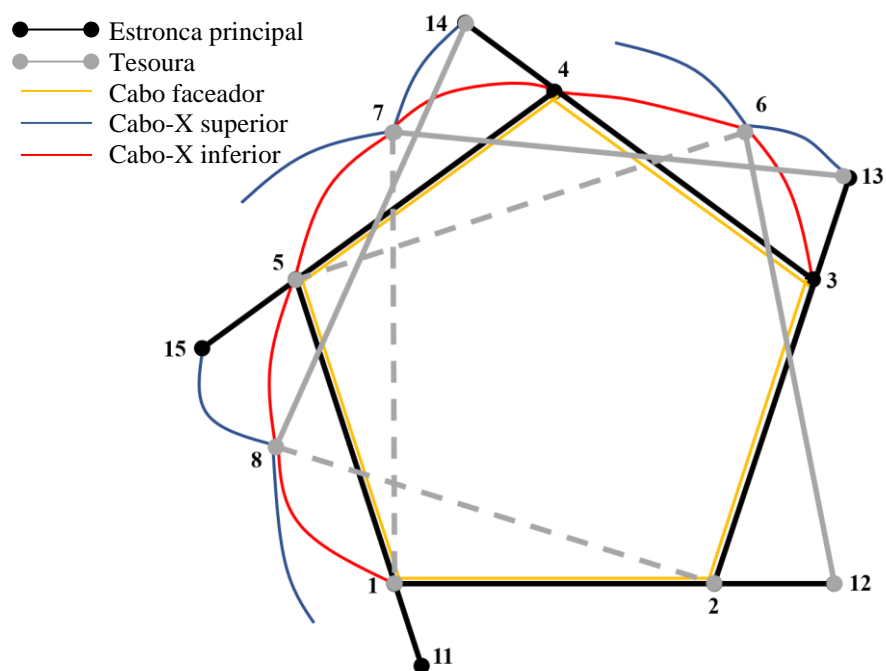


Figura 3-22: Passo (3) – Inserção da tesoura 8 e conexão dos cabos-X aos nós 5, 1 e 15

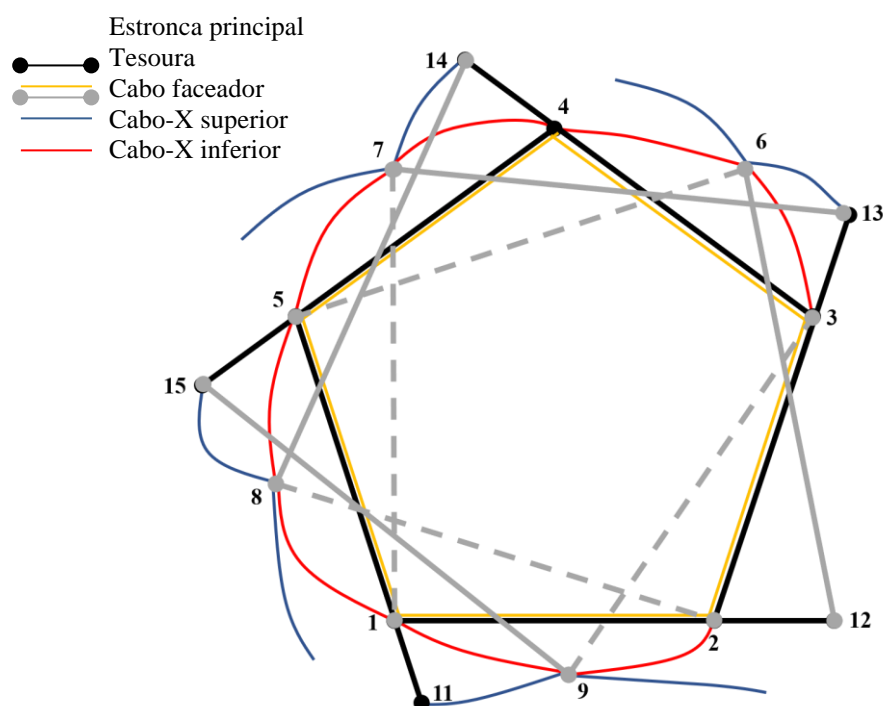


Figura 3-23: Passo (4) – Inserção da tesoura 9 e conexão dos cabos-X aos nós 1, 2 e 11

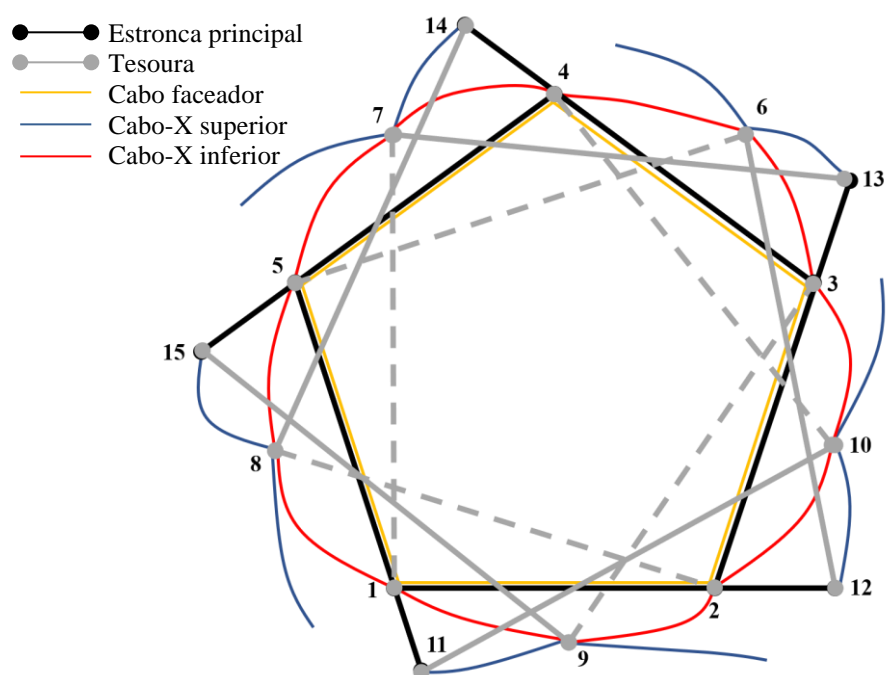


Figura 3-24: Passo (5) – Inserção da tesoura 10 e conexão dos cabos-X aos nós 2, 3 e 12



Figura 3-25: Módulo em escala 1:5,65 montado no plano

Neste momento, todos os elementos estão conectados exceto: (i) os cinco cabos faceadores que formam o pentágono superior e (ii) cinco cabos-x que ligam os nós intermediários aos superiores. Como a estrutura está dobrada no plano, a distância entre nós é maior do que o comprimento dos cabos, de modo que é necessário primeiramente desdobrá-la para que estes elementos possam ser fixados ao sistema.

- Passo #4: Elevação

Uma vez que o módulo está completo no chão, como visto na Figura 3-25, um mastro é colocado no centro do pentágono e cinco cabos temporários ligam os nós 11, 12, 13, 14 e 15 à parte superior do poste. Polias então são usadas para elevar a estrutura. O módulo se desdobra até atingir determinada altura em que todos os cabos-X já conectados estão ativados, ou seja, não há folga. Em seguida as extremidades soltas dos cinco cabos-X livres são presas nos nós do pentágono superior. Finalmente os cabos faceadores que formam o pentágono superior são fixados um a um.

Quando o último cabo faceador é introduzido, a estrutura enrijece por completo. Todos os cabos estão ativados e o módulo está totalmente desdobrado. Nesta fase, é possível retirar os cabos de montagem temporários e rotacionar o

modelo em 90° de modo que os pentágonos inferior e superior fiquem na vertical, como pode ser observado na Figura 3-27.

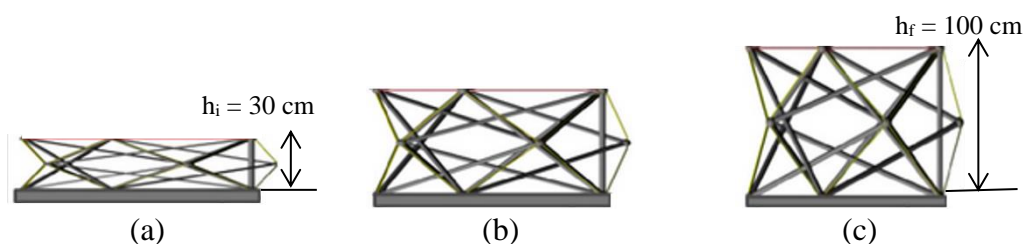


Figura 3-26: Elevação gradual da estrutura com o auxílio de polias: (a) estrutura dobra no plano, (b) módulo em fase de desdobramento e (c) estrutura completamente levantada

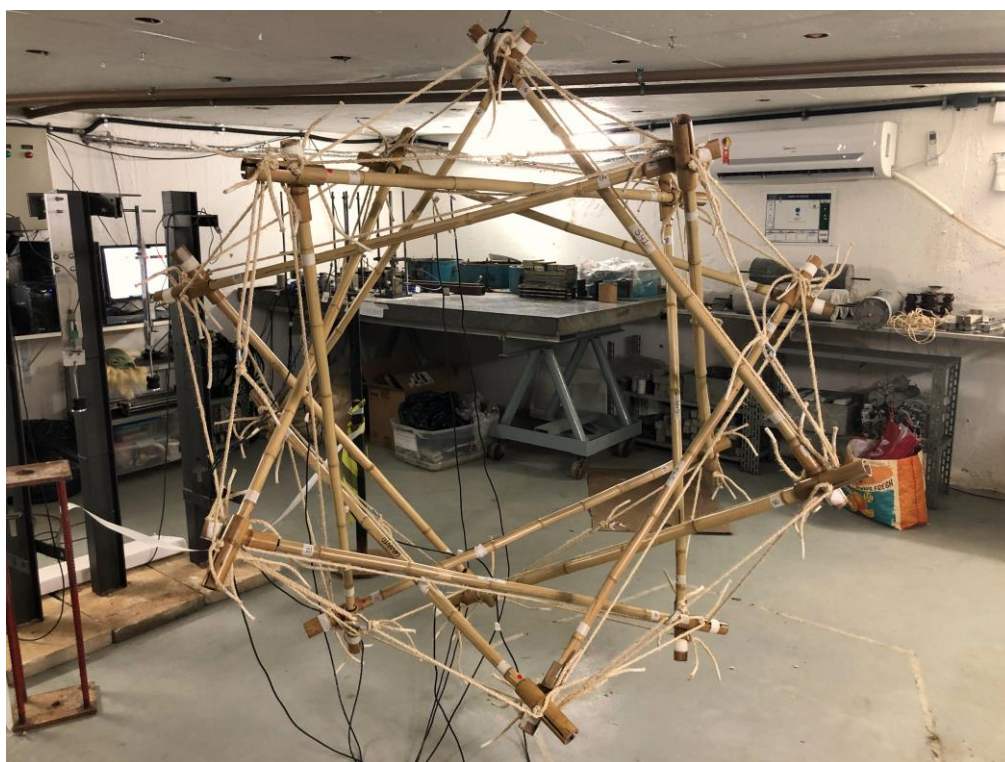


Figura 3-27: Módulo em escala 1:5,65 na posição final para ensaio

Faz-se necessário ressaltar um ponto importante deste processo construtivo que não foi abordado anteriormente. Para viabilizar a execução desta estrutura, foi crucial refletir sobre como os nós funcionariam, isto é, de que materiais seriam feitos, como dialogariam com os demais elementos da estrutura, como seriam projetados e confeccionados. Após muita ponderação, chegou-se à conclusão que duas frentes precisavam ser abordadas.

O primeiro ponto foi a utilização da técnica TensegrityToy. Mencionado anteriormente na seção 3.3, este método possibilitou que a conexão das estroncas

se concretizasse de modo que as espessuras dos colmos não fossem um empecilho e permitindo mobilidade no movimento durante o processo de montagem.

Outro ponto, talvez ainda mais fundamental, foi a implementação das ponteiros desenvolvidas pelo Prof. Mario Seixas durante seus muitos anos de trabalho como sócio diretor da Bambutech, professor no Departamento de Artes & Design da PUC-Rio e pesquisador no Laboratório de Investigação em Living Design (LILD) da PUC-Rio. A ponteira, aqui chamada corriqueiramente de copo, é uma pequena peça de bambu com diâmetro um pouco maior do que da estronca, na qual são feitos dois entalhes opostos a 180°, que se encaixa nas extremidades do colmo e por onde os cabos se fixam. Neste trabalho, especificamente, os copos possuem cerca de 4 cm de diâmetro e foram cortados com 16 cm de comprimento – 10 cm acima do nó e 6 cm abaixo. Os entalhes, feitos manualmente com auxílio de serra e estilete na parte superior do copo, têm cerca de 9 cm de comprimento e 7 mm de abertura, de modo que os cabos de sisal possam ser introduzidos sem muito esforço e não escapem facilmente. Deste modo, o copo não só faz a conexão dos cabos às estroncas, como também é responsável pela ligação entre as próprias estroncas por meio da técnica TensegrityToy, como ilustra a Figura 3-28.

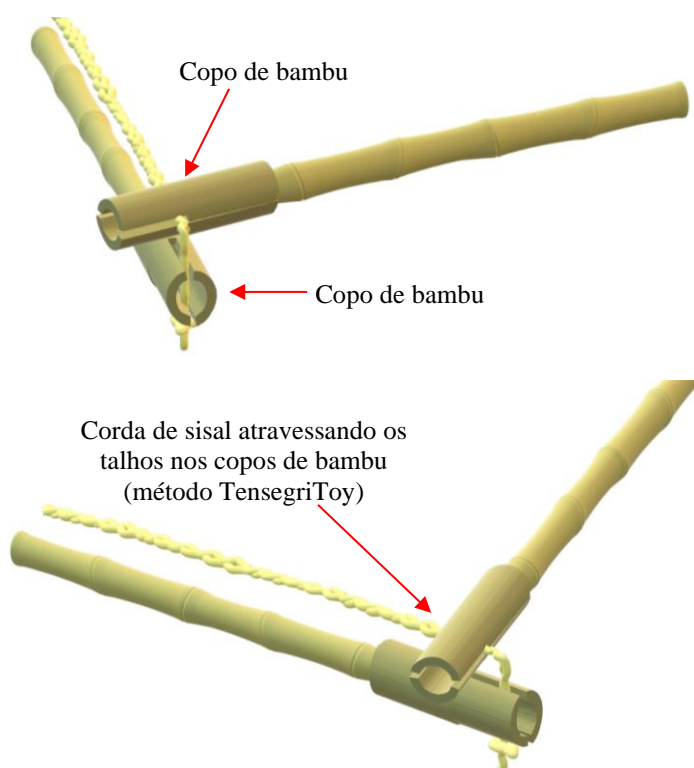


Figura 3-28: Esquematização⁵ do copo de bambu em conjunto com o método TensegrityToy

⁵ Ilustrações da engenheira e artista Isabela de Paula Salgado

4. Princípios Teóricos e Descrição dos Ensaios Estático e Dinâmico

A construção e montagem do módulo em escala aproximada de 1:6 foi feita integralmente a partir de técnicas vernaculares que, embora cumpram com as premissas estabelecidas para este trabalho, geram algumas questões no que diz respeito ao comportamento mecânico da estrutura. Desta forma, decidiu-se investigar o desempenho do módulo a partir de duas frentes: (i) comportamento estático e (ii) comportamento dinâmico. Neste capítulo são apresentados os princípios teóricos, detalhes sobre softwares utilizados, equipamentos empregados e procedimentos adotados que servirão como base para os resultados alcançados no Capítulo 5.

4.1. Investigação do Comportamento Estático

Tensegrities são estruturas em equilíbrio sob um estado inicial de pretensão, como descrito anteriormente, com comportamento complexo, em que o estado de pretensão, obtido a partir da pretensão dos elementos individuais, pode ser modificado por cargas externas. Neste trabalho, buscou-se verificar a validade de métodos indiretos para a identificação do nível de pretensão aplicado na estrutura através das deformações atuantes nas estroncas. Calcular o estado de pretensão de uma estrutura pode ser difícil sem utilizar equipamentos pesados e/ou inoportunos como células de carga, por exemplo (AVERSENG, 2004; DUBÉ & CROSNIER, 2004 *apud* DUBÉ *et al.*, 2008). Portanto, neste trabalho buscou-se vincular medições de estados de tensão a um equipamento acessível e portátil, fazendo uso de técnicas de extensometria para avaliar o estado de pretensão real do módulo tensegrity.

4.1.1. Referencial Teórico

A análise estática de estruturas está relacionada à determinação da distribuição de tensões em materiais sob diferentes condições de carga. A análise

experimental de tensões pode ser realizada medindo a deformação da peça que está submetida a um carregamento. Assim, as bandas extensométricas de circuito impresso (ou simplesmente extensômetros), que permitem medir a deformação através da variação da resistência elétrica, são utilizadas com muita frequência na Engenharia Civil (BLANCO *et al.*, 2008). Os extensômetros, como ilustrado na Figura 4-1, são baseados na descoberta feita por Lord Kelvin em 1856, que observou que, ao carregar mecanicamente fios de ferro e cobre, era produzida uma variação na resistência elétrica. A medição foi feita com a ajuda de uma ponte de Wheatstone, usando um galvanômetro como indicador (MORA *et al.*, 2012).

Para calcular a deformação de uma estrutura, o extensômetro deve ser colado sobre a superfície da mesma e depois mede-se a variação de resistência do sensor (usando vários esquemas baseados na ponte de Wheatstone). Deste modo, a deformação $\varepsilon_a = \frac{L_2 - L_1}{L_1} = \frac{\Delta L}{L}$ pode ser calculada usando a Eq. (4-1):

$$\varepsilon_a = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad \text{Eq. (4-1)}$$

onde K é uma característica constante do extensômetro (também é chamado de fator do sensor, FS), que possui um valor próximo a 2 dependendo do fabricante, e traduz a relação entre a variação na resistência e a deformação longitudinal. Assim, medindo-se ΔR é possível calcular a deformação do extensômetro e, conseqüentemente, da própria estrutura, para a qual deve-se garantir que o extensômetro esteja bem aderido a ela. Os valores de resistência usualmente empregados correspondem a 120 Ω e 350 Ω , embora outros valores como 500, 1000 e 5000 Ω possam ser utilizados para casos especiais (DALLY *et al.*, 2010).

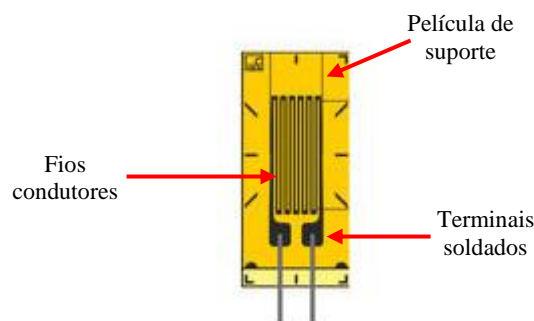


Figura 4-1: Esquematização de um extensômetro unidirecional (adaptado de BLANCO *et al.* (2008))

Como mencionado, o circuito básico de medição usado na extensometria é a ponte Wheatstone, cuja disposição é mostrada na Figura 4-2.

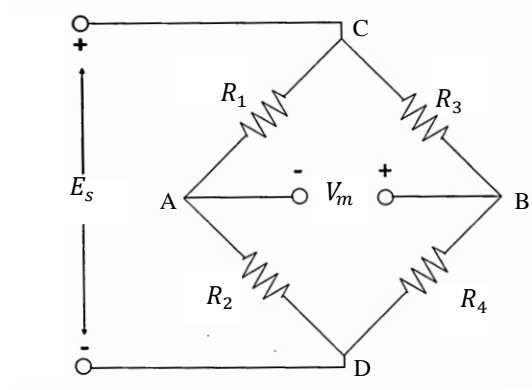


Figura 4-2: Ponte de Wheatstone (adaptado de MORA et al. (2012))

Se inicialmente as quatro resistências forem iguais e tiverem valor R_0 , a ponte será equilibrada. Porém, ao variá-las ocorre uma variação na tensão, que é representada pela seguinte equação.

$$V_m = \frac{E_s}{4} \cdot \frac{\Delta R_2 - \Delta R_1 + \Delta R_3 - \Delta R_4}{R_0}$$

Segundo MORA et al. (2012), quando a montagem é feita em 1/4 de ponte, uma das quatro resistências é variável, enquanto que as outras são mantidas com valores fixos durante a medição. A Figura 4-3 mostra um circuito em que a resistência R_2 é substituída pela resistência R_T do extensômetro. Inicialmente, quando não há carregamento externo, a resistência do sensor R_{T0} coincide com as demais e a ponte está em equilíbrio, ou seja, $R_1 = R_3 = R_4 = R_{T0} = R_0$.

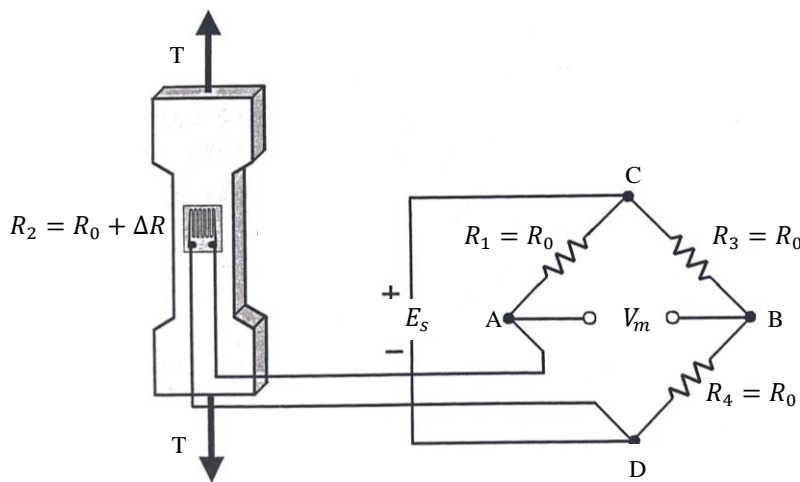


Figura 4-3: Montagem com 1/4 de ponte (adaptado de MORA et al. (2012))

Se o extensômetro sofre uma variação positiva ou negativa de valor ΔR , tem-se que a tensão em desequilíbrio é igual a $V_m = \frac{E_s}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}$ e, tendo em conta a Eq. (4-1), a deformação do extensômetro pode ser calculado como mostrado abaixo.

$$\varepsilon = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{1}{K} \cdot \frac{4V_m}{E_s} \quad \text{Eq. (4-2)}$$

A seguir apresenta-se a descrição do ensaio estático em que os conceitos abordados acima são colocados em prática.

4.1.2. Set up do Ensaio Experimental

O objetivo primário da realização do ensaio estático foi avaliar experimentalmente as tensões atuantes nas estroncas do módulo. Para cumprir tal tarefa, optou-se por instrumentar o modelo reduzido com extensômetros elétricos de ¼ de ponte a fim de estimar os esforços exercidos durante o ensaio estático. Como mencionado no Capítulo 3, o tensegrity (Figura 4-4) é composto por quinze estroncas de bambu, cada qual com 120 cm de comprimento e diâmetro médio de 3 cm e espessura média de 3,8 mm com resistência à compressão de aproximadamente 69 MPa e módulo de elasticidade próximo a 19,5 GPa, e trinta cabos de sisal com 6 mm de diâmetro nominal, resistência à tração de cerca de 80 MPa e módulo igual a 1,05 GPa.



Figura 4-4: Módulo tensegrity com aproximadamente 170 cm de altura (aluna para escala)

Oito estroncas específicas – nº 31, 32, 33, 36, 37, 38, 39 e 40 de acordo com Tabela 3-1 – foram selecionadas para colagem dos extensômetros, na direção axial, baseado na simetria dos esforços atuantes (como mostrado em detalhe no próximo

capítulo). As leituras dos extensômetros foram calibradas para medir as deformações nos bambus e, conseqüentemente, obter as tensões axiais de compressão atuantes nos membros. Os sinais elétricos dos extensômetros foram acondicionados pelo módulo NI 9235 (¼ de ponte) conectado ao chassi cDAQ-9174, ambos da National Instruments, e este por sua vez ligado a um computador via USB. Desse modo, os sinais digitais correspondentes à variação de tensão elétrica (V) foram processados através do software LabVIEW 8.5 a fim de convertê-los, enfim, em deformação (ϵ). Os extensômetros empregados no ensaio estático foram adquiridos da EXCEL SENSORES, possuem resistência de 120 Ω e fator F.S. igual a 2,15, segundo o código de identificação PA-06-250BA-120-L.

Para execução do ensaio, as seguintes condições de contorno foram estabelecidas:

- O módulo está submetido apenas à força da gravidade no que diz respeito aos carregamentos estáticos atuantes;
- As estroncas estão sofrendo esforços de compressão em estado uniaxial;
- O módulo ficou suspenso por um gancho metálico fixado no nó 6, impedindo seu movimento translacional nos eixos x, y e z (Figura 4-5).
- Os valores médios de deformação foram medidos na metade do comprimento da estronca (Figura 4-6).
- Não existem rebaixos ou entalhes próximos ao extensômetro;
- A estrutura foi monitorada durante 324 horas consecutivas.



Figura 4-5: Apoio do tensegrity

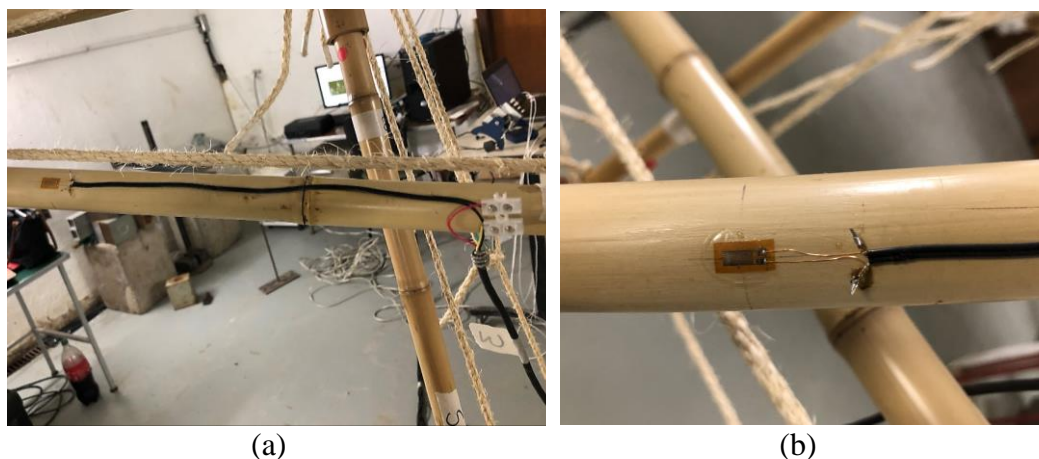


Figura 4-6: Instalação dos extensômetros nas estroncas de bambu: (a) utilização de conector Sindal 6mm para conexão do extensômetro à NI 9235 e (b) gabarito para colagem do sensor

Paralelamente, também foi feita a avaliação das condições do ambiente envolvendo o ensaio. O módulo foi instalado no Laboratório de Fluência, localizado dentro do Laboratório de Estruturas e Materiais da PUC-Rio com condições de temperatura e umidade controladas. Durante toda a execução do ensaio, o espaço se manteve com uma temperatura entre 22°C e 23°C e umidade relativa entre 40% e 50%.

4.2. Investigação do Comportamento Dinâmico

Segundo MEIRELES (2007) a análise dinâmica, também chamada de análise de vibrações, avalia a resposta da estrutura quando submetida à ações externas, considerando a variação rápida destas no tempo e a mobilização de forças de inércia do sistema estrutural. Na Engenharia Civil, a análise dinâmica já é um tema de aplicação corrente, usualmente utilizada para obter e estudar os parâmetros dinâmicos das estruturas, designadamente, as frequências naturais, os modos de vibração e os amortecimentos modais, essenciais para avaliar o seu comportamento estrutural dinâmico (MENDES, 2008).

Esta seção objetiva efetuar uma breve revisão dos fundamentos da análise dinâmica de estruturas necessários à compreensão do tema, elucidando questões como equações de equilíbrio dinâmicos, conceitos de frequência natural, amortecimento, modos de vibração e análise modal, seja no domínio do tempo ou da frequência, bem como descrever o ensaio realizado para obtenção destes parâmetros.

4.2.1. Referencial Teórico

As propriedades físicas essenciais de qualquer sistema estrutural linearmente elástico sujeito a uma fonte externa de excitação são: sua massa, suas propriedades elásticas – flexibilidade ou rigidez – e seu mecanismo de perda de energia – amortecimento (CLOUGH & PENZIEN, 2003). Genericamente, e independentemente do tipo de excitação, o processo de caracterização do comportamento dinâmico de estruturas (Figura 4-7) é realizado através do estabelecimento de um modelo matemático que represente as propriedades geométricas e físicas da estrutura – expressas normalmente através de matrizes de massa, rigidez e amortecimento – e da aplicação das leis da Mecânica, resultando daí num sistema de equações diferenciais a partir do qual é possível obter as relações excitação-resposta que caracterizam o movimento oscilatório estrutural (MENDES, 2008).

Dentro desse contexto, a frequência natural de um sistema estrutural é uma medida associada ao número de oscilações por segundo (normalmente expresso em Hz) quando este é retirado da sua condição de equilíbrio estático estável, dependendo fundamentalmente da rigidez que o sistema apresenta e de sua massa (ROSA, 2005; ALVES FILHO, 2005). Ao passo que os modos de vibração são a forma como a estrutura vibra, relacionada a cada uma de suas frequências naturais. Ou seja, para cada frequência natural existe um modo de vibração específico, ou um perfil de vibração para a estrutura (BOLINA *et al.*, 2014). Segundo RESENDE (2003) o amortecimento é a propriedade de uma estrutura em dissipar energia e este pode ser gerado através de três mecanismos: arraste fluido dinâmico (amortecimento fluido ou viscoso), dissipação de energia interna do material (amortecimento estrutural, também denominado histerético ou sólido) e por atrito entre duas superfícies secas ou de lubrificação insuficientes que se deslocam entre si (amortecimento de Coulomb). Segundo SORIANO (2014), na prática corrente da engenharia, o modelo de amortecimento viscoso é o mais utilizado, porque conduz a equações de movimento de resoluções mais simples e fornece resultados satisfatórios em grande parte das aplicações.

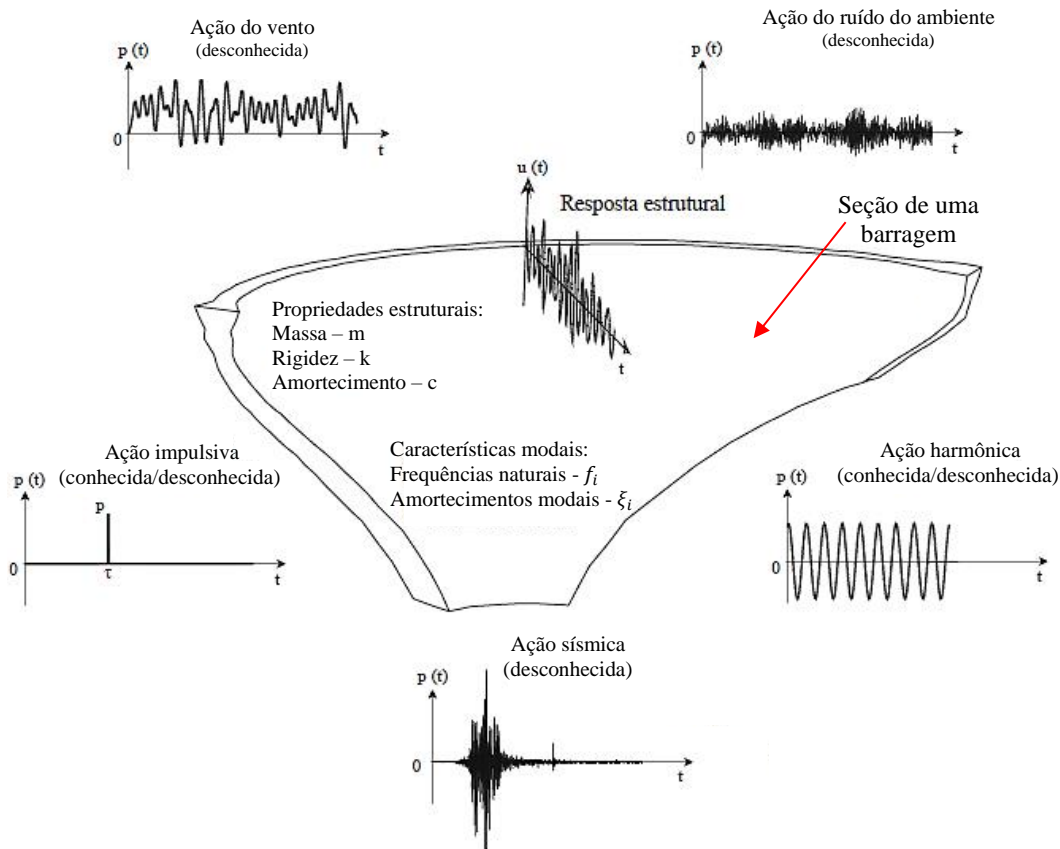


Figura 4-7: Representação esquemática da caracterização do comportamento dinâmico de uma estrutura submetida a diferentes tipos de excitações (adaptado de MENDES (2008))

O comportamento dinâmico dos modelos estruturais pode ser avaliado com um ou com vários graus de liberdade. De acordo com CLOUGH & PENZIEN (2003), o modelo mais simples de um sistema estrutural pode ser representado como um oscilador com um grau de liberdade conforme mostra a figura abaixo.

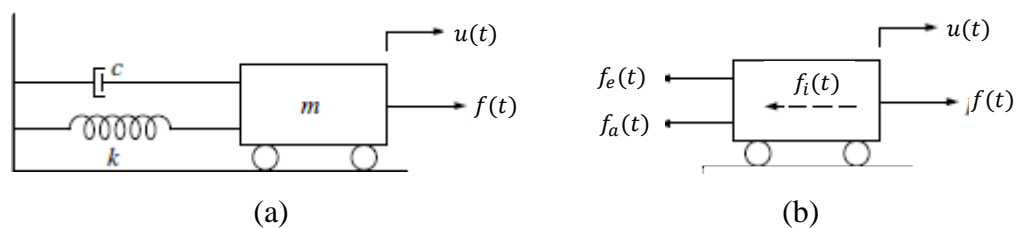


Figura 4-8: Oscilador com um grau de liberdade: (a) Componentes básicos e (b) Forças em equilíbrio (adaptado de CLOUGH & PENZIEN (2003))

A partir do diagrama de corpo livre ilustrado na Figura 4-8b pode-se escrever a equação de equilíbrio das forças atuantes.

$$f_i(t) + f_a(t) + f_e(t) = f(t)$$

O princípio de D'Alembert estabelece que um corpo com massa m desenvolve uma a força de inércia $f_i(t)$ proporcional e oposta à aceleração, \ddot{u} , de modo que:

$$f_i(t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m\ddot{u}$$

Assumindo que o amortecimento é viscoso, a força de amortecimento é dada pelo produto da constante de amortecimento, c , pela velocidade, \dot{u} .

$$f_a(t) = c\dot{u}$$

Por fim, a força elástica é tida como o produto entre a rigidez da mola, k , e o deslocamento, u .

$$f_e(t) = ku$$

Deste modo, a equação de equilíbrio das forças atuantes pode ser escrita como a equação de equilíbrio dinâmico abaixo.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad \text{Eq. (4-3)}$$

No caso mais simples, isto é, vibração livre não amortecida, a força externa é considerada nula e o efeito do amortecimento pode ser desprezado. Assim, a frequência natural do sistema de um grau de liberdade pode ser obtida resolvendo a Eq. (4-4) diferencial homogênea.

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \rightarrow \ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \quad \text{Eq. (4-4)}$$

Verifica-se que a Eq. (4-4) admite as soluções harmônicas:

$$\begin{cases} u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) \\ u(t) = a_2 \sin(\omega_n t) \end{cases}$$

onde a_1 e a_2 são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais do movimento e ω_n é uma característica do sistema mecânico em questão também a ser determinada.

Assim, a solução completa da equação é dada por:

$$u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \quad \text{Eq. (4-5)}$$

onde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural angular característica do oscilador simples em rad/s.

A solução particular da equação acima pode ser obtida definindo as constantes a_1 e a_2 a partir das condições iniciais do problema.

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \leftrightarrow a_1 \cos(\omega_n \cdot 0) + a_2 \sin(\omega_n \cdot 0) = u_0 \therefore a_1 = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \leftrightarrow -a_1 \omega_n \sin(\omega_n \cdot 0) + a_2 \omega_n \cos(\omega_n \cdot 0) = \dot{u}_0 \therefore a_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \end{cases}$$

A solução particular da Eq. (4-5) é dada, portanto, como:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad \text{Eq. (4-6)}$$

A Eq. (4-6) define o deslocamento do oscilador ao longo do tempo provocado por condições iniciais não nulas, isto é, $u(0) \neq 0$ e $\dot{u}(0) \neq 0$.

Ressalta-se que a desconsideração do amortecimento na equação do equilíbrio dinâmico (Eq. (4-3)) é uma simplificação para a solução do problema de autovalores (frequências naturais) e autovetores (modos de vibração). Isto justifica-se porque, na prática, o amortecimento tem um valor baixo e, normalmente, não interfere no cálculo das frequências naturais e modos de vibração (ALVES FILHO, 2005).

Com base no termo de frequência natural angular, tem-se o período natural de vibração $T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ [s], e a frequência cíclica natural $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ [Hz].

Segundo CLOUGH & PENZIEN (2003), a qualidade do resultado obtido com uma aproximação de um grau de liberdade depende de muitos fatores, como da distribuição espacial e a variação no tempo da carga dinâmica bem como das propriedades de rigidez e massa da estrutura. Nesse sentido, a resposta dinâmica de uma estrutura pode não ser descrita adequadamente por um modelo de um grau de liberdade, principalmente se ela apresentar mais de uma possibilidade de deslocamento. Desse modo, a solução da equação do equilíbrio dinâmico é apenas uma aproximação do comportamento real, devendo-se optar, em função da complexidade da estrutura, pela sua representação com vários graus de liberdade. Portanto, considerando uma estrutura com vários graus de liberdade, a equação de movimento do sistema representado na Figura 4-9 pode ser formulada expressando o equilíbrio das forças atuantes associadas a cada grau de liberdade.

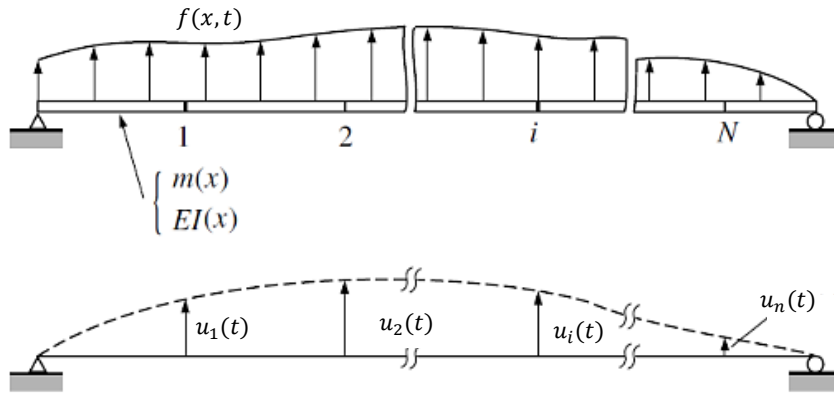


Figura 4-9: Discretização genérica de uma viga (adaptado de CLOUGH & PENZIEN (2003)).

Em geral, quatro tipos de forças estão agindo sobre um ponto i qualquer: a carga externa aplicada, $f_i(t)$ e as forças resultantes do movimento, ou seja, a força de inércia, f_{Ii} , a força de amortecimento, f_{Ai} , e a força elástica, f_{Ei} . Assim, para cada um dos vários graus de liberdade, o equilíbrio dinâmico pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{A1} + f_{E1} &= f_1(t) \\ f_{I2} + f_{A2} + f_{E2} &= f_2(t) \\ f_{I3} + f_{A3} + f_{E3} &= f_3(t) \\ &\dots \end{aligned}$$

Na forma vetorial, tem-se que:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_E = \mathbf{f}(t)$$

Cada uma das forças resistentes é expressa por meio de um conjunto apropriado de coeficientes de influência. A força elástica desenvolvida no ponto 1, por exemplo, depende dos componentes de deslocamento desenvolvidos em todos os pontos da estrutura, como mostrado abaixo.

$$f_{E1} = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + \dots + k_{1n}u_n$$

Similarmente, a força elástica correspondente ao grau de liberdade u_2 é:

$$f_{E2} = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + \dots + k_{2n}u_n$$

Logo, de forma genérica, é possível escrever a força elástica em função dos graus de liberdade, tal que:

$$f_{Ei} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + k_{i3}u_3 + \dots + k_{in}u_n$$

O coeficiente k_{ij} , aqui chamado de coeficiente de rigidez, representa a força na direção i provocada por um deslocamento unitário na direção j , enquanto todos os outros deslocamentos são impostos como nulos.

A forma matricial pode, então, ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} f_{E1} \\ f_{E2} \\ \vdots \\ f_{Ei} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_E = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

onde \mathbf{k} é chamada de matriz de rigidez da estrutura (para o conjunto especificado de coordenadas de deslocamento) e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos que representa a forma deslocada da estrutura.

Assumindo que o amortecimento é do tipo viscoso, as forças de amortecimento correspondentes aos graus de liberdade podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{A1} \\ f_{A2} \\ \vdots \\ f_{Ai} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \\ \vdots \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_A = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}$$

na qual \mathbf{c} , chamada de matriz de amortecimento da estrutura (para os graus de liberdade especificados), é composta por entradas c_{ij} correspondentes à força no nó i devida à velocidade no nó j , e $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidades.

As forças de inércia podem ser expressas de maneira semelhante por um conjunto de coeficientes de massa, que representam a relação entre as acelerações dos graus de liberdade e as forças de inércia resultantes.

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{Ii} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \\ \vdots \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$$

onde m_{ij} é a força no nó i referente à aceleração no nó j , \mathbf{m} é a de matriz de massa da estrutura e $\ddot{\mathbf{u}}$ é seu vetor de acelerações, ambos definidos para um determinado conjunto de coordenadas de deslocamento.

Assim, de forma semelhante à Eq. (4-3), o equilíbrio dinâmico completo da estrutura, considerando todos os graus de liberdade pode ser escrito conforme mostrado abaixo.

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad \text{Eq. (4-7)}$$

A Eq. (4-7) expressa as n equações de movimento que servem para definir a resposta de um sistema com múltiplos graus de liberdade, logo, a ordem da matriz

é correspondente ao número de graus de liberdade usado na descrição dos deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura.

Na prática, costuma-se empregar o método de elementos finitos para obter as matrizes de massa e da rigidez da estrutura. Estas matrizes, então, são empregadas na formulação de um problema de autovalores e autovetores, cuja solução apresenta as frequências naturais e os modos de vibração (LOFRANO, 2003) da estrutura. De acordo com SORIANO (2014), em caso de vibração livre não amortecida, o sistema de equações de movimento de um oscilador com dois graus de liberdade particulariza-se na forma homogênea abaixo (Eq. (4-8)). É importante notar que o estudo de um sistema com dois graus de liberdade representa um caso particular daquele com vários graus, o que facilita o entendimento do problema dinâmico quando múltiplos graus são considerados SORIANO (2014).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{Eq. (4-8)}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esta forma admite a seguinte solução análoga à Eq. (4-7)):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1(j)} \\ \varphi_{2(j)} \end{Bmatrix} \cos(\omega_j t - \phi_j) \\ \therefore \mathbf{u}(t) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \end{aligned} \quad \text{Eq. (4-9)}$$

em que ω_j é frequência natural, ϕ_j é o ângulo de fase e $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$ é a matriz de modos de vibração, onde $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1$ corresponde ao primeiro modo natural de vibração, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2$ é o segundo modo de vibração e assim em diante. Tal solução fornece a seguinte derivada:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j \omega_j^2 \cos(\omega_j t - \phi_j)$$

Substituindo a derivada acima na Eq. (4-8), tem-se que:

$$(-\mathbf{M}\omega_j^2 + \mathbf{K})\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) = \mathbf{0} \quad \text{Eq. (4-10)}$$

A Eq. (4-10) só é satisfeita para o seguinte sistema de equações homogêneas:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_j^2)\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j = \mathbf{0}$$

que caracterizam um problema de autovalor.

Esse sistema tem a solução trivial $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j = \mathbf{0}$ que representa a ausência de movimento. Soluções não triviais podem ser obtidas igualando o determinante a zero, conforme mostrado abaixo.

$$\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_j^2) = 0 \quad \text{Eq. (4-11)}$$

A expansão dessa expressão resulta na equação característica, também chamada de equação de frequências, que, neste caso, trata-se de uma equação polinomial de segundo grau em ω_j^2 que fornece as soluções (autovalores) ω_1^2 e ω_2^2 (quadrado das frequências naturais de vibração). Substituindo as soluções na Eq. (4-10) e resolvendo o sistema de equações homogêneas, obtém-se os autovetores $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}_2$, chamados de modos naturais de vibração. Além disso, realizando a ordenação crescente, em que $\omega_1 < \omega_2$, tem-se que ω_1 é a primeira frequência natural de vibração e que $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$ é o primeiro modo de vibração.

Além da análise modal teórica apresentada acima, há um segundo procedimento, denominado análise modal experimental, no qual os dados experimentais são utilizados para determinar as frequências modais, fatores e amortecimento e modos de vibração através de Funções de Respostas em Frequência (FRFs) ou resposta impulsiva (MAIA & SILVA, 1997 *apud* LOFRANO, 2003). Segundo ROSA (2005), as características dinâmicas de uma estrutura podem ser determinadas por uma função de transferência, seja esta uma função de receptância (que relaciona deslocamento e força), de mobilidade (que relaciona velocidade e força), de inertância (que relaciona aceleração e força), de rigidez dinâmica (que relaciona força e deslocamento), de impedância mecânica (que relaciona força e velocidade) ou de massa aparente (que relaciona força e aceleração). A FRF pode ser entendida, ludicamente, conforme a expressão (BILOSOVÁ, 2011) e a Figura 4-10 abaixo:

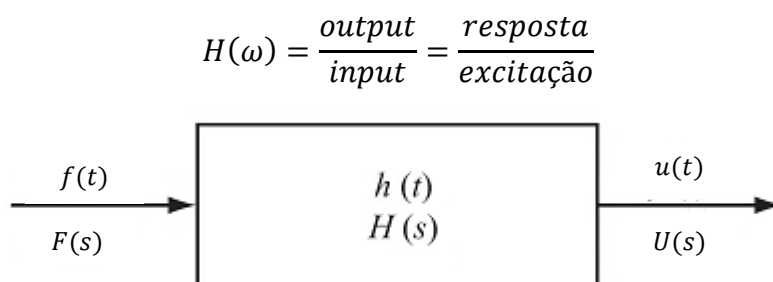


Figura 4-10: Sistema linear como uma 'caixa preta' com sinais de tempo e equivalentes no domínio de Laplace (adaptado de BRANDT (2011))

Segundo BRANDT (2011), aplicando a transformada de Laplace nos dois lados da Eq. (4-7), obtém-se que:

$$(ms^2 + cs + k)U(s) = F(s)$$

Logo, a função de transferência pode ser obtida conforme mostrado abaixo.

$$H(s) = \frac{U(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{s^2 + sc/m + k/m} \quad \text{Eq. (4-12)}$$

Para sistemas de segunda ordem, é usual escrever o denominador na "forma padrão" abaixo.

$$H(s) = \frac{U(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + s2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad \text{Eq. (4-13)}$$

em que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural sem amortecimento em [rad/s] e $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ é fator de o amortecimento, adimensional.

A resposta de impulso, $h(t)$, é calculada aplicando a transformada inversa de Laplace da função de transferência. Usando a transformada de Fourier é possível converter a resposta de impulso na função de resposta em frequência, $H(\omega)$.

$$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{F(\omega)} \rightarrow H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad \text{Eq. (4-14)}$$

A FRF expressa pela Eq. (4-14) é classificada como uma função de receptância para um sistema com um grau de liberdade, em geral denotada por $\alpha(\omega)$. Esta solução complexa descreve a relação entre a resposta de frequência em termos de deslocamento e da força de excitação aplicada, definindo as suas propriedades dinâmicas da estrutura (AGUILERA, 2005 *apud* ROSA, 2005).

Similarmente, um sistema com N graus de liberdade é descrito por um modelo modal com N frequências naturais e N modos de vibração através de um conjunto de FRFs diferentes. Cada função de resposta em frequência pode ser escrita como um somatório de termos, cada qual referente à contribuição de cada modo de vibração sobre a resposta total (ROSA, 2005). Assim, a receptância pode ser escrita como:

$$\alpha_{ks}(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{A_{ks}^j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\eta_j\omega\omega_j} \quad \text{Eq. (4-15)}$$

onde η_j é o fator de perda modal (e é igual a duas vezes o fator de amortecimento); A_{ks}^j é a constante modal; ω_j é a frequência natural relativa ao j -ésimo modo de vibração; ω é a frequência do carregamento; α_{ks} é a resposta modal do sistema, no qual k é a posição do deslocamento e s é a posição da força.

É interessante notar que a análise no domínio do tempo pode ser passada para uma análise no domínio da frequência com a transformada direta de Fourier e

retorna-se ao domínio do tempo com a transformada de Fourier inversa, ou seja, as equações diferenciais de movimento são convertidas em equações algébricas na variável frequência, cujas soluções são transfeitas de volta ao domínio do tempo como exemplificado na Figura 4-11 e na Tabela 4-1.

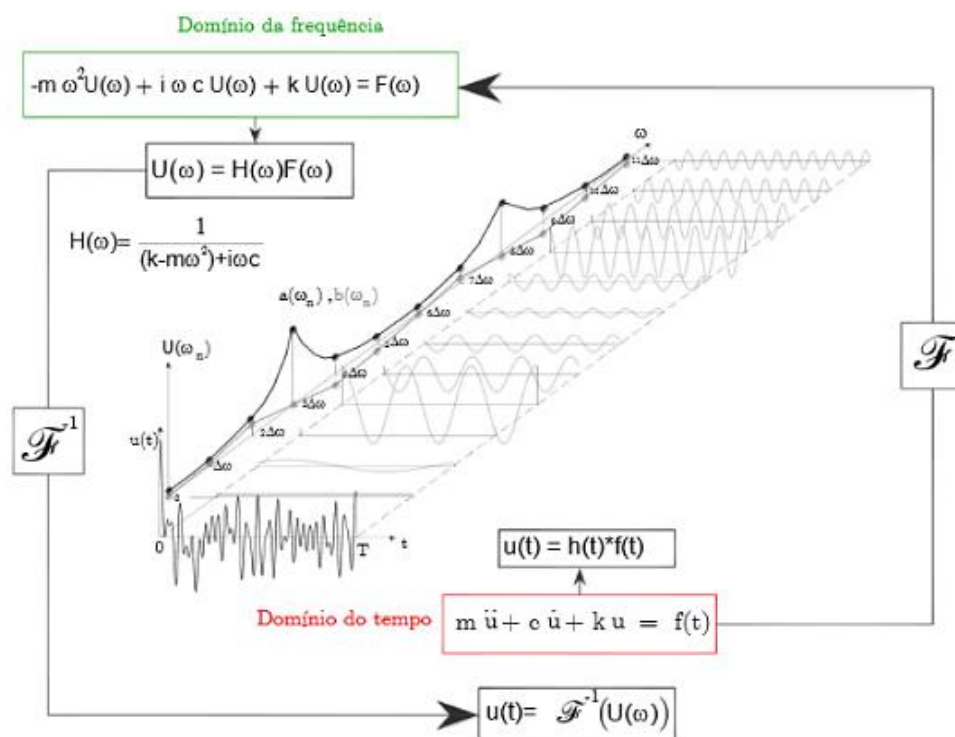


Figura 4-11: Esquemática para transformação de uma equação do domínio do tempo para o domínio da frequência (ROCHA, 2015)

Tabela 4-1 Diferenças entre as equações no domínio do tempo e no domínio da frequência (ROCHA, 2015)

Domínio do Tempo	Domínio da Frequência
$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t)$	$-m\omega^2 U(\omega) + i\omega c U(\omega) + kU(\omega) = F(\omega)$
$u(t) = h(t)f(t)$	$U(\omega) = H(\omega)F(\omega)$
$h(t) = \frac{1}{m\omega_A} \text{sen}(\omega_A t) e^{-\xi\omega_n t}$	$H(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + i\omega c}$
$u(t) = TF^{-1}[U(\omega)]$	
$U(\omega) = TF[u(t)]$	

A seguir, apresenta-se a descrição do ensaio de análise modal experimental, o qual permite a caracterização dinâmica do módulo tensegrity, sobre a qual foi realizado um ensaio dinâmico de vibração livre, extraíndo-se os modos de vibrações, com suas respectivas frequências naturais. Posteriormente, no Capítulo

5, serão apresentados os valores obtidos experimentalmente e estes serão comparados com os do modelo computacional.

4.2.2. Set up do Ensaio Experimental

De acordo com SHINN & HAMMOND (2008), uma análise modal experimental pode ser montada genericamente conforme a Figura 4-12, cujo objetivo é identificar a função de resposta em frequência (FRF) entre os pontos A e B contidos no sistema estrutural através de um teste de impacto. Considerando o pórtico metálico exibido, representado fisicamente pela função de transferência, $H(s)$, observa-se que o ponto A corresponde ao sinal de entrada da força, $F(t)$, através do impacto do martelo instrumentado, enquanto que o ponto B está associado à resposta dinâmica da estrutura (sinal de saída $a(t)$) medida pelo acelerômetro acoplado a este ponto.

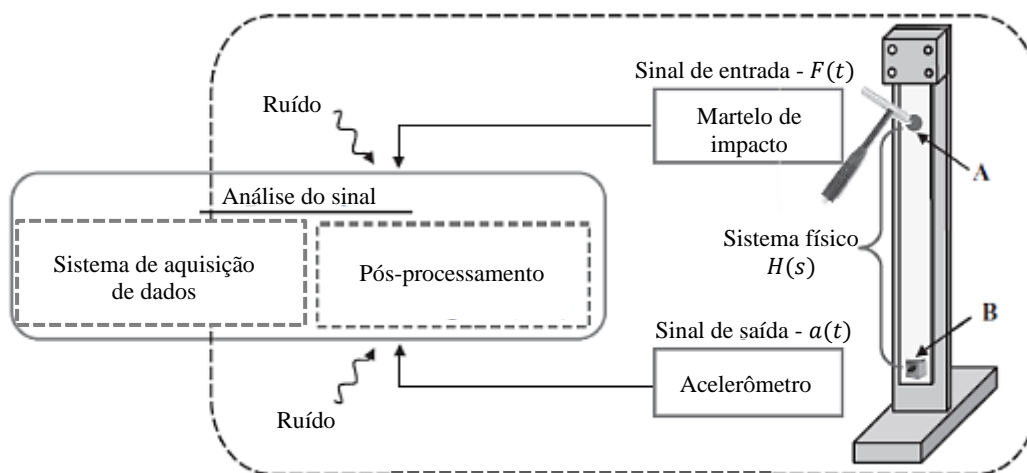


Figura 4-12: Set up para o ensaio experimental (adaptado de SHINN & HAMMOND (2008))

Como visto anteriormente, a função de resposta em frequência entre A e B, neste caso em termos de aceleração, pode ser obtida a partir da Eq. (4-16), onde $A(f)$ é o sinal relacionado à aceleração no domínio da frequência :

$$A(f) = H(f)F(f) \rightarrow H(f) = \frac{A(f)}{F(f)} \quad \text{Eq. (4-16)}$$

É possível perceber pela esquematização que os sinais estão contaminados com ruído. Além disso, o sistema físico H indicado não se restringe à relação entre A e B, mas também inclui as respostas de frequência individuais de sensores e filtros, os efeitos do ruído de quantização, o ruído de medição (externo) e do equipamento experimental. Todos esses ruídos interferem no ensaio e, portanto,

geralmente o experimento é realizado diversas vezes e a média dos resultados é usada para estimar a FRF $H(f)$. Um dos métodos para estimar a FRF pode ser expressado através do estimador $H_1(f)$, quando é suposto que o ruído se encontre apenas no sinal de saída :

$$H_1(f) \approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n^*(f) A_n(f)}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n^*(f) A_n(f)} \quad \text{Eq. (4-17)}$$

onde N é o número de vezes que o experimento é replicado. Nota-se que valores diferentes de $F_n(f)$ e $A_n(f)$ são produzidos em cada experimento e, se $N = 1$, as Eq. (4-16) e Eq. (4-17) são iguais. Os resultados dos sinais medidos podem ser apresentados de duas formas, conforme ilustrados na Figura 4-13.

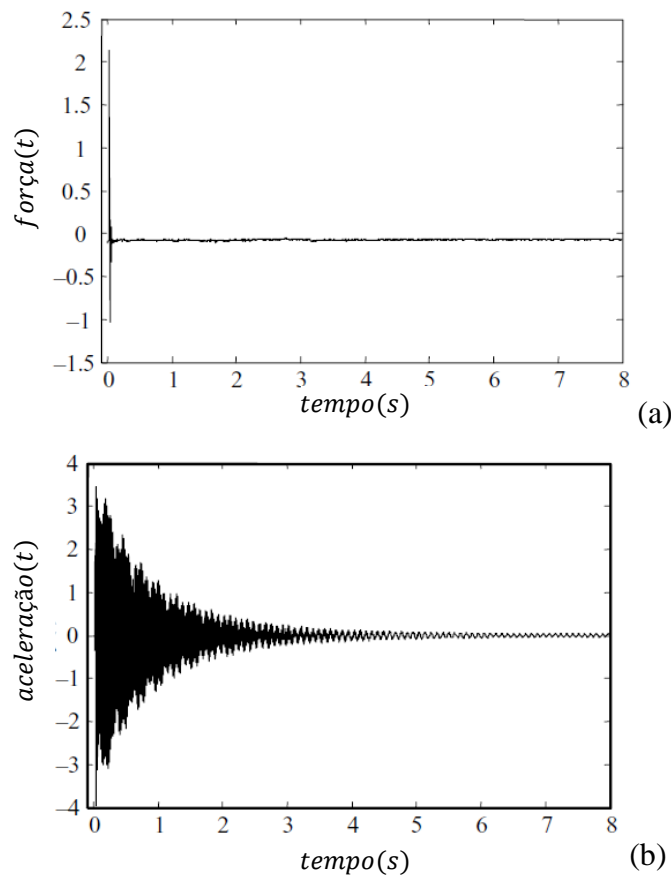


Figura 4-13: Sinal de (a) entrada, ou input, e (b) de saída, também chamado de output (adaptado de SHINN & HAMMOND (2008))

A força de impulso realizada pelo martelo de impacto (sinal de entrada) pode ser observada pela Figura 4-13a, enquanto que na Figura 4-13b é exibida a resposta dinâmica em termos de aceleração (sinal de saída). Assim, a partir dessas informações – e considerando o tratamento matemático desses sinais para o

domínio da frequência –, é possível estimar a função de resposta em frequência através de $H(f)$ ou $H_1(f)$, de acordo com a Figura 4-14, que apresenta a FRF em módulo e a variação do ângulo de fase entre a força e a resposta dinâmica.

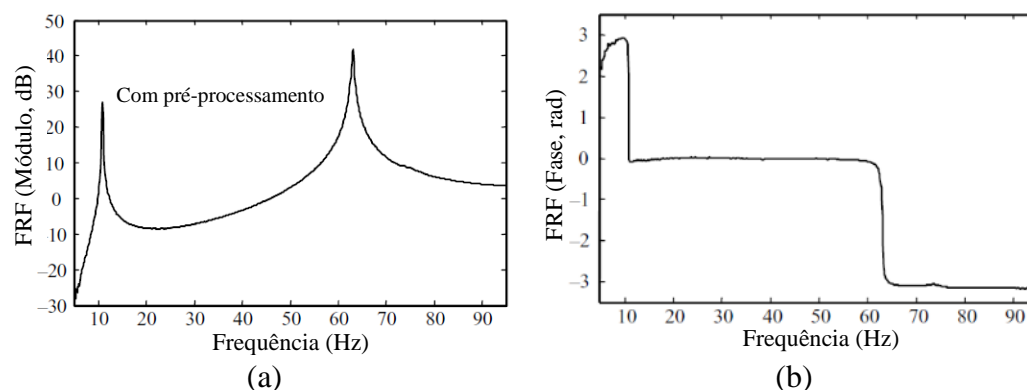


Figura 4-14: Resultados da FRF em módulo (a) e em radianos (b) da FRF com pré-processamento de sinais (adaptado de SHINN & HAMMOND (2008))

Em se tratando da análise modal experimental, a aceleração pode ser medida em um único ponto aplicando uma excitação impulsiva em vários pontos da estrutura, ou a estrutura pode ser excitada apenas em um ponto individual, variando-se a posição do acelerômetro sobre a estrutura (ROSA, 2005). Na execução deste trabalho, optou-se pela primeira configuração, ou seja, a aceleração foi medida em um nó específico e o tensegrity foi excitado com uma carga impulsiva em diferentes pontos conforme detalhado a seguir. Os principais itens que compõe um sistema de medições de vibrações, de forma geral, são um mecanismo indutor de vibrações, um sistema com transdutores de vibrações (usualmente acelerômetros), os quais medirão a resposta da estrutura e um analisador de sinais, como mostra a Figura 4-12. No presente trabalho, o martelo utilizado é fabricado pela PCB Electronics, modelo 086C03, possui sensibilidade de 2.25 mV/N ($\pm 15\%$) e faixa de medição de ± 2224 N (Figura 4-16). O acelerômetro uniaxial empregado, também da PCB Electronics, é do modelo 333B40, possui sensibilidade de 500 mV/g ($\pm 10\%$), faixa de medição de ± 98 m/s² e faixa de frequência de 0,5 a 3000 Hz ($\pm 5\%$), como apresentado na Figura 4-15.

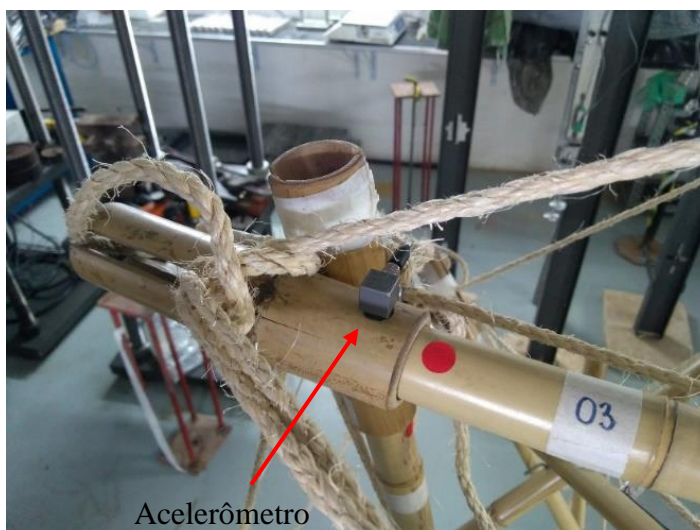


Figura 4-15: Acelerômetro (modelo 333B40) posicionado no nó 03

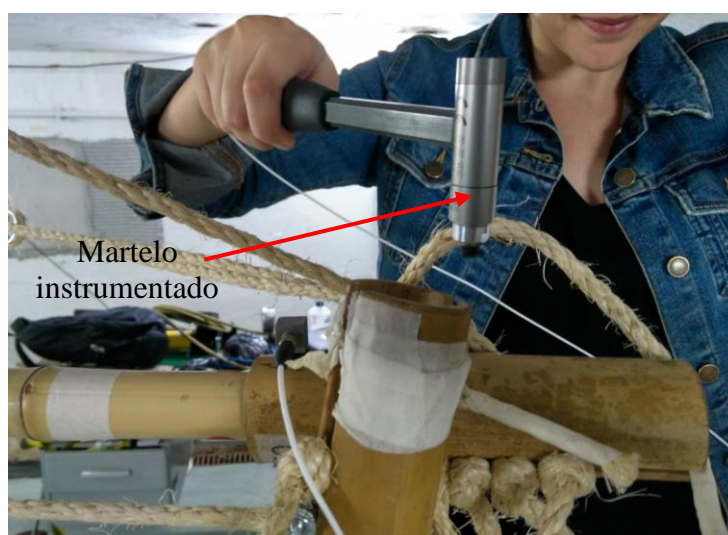


Figura 4-16: Martelo (modelo 086C03) aplicando uma carga impulsiva no nó 03

O acelerômetro piezoelétrico foi posicionado na estronca 33, sobre o nó 03, para medir a aceleração do módulo na direção vertical. Como mencionado anteriormente, a estrutura foi excitada, verticalmente, a partir da carga impulsiva do martelo nos 14 dos 15 nós totais da estrutura, uma vez que não houve excitação sobre o nó de apoio. Foram dados dez golpes sutis (de modo a não provocar movimento de corpo rígido) por nó, como mostra a Figura 4-17, totalizando 140 leituras por ensaio. Tanto o acelerômetro quanto o martelo foram conectados ao equipamento de aquisição de dados da National Instruments, modelo NI-9233 em conjunto com o chassi cDAQ 9174, e este, por sua vez, foi conectado ao software comercial ARTeMIS Modal (Figuras 4-17 a 4-19). O ARTeMIS é um software comercial direcionado à análise modal experimental e operacional (ARTEMIS,

2019), em que, a partir da medição das vibrações pelo usuário, é possível identificar as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração bem como o fator de amortecimento associado a cada modo. Para este trabalho, inicialmente fez-se a configuração dos parâmetros de ensaio, isto é, a frequência de amostragem foi estabelecida em até 2000 Hz e a duração do ensaio foi de 4,096 s para cada batida. Esta janela de tempo foi suficiente para que ocorresse a total dissipação da resposta dinâmica. A técnica de identificação modal adotada para estimar os parâmetros modais experimentais (frequências naturais, modos e vibração e amortecimentos) foi através do método das frações racionais polinomiais no domínio Z (a transformada Z é utilizada para tratar os sinais discretos no tempo), RFP-Z (FASANA, 2009), com base em diagramas de estabilização (AUWERAER & PEETERS, 2004; RAINIERI & FABBROCINO, 2014). Estes resultados serão apresentados no próximo capítulo.

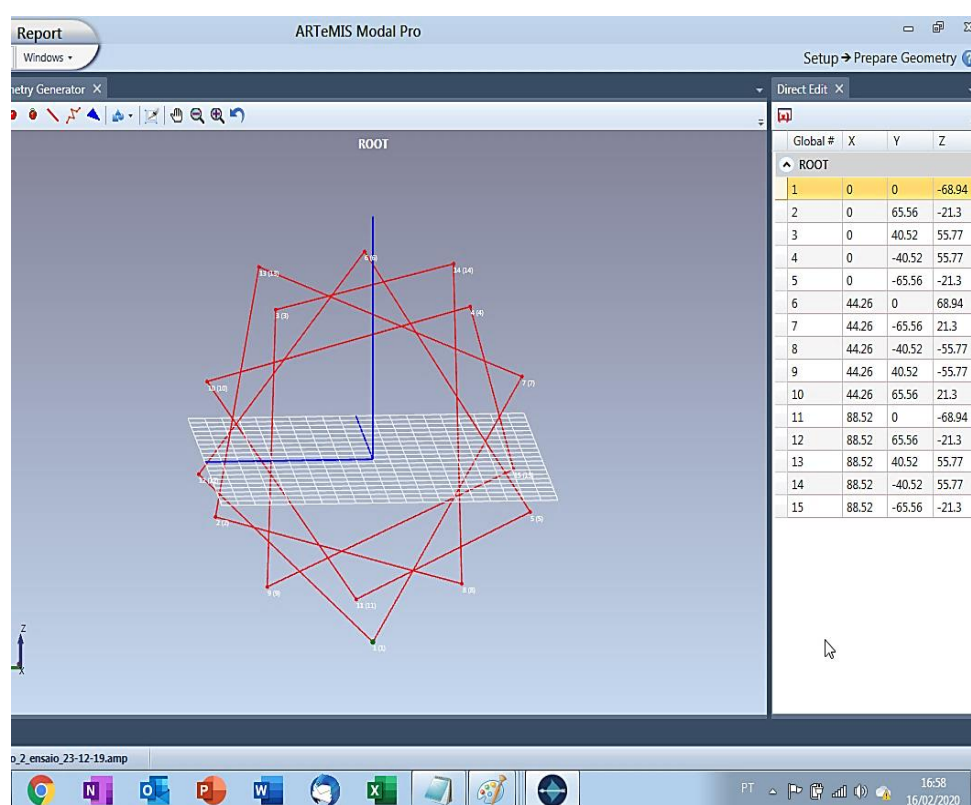


Figura 4-17: Geração da geometria do módulo tensegrity no ARTeMIS

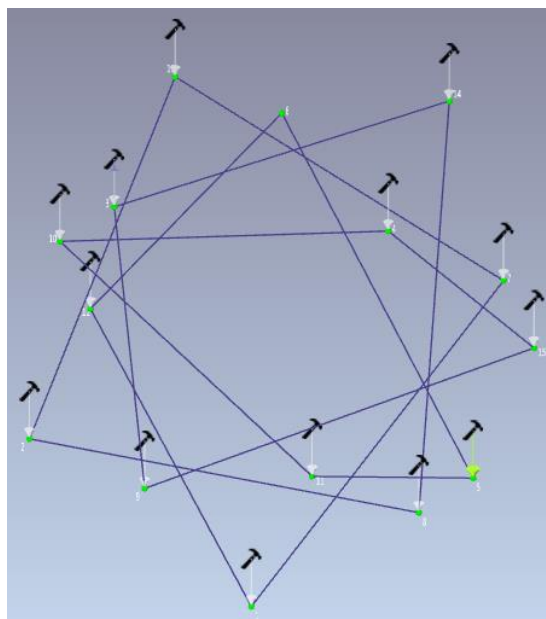


Figura 4-18: Esquematização da aplicação da carga impulsiva do martelo nos nós da estrutura

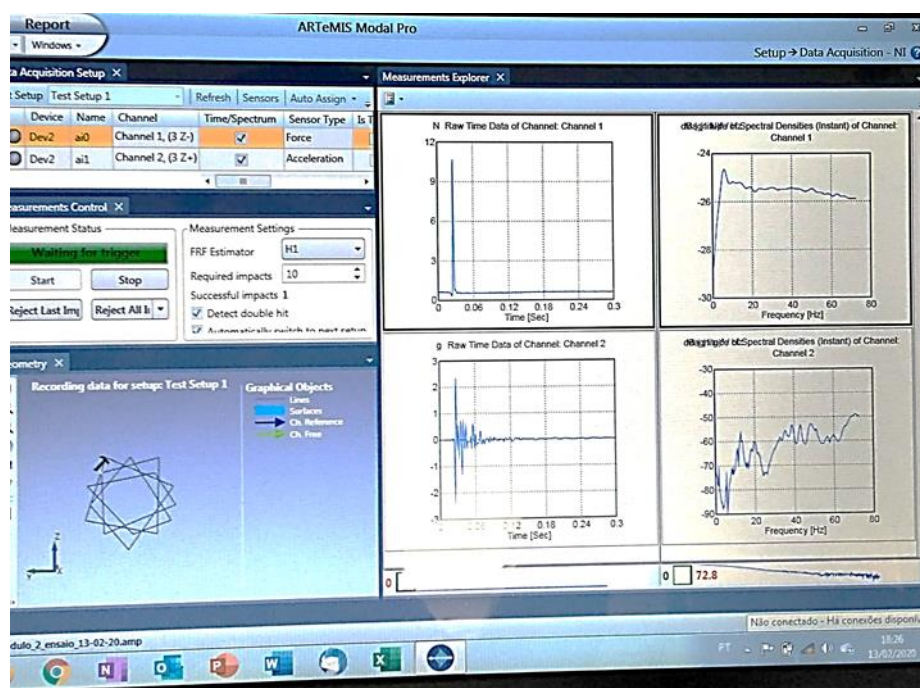


Figura 4-19: Registro fotográfico da interface de resultados do software ARTeMIS Modal

5. Apresentação e Análise dos Resultados

Como dito no Capítulo 4, após a construção do módulo tensegrity, buscou-se analisar o comportamento mecânico da estrutura no que diz respeito ao nível (porcentagem) de pretensão atuante no módulo ao término da montagem e como essa pretensão se comporta ao longo do tempo. Para tal duas abordagens foram adotadas:

(i) Abordagem estática, cujo objetivo foi determinar a tensão nas estroscas através de extensômetros e, por comparação com os resultados numéricos, determinar, indiretamente, a pretensão aplicada nos cabos no decorrer do ensaio.

(ii) Abordagem dinâmica, na qual procurou-se determinar as frequências naturais e modos de vibração da estrutura através de ensaios de vibração livre e, por comparação com os resultados numéricos, determinar, indiretamente, a pretensão aplicada nos cabos ao longo do tempo.

Detalhes sobre o software utilizado na geração do modelo computacional e os parâmetros de entrada do programa são apresentados abaixo. Em seguida, os resultados obtidos na investigação estática, bem como na dinâmica, são exibidos e os valores obtidos experimentalmente são comparados com os do modelo numérico. Por fim realiza-se uma discussão sobre estas respostas.

5.1. Calibração Estática do Tensegrity no Programa Galileo

As estruturas tensegrity apresentam um comportamento não linear quando submetidas a forças externas e podem sofrer grandes deslocamentos mesmo para pequenos esforços. De acordo com ALI *et al.* (2010), a pretensão é um parâmetro fundamental para estabilizar a estrutura, ativando a rigidez geométrica. O equilíbrio entre as forças de tração e compressão é responsável pela estabilidade estrutural e a capacidade de suporte de carga dos tensegrities. RHODE-BARBARIGOS *et al.* (2010) também mostraram que propriedades estruturais e comportamentos mecânicos, como peso próprio e deflexão da passarela

respectivamente, são influenciados diretamente por diferentes pretensões aplicadas à estrutura. Isto demonstra que o comportamento mecânico de tensegrities é altamente complexo e que, portanto, diferentes parâmetros de projeto, tais como características do material, áreas de seção transversal dos elementos e níveis de pretensão, devem ser levados em consideração.

O projeto de uma estrutura tensegrity pode ser investigado a partir dos seguintes aspectos: (i) o processo de *form-finding*, (ii) a aplicação de pretensão ou (iii) o comportamento sob carregamento externo. Neste trabalho, o escopo de estudo abrangeu os dois últimos itens. As análises estáticas e dinâmicas da estrutura foram realizadas usando o Galileo – software desenvolvido pelo Dr. Murilo Santana no Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio para análise estrutural de tensegrities e estruturas dobráveis (SANTANA, 2019). O software aplica mecânica computacional para simular sistemas físicos usando métodos numéricos. Segundo ESTRADA (2007), a mecânica computacional é uma subdisciplina da ciência computacional, da qual assume um forte caráter interdisciplinar, pois se baseia em diferentes métodos de computação, mecânica, física e matemática para desenvolver abstrações conceituais e simular uma ampla gama de sistemas físicos e de engenharia, aplicando princípios de movimento, energia e força desenvolvidos ao longo de séculos de pesquisa sobre o comportamento de sistemas mecânicos sob a ação de forças naturais.

Antes de utilizar o Galileo para modelar o módulo tensegrity, decidiu-se, primeiramente, realizar uma comparação entre os dados obtidos pelo Galileo e aqueles encontrados na literatura para corroborar sua adequação enquanto programa de análise estrutural para tensegrities. Vale ressaltar que algumas hipóteses foram levadas em consideração para formular o modelo da estrutura tensegrity, tais como:

- Cabos e estroncas são retilíneos;
- Os elementos são perfeitamente articulados nos nós;
- As estroncas são projetadas como elementos de treliça e, portanto, podem absorver forças de tração ou de compressão;
- Os cabos podem suportar apenas forças de tração;
- Forças externas se aplicam somente aos nós;

- As condições iniciais de geometria e pretensão são previamente estabelecidas;
- As flambagens local e global das estroncas são negligenciadas;
- A rigidez incremental causada por carregamentos externos é desconsiderada.

A ponte para pedestres exibida na Figura 3-1 foi adotada como objeto de estudo. A estrutura foi modelada no Galileo usando as configurações mostradas na Tabela 5-1.

Tabela 5-1: Propriedades da ponte para pedestres metálica

Parâmetros	Valores
Área transversal dos cabos (cm ²)	1,5
Módulo de elasticidade dos cabos (GPa)	115
Área transversal das estroncas (cm ²)	6,0
Módulo de elasticidade das estroncas (GPa)	210

As análises estruturais foram realizadas considerando a não linearidade geométrica. Neste estudo, a análise estática da passarela foi feita utilizando o método de Newton-Raphson acoplado a estratégias de iteração. A Tabela 5-2 apresenta as combinações de carga para a estrutura em estado limite de serviço (E.L.S), de acordo com o código suíço SIA 260:2013 – *Basis of structural design* – e SIA 263 – *Steel structures*.

Tabela 5-2: Cargas de projeto para ponte de pedestres metálica

Carga	Fator de segurança	Valor
Peso próprio	1,0	78,5 kN/m ³
Carregamento vertical	1,0	4,0 kN/m ²
Carregamento horizontal	1,0	10% da carga vertical

As cargas verticais e horizontais, atuando inicialmente na superfície do tabuleiro, foram aplicadas como cargas pontuais equivalentes nos quatro nós do módulo tensegrity em que o tabuleiro é apoiado. Ressalta-se que a carga de vento foi desconsiderada. Além das cargas de projeto, os cabos também foram submetidos a pretensão, aspecto essencial nas estruturas tensegrity, pois garante a estabilidade e a rigidez da estrutura antes que cargas externas possam ser aplicadas.

Neste estudo, a pretensão é designada como uma porcentagem da resistência à tração última do cabo. Verificou-se que, de forma geral, i.é, independentemente do nível de pretensão aplicado à estrutura, a configuração deformada da ponte apresenta o mesmo feitiço, como ilustra a figura abaixo. Como esperado, deslocamentos verticais maiores podem ser observados no meio do vão. A Figura 5-1 ilustra os deslocamentos negativos em vermelho e os deslocamentos positivos em azul.

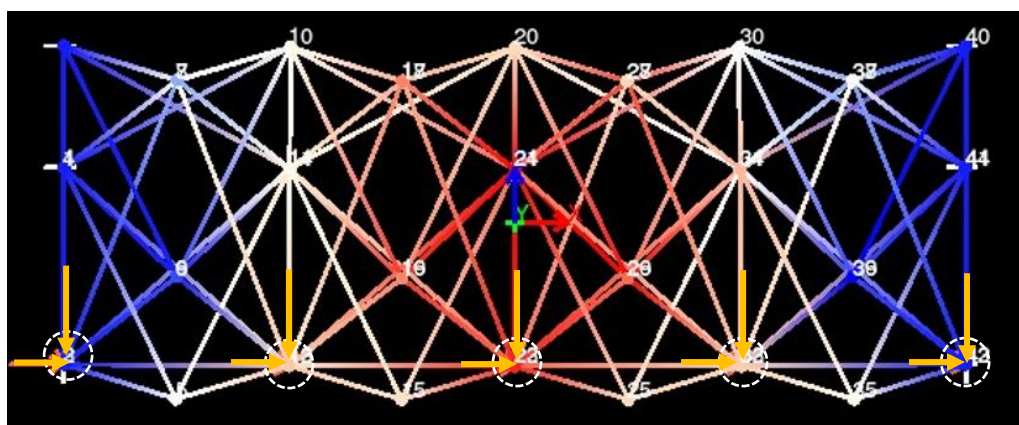


Figura 5-1: Configuração deformada da ponte tensegrity metálica para pedestres

Apesar da estrutura apresentar o mesmo tipo de deformada para vários níveis de pretensão, os valores dos deslocamentos verticais no meio do vão são influenciados diretamente pelo nível de pretensão atuando na estrutura. Nota-se pela Figura 5-2 que o nível de pretensão e a rigidez do módulo são diretamente proporcionais, ou seja, aumentando a pretensão aplicada, o deslocamento vertical no meio do vão decresce progressivamente.

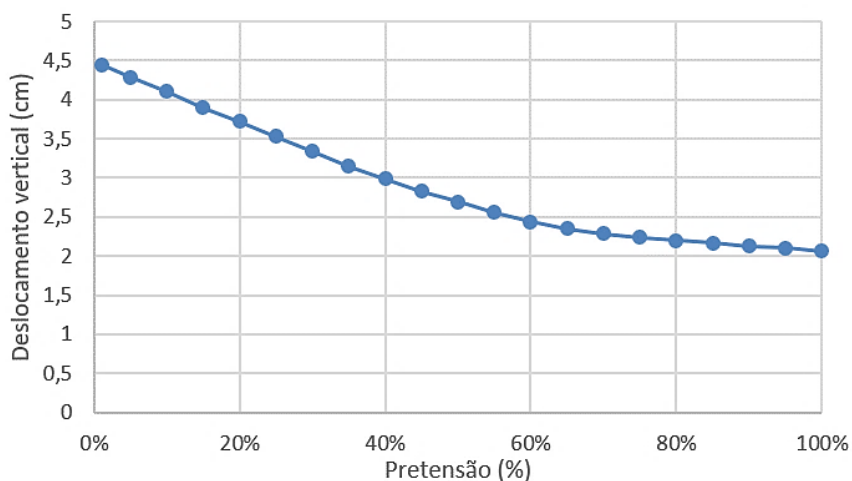


Figura 5-2: Curva deslocamento vertical vs. pretensão para ponte para pedestres metálica

É possível observar que os resultados encontrados acima mostram relativa concordância com os apresentados por RHODE-BARBARIGOS *et al.* (2010). Dada uma configuração em que os cabos possuem 5% de pretensão, o modelo estudado neste trabalho e o apresentado no artigo citado acima apresentaram valores semelhantes para deslocamento máximo, em torno de 4,3 cm. A mesma conformidade entre os modelos computacionais pode ser observada para 100% de pretensão nos cabos, cenário em que o deslocamento máximo é de 2,0 cm. Posto isto, entende-se que o modelo computacional da estrutura tensegrity gerado pelo Galileo está parametrizado de forma adequada e, portanto, adotou-se este software para realizar a modelagem do módulo tensegrity construído em escala, como mostra a Figura 3-27.

5.2. Análise Estática

5.2.1. Resultados do Modelo Computacional

A partir dos parâmetros definidos no capítulo 3 realizou-se a modelagem da estrutura tensegrity com o objetivo de obter, numericamente, as tensões atuantes nas estroncas para diferentes níveis de pretensão e, assim, avaliar que tipo de relação existe entre esses dois parâmetros. Para geração do modelo computacional, adotaram-se as seguintes propriedades geométricas e mecânicas médias obtidas com base nos ensaios de caracterização do bambu e do sisal apresentados na seção 3.2:

- Diâmetro externo do bambu: 29,28 mm;
- Espessura das paredes do bambu: 3,76 mm;
- Comprimento das estroncas de bambu: 120,0 cm;
- Módulo de elasticidade do bambu: 19,42 GPa;
- Resistência à compressão do bambu: 68,76 MPa;
- Diâmetro nominal da corda de sisal: 6,0 mm;
- Comprimento das cordas de sisal: 81,0 cm para os cabos faceadores e 61,4 cm para os cabos-X;
- Módulo de elasticidade da corda de sisal: 1,05 GPa;
- Resistência à tração do sisal: 79,59 MPa;

O módulo foi fixado no nó 6, ponto em que o movimento translacional nas três direções está impedido, e foi submetido apenas ao seu peso próprio, como ilustra a Figura 5-3, de modo a simular a condição estabelecida em laboratório para os procedimentos experimentais.

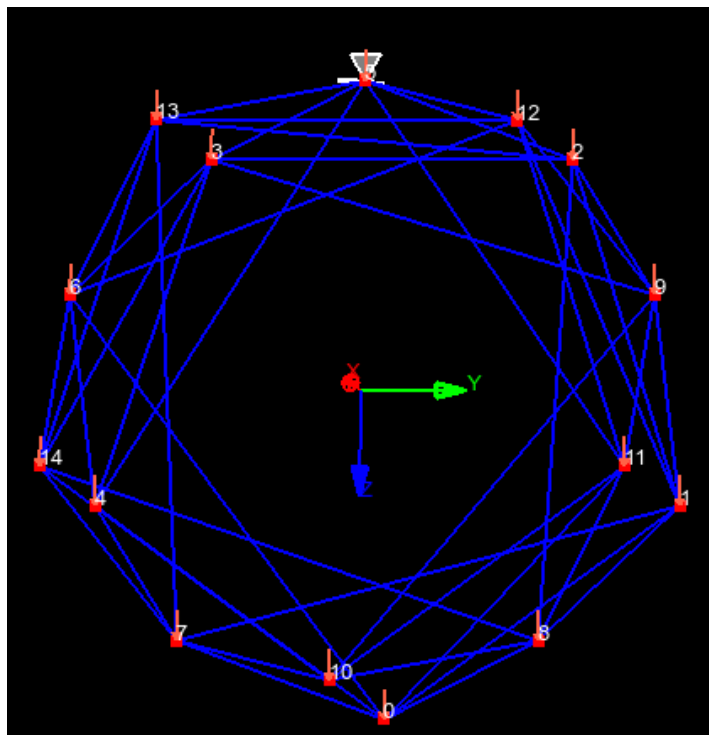


Figura 5-3: Modelo computacional do módulo tensegrity fixado no nó 6 (índice 5 na imagem) e com carregamento de peso próprio

Na análise estática do módulo, no que diz respeito às tensões nas estroncas, buscou-se entender como a estrutura se comporta à medida que os níveis de pretensão aumentam. Deste modo, variou-se a pretensão de 0,25% a 50% da tensão de ruptura da corda de sisal, enquanto todos os demais parâmetros foram mantidos os mesmos. Os resultados mostram que, independentemente do nível de pretensão, há simetria nos esforços de compressão (tensões com sinal negativo), de modo que os pares de entroncas (31;35), (32;34), (36;45), (37;44), (38;43), (39;42) e (40;41) possuem as mesmas tensões, conforme mostra a Tabela 5-3. Ainda analisando esta tabela, nota-se que apenas a estronca 33 não possui um par simétrico. Interessantemente, é possível observar que os maiores valores de esforços de compressão atuam justamente neste elemento. As tensões máximas variam de 0,25 MPa a 5,73 MPa de acordo com o a porcentagem pretensão aplicada. Nota-se também que para níveis de pretensão muito baixos – menores que 2,5% – alguns

membros passam a atuar sob tração (tensões com valor positivo), como é o caso das estroncas 38, 43, 40 e 41.

Tabela 5-3: Tensões axiais nas estroncas do módulo para diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão (MPa)							
	Estroncas principais			Estroncas-tesouras				
	31 , 35	32 , 34	33	36 , 45	37 , 44	38 , 43	39 , 42	40 , 41
0,25	-0,11	-0,03	-0,25	-0,03	-0,02	+0,02	-0,06	+0,03
2,50	-0,33	-0,21	-0,39	-0,11	-0,09	-0,06	-0,11	-0,02
5,00	-0,62	-0,50	-0,67	-0,22	-0,19	-0,17	-0,21	-0,13
10,00	-1,19	-1,09	-1,24	-0,43	-0,40	-0,38	-0,42	-0,34
15,00	-1,75	-1,66	-1,80	-0,65	-0,62	-0,60	-0,64	-0,56
20,00	-2,32	-2,24	-2,36	-0,87	-0,85	-0,82	-0,87	-0,78
25,00	-2,89	-2,81	-2,93	-1,11	-1,08	-1,06	-1,10	-1,02
30,00	-3,46	-3,38	-3,49	-1,35	-1,32	-1,30	-1,34	-1,26
35,00	-4,02	-3,95	-4,05	-1,59	-1,57	-1,55	-1,59	-1,51
40,00	-4,58	-4,52	-4,61	-1,84	-1,82	-1,80	-1,84	-1,76
45,00	-5,15	-5,08	-5,17	-2,10	-2,08	-2,05	-2,09	-2,02
50,00	-5,70	-5,65	-5,73	-2,36	-2,34	-2,31	-2,35	-2,28

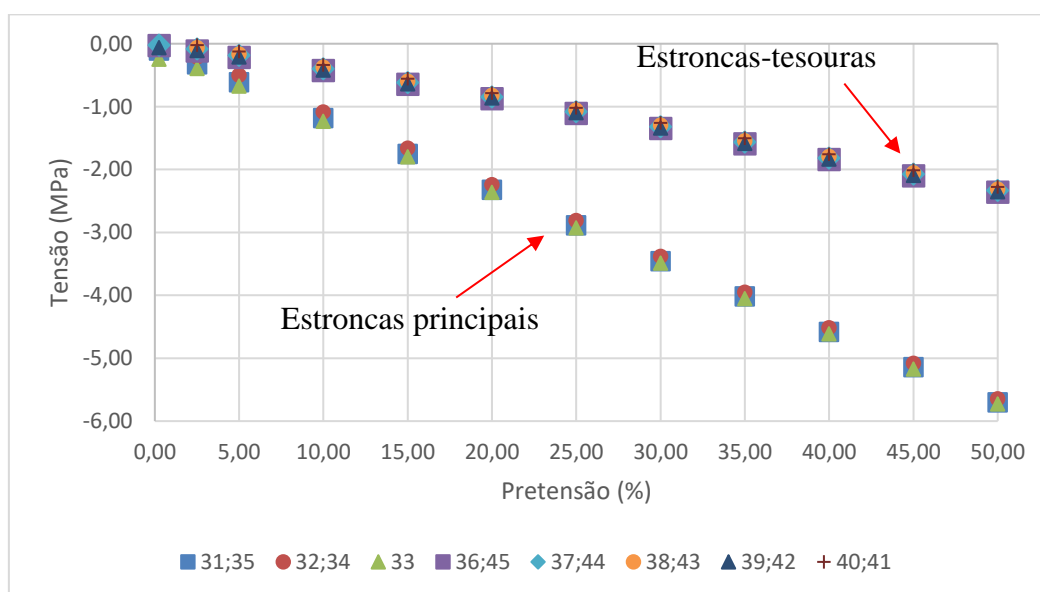


Figura 5-4: Curva tensão vs. pretensão para as estroncas do módulo

A Figura 5-4 ilustra o comportamento das estroncas. Observa-se que, de forma geral, conforme a pretensão aumenta, as tensões também crescem linearmente. As tensões das estroncas principais (31 a 35) e das tesouras (36 a 45) apresentam similaridade dentro desses dois grupos e estes são distinguidos por duas tendências lineares com inclinações distintas (ver também a Tabela 5-3). Esta diferença de inclinação deve-se ao fato do comportamento estrutural das estroncas principais e tesouras serem distintos. Recapitulando o conteúdo do capítulo 3, as estroncas principais conectam os pentágonos inferior e superior do módulo e atuam individualmente, ao passo que as estroncas tesouras ligam o pentágono intermediário aos pentágonos externos e agem em duplas, como ilustra a Figura 3-2. Para esta estrutura, percebe-se, com base nos resultados, que as tensões nas estroncas principais são quase três vezes maiores do que as das tesouras.

5.2.2. Resultados do Ensaio Experimental

A realização do ensaio experimental teve duas principais finalidades: primeiramente determinar a tensão nas estroncas através de extensômetros e, por comparação com os resultados numéricos, determinar, indiretamente, a pretensão aplicada logo após o término da montagem do módulo tensegrity; em segunda instância, buscou-se avaliar como a pretensão se comporta ao longo do tempo, isto é, se ela se mantém constante ou se há perda de pretensão. Conforme mencionado no Capítulo 4, oito extensômetros foram fixados na estrutura, mais especificamente nas estroncas 31, 32, 33, 36, 37, 38, 39 e 40 por cada uma delas ter um par simétrico (com exceção da estronca 33), fato que permitiu a instrumentação do módulo considerando a limitação de canais de entrada no equipamento de aquisição de dados. A estrutura ficou sendo monitorada durante 13,5 dias (324 horas) conforme ilustrado na Figura 5-5. Ressalta-se que houve algumas perdas de informação durante a aquisição de dados, as quais são observadas através das lacunas na Figura 5-5. A Tabela 5-4 mostra as deformações das estroncas investigadas em alguns momentos específicos do ensaio estático.

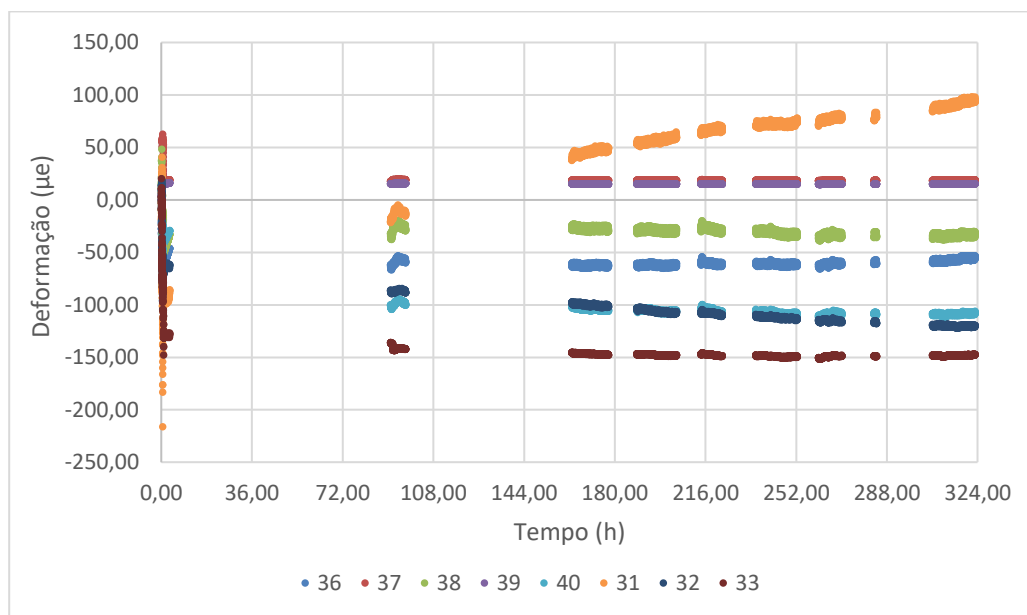


Figura 5-5: Deformação das estroncas ao longo do ensaio estático

Tabela 5-4: Deformações das estroncas em períodos específicos do ensaio estático

Estronca	Deformação ($\mu\epsilon$)				
	t = 0h	t = 2h	t = 90h	t = 168h	t = 324h
31 (principal)	-1,93	-93,20	-20,24	46,00	93,38
32 (principal)	-0,21	-63,49	-86,57	-99,27	-119,66
33 (principal)	-1,81	-129,00	-135,65	-146,37	-147,11
36 (tesoura)	-0,05	-46,33	-61,56	-60,31	-54,53
37 (tesoura)	-0,82	19,30	18,00	18,80	18,90
38 (tesoura)	-1,10	-34,54	-31,62	-24,69	-32,20
39 (tesoura)	-0,72	16,11	15,62	15,40	15,49
40 (tesoura)	-0,70	-30,70	-99,91	-103,00	-107,00

Apesar de inoportunas, as lacunas na aquisição dos dados não comprometeram inteiramente o ensaio, posto que os intervalos de tempo de interesse foram registrados. Para a investigação estática, três momentos específicos foram adotados como objeto de interesse na análise para avaliar o comportamento das tensões atuantes nas estroncas durante o ensaio. O primeiro deles diz respeito à fase de montagem do módulo, que dura de $t = 0$ a $t = 1h$ aproximadamente, sendo $t = 0$ o instante em que a estrutura está disposta no plano como mostra a Figura 3-25. Durante a montagem do tensegrity, as movimentações

podem ser relativamente bruscas, não o suficiente para danificar a integridade do bambu ou do sisal, mas o bastante para influenciar na leitura das deformações através dos extensômetros, como pode ser observado no intervalo de 0,20h (12 min) até 0,80h (48 min) na Figura 5-6. Após esse período, isto é, ao final da montagem, entretanto, o comportamento da estrutura mostra-se consideravelmente mais estável. A Figura 5-7 mostra que as estroncas 31, 32, 33, 37 e 39 apresentam deformação praticamente constante até uma hora e meia após a conclusão da construção do tensegrity, ao passo que as estroncas 36, 38 e 40 possuem comportamento linear, ainda que relativamente sutil.

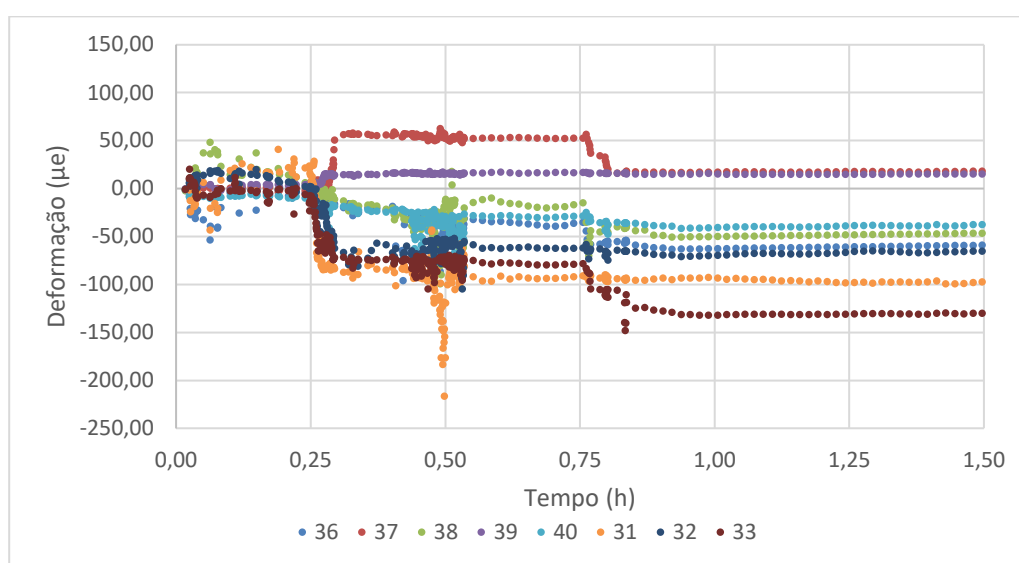


Figura 5-6: Deformação das estroncas durante a fase de montagem do módulo tensegrity

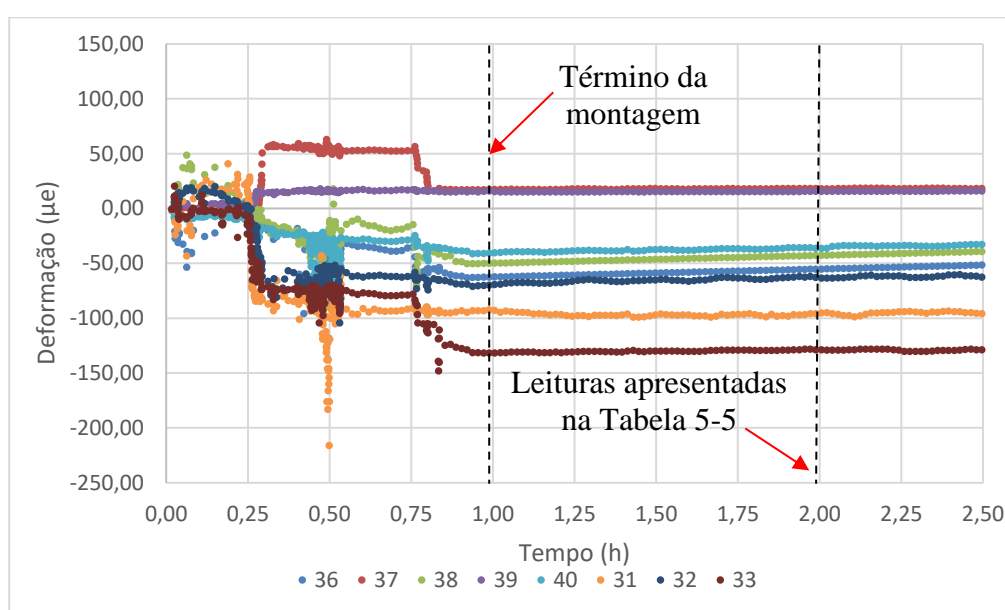


Figura 5-7: Deformação das estroncas após 1,5h do término da montagem do módulo

A partir do gráfico acima é possível extrair as deformações experimentais das estroncas em um momento específico. Como a primeira janela de interesse se refere ao período após a montagem da estrutura, optou-se por analisar os resultados obtidos para 2h de ensaio (1h após o fim da construção do módulo), pois entende-se que esse hiato é suficiente para que a estrutura se acomode, porém sem sofrer influência das ações externas como fluência e/ou perda de pretensão. A Tabela 5-5 apresenta a deformação das estroncas nesse instante, bem como a tensão correspondente utilizando a Lei de Hooke. Os sinais negativos correspondem à compressão enquanto os positivos à tração.

Tabela 5-5: Deformações e tensões experimentais 1h após o fim da montagem do módulo

Estronca	Deformações experimentais ($\mu\epsilon$)	Tensão experimental (MPa)
31 (principal)	-93,20	-1,81
32 (principal)	-63,49	-1,23
33 (principal)	-129,00	-2,51
36 (tesoura)	-46,33	-0,90
37 (tesoura)	19,30	0,37
38 (tesoura)	-34,54	-0,67
39 (tesoura)	16,11	0,31
40 (tesoura)	-30,70	-0,60

Nota-se a partir da tabela acima que as estroncas 37 e 39 apresentam esforços de tração, destoando das demais. Embora seja possível que estes elementos realmente estejam tracionados devido a questões construtivas, uma outra hipótese, talvez mais viável, para justificar este comportamento é que haja uma excentricidade nas forças de compressão, suscitando um momento fletor nessas estroncas e o extensômetro, por acaso, foi aplicado na face tracionada.

O segundo e terceiro intervalos de interesse se referem ao comportamento da estrutura após uma semana da montagem ($t=168h$) e após duas semanas ($t=324h$). Observando as deformações para $t=2h$ e $t=168h$ fornecidas pela Tabela 5-4 percebem-se algumas mudanças nos resultados obtidos. Nota-se, primeiramente, que a deformação da estronca 31 mudou de sinal, passando de compressão para tração. Outras estroncas, como a 32, 33, 36 e 40 apresentaram

maior deformação, denotando maior tensão de compressão nesses elementos, enquanto que a estronca 38 exibiu menor deformação, ou seja, houve um alívio de tensão. As estroncas 37 e 39 também apresentaram uma diminuição na deformação, retratando uma menor tensão de tração nas mesmas. Estas alterações nos estados de tensão das estroncas indicam que, entre $t=2h$ e $t=168h$, o módulo tensegrity sofreu uma perda de pretensão. Por outro lado, analisando a Figura 5-8 nota-se que, excluindo a estronca 31, todas as demais apresentaram pouca (ou quase nenhuma) diferença na deformação entre $t=168h$ e $t=324h$, sugerindo que a estrutura tensegrity não sofreu perda de pretensão significativa no decorrer desse período. Contudo, considerando o comportamento da estronca 31, é possível que o aumento da tensão seja um efeito para compensar uma desigualdade nas forças atuantes e manter o sistema global em equilíbrio, provocando uma variação nas tensões das estroncas que não estão monitoradas. Outra possível explicação para o aumento da deformação na estronca 31 é o efeito de fluência do bambu, posto que este material mostra comportamento de fluência não apenas após um longo período de tempo, mas também após um curto intervalo devido à facilidade com que a lignina (molécula orgânica associada à rigidez) se deforma dentro da estrutura do bambu (DIVÓS & TANAKA, 2005 *apud* ARMANDEI *et al.*, 2015).

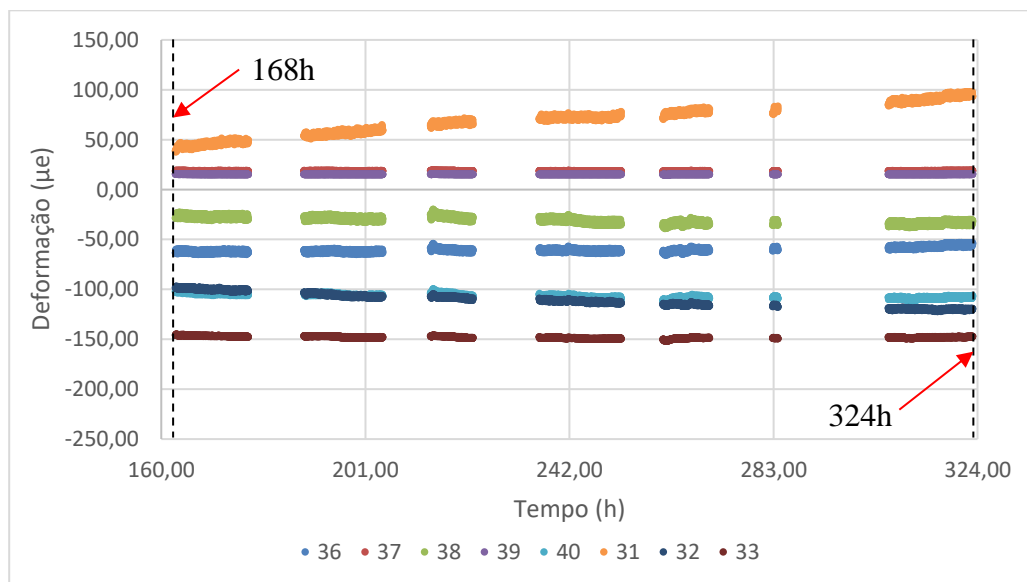


Figura 5-8: Deformação das estroncas após 168h do início do ensaio até 324h

5.2.3. Comparação entre Resultados Numéricos e Experimentais

Como dito inicialmente, o objetivo da investigação estática foi identificar as tensões atuantes nas estroncas para determinar indiretamente o nível de pretensão aplicado na estrutura após a montagem da mesma, bem como avaliar o comportamento da pretensão ao longo do tempo. Na seção 5.2.2 comentou-se sobre o comportamento do módulo tensegrity no que diz respeito às tensões e pretensões atuantes em diferentes momentos do ensaio estático. Agora, nesta seção, buscou-se determinar o nível de pretensão aplicado na estrutura logo após a montagem da mesma. Para tal, foi realizado o cruzamento entre os resultados numéricos e experimentais obtidos para este momento específico, já que a análise do modelo computacional mostrou que as tensões atuantes nas estroncas estão diretamente relacionadas com o nível de pretensão dos cabos, como detalhado na seção 5.2.1.

A Tabela 5-5 mostra as tensões experimentais obtidas depois de duas horas do início do ensaio (ou uma hora após o término da montagem do tensegrity). Com base nesses dados realizou-se uma comparação com as tensões numéricas obtidas para diferentes porcentagens de pretensão, a partir da qual foi possível analisar a congruência entre resultados numéricos e experimentais para cada par simétrico de estroncas, conforme mostrado nas Tabelas 5-6 a 5-11. A conformidade entre os valores foi avaliada de acordo com o erro relativo entre eles, isto é,

$$ER = \frac{\text{tensão numérica} - \text{tensão experimental}}{\text{tensão experimental}}$$

Ressalta-se que as estroncas 37 e 39 não foram consideradas nestas análises, posto que os esforços de tração, suscitados por um momento fletor possivelmente, são inaptos para comparação com os resultados provenientes modelo computacional.

- Estroncas 31 e 35 (principais)

Tabela 5-6: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 31 e 35 considerando diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão numérica (MPa)	Erro relativo
50,00	-5,70	215,18%
45,00	-5,15	184,27%
40,00	-4,58	153,27%
35,00	-4,02	122,18%
30,00	-3,46	90,99%
25,00	-2,89	59,72%
20,00	-2,32	28,38%
15,00	-1,75	-3,04%
10,00	-1,19	-34,50%
5,00	-0,62	-65,98%
2,50	-0,33	-81,72%
0,25	-0,11	-94,02%

Como pode ser observando pela Tabela 5-6, para pretensões muito baixas ou muito altas, o erro relativo obtido é muito alto. Contudo, nota-se que este erro vai diminuindo conforme a pretensão se afasta dos extremos e, inclusive, percebe-se que existe um erro relativo nulo, aqui também chamado de mínimo, entre 15% e 20% pretensão, estando localizado mais próximo de 15% especificamente, posto que para este nível de pretensão o erro é de apenas 3% aproximadamente.

- Estroncas 32 e 34 (principais)

Tabela 5-7: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 32 e 34 considerando diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão numérica (MPa)	Erro relativo
50,00	-5,65	357,91%
45,00	-5,08	312,33%
40,00	-4,52	266,57%
35,00	-3,95	220,64%
30,00	-3,38	174,53%
25,00	-2,81	128,23%
20,00	-2,24	81,74%
15,00	-1,66	35,03%
10,00	-1,09	-11,91%
5,00	-0,50	-59,12%
2,50	-0,21	-82,85%
0,25	-0,03	-97,64%

Assim como mencionado no caso acima, é possível observar que o erro relativo para pretensões muito altas ou muito baixas é substancial, porém, nota-se que o erro se reduz à medida que a pretensão se aproxima de 10% a 15%.

- Estronca 33 (principal)

Tabela 5-8: Tensões numéricas e erros relativos para estronca 33 considerando diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão numérica (MPa)	Erro relativo
50,00	-5,73	128,73%
45,00	-5,17	106,47%
40,00	-4,61	84,15%
35,00	-4,05	61,77%
30,00	-3,49	39,33%
25,00	-2,93	16,86%
20,00	-2,36	-5,64%
15,00	-1,80	-28,16%
10,00	-1,24	-50,66%
5,00	-0,67	-73,11%
2,50	-0,39	-84,29%
0,25	-0,25	-90,17%

No caso da estronca 33, o menor erro relativo está entre 20% e 25% de pretensão.

- Estroncas 36 e 45 (tesouras)

Tabela 5-9: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 36 e 45 considerando diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão numérica (MPa)	Erro relativo
50,00	-2,36	162,27%
45,00	-2,10	133,31%
40,00	-1,84	104,85%
35,00	-1,59	76,93%
30,00	-1,35	49,61%
25,00	-1,11	22,93%
20,00	-0,87	-3,03%
15,00	-0,65	-28,22%
10,00	-0,43	-52,54%
5,00	-0,22	-75,92%
2,50	-0,12	-87,22%
0,25	-0,03	-96,92%

Para o par de estroncas 36 e 45, o erro nulo se encontra entre 20% e 25% de pretensão, estando, inclusive, mais próximo de 20% onde o erro relativo é de 3,03%.

- Estroncas 38 e 43 (tesouras)

Tabela 5-10: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 38 e 43 considerando diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão numérica (MPa)	Erro relativo
50,00	-2,31	245,08%
45,00	-2,05	206,15%
40,00	-1,80	167,90%
35,00	-1,55	130,37%
30,00	-1,30	93,63%
25,00	-1,06	57,75%
20,00	-0,82	22,83%
15,00	-0,60	-11,06%
10,00	-0,38	-43,80%
5,00	-0,17	-75,28%
2,50	-0,06	-90,51%
0,25	0,02	-102,76%

Considerando o par de estroncas 38 e 43, percebe-se que há um mínimo do erro relativo entre 15% e 20% de pretensão.

- Estroncas 40 e 41 (tesouras)

Tabela 5-11: Tensões numéricas e erros relativos para o par de estroncas 40 e 41 considerando diferentes níveis de pretensão

Pretensão (%)	Tensão numérica (MPa)	Erro relativo
50,00	-2,28	281,77%
45,00	-2,02	237,97%
40,00	-1,76	194,92%
35,00	-1,51	152,68%
30,00	-1,26	111,34%
25,00	-1,02	70,96%
20,00	-0,79	31,65%
15,00	-0,56	-6,50%
10,00	-0,34	-43,36%
5,00	-0,13	-78,83%
2,50	-0,02	-95,99%
0,25	0,03	-105,18%

Ao analisar a tabela acima nota-se que, para as entroncas 40 e 41, as faixas de valores dos erros relativos (positivos ou negativos) são similares às apresentadas pelas demais entroncas. Além disso, pode-se ver que o erro relativo mínimo se encontra entre 15% e 20% de pretensão.

Ao analisar as Tabelas 5-5 a 5-12 qualitativamente e cada par de entroncas individualmente, percebe-se que os erros relativos mínimos giram entorno de 10% a 25% de pretensão, porém, com base na soma dos quadrados dos erros relativos encontrados nestas tabelas, é possível observar que há um valor de erro mínimo associado ao comportamento global da estrutura. Sabendo que, caso houvesse um nível de pretensão ideal em que os erros relativos fossem iguais a zero, o somatório desses erros ao quadrado também seria zero. Similarmente, para erros muito pequenos, o somatório dos erros ao quadrado também seria pequeno, enquanto que o contrário também se provaria verdade, ou seja, erros grandes resultariam em somatórios grandes. Vale destacar que elevando os erros a uma potência par positiva qualquer, além de ressaltar a diferença entre erros pequenos e erros grandes, os erros negativos não influenciam mais no problema. Deste modo, realizou-se o somatório dos erros ao quadrado para pretensões variando de 0,25% a 50%, como mostra a Tabela 5-12. Nota-se que, de fato, erros maiores (referentes aos extremos do nível de pretensão, isto é, 50% e 0,25%) apresentam somatórios maiores, enquanto pretensões intermediárias (5% a 25%) resultam em somatórios menores.

Tabela 5-12: $\sum \text{Erro}^2$ referente às tensões atuantes para diferentes porcentagens de pretensão

<div style="text-align: center;"> S_0 Entronca </div>	Erro relativo para diferentes pretensões							
	50%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0,25%
31	215%	91%	60%	28%	-3%	-34%	-66%	-94%
32	359%	175%	129%	82%	35%	-12%	-59%	-98%
33	128%	39%	17%	-6%	-28%	-51%	-73%	-90%
36	162%	50%	23%	-3%	-28%	-53%	-76%	-97%
38	245%	94%	58%	23%	-11%	-44%	-75%	-103%
40	282%	111%	71%	32%	-6%	-43%	-79%	-105%
$\sum E^2$	3574%	641%	293%	91%	30%	105%	308%	575%

Ao colocar os resultados da Tabela 5-12 em forma de gráfico, obtém-se a curva ilustrada na Figura 5-9. É possível observar pela imagem abaixo que existe um mínimo local entre 10% e 20% de pretensão, próximo de 15% mais especificamente. Este resultado de pretensão (15%) se aproxima relativamente do valor esperado (igual a 5%), posto que inicialmente a estrutura foi concebida para 5% de pretensão nos cabos, porém, deve-se ressaltar que há aspectos construtivos que podem, na prática, influenciar o valor de pretensão, como por exemplo a colocação das ponteiras nas extremidades das estroncas faz com a peça passe a ter comprimento maior do 120 cm, imperfeições geométricas naturais do bambu e o alongamento das cordas de sisal, que podem fazer com que a posição projetada dos nós tenha ficado mais afastada, ocasionando um aumento da pretensão.

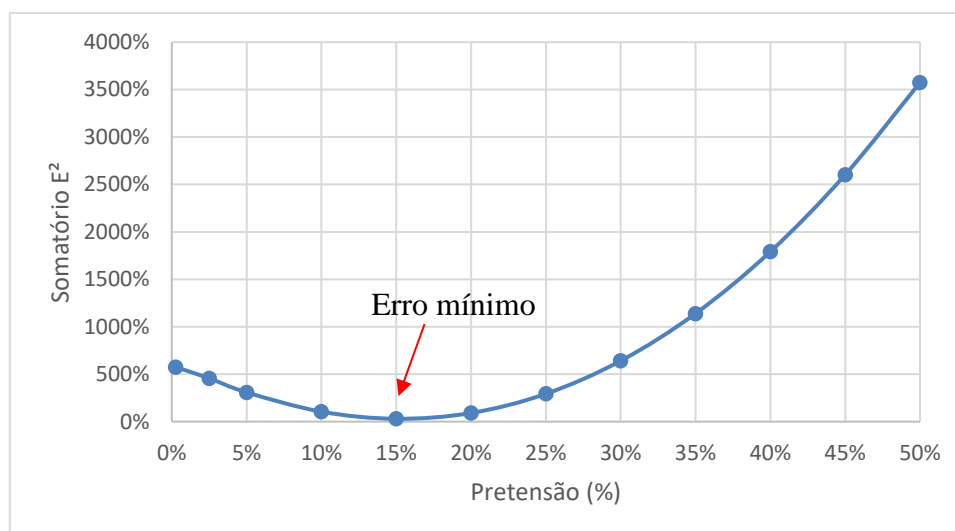


Figura 5-9: Curva do $\sum \text{Erro}^2$ para diferentes pretensões

5.3. Análise Dinâmica

5.3.1. Resultados do Modelo Computacional

O modelo computacional gerado pelo Galileo para a análise de vibração livre não amortecida leva em consideração a matriz de massa e a matriz de rigidez do módulo. O amortecimento da estrutura é desconsiderado, pois, como mencionado anteriormente, para fatores de amortecimento muito pequenos, esta supressão não afeta grandemente os resultados e simplifica a solução do problema de autovalores e autovetores. Obtiveram-se, através da análise modal realizada pelo software, 42 modos de vibração ao total (considerando que os três graus de

liberdade do nó de apoio, nomeadamente o nó seis, estão impedidos). Para cada um desses modos, há uma frequência natural associada, bem como um conjunto de deslocamentos modais nas direções dos eixos x, y e z para cada nó. O comportamento dos modos de vibração é amplamente influenciado pela pretensão, como mostram as Tabelas 5-13 e 5-14, bem como a Figura 5-10.

Tabela 5-13: Frequências naturais e modos de vibração em função do valor de pretensão (S_0)

S₀ (%)	Frequências (Hz)									
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
0,25	0,67	0,70	1,23	9,08	13,13	16,14	16,77	30,58	30,94	43,50
2,5	2,12	2,20	3,89	9,59	14,12	16,95	17,75	30,87	31,35	43,74
5,0	2,98	3,10	5,50	10,10	15,14	17,80	18,77	31,18	31,79	44,00
7,5	3,63	3,78	6,74	10,57	16,10	18,62	19,75	31,50	32,24	44,26
10,0	4,18	4,35	7,78	10,99	16,99	19,40	20,68	31,82	32,68	44,52
12,5	4,65	4,84	8,70	11,39	17,83	20,16	21,58	32,13	33,12	44,78
15	5,08	5,28	9,53	11,76	18,63	20,88	22,44	32,45	33,56	45,04
17,5	5,46	5,69	10,29	12,11	19,38	21,59	23,27	32,76	33,99	45,30
20,0	5,82	6,06	11,00	12,44	20,10	22,27	24,07	33,08	34,42	45,56
22,5	6,15	6,41	11,66	12,75	20,79	22,93	24,84	33,39	34,85	45,82
25,0	6,46	6,74	12,29	13,04	21,45	23,58	25,60	33,71	35,28	46,07
27,5	6,75	7,05	12,88	13,33	22,09	24,21	26,33	34,02	35,70	46,33
30,0	7,03	7,34	13,42	13,63	22,70	24,82	27,04	34,34	36,12	46,58

A Tabela 5-13 apresenta as frequências naturais obtidas para o módulo tensegrity referentes aos 10 primeiros modos de vibração considerando diferentes pretensões. Percebe-se que as frequências aumentam não só conforme a sucessão dos modos de vibração para um mesmo nível de pretensão, como também considerando apenas um único modo para diferentes níveis de pretensão. Apesar de existirem 42 modos de vibração, a partir do décimo modo verificou-se que a variação percentual da frequência natural em função do aumento de pretensão, considerando a diferença entre os valores extremos de pretensão (0,25% e 30%) apresentada na Tabela 5-14, situa-se abaixo de 10%, sofrendo pouca influência do nível de pretensão aplicado. Assim, os modos de vibração acima do 11º modo foram desconsiderados daqui em diante nesta análise. Além disso, observando os

resultados apontados na Tabela 5-13, nota-se que todas as frequências naturais são positivas, indicando que, de fato, o módulo tensegrity é estável. Graficamente, os resultados da Tabela 5-13 podem ser organizados como ilustrado na Figura 5-10.

Tabela 5-14: Frequências naturais e modos de vibração para pretensões de 0,25% e 30%

S₀ Modo	Frequências naturais (Hz)		
	0,25%	30,00%	Diferença relativa (%)
1	0,67	7,03	942,0%
2	0,70	7,34	951,8%
3	1,23	13,42	990,6%
4	9,08	13,63	50,0%
5	13,13	22,70	72,9%
6	16,14	24,82	53,7%
7	16,77	27,04	61,2%
8	30,58	34,34	12,3%
9	30,94	36,12	16,7%
10	43,50	46,58	7,1%
11	46,08	49,30	7,0%
12	53,52	56,78	6,1%
13	67,14	69,82	4,0%
14	70,42	73,10	3,8%
15	76,49	78,76	3,0%
16	77,97	80,37	3,1%
17	83,26	85,96	3,2%
18	83,99	86,58	3,1%
19	95,50	97,68	2,3%
20	99,65	102,05	2,4%
21	111,63	114,22	2,3%
22	125,30	127,39	1,7%
23	137,82	139,85	1,5%
24	138,83	140,83	1,4%
25	143,09	145,37	1,6%
26	146,53	148,72	1,5%
27	149,06	151,63	1,7%
28	200,45	201,43	0,5%
29	207,79	208,96	0,6%
30	245,89	246,55	0,3%
31	260,65	261,42	0,3%
32	274,25	274,97	0,3%
33	306,46	307,43	0,3%
34	310,27	311,15	0,3%
35	323,99	324,39	0,1%
36	331,90	332,99	0,3%
37	342,01	343,03	0,3%

Tabela 5-15: Continuação da Tabela 5-14

S₀ Modo	Frequências naturais (Hz)		
	0,25%	30,00%	Diferença relativa (%)
38	350,17	351,18	0,3%
39	356,92	357,99	0,3%
40	370,96	371,94	0,3%
41	375,83	376,83	0,3%
42	378,46	379,46	0,3%

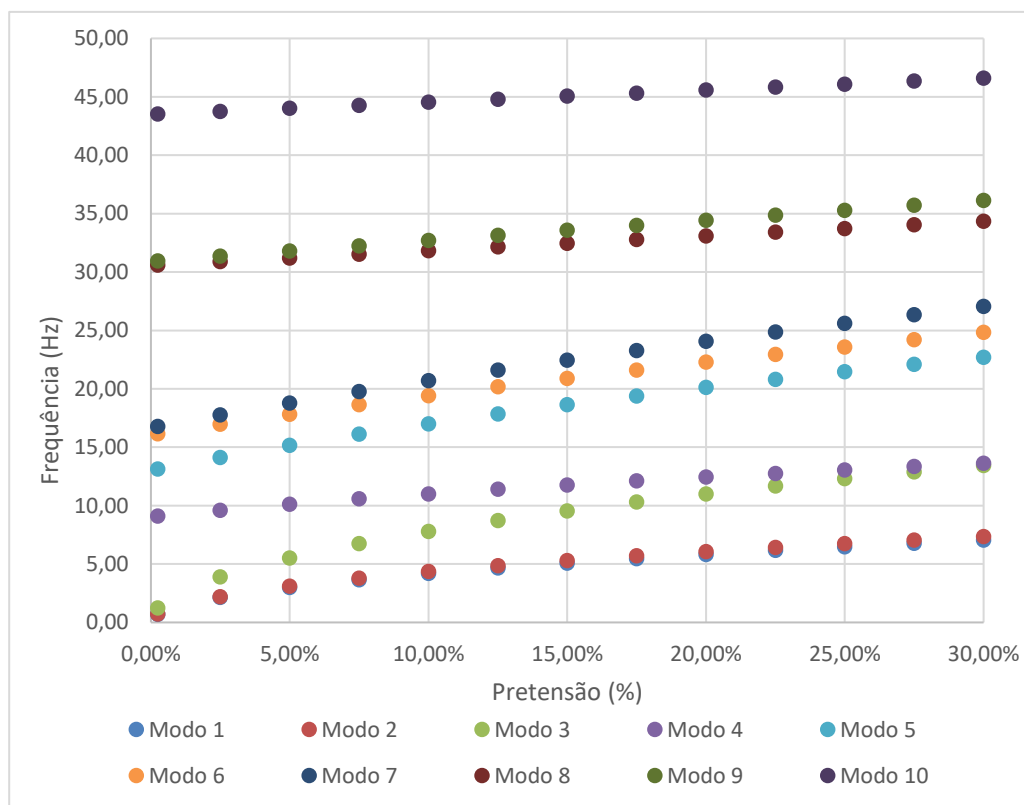


Figura 5-10: Curvas frequência vs. pretensão considerando os 10 primeiros modos de vibração

Além das interpretações feitas com base na Tabela 5-13, a Figura 5-10 permite outras constatações. É possível observar, por exemplo, que o primeiro e segundo modo de vibração apresentam comportamentos muito semelhantes no que diz respeito às frequências naturais obtidas para diferentes pretensões. Nota-se também que os modos 1 a 7 estão relativamente aglomerados em uma faixa de frequência entre 0,67 Hz e 27,04 Hz e que há um salto considerável nas frequências naturais para o oitavo modo de vibração e novamente para o décimo. Por fim, como foi visualizado também na Tabela 5-14, percebe-se que conforme a sucessão dos modos, a diferença entre as frequências naturais para 0,25% e 30% de pretensão diminuem significativamente, o que indica que os primeiros modos de

vibração são mais influenciados pelo nível de pretensão aplicado na estrutura do que os demais.

Outro ponto de interesse na análise modal é a forma dos autovetores (modos de vibração). Cada modo apresenta um conjunto de deslocamentos modais nos eixos x, y e z para cada nó do módulo tensegrity. Com os deslocamentos modais, é possível plotar cada modo de vibração da estrutura para diferentes pretensões. A Figura 5-11, por exemplo, mostra o primeiro modo de vibração do módulo tensegrity para 5% de pretensão, na qual a estrutura em azul é a configuração indeformada do módulo e a deformada encontra-se em branco.

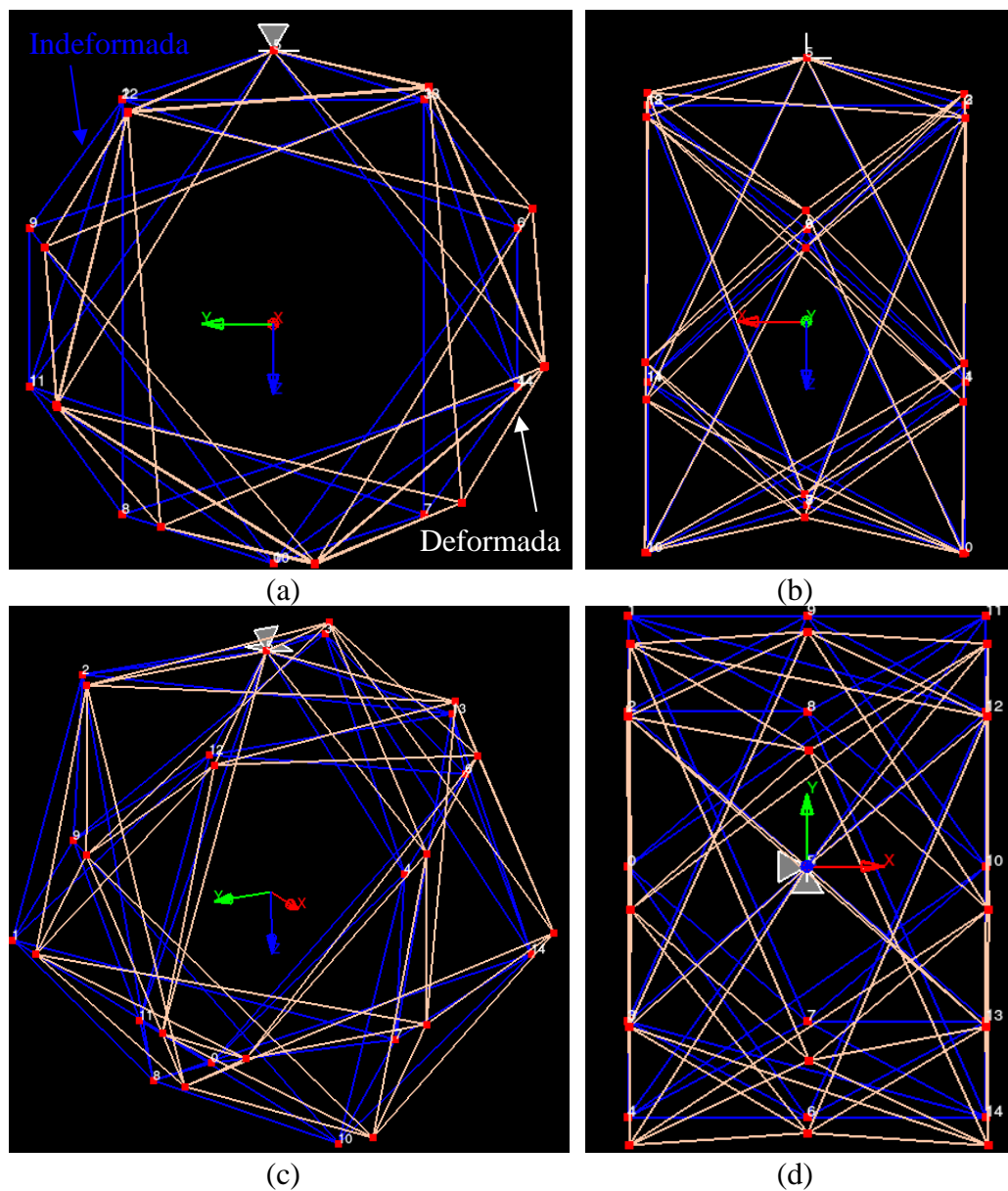


Figura 5-11: Primeiro modo de vibração ($f = 2,98$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão em (a) vista frontal (plano YZ), (b) vista lateral (plano XZ), (c) vista isométrica e (d) vista superior (plano XY)

Observando as Figuras 5-11a e 5-11d, percebe-se que, no primeiro modo de vibração ($f = 2,98$ Hz), o módulo tensegrity se deslocou consideravelmente na direção do eixo y. Nota-se também, pelas Figuras 5-11b e 5-11d, que não houve deslocamento significativo no eixo x. Por fim, as Figuras 5-11a e 5-11b mostram que houve um suave deslocamento no eixo z, onde alguns nós tiveram amplitudes positivas e outros, negativas. Portanto, o primeiro modo apresenta um comportamento predominantemente lateral na direção do eixo y. A lista de deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa da estrutura pode ser apreciada na Tabela 5-16 abaixo.

Tabela 5-16: Deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa referentes ao primeiro modo de vibração ($f=2,98$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão

Nó	$U_x \times 10^{-2}$	$U_y \times 10^{-2}$	$U_z \times 10^{-2}$
1	0,65	-11,20	0,22
2	0,50	-7,38	5,43
3	-0,11	-1,36	3,53
4	0,27	-1,39	-3,21
5	0,36	-7,27	-5,10
6	0,00	0,00	0,00
7	0,24	-4,10	-5,15
8	0,59	-10,17	-3,25
9	0,59	-10,17	3,25
10	0,24	-4,10	5,15
11	0,65	-11,20	-0,22
12	0,36	-7,27	5,10
13	0,27	-1,39	3,21
14	-0,11	-1,36	-3,53
15	0,50	-7,38	-5,43

Ressalta-se que a forma como a estrutura se deforma é particular e pode variar substancialmente de acordo com cada modo de vibração, conforme ilustrado na Figura 5-12. Ao analisar a forma referente ao segundo modo de vibração ($f = 3,10$ Hz), observa-se que houve uma grande mudança quando comparada à apresentada na Figura 5-11. É possível visualizar que o módulo tensegrity se deslocou notavelmente na direção do eixo x, como mostram as Figuras 5-12b e 5-12d, caracterizando um modo de vibração lateral na direção do eixo x. Com relação ao eixo y, percebe-se pelas Figuras 5-12a e 5-12b que não tiveram deslocamentos relevantes, fato corroborado pela Tabela 5-17.

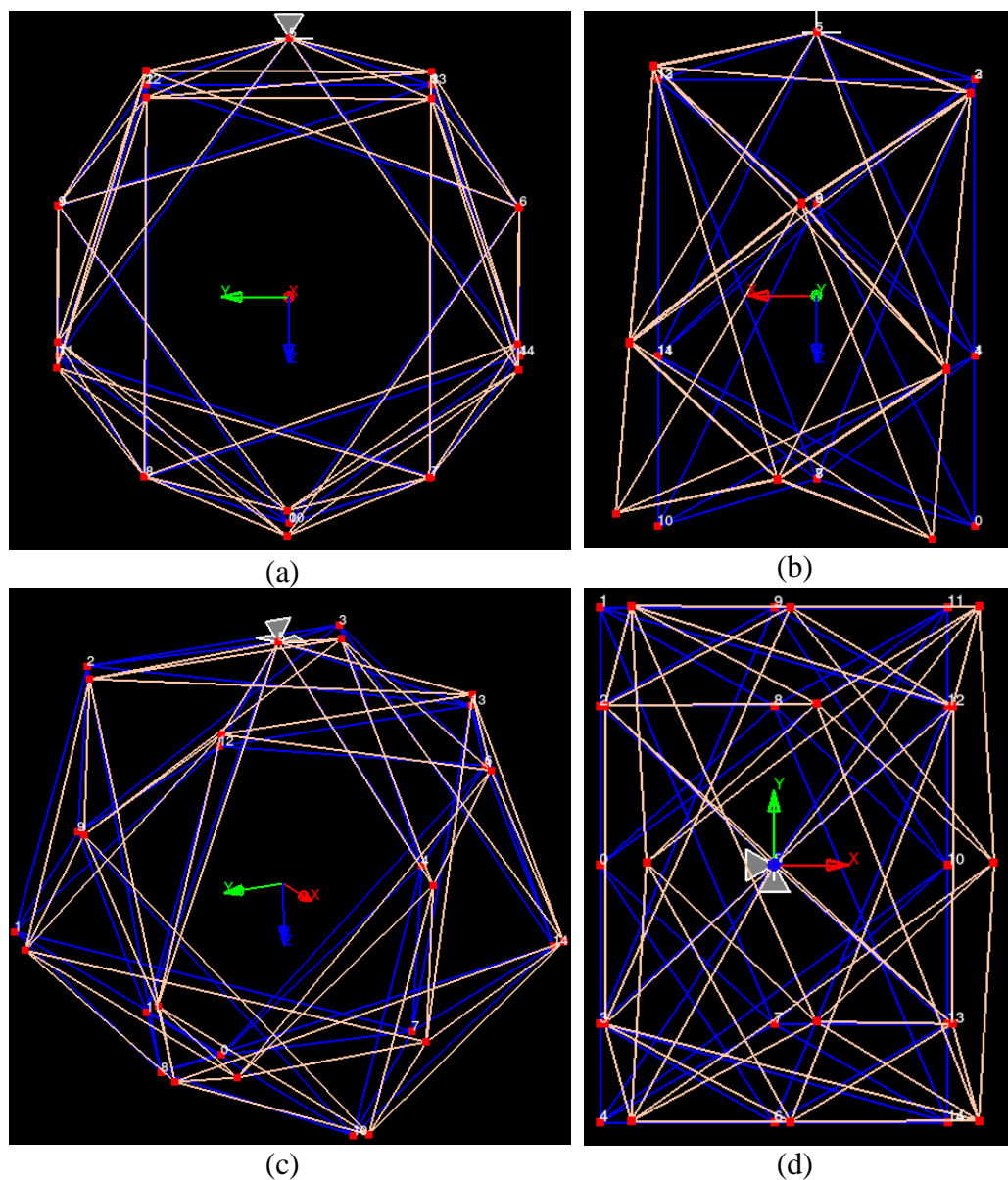


Figura 5-12: Segundo modo de vibração ($f = 3,10$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão em (a) vista frontal (plano YZ), (b) vista lateral (plano XZ), (c) vista isométrica e (d) vista superior (plano XY)

Tabela 5-17: Deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa referentes ao segundo modo de vibração ($f = 3,10$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão

Nó	$U_x \times 10^{-2}$	$U_y \times 10^{-2}$	$U_z \times 10^{-2}$
1	11,79	0,63	3,61
2	7,88	0,49	3,46
3	1,23	0,07	3,62
4	1,26	0,00	3,99
5	7,92	0,27	4,08
6	0,00	0,00	0,00
7	4,26	0,14	0,28
8	10,74	0,61	0,15

Tabela 5-18: Continuação da Tabela 5-17

Nó	$U_x \times 10^{-2}$	$U_y \times 10^{-2}$	$U_z \times 10^{-2}$
9	10,74	0,61	-0,15
10	4,26	0,14	-0,28
11	11,79	0,63	-3,61
12	7,92	0,27	-4,08
13	1,26	0,00	-3,99
14	1,23	0,07	-3,62
15	7,88	0,49	-3,46

Finalmente, de modo a enfatizar a diferença entre a forma obtida para cada modo de vibração da estrutura, tem-se a Figura 5-13 demonstrando o comportamento do tensegrity referente ao terceiro modo ($f=5,50$ Hz) para uma pretensão de 5%. Observa-se imediatamente pelas Figuras 5-13a e 5-13b que praticamente não houve deslocamento dos nós no eixo z. A Figura 5-13b mostra que o tensegrity se deformou substancialmente no eixo x, enquanto que a Figura 5-13a ilustra que houve deslocamento também no eixo y. Analisando a Figura 5-13d e a Tabela 5-19 nota-se que, de fato, os nós mudaram de coordenadas nos eixos mencionados, tendo ocorrido uma rotação no sentido anti-horário do módulo tensegrity em torno do eixo z, o que configura um modo torcional.

Tabela 5-19: Deslocamentos modais normalizados em relação à matriz de massa referentes ao terceiro modo de vibração ($f=5,50$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão

Nó	$U_x \times 10^{-2}$	$U_y \times 10^{-2}$	$U_z \times 10^{-2}$
1	-0,02	-6,75	0,02
2	-10,02	-6,74	0,03
3	-6,18	-6,74	0,02
4	6,21	-6,75	0,02
5	10,01	-6,73	0,02
6	0,00	0,00	0,00
7	10,02	-0,01	0,04
8	6,19	0,02	0,02
9	-6,19	-0,02	0,02
10	-10,02	0,01	0,04
11	0,02	6,75	0,02
12	-10,01	6,73	0,02
13	-6,21	6,75	0,02
14	6,18	6,74	0,02
15	10,02	6,74	0,03

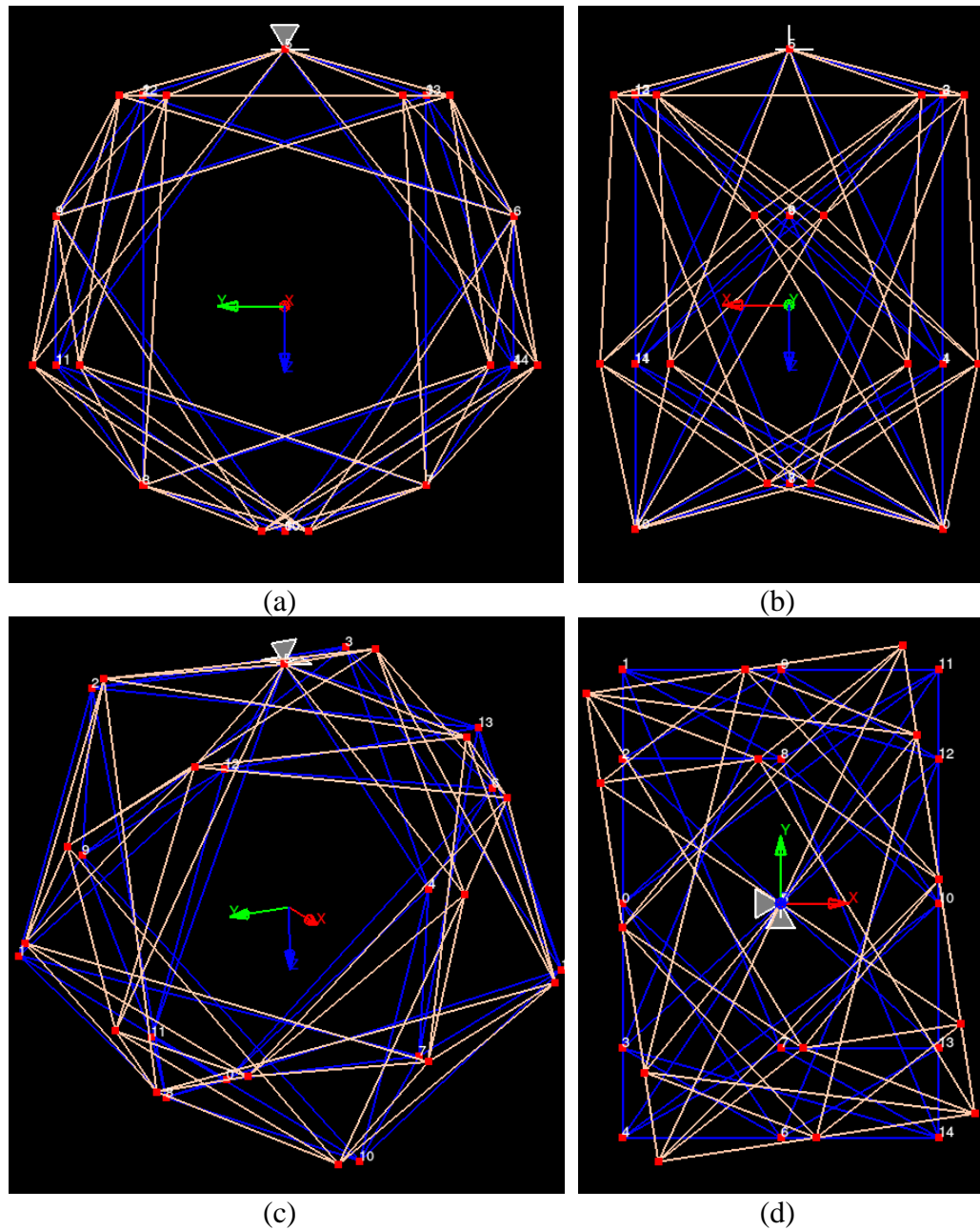


Figura 5-13: Terceiro modo de vibração ($f = 5,50$ Hz) do módulo tensegrity para 5% de pretensão em (a) vista frontal (plano YZ), (b) vista lateral (plano XZ), (c) vista isométrica e (d) vista superior (plano XY)

Por se tratar de uma estrutura tridimensional complexa, a visualização dos modos de vibração do tensegrity pode ser um desafio. Adicionalmente, procura-se investigar se a forma dos modos de vibração varia em função da pretensão aplicada. Deste modo, buscando entender melhor o comportamento do módulo, optou-se por realizar uma avaliação aplicando o *Modal Assurance Criterion* – MAC (ARTEMIS, 2019; EWINS, 2009; AVITABILE, 2017), como mostra a Eq. (5-1). O MAC é uma formulação matemática utilizada para medir a similaridade

entre dois vetores ou matrizes, neste caso os modos de vibração de uma estrutura, em uma escala de 0 a 1, onde 0 indica que não há nenhuma similaridade entre os vetores e 1 significa que os vetores são completamente similares. Ademais, pode-se dizer que valores acima de 0,80 (80%) indicam uma alta correlação entre os modos enquanto que abaixo de 0,20 (20%) apresentam uma baixa correlação entre si (EWINS, 2009).

$$MAC(r, q) = \frac{|\{\varphi_A\}_r^T \{\varphi_X\}_q|^2}{(\{\varphi_A\}_r^T \{\varphi_A\}_r)(\{\varphi_X\}_q^T \{\varphi_X\}_q)} \quad \text{Eq. (5-1)}$$

onde $\{\varphi_A\}_r$ é o vetor modal φ_A referente ao modo r e $\{\varphi_X\}_q$ é o vetor modal φ_X referente ao modo q .

A Figura 5-14, por exemplo, mostra graficamente os resultados do MAC realizado para os dez primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para 5% de pretensão. Comparar um vetor com ele mesmo, também chamado de AUTOMAC (EWINS, 2009), permite não só verificar que a implementação da análise foi feita de forma correta, como também avaliar algumas características particular do sistema.

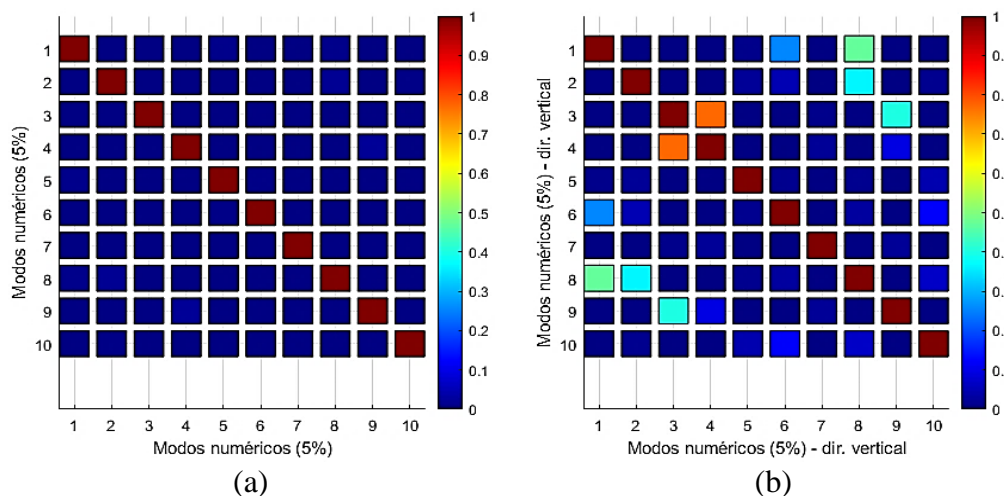


Figura 5-14: AUTOMAC dos 10 primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para 5% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdade (dir. vertical)

Analisando a Figura 5-14a, que leva em consideração todos os 45 graus de liberdade da estrutura, observa-se que todos os valores da diagonal principal são iguais a 1, naturalmente. Fora da diagonal, todos os demais valores são muito próximos a 0, indicando que não há similaridade entre os modos de vibração, ou, em outras palavras, que os modos de vibração são linearmente independentes. Já observando a Figura 5-14b, que considera apenas os deslocamentos verticais do

módulo, constata-se não só que alguns valores fora da diagonal principal são um pouco maiores do 0, como existem dois casos que chamam a atenção, nos quais é possível verificar que há uma similaridade significativa entre o terceiro e o quarto modo de vibração da estrutura.

Destaca-se, além disso, que a análise do AUTOMAC dos modos numéricos é importante em vista de uma posterior análise dinâmica experimental, uma vez que nem sempre é possível realizar a instrumentação de todos os graus de liberdade de uma estrutura, levando-se em conta o número de sensores disponíveis, o tamanho da estrutura e o tempo para a realização do ensaio experimental. Como verificado na Figura 5-14, a redução dos graus de liberdade pode apresentar alguma dificuldade na distinção dos modos de vibração. A análise modal foi realizada para diversos níveis de pretensão como mostra a Tabela 5-13. Idealmente o módulo tensegrity foi projetado para 5% de pretensão, porém, como mencionado nos capítulos anteriores, o método construtivo pode ter influenciado na configuração final da estrutura. Deste modo, além de explorar o comportamento do tensegrity para 5% de pretensão, também foram feitas análise nos extremos do espectro de estudo, isto é, 0,25% e 30% de pretensão.

A Figura 5-15 mostra o MAC para os dez primeiros modos de vibração para o módulo com 5% e 30% de pretensão. Observando a figura, nota-se que há grande similaridade entre as matrizes de deslocamento na diagonal principal considerando 45 graus de liberdade (Figura 5-15a), porém o terceiro modo de vibração para ambas pretensões, bem como o quarto modo, possuem menor similaridade, iguais a 0,8512 e 0,7126, respectivamente. Fora da diagonal, a maioria dos valores é próxima a zero. Por outro lado, levando em consideração somente 15 graus de liberdade (Figura 5-15b), verifica-se que a diagonal principal apresenta valores com alta similaridade, contudo, o segundo, terceiro e quinto modo de vibração para ambas pretensões mostram uma similaridade um pouco menor. Observa-se ainda que o quarto modo para 5% de pretensão é igual ao terceiro modo para 30% e que o terceiro modo de vibração considerando 5% de pretensão apresenta significativa similaridade ao quarto modo para 30%. Deste modo, é possível perceber que há relativa diferença entre os modos de vibração do módulo aplicando 5% e 30% de pretensão, sobretudo tendo em vista apenas os deslocamentos verticais.

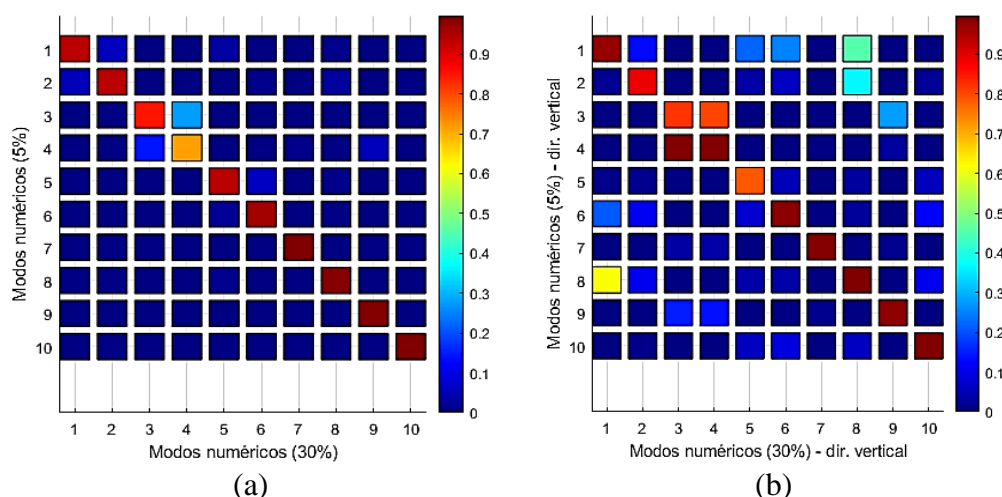


Figura 5-15: MAC entre os 10 primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para 5% e 30% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdade (dir. vertical)

Na outra ponta do espectro, encontram-se outros pontos de interesse. A Figura 5-16a mostra que há alta similaridade entre os valores da diagonal principal para 5% e 0,25% de pretensão e, além disso, percebe-se que os demais modos são linearmente independentes. Investigando o MAC para apenas deslocamentos verticais, observa-se novamente que há grande similaridade entre os modos na diagonal principal. Nota-se também que o terceiro modo de vibração com 5% de pretensão é similar ao quarto modo com 0,25% e que o quarto modo para 5% apresenta alguma similaridade com o terceiro modo de vibração considerando 0,25%. Ademais, fora da diagonal principal, os modos apresentam baixa similaridade. De forma geral, os modos de vibração para 0,25% e 5% de pretensão apresentam comportamentos parecidos.

Finalmente, comparando os modos de vibração entre 0,25% e 30% de pretensão, tem-se que a diagonal principal, para 45 graus de liberdade, apresenta valores medianos de similaridade, sobretudo no terceiro e quarto modo, como ilustra a Figura 5-17a. A partir do sexto modo de vibração em diante, a similaridade já cresce consideravelmente. Analisando a Figura 5-17b, percebe-se que o segundo, terceiro e quinto modo de vibração possuem menor grau de similaridade quando comparados os demais valores na diagonal principal. Fora desses valores, os demais modos apresentam pouca similaridade, com exceção do terceiro modo de vibração para 0,25% de pretensão em contraste com o quarto modo para 30% que apresenta relativo grau de similaridade e do quarto modo considerando 0,25% versus terceiro modo de vibração com 30% de pretensão em

que o grau de similaridade é total. Observando os resultados mostrados na Figura 5-17 é possível reparar que existem diferenças consideráveis entre os modos de vibração para cada pretensão considerada.

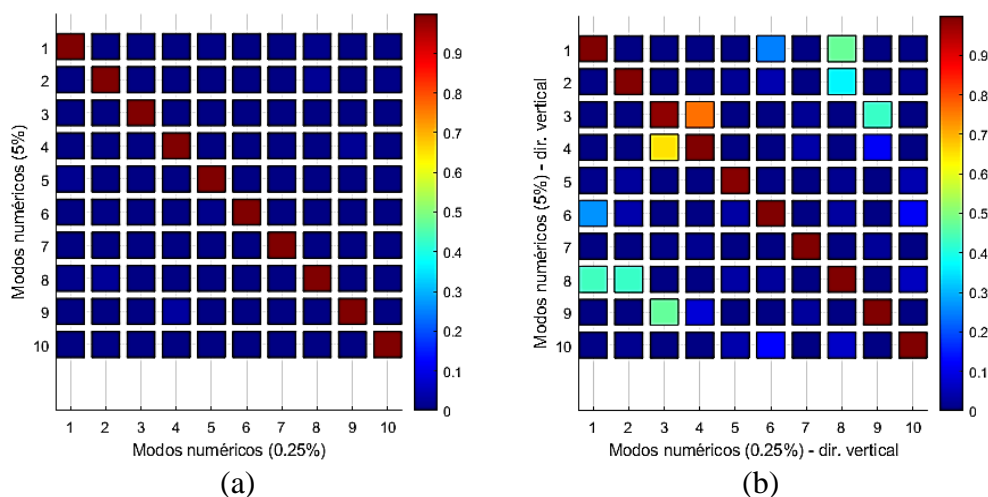


Figura 5-16: MAC entre os 10 primeiros modos de vibração do tensegrity para 5% e 0,25% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdade (dir. vertical)

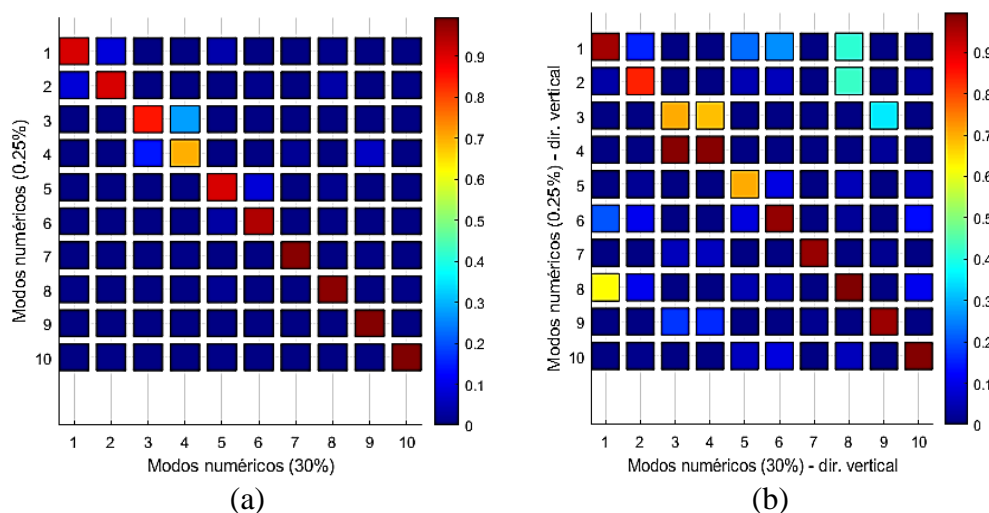


Figura 5-17: MAC entre os 10 primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para 0,25% e 30% de pretensão considerando (a) 45 graus de liberdade e (b) 15 graus de liberdades (dir. vertical)

5.3.2. Resultados do Ensaio Experimental

A realização do ensaio experimental teve como finalidade determinar as frequências naturais e modos de vibração do módulo tensegrity, características estas que foram comparadas aos resultados numéricos a fim de, primeiramente, identificar de forma indireta o nível de pretensão aplicado logo após o término da montagem do módulo tensegrity; em segunda instância, buscou-se avaliar como a pretensão se comporta ao longo do tempo, isto é, se ela se mantém constante ou se

há perda de pretensão. Como dito no Capítulo 4, a estrutura em questão foi submetida a um ensaio de vibração livre até amortecer. Ao todo, foram realizados quatro ensaios dinâmicos, onde o primeiro deles foi executado imediatamente depois da montagem do módulo, o segundo após 4 dias, o terceiro após 14 dias e, finalmente, o último ensaio foi feito 52 dias depois da conclusão da montagem. Uma vez que a estrutura é excitada, é possível medir a excitação, bem como suas respostas através de um sensor de força e acelerômetro. A Figura 5-18 ilustra, por exemplo, os sinais de força e aceleração no domínio do tempo – que são similares em todos os ensaios – referentes ao *driving point* (local no qual a excitação e a resposta dinâmica ocorrem no mesmo ponto onde o acelerômetro está posicionado), ou seja, nó 3.

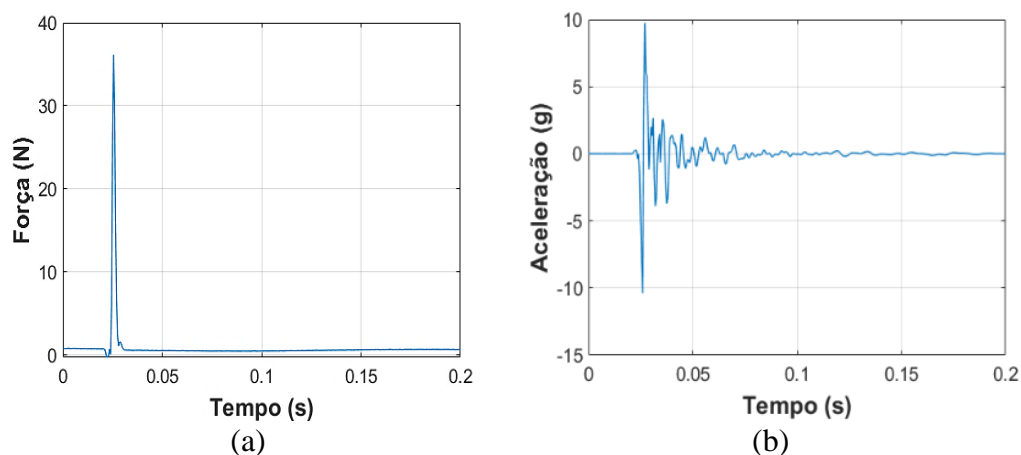


Figura 5-18: Sinal de força (a) e da aceleração (b) no domínio do tempo referente ao *driving point*

A Figura 5-18a ilustra nitidamente o aspecto de impulso proveniente do golpe do martelo na estrutura, havendo uma grande quantidade de força aplicada durante um intervalo bem curto de tempo. Já a Figura 5-18b mostra a resposta dessa excitação. Observa-se que o módulo vibrou livremente até amortecer, ocorrendo um pico na aceleração correspondente ao momento em que o martelo entra em contato com a estrutura. Posteriormente, esses sinais de força e aceleração no domínio no tempo são convertidos para o domínio da frequência e a FRF pode ser calculada com base dados de entrada e da saída. Para cada batida na estrutura (obtida a partir de uma média de 10 golpes por nó) é gerada uma FRF referente àquele ponto. Por fim, todas as FRFs são contabilizadas e transformadas em um único gráfico, designado como *Complex Mode Indicator Function* (CMIF), cuja unidade é aceleração/força e é definido como base nos autovalores resolvidos a

partir da matriz normal, formada, por sua vez, a partir da matriz da função de resposta em frequência. O CMIF pode ser calculado a partir da multiplicação da matriz normal com sua matriz hermitiana ou por decomposição de valor singular (SVD) da matriz normal em cada linha espectral (KALKAN, 2020; ALLEMANG & BROWN, 2006). A análise do gráfico CMIF permite a obtenção de parâmetros fundamentais na análise modal, pois cada pico da curva está associado a uma frequência natural e um modo de vibração, como mostram as Figuras 5-19 a 5-22.

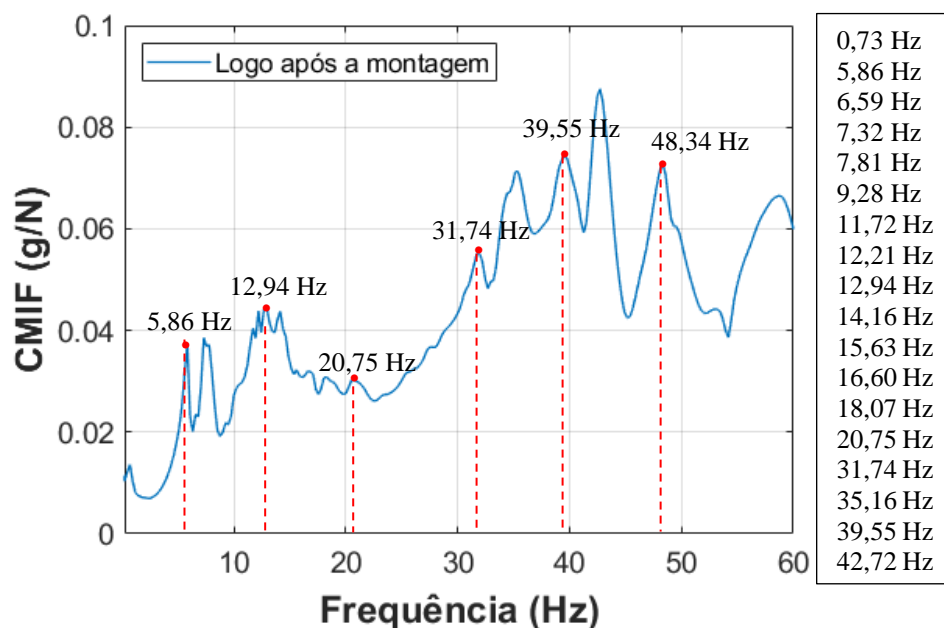


Figura 5-19: CMIF do módulo tensegrity logo após a montagem

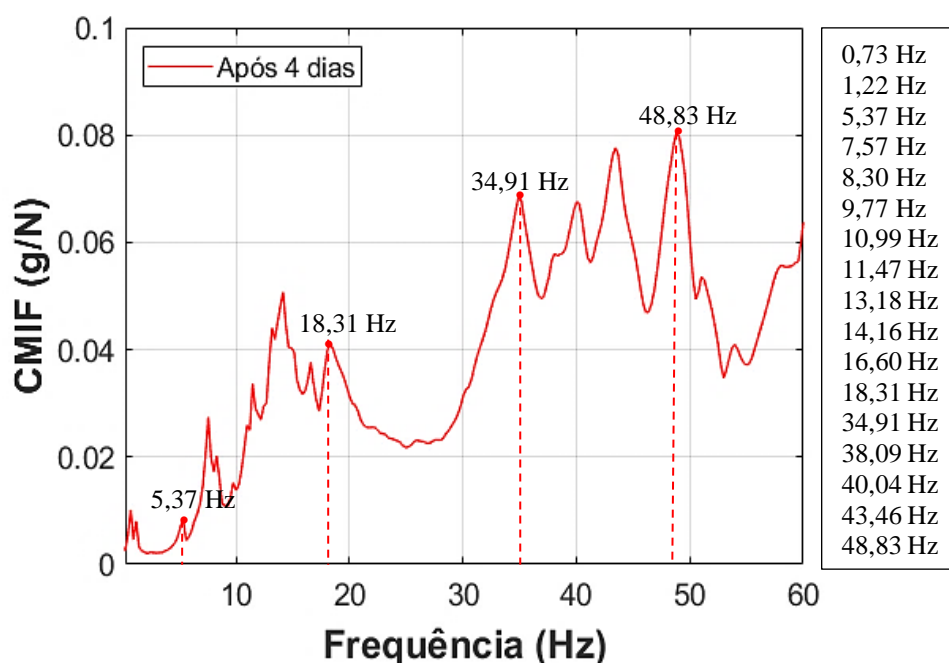


Figura 5-20: CMIF do módulo tensegrity após 4 dias da montagem

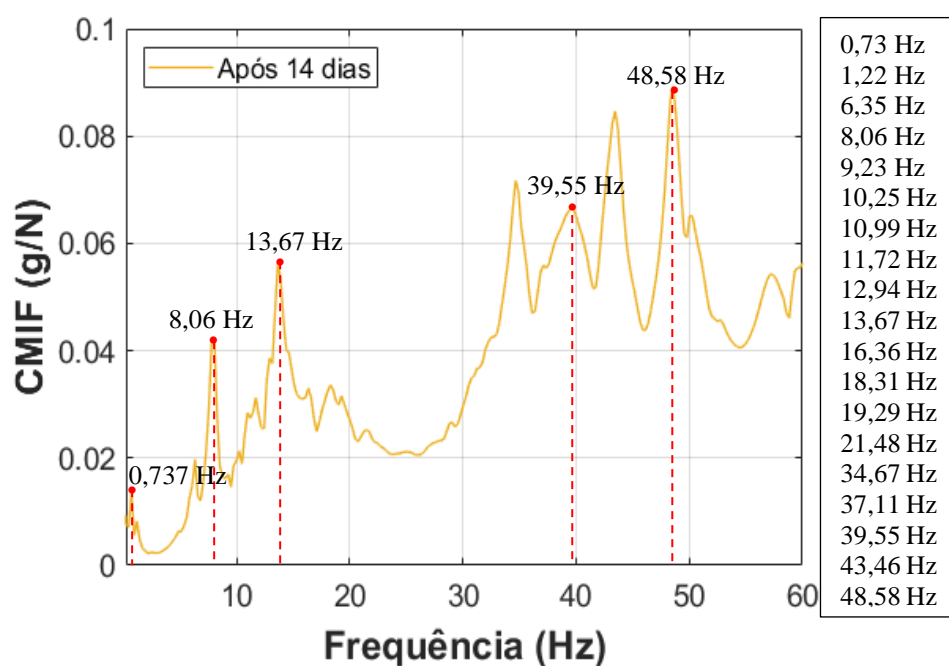


Figura 5-21: CMIF do módulo tensegrity após 14 dias da montagem

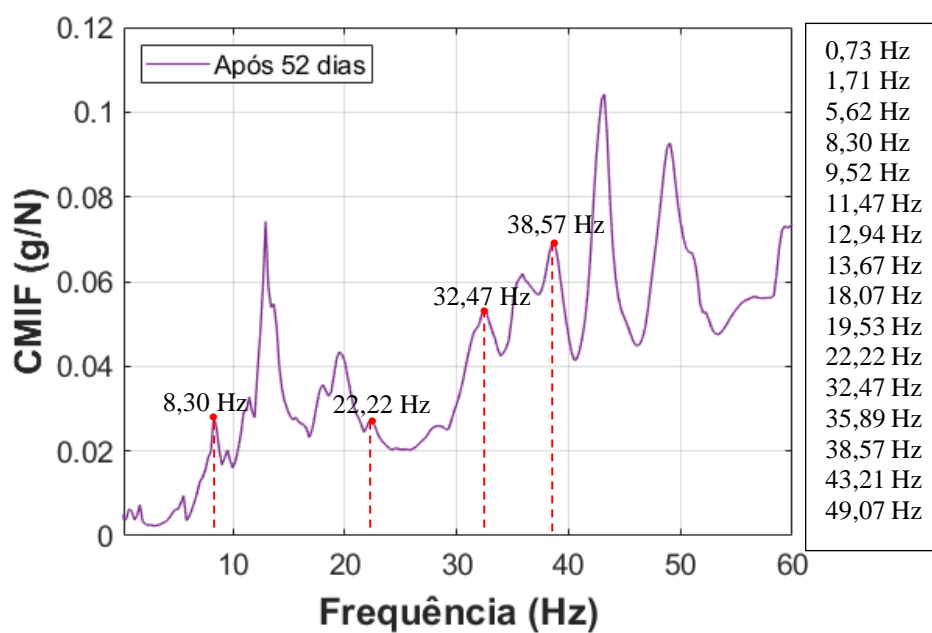


Figura 5-22: CMIF do módulo tensegrity após 52 dias da montagem

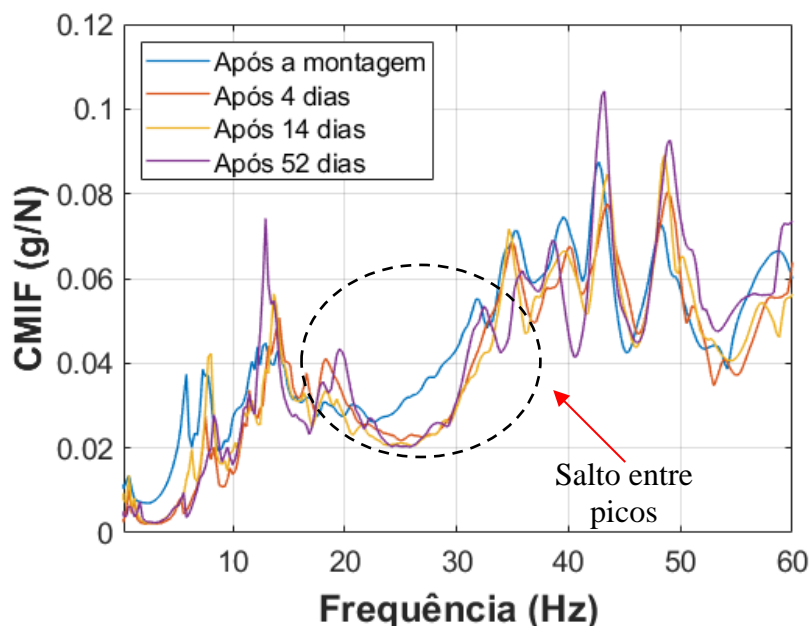


Figura 5-23: Combinação dos CMIFs do módulo tensegrity ao longo do tempo

As Figuras 5-19 a 5-22 ilustram separadamente o CMIF de cada ensaio, onde as frequências naturais referentes a cada pico estão indicadas. Sobrepondo os quatro gráficos, é possível perceber algumas semelhanças e diferenças entre cada um deles. Analisando a Figura 5-23, nota-se que, no geral, o feitiço das curvas apresenta certa afinidade, sobretudo considerando que no modelo experimental podem surgir picos que não aparecem no numérico, pode haver divisão de um pico em dois, ou ainda o contrário, isto é, pode ocorrer a união de dois picos em um. De fato, ao observar a Tabela 5-20, que exibe as frequências naturais obtidas a partir dos picos do CMIF para diferentes dias, verifica-se que algumas curvas apresentam maior número de picos que outras, porém, é possível reparar que há significativa conformidade entre as frequências naturais, tanto no que diz respeito aos valores encontrados para ensaios realizados em dias diferentes (como pode ser visto nas linhas da Tabela 5-20), como também à forma com que essas frequências aumentam conforme a sucessão dos picos (visto nas colunas da Tabela 5-20). A Figura 5-24 ilustra justamente essa compatibilidade, onde percebe-se que não só as curvas seguem o mesmo formato – na qual observam-se dois trechos com tendência linear e um salto entre o primeiro e o segundo trecho, que corresponde ao salto entre picos exibido na Figura 5-23, como também que há uma sobreposição entre os valores obtidos.

Tabela 5-20: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir dos picos dos CMIFs ao longo do tempo

Frequências naturais (Hz)			
Após montagem	4 dias	14 dias	52 dias
0,73	0,73	0,73	0,73
-	1,22	1,22	1,71
5,86	5,37	-	5,62
6,59	-	6,35	-
7,32	7,57	-	-
7,81	8,30	8,06	8,30
9,28	9,77	9,23	9,52
-	-	10,25	-
-	10,99	10,99	-
11,72	11,47	11,72	11,47
12,21	-	-	-
12,94	-	12,94	12,94
-	13,18	13,67	13,67
14,16	14,16	-	-
15,63	-	-	-
16,60	16,60	16,36	-
18,07	18,31	18,31	18,07
-	-	19,29	19,53
20,75	-	21,48	22,22
31,74	-	-	32,47
35,16	34,91	34,67	35,89
-	38,09	37,11	38,57
39,55	40,04	39,55	-
42,72	43,46	43,46	43,21
48,34	48,83	48,58	49,07

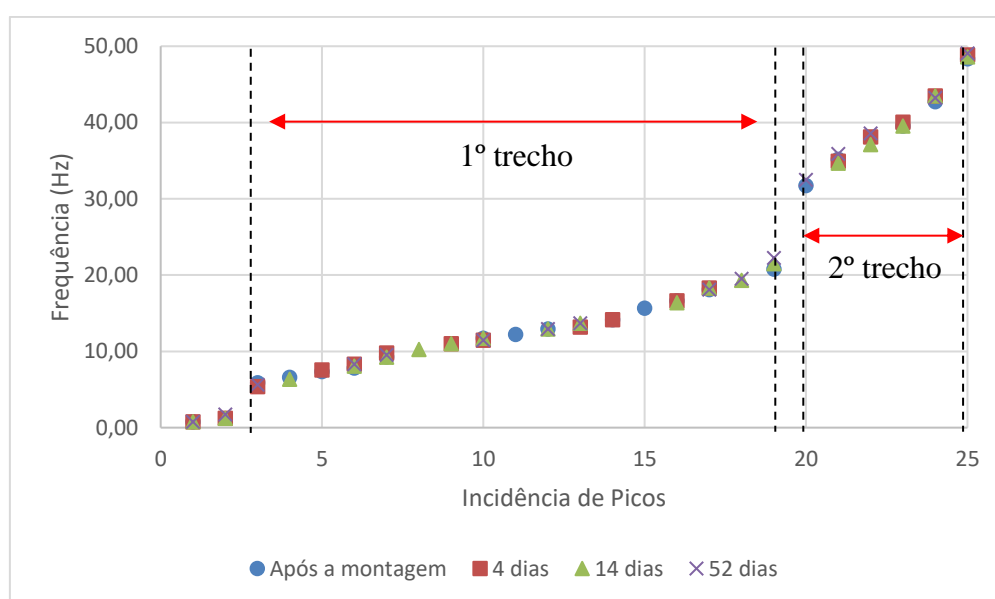


Figura 5-24: Comportamento das frequências naturais conforme sucessão dos picos

A partir da análise da Tabela 5-20 e da Figura 5-24 também é possível intuir mais uma característica do módulo tensegrity. Observa-se que, mesmo com o passar do tempo, as frequências naturais obtidas com base no CMIF logo após a montagem, após 4 dias, após 14 dias e após 52 dias não apresentam uma variação significativa, indicando, portanto, que não houve uma perda relevante no nível de pretensão aplicado na estrutura durante este ínterim, posto que há uma relação direta entre pretensão e frequência, como demonstrado na seção 5.3.1.

5.3.3. Comparação entre Resultados Numéricos e Experimentais

Como dito inicialmente, o objetivo da investigação dinâmica foi identificar as frequências naturais e modos de vibração do tensegrity para determinar indiretamente o nível de pretensão aplicado na estrutura após a montagem da mesma, bem como avaliar o comportamento da pretensão ao longo do tempo. Na seção acima comentou-se sobre o comportamento do módulo tensegrity no que diz respeito às frequências naturais ao longo do tempo e como estas se relacionam com as pretensões atuantes em diferentes momentos do ensaio dinâmico. Agora, nesta seção, buscou-se determinar o nível de pretensão aplicado na estrutura logo após a montagem da mesma. Para tal, foi realizado o cruzamento entre os resultados numéricos e experimentais obtidos para este momento específico, já que a análise do modelo computacional mostrou que as frequências estão diretamente relacionadas com o nível de pretensão dos cabos, como detalhado na seção 5.3.1.

A Figura 5-19 apresenta a lista completa das frequências naturais relacionados aos picos obtidos no CMIF. Esses valores então foram comparados com os resultados numéricos expostos na Tabela 5-13, de modo que foram calculados os erros relativos entre a frequência numérica e sua vizinha experimental mais próxima utilizando a mesma equação apresentada na seção 5.2.3, ou seja,

$$ER = \frac{freq.numérica - freq.experimental}{freq.experimental}$$

As Tabelas 5-21 a 5-23 abaixo resumem os erros relativos encontrados para cada modo de vibração do tensegrity para pretensões iguais a 0,25%, 5% e 25%.

Tabela 5-21: Frequências numéricas e erros relativos para os 10 primeiros modos de vibração considerando 0,25% pretensão

Modo	Frequência numérica (Hz)	Erro relativo (%)
1	0,67	-7,91%
2	0,70	-4,66%
3	1,23	68,06%
4	9,08	-2,09%
5	13,13	1,45%
6	16,14	-2,75%
7	16,77	1,05%
8	30,58	-3,65%
9	30,94	-2,51%
10	43,50	1,84%

Os resultados acima mostram que, com exceção do terceiro modo de vibração, que demonstrou um erro bastante alto, as frequências numéricas tiveram grande similaridade quando comparadas às suas vizinhas experimentais, sobretudo a partir do quarto modo.

Tabela 5-22: Frequências numéricas e erros relativos para os 10 primeiros modos de vibração considerando 5% pretensão

Modo	Frequência numérica (Hz)	Erro relativo (%)
1	2,98	-49,09%
2	3,10	-47,15%
3	5,50	-6,07%
4	10,10	8,88%
5	15,14	-3,11%
6	17,80	-1,47%
7	18,77	3,90%
8	31,18	-1,75%
9	31,79	0,17%
10	44,00	3,00%

Analisando a Tabela 5-22 nota-se que, novamente, a maioria dos erros foi consideravelmente pequena, com destaque para o nono modo de vibração, que apresentou uma diferença de apenas 0,17%.

Tabela 5-23: Frequências numéricas e erros relativos para os 10 primeiros modos de vibração considerando 25% pretensão

Modo	Frequência numérica (Hz)	Erro relativo (%)
1	6,46	-2,02%
2	6,74	2,25%
3	12,29	0,65%
4	13,04	0,81%
5	21,45	3,39%
6	23,58	13,63%
7	25,60	-19,35%
8	33,71	-4,13%
9	35,28	0,33%
10	46,07	-4,69%

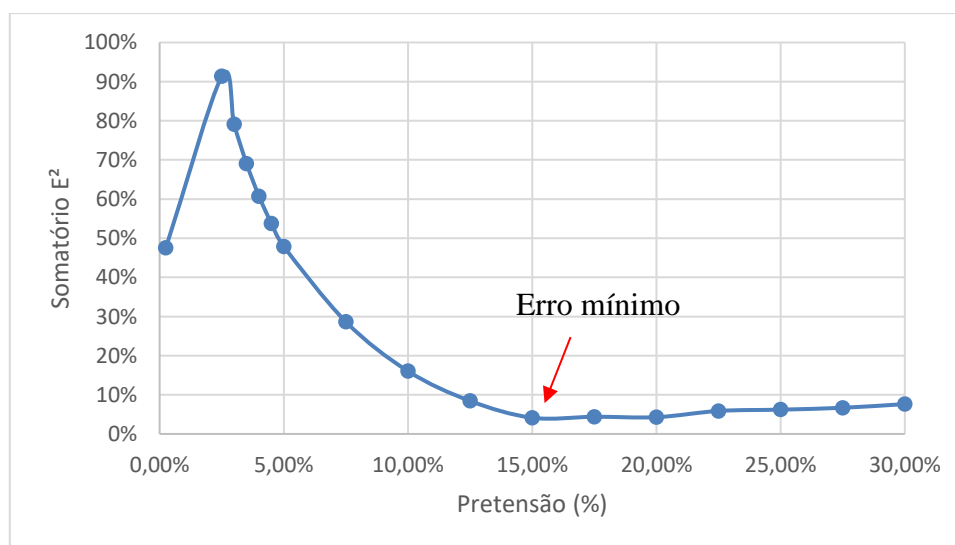
Os valores apresentados na tabela acima apresentam uma conformidade mais alta do que aqueles exibidos nas Tabelas 5-21 e 5-22. O maior erro observado é de 19,35% e, mais uma vez, percebe-se que o nono modo apresentou grande similaridade entre os resultados numéricos e experimentais.

Similarmente ao raciocínio desenvolvido na seção 5.2.3, pode-se fazer a soma dos quadrados dos erros relativos para cada porcentagem de pretensão aplicada a fim de observar se há um valor de erro mínimo associado ao comportamento global da estrutura. Deste modo, realizou-se o somatório dos erros ao quadrado referentes aos 10 primeiros modos de vibração do módulo tensegrity para pretensões variando de 0,25% a 30%, como mostra a Tabela 5-24. Observa-se, novamente, que níveis de pretensão próximos aos extremos (0,25% e 30%) geraram erros maiores e níveis intermediários (em torno de 15%) apresentaram erros menores, porém analisando as pretensões por faixas, em vez de pontualmente, nota-se pretensões entre 0,25% e 15% resultaram em erros consideravelmente maiores do que aqueles referentes às pretensões de 15% a 30%. Inclusive, os erros a partir de 15% demonstraram uma variação muito sutil, especialmente os somatórios de 15% e 20%. Outro ponto interessante é que o erro relativo a 0,25% é menor do que o erro para 2,5%, mudando bruscamente o comportamento da curva.

Tabela 5-24: $\sum \text{Erro}^2$ referente às frequências naturais para diferentes porcentagens de pretensão

S ₀ Modo	Erro relativo para diferentes pretensões							
	0,25%	2,5%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
M1	-8%	-64%	-49%	-29%	-13%	-1%	-2%	-4%
M2	-5%	-62%	-47%	-26%	-10%	3%	2%	0%
M3	68%	-34%	-6%	0%	3%	-6%	1%	4%
M4	-2%	3%	9%	-6%	0%	2%	1%	-4%
M5	1%	0%	-3%	2%	3%	-3%	3%	9%
M6	-3%	2%	-1%	-6%	1%	7%	14%	20%
M7	1%	-2%	4%	0%	8%	16%	-19%	-15%
M8	-4%	-3%	-2%	0%	2%	4%	-4%	-2%
M9	-3%	-1%	0%	3%	-5%	-2%	0%	3%
M10	2%	2%	3%	4%	5%	-6%	-5%	-4%
$\sum E^2$	48%	91%	48%	16%	4,1%	4,3%	6%	8%

Os resultados da Tabela 5-24 podem ser representados graficamente conforme ilustra a Figura 5-25. Observa-se pela imagem abaixo que existe um mínimo local entre 12,5% e 17,5% de pretensão, próximo de 15% mais especificamente. Este resultado de pretensão (15%) se aproxima relativamente do valor esperado (igual a 5%), posto que inicialmente a estrutura foi concebida para 5% de pretensão nos cabos, porém, como mencionado anteriormente, há aspectos construtivos que podem afetar o valor de pretensão final.

Figura 5-25: Curva do $\sum \text{Erro}^2$ para diferentes pretensões

Por fim, vale ressaltar uma particularidade do módulo tensegrity observada no ARTeMIS. O diagrama de estabilização dos modos de vibração (Figura 5-26) busca encontrar uma função através do método RFP-Z de tal forma que haja uma compatibilização das curvas (*curve fitting*) das frequências naturais e modos de vibração. As cascatas em vermelho sinalizam que houve a estabilização do modo naquele ponto da curva, enquanto que as cascatas em marrom estão associadas a modos espúrios, que não têm significado físico. Idealmente, espera-se que os modos de vibração sejam reais, porém, os modos detectados no diagrama – com fatores de amortecimento na faixa de 1,047% a 2,582% – possuem uma componente imaginária, indicando que há uma defasagem no tempo dos picos do movimento oscilatório. Para a maioria das estruturas convencionais (i.e., feitas em aço e/ou concreto), tem-se que o modelo de amortecimento proporcional é uma boa aproximação, posto que, para esses casos, são esperados modos reais, nos quais os picos ocorrem no mesmo instante do movimento oscilatório. Se os modos são complexos, então pode ser que módulo tensegrity tenha um amortecimento não proporcional. Alternativamente, a complexidade dos modos também está associada à falhas durante o ensaio ou, ainda, se as propriedades da estrutura variam rapidamente no tempo (ARTEMIS, 2019; EWINS, 2009).

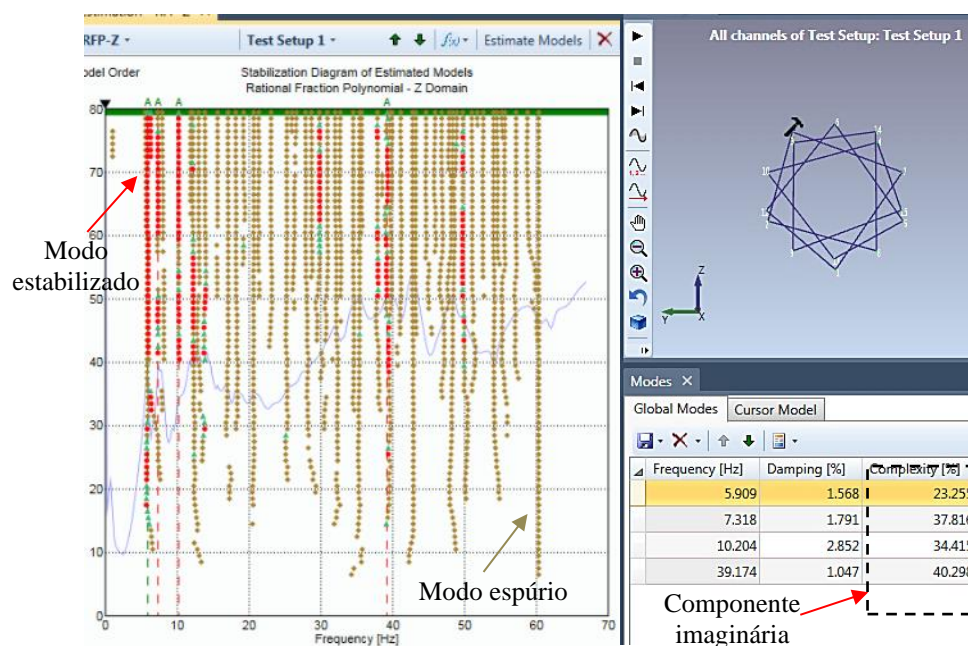


Figura 5-26: Diagrama de estabilização dos modos de vibração (método RFP-Z) referente ao ensaio logo após a montagem

6. Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1. Conclusões

Os estudos realizados neste trabalho buscaram avaliar a possibilidade de se construir um módulo tensegrity a partir de materiais naturais e técnicas vernaculares de construção. Primeiramente buscou-se entender melhor o funcionamento de uma estrutura tensegrity. Para tal foi realizada uma revisão da literatura sobre o tema, bem como aplicada uma técnica de aprendizagem a partir de modelos físicos em escala reduzida. Em seguida, os materiais naturais a serem utilizados foram definidos, produzidos e ensaiados de modo a se obter os parâmetros de caracterização pertinentes ao processo de modelagem computacional. Para viabilizar a construção do módulo tensegrity, foram desenvolvidas ligações em bambu especiais e estabelecidas técnicas de construção adequadas ao objetivo. A compatibilização das estroncas de bambu e das cordas de sisal foi feita aplicando o método TensegrityToy.

Uma vez que o módulo tensegrity foi construído, deu-se seguimento ao modelo computacional. Um novo programa de análise estrutural não linear, especialmente desenvolvido para estruturas ajustáveis e tensegrities, foi utilizado. A estrutura foi modelada com elementos de treliça para as estroncas de bambu e elementos de cabos para as cordas de sisal. Realizou-se uma análise estática, a partir da qual foi possível entender a relação entre as tensões de compressão atuantes nas estroncas e os diferentes níveis de pretensão aplicados nos cabos, bem como uma análise modal, em que os parâmetros de frequência natural e modos de vibração foram obtidos e também relacionados com os níveis de pretensão. Neste estudo, de forma geral, identificou-se que o incremento da pretensão melhora o desempenho mecânico da estrutura. Entretanto, é necessário que se verifique até que ponto (porcentagem de pretensão) essa proporcionalidade direta se mantém.

Por fim, procurou-se investigar como a estrutura física se comporta no que diz respeito às pretensões atuantes. De forma a cumprir com esse objetivo, duas

abordagens – uma estática e outra dinâmica – foram planejadas e executadas. Para a investigação estática, o módulo tensegrity foi pendurado por somente um nó e foi instrumentado com extensômetros elétricos em estroncas específicas. O ensaio teve duração de 13,5 dias e ofereceu importantes interpretações do comportamento da estrutura. Observou-se que, a princípio, o módulo tensegrity não sofre grandes perdas de pretensão ao longo do intervalo de análise. Ademais, através da interseção dos resultados numéricos e experimentais, obteve-se, indiretamente, que o nível de pretensão atuante na estrutura logo após a montagem é próximo a 15%. Paralelamente, realizou-se a investigação dinâmica, em que o tensegrity foi excitado em diferentes momentos através de golpes de martelo a fim de se obter suas propriedades modais. Assim como na investigação estática, os resultados do ensaio apontaram que o nível de pretensão da estrutura não sofreu alterações consideráveis durante o tempo estudado. O cruzamento entre os dados numéricos e experimentais permitiu intuir que a pretensão aplicada ao módulo logo após a montagem é de aproximadamente 15%.

Os resultados acima apontam para uma boa compatibilidade entre os ensaios estático e dinâmico, porém, algumas ressalvas são necessárias. No caso da investigação estática, o número de extensômetros foi insuficiente, posto que possíveis momentos fletores provenientes de cargas excêntricas não puderam ser detectados. Além disso, a leitura das tensões é feita de forma localizada, havendo certa dificuldade em compreender como este efeito dialoga com a estrutura global. Por fim, as cordas de sisal não foram instrumentadas e não se sabe, categoricamente, o nível de tração atuante nas mesmas. O ensaio dinâmico já propõe um entendimento maior do módulo como um todo, isto é, contabiliza o comportamento global da estrutura levando-se em consideração as estroncas e os cabos. Por outro lado, pode-se citar algumas dificuldades como, devido à inclinação das estroncas no espaço tridimensional, diversas vezes foi desafiador aplicar os golpes com martelo sempre no mesmo ponto e sem batida dupla (*double hit*), podendo este aspecto do operador ter influência nos valores estimados das funções de resposta em frequência (FRFs).

6.2. Trabalhos Futuros

Haja vista a necessidade de investigar e aprofundar determinados temas englobados por esse trabalho, algumas sugestões são propostas a seguir.

De aspecto geral:

- Associar mais módulos da ponte em cadeia;
- Incluir o tabuleiro nos modelos físico e computacional;
- Estudar possíveis melhorias na construção e durabilidade da ponte, sendo necessário investigar outros tipos de conexão (concentração de tensões no copo de bambu, possível propagação de fissura na base do corte), materiais e apoios;
- Realizar montagem cinemática do módulo tensegrity;
- Incrementar o modelo computacional levando em conta outros tipos de elementos (como viga), as ligações, o atrito e as (in)compatibilidades geométricas necessárias ao processo de abertura e fechamento da estrutura;
- Estudar relação entre pequenos valores de pretensão e afrouxamento dos cabos sob certos carregamentos no Galileo;
- Estudar o efeito das imperfeições (por exemplo barras de tamanhos distintos, nós assimétricos) na análise numérica.

De aspecto Estático:

- Colocar dois extensômetros para cada estronca, a fim de detectar possíveis momentos fletores;
- Instrumentar todas as estroncas para avaliar a distribuição dos esforços;
- Desenvolver instrumentação adequada para os cabos de sisal;
- Estender o período de monitoramento.

De aspecto Dinâmico:

- Incluir simultaneamente mais acelerômetros em outros pontos da estrutura e nas três direções translacionais do movimento (X, Y e Z) de forma a aumentar o número de graus de liberdade do modelo experimental;
- Realizar os testes com excitadores dinâmicos (*shakers*) em vez de martelo instrumentado;

Investigar a complexidade dos modos de vibração a fim de avaliar se o amortecimento é proporcional ou não proporcional.

7. Referências bibliográficas

AGUILERA, J. R. **Estudo de dispositivos para avaliação de vibrações e análise modal experimental de cabos de linha de transmissão**. Rio de Janeiro, 2005. 78p. Monografia - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ALI, N. B. H. et al. Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge. **Engineering Structures**, v. 32, n. 11, p. 3650–3659, 2010.

ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L. A complete review of the complex mode indicator function (CMIF) with applications. Proceedings of 2006 ISMA: International Conference on Noise and Vibration Engineering 2006. **Anais...** Heverlee, Bélgica: 2006. 38p.

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE/Análise Dinâmica**. 1.ed. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2005. 320p.

AMORIM, L. et al. Caracterização de Fibras de Sisal Por Infravermelho ,UV-VIS por Reflectância Difusa e Microscopia Eletrônica de Varredura. **Periódico Tchê Química**, v. 16, 2018.

ARMANDEI, M.; DARWISH, I. F.; GHAVAMI, K. Experimental study on variation of mechanical properties of a cantilever beam of bamboo. **Construction and Building Materials**, v. 101, p. 784–790, 2015.

ARTEMIS, versão 6.1. Structural Vibration Solutions. Disponível em: <<http://www.svibs.com/>>. Acesso em: 14 mar. 2020.

ASHWEAR, N.; ERIKSSON, A. Natural frequencies describe the pre-stress in tensegrity structures. **Computers and Structures**, v. 138, p. 162–171, 2014.

ASHWEAR, N.; ERIKSSON, A. Vibration health monitoring for tensegrity structures. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 85, p. 625–637, 2017.

AUWERAER, H. VAN DER; PEETERS, B. Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: Use and automation of the stabilization diagram. IMTC 2004: Instrumentation and Measurement Technology Conference. **Anais...** Como, Itália: 2004. p. 2193–2198.

AVERSENG, J. **Mise en œuvre et contrôle des systèmes de tenségrité**. Montpellier, 2004. 148p. Tese de Doutorado – Departamento de Mecânica dos Materiais, Meios Complexos, Estruturas e Sistemas, Universite Montpellier II.

AVITABILE, P. **Modal Testing: A Practitioner's Guide**. 1 ed. John Wiley &

Sons, 2017. 544p.

BANSOD, Y. D.; NANDANWAR, D.; BURŠA, J. Overview of Tensegrity - I : Basic Structures. **Engineering MECHANICS**, v. 21, n. 5, p. 355–367, 2014.

BECK, H.; COOPER, J. **Kurilpa Bridge**. Victoria: The Images Publishing Group Pty Ltd, 2012. 100p.

BILOSOVÁ, A. **Modal Testing**. República Tcheca: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2011, 120p. Relatório Técnico.

BLANCO, E.; OLLER, S.; GIL, L. **Análisis experimental de estructuras**. 1. ed. Barcelona: CIMNE, 2008. 346p.

BOLINA, C. C.; PALECHOR, E. U. L.; VÁSQUEZ, M. P. R. Vibrações: As Frequências Naturais Estimada E Experimental De Uma Estrutura. Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria. **Anais...** Goiás, Brasil: 2014. 9p.

BRANDT, A. **Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures**. 1. ed. John Wiley & Sons Ltd, 2010. 464p.

BURKHARDT JR, R. W. **A Practical Guide to Tensegrity Design**, 2. ed. Miami: Robert William Burkhardt Jr, 2008. 212p.

CALLADINE, C. R. Buckminster Fuller's "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 2, p. 161–172, 1978.

CARNEIRO, F. L. **Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1993. 258p.

CHAI, T. J.; TAN, C. S. Review on deployable structure. Proceedings of IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 220 (2019) 012034. **Anais...** Johor, Malaysia: 2019. v.220. 10p.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3. ed. California: Computers & Structures, Inc., 2003. 752p.

CONNELLY, R. Rigidity and Energy. **Inventiones mathematicae**, v. 66, p. 11–33, 1982.

CONNELLY, R.; TERRELL, M. Globally Rigid Symmetric Tensegrities Tensegrites symétriques globalement rigides. **Structural Topology**, v. 21, p. 59–78, 1995.

CONNELLY, R.; WHITELEY, W. Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, v. 9, n. 3, p. 453–491, 1996.

DALLY, J. W.; RILEY, W. F.; MCCONNELL, K. G. **Instrumentation for Engineering Measurements**. 2. ed. Wiley India Pvt. Limited, 2010. 608p.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. **Tensegrity systems**. 1. ed. California: Springer, 2009. 228p.

DIVÓS, F.; TANAKA, T. Relation Between Static and Dynamic Modulus of Elasticity of Wood. **Acta Silv. Lign. Hung**, v. 1, n. February, p. 105–110, 2005.

DUBÉ, J. F.; ANGELLIER, N.; CROSNIER, B. Comparison between experimental tests and numerical simulations carried out on a tensegrity minigrid. **Engineering Structures**, v. 30, n. 7, p. 1905–1912, 2008.

DUBÉ, J. F.; CROSNIER, B. Identification of cable slackening by analyzing the temporal response of the structure. Proceedings of IASS 2004, Shell and Spatial Structures from Models to Realization (Motro, R. ed.). **Anais...** Montpellier, França: 2004. 8p.

ESTRADA, G. G. **Analytical and numerical investigations of form-finding methods for tensegrity structures**. Stuttgart, 2007. 152p. Tese de Doutorado - Departamento de Ciência da Computação, Engenharia Elétrica e Tecnologia da Informação, Universidade de Stuttgart.

ESTRADA, G. G.; BUNGARTZ, H. J.; MOHRDIECK, C. Numerical form-finding of tensegrity structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 22–23, p. 6855–6868, 2006.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application**. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 2009. 562p.

FAROUGHI, S.; TUR, J. M. M. Vibration properties in the design of tensegrity structure. **JVC/Journal of Vibration and Control**, v. 21, n. 3, p. 611–624, 2015.

FASANA, A. Modal parameters estimation in the Z-domain. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, n. 1, p. 217–225, 2009.

FIDELIS, M. E. A. et al. The effect of fiber morphology on the tensile strength of natural fibers. **Journal of Materials Research and Technology**, v. 2, n. 2, p. 149–157, 2013.

FRIEDMAN, N.; FARKAS, G.; IBRAHIMBEGOVIC, A. Deployable/retractable structures towards sustainable development. **Pollack Periodica**, v. 6, n. 2, p. 85–97, 2011.

FULLER, R. B. **Synergetics - Explorations in the Geometry of Thinking**. 1. ed. Macmillan Publishing Co. Inc., 1975. 876p.

FURUYA, H. Concept of Deployable Tensegrity Structures in Space Application. **International Journal of Space Structures**, v. 7, n. 2, p. 143–151, 1992.

GÓMEZ-JÁUREGUI, V. et al. Novel technique for obtaining double-layer tensegrity grids. **International Journal of Space Structures**, v. 27, n. 2–3, p. 155–166, 2012.

GUEST, S. D. The stiffness of tensegrity structures. **IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)**, v. 76, n. 1, p. 57–66, 2011.

HAGGERTY, J. J. **Spinoff**. 1. ed. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, 1989. 138p.

HEARTNEY, E. **Kenneth Snelson: Art and Ideas**. 1. ed. Nova York: Marlborough Gallery, 2013. 174p.

HEARTNEY, E.; SNELSON, K. **Forces Made Visible**. 1. ed. Nova York: Hard Press Editions, 2009. 190p.

INGBER, D. E. Cellular tensegrity: Defining new rules of biological design that govern the cytoskeleton. **Journal of Cell Science**, v. 104, n. 3, p. 613–627, 1993.

INGBER, D. E. Tensegrity: the Architectural Basis of Cellular Mechanotransduction. **Annual Review of Physiology**, v. 59, n. 1, p. 575–599, 1997a.

INGBER, D. E. The architecture of life. **Scientific American**, v. 278, p. 48–57, 1997b.

INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. **ISO 22157-1: Bamboo —Determination of physical and mechanical properties - Part 1: Requirements**. 1. ed. Suíça: IHS, 2004.

KAHLA, N. BEN; KEBICHE, K. Nonlinear elastoplastic analysis of tensegrity systems. **Engineering Structures**, v. 22, n. 11, p. 1552–1566, 2000.

KALKAN, E. **Complex Mode Indicator Function (CMIF)**. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/65508-complex-mode-indicator-function-cmif>>. Acesso em: 30 mar. 2020.

KEBICHE, K.; KAZI-AOUAL, M. N.; MOTRO, R. Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems. **Engineering Structures**, v. 21, n. 9, p. 864–876, 1999.

KELLY, A. **Concise Encyclopedia of Composite Materials**. 1. ed. Nova York: Elsevier Science Ltd, 1994. 349p.

KOOHESTANI, K. Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, n. 5, p. 739–747, 2012.

KORKMAZ, S.; ALI, N. B. H.; SMITH, I. F. C. Configuration of control system for damage tolerance of a tensegrity bridge. **Advanced Engineering Informatics**, v. 26, n. 1, p. 145–155, 2012.

KRAUSE, J. Q. **Desenvolvimento de Elementos Especiais de Bambu para Treliças Espaciais**. Rio de Janeiro, 2009. 138p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de

Janeiro.

KURKA, P. et al. Dynamic behavior and vibration analysis of tensegrity - Membrane structures. Proceedings of ISMA 2018 - International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD 2018 - International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics. **Anais...** Leuven, Bélgica: 2018. 16p.

LEVY, M. et al. Estadio Ciudad de La Plata (La Plata Stadium), Argentina. **Structural Engineering International**, v. 23, n. 3, p. 303–310, 2013.

LI, Y.; MAI, Y. W.; YE, L. Sisal fibre and its composites: A review of recent developments. **Composites Science and Technology**, v. 60, n. 11, p. 2037–2055, 2000.

LIMA, R. R. Arquitetura Vernácula e Habitação de Interesse Social. Encontro Nacional da Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Arquitetura e Urbanismo. **Anais...** Rio de Janeiro, Brasil: 2010. 13p.

LOFRANO, M. **Técnicas Para Estimativa de FRFs Angulares em Análise Modal Experimental com Aplicações a Estruturas do Tipo Viga**. São Paulo, 2003. 174p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo.

LU, J.; SKELTON, R. E. Optimal hybrid control for structures. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 13, n. 6, p. 405–414, 1998.

MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. S. E. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. 1. ed. Baldock: Research Studies Press, 1997. 488p.

MALIK, P. K.; GUHA, A.; SESHU, P. Determination of Member Lengths for Building a Regular Tensegrity Structure: An Analytical Study. **Mechanisms and Machine Science**, v. 73, p. 1335–1344, 2019.

MARTHA, L. F. **Análise De Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Ltd, 2010. 600p.

MARTIN, A. R. et al. Caracterização química e estrutural de fibra de sisal da variedade agave Sisalana. **Polimeros**, v. 19, n. 1, p. 40–46, 2009.

MARTINS, D.; GONÇALVES, P. J. P. On the dynamics of a smart tensegrity structure using shape memory alloy. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1264, n. 1, 2019.

MEDINA, J. C. O sisal. **São Paulo: Secretaria da Agricultura do Estado de São Paulo**, v. 13, n. 3, 1954.

MEIRELES, J. F. B. DE. **Análise dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente**. Guimarães, 2007. 366p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Minho.

MENDES, F. C.; FREITAS, M. S. DA R.; FREITAS, A. M. S. Estudo teórico experimental de ligações “T” e “KT”, em perfis tubulares de aço. **REM - International Engineering Journal**, v. 65, n. 2, p. 175–180, 2012.

MENDES, P. **ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS - Utilização Integrada de Modelos de Identificação Modal e Modelos de Elementos Finitos**. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2008, 172p. Relatório Técnico..

MICHELL, A. G. M. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures . **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904.

MIRANDA, C. S. et al. Efeito dos Tratamentos Superficiais nas Propriedades do Bagaço da Fibra de Piaçava *Attalea funifera* Martius. **Química Nova**, v. 38, n. 2, p. 161–165, 2015.

MOORED, K. W.; BART-SMITH, H. Investigation of clustered actuation in tensegrity structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 17, p. 3272–3281, 2009.

MORA, J. F.; GUTIÉRREZ, P. Á. G.; ARDANUY, J. F. **Instrumentación aplicada a la ingeniería**. 1. ed. Madrid: Ibergarceta Publicaciones S.L, 2012. 640p.

MOREIRA, L. E. **Desenvolvimento de Estruturas Treliçadas Espaciais de Bambu**. Rio de Janeiro, 1991. 196p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

MOTRO, R. Tensegrity Systems and Geodesic Domes. **International Journal of Space Structures**, v. 5, n. 3–4, p. 341–351, 1990.

MOTRO, R. Tensegrity Systems: The State of the Art. **International Journal of Space Structures**, v. 7, n. 2, p. 75–83, 1992.

MOTRO, R. **Tensegrity Structural Systems for the Future**. 1. ed. Londres: Kogan Page Science, 2003. 257p.

MOTRO, R. Tensegrity : from Art to Structural Engineering. 2012 IASS-APCS Symposium. **Anais...**Seul, Coreia do Sul: 2012. 14p.

MURAKAMI, H. Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part II. Quasi-static analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 20, p. 3615–3629, 2001.

NOGATA, F.; TAKAHASHI, H. Intelligent functionally graded material: Bamboo. **Composites Engineering**, v. 5, n. 7, p. 743–751, 1995.

OHRNBERGER, D. **The Bamboos of the World**. 1. ed. ELSEVIER SCIENCE B.V., 1999. 596p.

OHSAKI, M.; ZHANG, J. Y. Nonlinear programming approach to form-finding and folding analysis of tensegrity structures using fictitious material properties. **International Journal of Solids and Structures**, v. 69–70, p. 1–10, 2015.

OHSAKI, M.; ZHANG, J. Y.; TAGUCHI, T. Form-Finding and Stability Analysis of Tensegrity Structures using Nonlinear Programming and Fictitious Material Properties. Proceedings of ICCM2014: International Conference on Computational Methods. **Anais...**Cambridge, Inglaterra: 2014. 6p.

OPPENHEIM, I. J.; WILLIAMS, W. O. Tensegrity prisms as adaptive structures. **American Society of Mechanical Engineers, Aerospace Division (Publication) AD**, v. 54, n. 1, p. 113–120, 1997.

PEREIRA, M. A. R.; BERALDO, A. **Bambu de Corpo e Alma**. 2ª ed. São Paulo: Canal 6 Editora, 2016. 352p.

PLEȘCAN, C.; CONȚIU, M.; DÓSA, A. A study of a tensegrity structure for a footbridge. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 399 (2018) 012044. **Anais...** Brasov, Romania: 2018, v. 399, n. 1, 7p.

POTES, A. S.; SALINAS, F. R. K. **Cultivos de Fibras Volume 13 de Serie Manuales para educación agropecuaria: Área, producción vegetal**. 1. ed. Cidade do México: Trillas Editorial, S. A., 1991. 84p.

PUGH, A. **An Introduction to Tensegrity**. 1. ed. California: University of California Press, 1976. 219p.

RAINIERI, C.; FABBROCINO, G. **Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures**. 1. ed. Nova York: Springer, 2014. 322p.

RESENDE, F. M. **Influência das Fibras de Aço, Polipropileno e Sisal no Amortecimento de Concretos de Resistência Normal e de Alto Desempenho**. Rio de Janeiro, 2003. 109p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

RHODE-BARBARIGOS, L. et al. Designing tensegrity modules for pedestrian bridges. **Engineering Structures**, v. 32, n. 4, p. 1158–1167, abr. 2010.

RIBEIRO, P. **Grafo**. Disponível em: <<https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Grafo>>. Acesso em: 3 set. 2019.

ROCHA, S. P. DA. **Observação do Comportamento Dinâmico de Estruturas de Engenharia Civil**. Lisboa, 2015. 109p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

ROSA, C. C. DA. **Análise experimental das propriedades dinâmicas dos bambus das espécies guadua, dendrocalamus e aurea**. Rio de Janeiro, 2005. 103p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ROTH, B.; WHITELEY, W. Tensegrity Frameworks. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 265, n. 2, p. 419–446, 1981.

SANT'ANNA, M. Arquitetura Popular: Espaços e Saberes. **Políticas Culturais em Revista**, v. 2, n. 6, p. 40–63, 2013.

SANTANA, M. V. B. **Tailored Corotational Formulations for the Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Bistable Structures**. Rio de Janeiro, 2019. 178p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e Université Libre de Bruxelles.

SCHENK, M. **Statically Balanced Tensegrity Mechanisms - A literature Review**. Delft: Delft University of Technology, 2005, 62p. Relatório Técnico.

SHINN, K.; HAMMOND, J. K. **Fundamentals of Signal Processing**. 1. ed. Londres: John Wiley & Sons Ltd, 2008, 418p.

SILVA, O. R. R. F. DA et al. Cultivo do Sisal no Nordeste Brasileiro. **Circular Técnica Embrapa**, v. 123, p. 1–24, 2008.

SILVA, F. DE A.; CHAWLA, N.; TOLEDO FILHO, R. D. DE. Tensile behavior of high performance natural (sisal) fibers. **Composites Science and Technology**, v. 68, n. 15–16, p. 3438–3443, 2008.

SILVA, F. DE A.; CHAWLA, N.; TOLEDO FILHO, R. D. Mechanical behavior of natural sisal fibers. **Journal of Biobased Materials and Bioenergy**, v. 4, n. 2, p. 106–113, 2010.

SIMMONS, A. H.; MICHAL, C. A.; JELINSKI, L. W. Molecular Orientation and Two-Component Nature of the Crystalline Fraction of Spider Dragline Silk. **Advancement Of Science**, v. 271, n. 5245, p. 84–87, 2010.

SKELTON, R. E. An Introduction to the Mechanics of Tensegrity Structures. In: **Dynamics and Control of Aerospace Systems**. 1. ed. California: CRC Press LLC, 2002. 75p.

SNELSON, K. The Art of Tensegrity. **International Journal of Space Structures**, v. 27, n. 2 and 3, p. 71–80, 2012.

SNELSON, K. D. **Continuous Tension, Discontinuous Compression Structures**. Patente US3169611A. Estados Unidos da América, 1965.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2014, 464p.

SPIGNARDI, M. DE C. M. Pegada de carbono na construção civil: Estudo de caso que evitou a emissão de mais de 62.000ton CO₂ e reestruturou o setor de madeira nativa certificada no Rio de Janeiro. Encontro Internacional sobre Gestão Empresarial e Meio Ambiente (Engema). **Anais...**São Paulo, Brasil: 2016. 7p.

SYCHTERZ, A. C.; SMITH, I. F. C. Using dynamic measurements to detect and

locate ruptured cables on a tensegrity structure. **Engineering Structures**, v. 173, n. July, p. 631–642, 2018.

TANZANIA BUREAU OF STANDARDS. **TDC8(5628)P3**: Textiles – Ropes Specifications: Part 1. Ropes made from natural fibres. 2. ed. Dar es Salaam: TBS, 2018.

TEIXEIRA, F. P.; GOMES, O. DA F. M.; SILVA, F. DE A. Degradation mechanisms of curaua, hemp, and sisal fibers exposed to elevated temperatures. **BioResources**, v. 14, n. 1, p. 1494–1511, 2019.

TERMONIA, Y. Molecular Modeling of Spider Silk Elasticity. **Macromolecules**, v. 27, n. 25, p. 7378–7381, 1994.

TIBERT, A. G.; PELLEGRINO, S. Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. **International Journal of Space Structures**, v. 26, n. 3, p. 241–256, 2011.

TRAN, H. C.; LEE, J. Advanced form-finding of tensegrity structures. **Computers and Structures**, v. 88, n. 3–4, p. 237–246, 2010.

TRAN, H. C.; LEE, J. Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures. **Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao**, v. 27, n. 6, p. 938–949, 2011.

VASSART, N.; MOTRO, R. Multi-parametered form-finding method: Application to tensegrity systems. **International Journal of Space Structures**, v. 14, n. 2, p. 147–154, 1999.

VICTOR, G.; SEIXAS, M.; RIPPER, J. L. M. Estruturas Autoportantes Biotensegrity Aplicando Materiais Naturais. **Métodos e Processos em Biônica e Biomimética: a Revolução Tecnológica pela Natureza**, p. 152–171, 2018.

WEGST, U. G. K.; ASHBY, M. F. The mechanical efficiency of natural materials. **Philosophical Magazine**, v. 84, n. No 21, p. 2167–2181, 2004.

XU, X.; LUO, Y. Form-finding of nonregular tensegrities using a genetic algorithm. **Mechanics Research Communications**, v. 37, n. 1, p. 85–91, 2010.

YAMAKI, R. T. **O Uso da Miniatura no Desenvolvimento e Passagem das Formas Técnicas : Subjetividade e Materialidade**. Rio de Janeiro, 2012. 112p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

YAN, L.; KASAL, B.; HUANG, L. A review of recent research on the use of cellulosic fibres, their fibre fabric reinforced cementitious, geo-polymer and polymer composites in civil engineering. **Composites Part B: Engineering**, v. 92, p. 94–132, 2016.

ZHANG, J. Y.; GUEST, S. D.; OHSAKI, M. Symmetric prismatic tensegrity structures: Part I. Configuration and stability. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 1, p. 1–14, 2009.

ZHANG, J. Y.; OHSAKI, M. Stability conditions for tensegrity structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 11–12, p. 3875–3886, 2007.

ZHANG, J. Y.; OHSAKI, M. **Tensegrity Structures Form, Stability, and Symmetry**. 1. ed. Tokyo: Springer, 2015. 307p.

ZHAO, L.; HERNANDEZ, E. A. P. Theoretical study of tensegrity systems with tunable energy dissipation. **Extreme Mechanics Letters**, v. 32, 2019.

8. Apêndice A

8.1. Fundamentação Teórica de Tensegrities

Os membros de uma estrutura tensegrity sofrem esforços axiais mesmo quando não há carregamento externo aplicado, devido às pretensões geradas a partir da geometria. Esta codependência entre pretensão e geometria ocasiona certas dificuldades durante a fase de projeto que precisam ser assimiladas. ZHANG & OHSAKI (2015) apresentaram uma compilação dos fundamentos teóricos básicos necessários para entendimento do funcionamento de uma estrutura tensegrity no que diz respeito à (i) definição de configurações auto-equilibradas que satisfazem os requisitos geométricos e mecânicos impostos e à (ii) estabilidade dessas configurações, conforme mostrado a seguir.

8.1.1. Equilíbrio

As estruturas tensegrity são articuladas, como mostrado no Capítulo 2.1, porém possuem características próprias que as diferem das demais estruturas articuladas. Este capítulo apresenta as formulações para as equações de equilíbrio usando tanto o método da matriz de equilíbrio, quanto o da matriz de densidade de força. Também são exibidas as condições para definir se o tensegrity é estaticamente ou cinematicamente determinado ou indeterminado.

8.1.1.1. Definição da configuração

i. Premissas mecânicas básicas

Em se tratando de estruturas articuladas pretensionadas, dois tipos de elementos estruturais participam do sistema: nós – que podem ser livres ou fixos (não se deslocam mesmo quando sujeitos a carregamentos externos) – e membros – elementos retilíneos que conectam dois nós no espaço. Os membros são considerados articulados em suas extremidades, de modo que os mesmos podem

rotacionar livremente e os carregamentos externos, caso existam, são aplicados diretamente sobre as articulações. O peso próprio da estrutura é desprezado.

De acordo com os conceitos mostrados no Capítulo 2.1, os membros só suportam forças axiais de compressão ou tração. Em estruturas tensegrity, os membros comprimidos são chamados de estroncas, enquanto que os tracionados são referidos apenas como cabos. Para os capítulos a seguir, os seguintes símbolos serão utilizados na descrição de estruturas articuladas:

- m corresponde à quantidade de membros;
- n é o número de nós livres;
- n^f é o número de nós fixos;
- d corresponde à dimensão do espaço (d -dimensional).

ii. Conectividade

A conectividade de uma estrutura define como seus nós se conectam formando membros individuais. Como os membros são supostos retilíneos, a estrutura pode ser modelada como um grafo⁶. Os vértices e arestas do grafo representam os nós e membros da estrutura respectivamente, como ilustra a Figura 8-1.

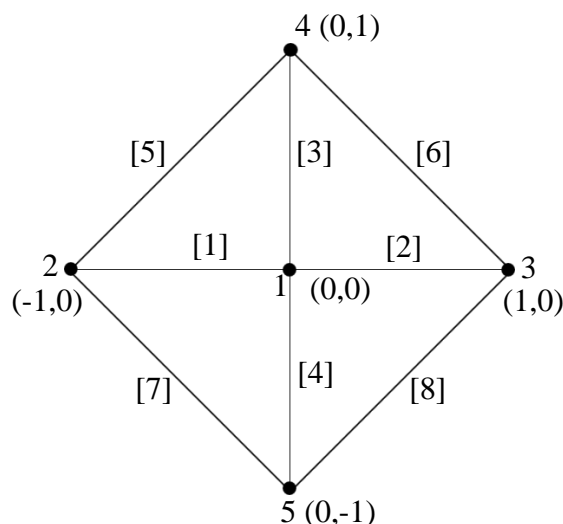


Figura 8-1: Estrutura livre bidimensional (adaptado de (ZHANG & OHSAKI, 2015))

⁶ Um grafo é uma representação abstrata de um conjunto de objetos e das relações existentes entre eles. É definido por um conjunto de nós ou vértices, e pelas ligações ou arestas, que ligam pares de nós (RIBEIRO, 2012).

A conectividade pode ser descrita como uma matriz, denominada \mathbf{C}^s , na qual existem apenas três tipos de entrada por linha: zero, 1 e -1. Os elementos diferentes de zero correspondem aos dois nós conectados por um membro.

Supondo que um membro k ($k = 1, 2, \dots, m$) conecte o nó i ao nó j ($i, j = 1, 2, \dots, n + n^f$). Os elementos da k -ésima linha, $\mathbf{C}_{(k,p)}^s$, da matriz de conectividade $\mathbf{C}^s \in \mathbb{R}^{m \times n + n^f}$ são definidos como:

$$\mathbf{C}_{(k,p)}^s = \begin{cases} \text{senal}(j - p), \text{ se } p = i; \\ \text{senal}(i - p), \text{ se } p = j; \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (p = 1, 2, \dots, n + n^f) \quad \text{Eq. (8-1)}$$

onde

$$\text{senal}(j - i) = \begin{cases} 1, \text{ se } j > i \\ -1, \text{ se } j < i \end{cases} \quad \text{Eq. (8-2)}$$

Para efeitos de simplificação, a matriz \mathbf{C}^s pode ser dividida em duas seções conforme apresentado abaixo:

$$\mathbf{C}^s = (\mathbf{C}, \mathbf{C}^f)$$

onde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{C}^f \in \mathbb{R}^{m \times n^f}$ correspondem à matriz de conectividade dos nós livres e dos nós fixos, respectivamente.

Uma estrutura sem nós fixos, ou seja, sem apoios, é chamada, neste trabalho, de estrutura livre, que pode se movimentar sem que haja alteração na distância entre quaisquer pares de nós. Assim, a matriz de conectividade pode ser escrita como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^s$$

Além disso, estruturas livres possuem uma importante propriedade, dada a seguir:

$$\mathbf{C} \mathbf{i}_n = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde todas as entradas do vetor $\mathbf{i}_n \in \mathbb{R}^n$ são 1. Deste modo, a soma de cada linha da matriz de conectividade quando multiplicada pelo vetor \mathbf{i}_n é igual a zero.

A estrutura livre bidimensional apresentada na Figura 8-1 possui cinco nós livres ($n = 5$), oito membros ($m = 8$) e nenhum nó fixo ($n^f = 0$). Posto isto, a matriz de conectividade \mathbf{C} ($= \mathbf{C}^s \in \mathbb{R}^{8 \times 5}$) da estrutura é:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota-se a partir da matriz acima que a soma das entradas de cada linha de \mathbf{C} é zero.

iii. Realização geométrica

A realização geométrica de uma estrutura articulada é descrita a partir de suas coordenadas nodais. Considerando que $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} (\in \mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{x}^f, \mathbf{y}^f, \mathbf{z}^f (\in \mathbb{R}^{n^f})$ denotam os vetores de coordenadas dos nós livres e nós fixos, respectivamente, nas direções x, y e z. As diferenças de coordenadas do membro k que conecta os nós i e j podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_k = \text{sinal}(j-i)x_i + \text{sinal}(i-j)x_j = -\text{sinal}(j-i)(x_j - x_i) \\ v_k = \text{sinal}(j-i)y_i + \text{sinal}(i-j)y_j = -\text{sinal}(j-i)(y_j - y_i) \\ w_k = \text{sinal}(j-i)z_i + \text{sinal}(i-j)z_j = -\text{sinal}(j-i)(z_j - z_i) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u_k = \mathbf{C}_k^s \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^f \end{pmatrix} = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{C}_k^f \mathbf{x}^f \\ v_k = \mathbf{C}_k^s \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^f \end{pmatrix} = \mathbf{C}_k \mathbf{y} + \mathbf{C}_k^f \mathbf{y}^f \\ w_k = \mathbf{C}_k^s \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^f \end{pmatrix} = \mathbf{C}_k \mathbf{z} + \mathbf{C}_k^f \mathbf{z}^f \end{cases}$$

Assim, é possível escrever os vetores de diferenças de coordenadas $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} (\in \mathbb{R}^m)$ conforme mostrado abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}^f \mathbf{x}^f \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{C}^f \mathbf{y}^f \\ \mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{C}^f \mathbf{z}^f \end{cases} \quad \text{Eq. (8-3)}$$

Considerando a estrutura livre bidimensional ilustrada na Figura 8-1, os vetores de diferenças de coordenadas $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^8$ podem ser calculados a partir da matriz de conectividade $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{8 \times 5}$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_4 \\ x_1 - x_5 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_2 - x_5 \\ x_3 - x_5 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_1 - y_4 \\ y_1 - y_5 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 - y_4 \\ y_2 - y_5 \\ y_3 - y_5 \end{Bmatrix}$$

Utilizando as diferenças de coordenadas u_k, v_k, w_k , a seguinte relação pode ser estabelecida para o comprimento do membro k .

$$l_k^2 = u_k^2 + v_k^2 + w_k^2$$

Considerando $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ e $\mathbf{L} (\in \mathbb{R}^{m \times m})$ as versões diagonais dos vetores de diferenças de coordenadas e comprimento dos membros, tem-se que:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \text{diag}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{L} = \text{diag}(\mathbf{l}) \end{cases} \therefore \mathbf{L}^2 = \mathbf{U}^2 + \mathbf{V}^2 + \mathbf{W}^2 \quad \text{Eq. (8-4)}$$

A seguir, as equações de (auto-) equilíbrio de uma estrutura articulada pretensionada serão apresentadas de duas maneiras diferentes: (i) a partir das forças axiais de pretensão associadas à matriz de equilíbrio e (ii) com base nas coordenadas nodais associadas à matriz de força densidade.

8.1.1.2. Matriz de equilíbrio

As equações de equilíbrio desenvolvidas com base na matriz de equilíbrio, \mathbf{D} , e forças axiais associadas, \mathbf{s} , podem ser obtidas realizando o equilíbrio de forças em cada nó ou aplicando diretamente o princípio dos trabalhos virtuais. Independentemente do método adotado, as equações finais são as mesmas, conforme mostrado abaixo.

$$\mathbf{D}\mathbf{s} = \mathbf{p} \quad \text{Eq. (8-5)}$$

onde

- \mathbf{D} é a matriz de equilíbrio e pode ser calculada conforme a Eq. (8-6).

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D^x \\ D^y \\ D^z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} D^x = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \\ D^y = \mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \\ D^z = \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1} \end{cases} \quad \text{Eq. (8-6)}$$

• \mathbf{p} é a matriz de carregamentos externos aplicados aos nós (livres e/ou fixos) nas direções x, y e z. As i -ésimas entradas de $\mathbf{p}^x, \mathbf{p}^y, \mathbf{p}^z (\in \mathbb{R}^{n \times n^f})$ correspondem às cargas aplicadas p_i^x, p_i^y, p_i^z aplicadas no nó \mathbf{p}^x em cada direção.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^x \\ \mathbf{p}^y \\ \mathbf{p}^z \end{pmatrix} \quad \text{Eq. (8-7)}$$

• \mathbf{s} denota o vetor de forças dos membros. O k -ésimo elemento, s_k , contém a força axial exercida no membro k .

Assim, para a matriz de equilíbrio da estrutura livre bidimensional mostrada na Figura 8-1, tem-se que as coordenadas nodais podem ser escritas como $\mathbf{x} = (0, -1, 1, 0, 0)^T$ e $\mathbf{y} = (0, 0, 0, 1, -1)^T$. Consequentemente, obtêm-se os vetores de diferenças das coordenadas.

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_4 \\ x_1 - x_5 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_2 - x_5 \\ x_3 - x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_1 - y_4 \\ y_1 - y_5 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 - y_4 \\ y_2 - y_5 \\ y_3 - y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Em seguida, a matriz de comprimento dos membros é tida como $\mathbf{L} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. Por fim, tem-se que:

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Será mostrado posteriormente no capítulo 8.1.1.4 que a matriz de equilíbrio e sua transposta, denominada de matriz de compatibilidade, são fundamentais para definir a determinação estática e cinemática de uma estrutura articulada e, ademais, estão diretamente relacionadas à matriz de rigidez linear.

8.1.1.3. Matriz de densidade de força

A densidade de força do membro k pode ser definida como a razão entre sua força s_k e seu comprimento l_k :

$$q_k = \frac{s_k}{l_k} \quad \text{Eq. (8-8)}$$

Além disso, o vetor de densidade de força, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, contendo as densidades de força de todos os membros pode ser calculado como

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{s} \quad \text{Eq. (8-9)}$$

cujas k -ésima entrada é q_k .

Reescrevendo a equação de equilíbrio (Eq. (8-5)) com relação às forças atuantes nos membros na direção x para coordenadas nodais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^x \mathbf{s} &= \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{s} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} \\ \mathbf{D}^x \mathbf{s} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^f \mathbf{x}^f \end{aligned} \quad \text{Eq. (8-10)}$$

onde $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{q})$ é a versão diagonal do vetor de densidade de força \mathbf{q} . O mesmo acontece para os membros nas direções y e z .

A matriz de densidade de força ($\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para os nós livres e $\mathbf{E}^f \in \mathbb{R}^{n \times n^f}$ para os nós fixos) pode, então, ser definida conforme mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \\ \mathbf{E}^f &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^f \end{aligned} \quad \text{Eq. (8-11)}$$

Consequentemente, a Eq. (8-10) pode ser simplificada, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^x \mathbf{s} &= \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{E}^f \mathbf{x}^f \\ \mathbf{D}^y \mathbf{s} &= \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{E}^f \mathbf{y}^f \\ \mathbf{D}^z \mathbf{s} &= \mathbf{E} \mathbf{z} + \mathbf{E}^f \mathbf{z}^f \end{aligned} \quad \text{Eq. (8-12)}$$

Assim, tem-se que as equações de equilíbrio podem ser reescritas usando as matrizes de densidade de força.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{E}^f \mathbf{x}^f &= \mathbf{p}^x \\ \mathbf{E} \mathbf{y} + \mathbf{E}^f \mathbf{y}^f &= \mathbf{p}^y \\ \mathbf{E} \mathbf{z} + \mathbf{E}^f \mathbf{z}^f &= \mathbf{p}^z \end{aligned} \quad \text{Eq. (8-13)}$$

Alternativamente, também é possível montar a matriz de densidade de força usando diretamente as densidades de força dos membros. A (i, j) -ésima entrada de \mathbf{E} é definida como:

$$\mathbf{E}_{(i,j)} = \begin{cases} \sum_{k \in K_i} q_k & \text{se } i = j \\ -q_k & \text{se } i \text{ e } j \text{ estão conectados por } k \\ 0 & \text{para demais casos} \end{cases} \quad \text{Eq. (8-14)}$$

Para a estrutura livre bidimensional (Figura 8-1), tem-se que:

$$\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{5 \times 5} = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ -q_1 & q_1 + q_5 + q_7 & 0 & -q_5 & -q_7 \\ -q_2 & 0 & q_2 + q_6 + q_8 & -q_6 & -q_8 \\ -q_3 & -q_5 & -q_6 & q_3 + q_5 + q_6 & 0 \\ -q_4 & -q_7 & -q_8 & 0 & q_4 + q_7 + q_8 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (8-15)}$$

A partir do exemplo acima, nota-se que a matriz de densidade de força é quadrada e simétrica. Além disso, é possível observar que a soma das entradas de cada linha ou coluna de \mathbf{E} é zero (o que é sempre verdade para estruturas livres).

Entretanto, o método de densidade de força não pode ser aplicado diretamente para encontrar a forma de estruturas tensegrity, pois, para que a estrutura seja livre (ou seja, sem qualquer nó fixo), a matriz de densidade de força correspondente não pode ter posto completo. De fato, a matriz deve ter certa deficiência de posto, de modo que haja determinada quantidade de autovalores nulos que possibilite a construção da estrutura no espaço d -dimensional desejado.

A este requisito, dá-se o nome de condição de não-degeneração, que é necessária para a realização geométrica de estruturas tensegrity.

Definição 8-1: Se a estrutura reside em um espaço com menos dimensões do que as especificadas (d), então a estrutura é classificada como degenerada no espaço d -dimensional. Caso contrário, é considerada não degenerada.

A condição de não degeneração é descrita como uma desigualdade com relação à deficiência do posto da matriz de densidade de força. Para estruturas livres, as equações de equilíbrio em cada direção podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{E}\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{E}\mathbf{z} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (8-16)}$$

As coordenadas nodais $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ não podem ser unicamente determinadas resolvendo a Eq. (8-16), pois a matriz de densidade de força de uma estrutura livre tem sempre deficiência de posto – singular – e não é invertível.

Definindo deficiência de posto da matriz de densidade de força \mathbf{E} como \bar{r}^E , tem-se que:

$$\bar{r}^E = n - \text{posto}(\mathbf{E}) \quad \text{Eq. (8-17)}$$

A estrutura representada na Figura 8-1, por exemplo, é não-degenerada em um espaço bidimensional, mas é degenerada para um espaço tridimensional. A partir da Definição 8-1, é possível elaborar os lemas abaixo para estruturas não degeneradas.

Lema 8-1: Se a estrutura é não degenerada em um espaço d -dimensional, seus vetores de coordenadas nodais em cada direção são linearmente independentes.

Lema 8-2: Para garantir que uma estrutura livre pretensionada seja não degenerada em um espaço d -dimensional, a seguinte relação deve ser satisfeita para a deficiência de posto da matriz de densidade de força:

$$\bar{r}^E \geq d + 1 \quad \text{Eq. (8-18)}$$

Para a estrutura livre bidimensional apresentada na Figura 8-1, pode ser feita a verificação das equações de auto-equilíbrio associadas à matriz de densidade de força abaixo.

Utilizando a realização geométrica e o modo de pretensão $\bar{\mathbf{s}}$ calculados anteriormente, o vetor de densidades de força pode ser computado como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \frac{t}{\sqrt{12}} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \frac{t}{\sqrt{24}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

onde $t (\neq 0)$ é um valor arbitrário que indica o nível de pretensão.

Deste modo, substituindo \mathbf{q} na Eq. (8-15), obtém-se a matriz de densidade de força abaixo.

$$\mathbf{E} = \frac{t}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, as equações de auto-equilíbrio obtidas a partir da matriz de densidade de força associada aos vetores de coordenadas nodais \mathbf{x} e \mathbf{y} , são:

$$\mathbf{Ex} = \frac{t}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Ey} = \mathbf{0},$$

o que mostra que as equações de auto-equilíbrio são satisfeitas com a realização geométrica e as pretensões dadas.

Conforme citado previamente, a estrutura livre bidimensional mostrada na Figura 8-1 possui cinco nós livres, ou seja, $d = 2$ e $n = 5$. Logo, a deficiência de posto pode ser calculada conforme apresentado a seguir:

$$\bar{r}^E = n - \text{posto}(\mathbf{E}) = 5 - 2 = 3$$

$$\bar{r}^E = d + 1 = 3$$

Portanto, a condição de não degeneração é satisfeita para esta estrutura.

8.1.1.4. Estruturas Estaticamente e Cinematicamente Determinadas e Indeterminadas

Segundo MARTHA (2010), uma estrutura que pode ter seus esforços internos e externos (reações de apoio) determinados somente a partir das equações

de equilíbrio é considerada estaticamente determinada (ou estrutura isostática). Do mesmo modo, se as forças nos membros e reações de apoio da estrutura não podem ser determinadas apenas pelas equações de equilíbrio, a estrutura é dita estaticamente indeterminada (ou estrutura hiperestática). Similarmente, em estruturas cinematicamente determinadas, ou seja, que possuem configuração deformada conhecida, é sempre possível determinar as forças e momentos que, atuando nas direções das deslocabilidades globais, equilibram o sistema estrutural. Entretanto, de modo geral as estruturas possuem infinitas configurações deformadas válidas, sendo classificadas, então, como cinematicamente indeterminadas.

Estruturas tensegrity são sempre estaticamente indeterminadas, de tal forma que seus membros possam carregar pretensões mesmo quando não há carregamento externo aplicado. Além disso, um tensegrity costuma ser cinematicamente indeterminado, isto é, são instáveis⁷ na ausência de pretensões. Como será mostrado no Capítulo 8.1.2, estruturas cinematicamente indeterminadas podem ser estabilizadas aplicando níveis de pretensões apropriadas no estado de auto-equilíbrio.

A seguir são apresentados os parâmetros que devem ser levados em consideração para avaliação da determinação estática e cinemática de estruturas articuladas.

i. Regra de Maxwell modificada

A regra de Maxwell modificada foi apresentada por Calladine (CALLADINE, 1978 *apud* ZHANG & OHSAKI, 2015), posto que a equação original não era suficiente para identificar a determinação estática e cinemática de estruturas articuladas, por não levar em consideração a conectividade e a realização geométrica da mesma. A regra modificada estabelece uma relação entre o número de modos de pretensão (ou grau de indeterminação estática) independentes e número de mecanismos infinitesimais (grau de indeterminação cinemática) independentes, como segue:

⁷ Um aspecto negativo de tensegrities é que a ruptura de um dos cabos gera um mecanismo, tornando a estrutura hipostática. Deste modo, tensegrities devem ser monitorados durante sua vida útil para evitar um colapso repentino. Para tal, pode-se lançar mão de métodos de *Vibration Health Monitoring* (VHM) como indicadores para a satisfação dos requisitos de projeto e, portanto, como ferramentas de controle de qualidade (ASHWEAR & ERIKSSON, 2017)

$$n^s - n^m = m - dn + n^b \quad \text{Eq. (8-19)}$$

onde n^s é o número de modos de pretensão independentes, n^m é número de mecanismos infinitesimais independentes, m é a quantidade de membros, d diz respeito ao espaço d -dimensional da estrutura, n é o número nós e n^b é o número de movimentos de corpo rígido.

Aplicando a regra de Maxwell modificada à estrutura representada na Figura 8-1, tem-se que:

$$n^s - n^m = m - dn + n^b$$

$$n^s - n^m = 8 - 2 * 5 + 3$$

$$n^s - n^m = 1$$

O resultado acima indica que existe pelo menos um modo de pretensão, pois o número de mecanismos infinitesimais deve, necessariamente, ser não-negativo, isto é, $n^m \geq 0$.

A regra de Maxwell modificada por Calladine fornece melhor entendimento sobre a determinação estática e cinemática da estrutura através do número de modos de pretensão e mecanismos infinitesimais. Entretanto, para avaliar corretamente a determinação estática e cinemática de uma estrutura articulada, é necessário investigar o posto da matriz de equilíbrio ou, analogamente, da matriz de compatibilidade. A seguir são apresentados os conceitos de determinação estática e cinemática com mais rigor.

ii. Determinação estática

Quando não existem carregamentos externos sendo aplicados à estrutura, ou seja, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, as equações de equilíbrio podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{D}\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \text{Eq. (8-20)}$$

Denota-se o posto da matriz de equilíbrio \mathbf{D} como $r^D = \text{posto}(\mathbf{D})$. Vale ressaltar que o posto deve obedecer a condição $r^D \leq \min(dn, m)$. O posto, r^D , da matriz de equilíbrio corresponde ao número de equações independentes. Portanto, o número de modos de pretensão pode ser obtido a partir da relação abaixo.

$$n^s = m - r^D \quad \text{Eq. (8-21)}$$

Existem dois casos particulares da Eq. (8-21) que devem ser analisados no que diz respeito ao valor de r^D em comparação ao número de pretensões.

$$a) \quad r^D < m \text{ ou } n^s > 0$$

Neste caso, existem $m - r^D$ soluções não triviais independentes ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) satisfazendo a equação de equilíbrio. Assim, a estrutura é estaticamente indeterminada, ou seja, não é possível determinar unicamente os modos de pretensão da estrutura sem informações adicionais (equações).

$$a) \quad r^D = m \text{ ou } n^s = 0$$

Para o cenário em que $r^D = m$, a estrutura não pode conter nenhuma pretensão diferente de zero enquanto não é aplicado carregamento externo, sendo, portanto, classificada como estrutura estaticamente determinada.

Para a estrutura livre bidimensional apresentada na Figura 8-1, obtém-se que o posto da matriz de equilíbrio $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{10 \times 8}$, r^D , é igual a 7. Ressalta-se que o resultado atende a condição de que $r^D \leq \min(dn, n)$:

$$r^D \leq \min(2 * 5, 8)$$

$$r^D \leq 8$$

Deste modo, o número de modos de pretensão pode ser calculado como

$$n^s = m - r^D$$

$$n^s = 8 - 7 = 1$$

Logo, existe apenas um modo de pretensão para a estrutura. O vetor de forças axiais nos membros (ou pretensões auto-equilibrantes), \mathbf{s} , é obtido a partir do espaço nulo da matriz \mathbf{D} . A versão normalizada do vetor \mathbf{s} é mostrada abaixo.

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nota-se que a equação $\mathbf{Ds} = \mathbf{0}$ é atendida. Ademais, pretensões proporcionais a $\bar{\mathbf{s}}$ satisfazem, necessariamente, as equações de equilíbrio da estrutura.

iii. Determinação cinemática

O número de mecanismos infinitesimais independentes (ou grau de indeterminação cinemática) de uma estrutura livre é dado por:

$$n^m = dn - n^b - r^D \quad \text{Eq. (8-22)}$$

Assim como no item (ii) comentado anteriormente, dois casos devem ser avaliados no que se refere o valor de n^m .

$$\text{a) } r^D < dn - n^b \text{ ou } n^m > 0$$

Neste caso, a estrutura é cinematicamente indeterminada, pois existem n^m deslocamentos não triviais independentes, que não são movimentos de corpo rígido, preservando o comprimento dos membros.

$$\text{b) } r^D = dn - n^b \text{ ou } n^m = 0$$

A estrutura é cinematicamente determinada, pois não existe um vetor de deslocamentos não trivial que preserve o comprimento dos membros com exceção dos movimentos de corpo rígido.

Para a estrutura livre bidimensional ilustrada na Figura 8-1, tem-se que a determinação cinemática pode ser definida como:

$$\begin{aligned} n^m &= dn - n^b - r^D \\ n^m &= 2 * 5 - 3 - 7 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, não existem mecanismos infinitesimais para esta estrutura.

8.1.2. Estabilidade

Neste capítulo são apresentados três critérios diferentes de estabilidade para estruturas articuladas: estabilidade potencial, estabilidade por pretensão e super estabilidade. Para tal, mostra-se também as formulações para as matrizes de rigidez (tangente, linear e geométrica) que auxiliarão na investigação da estabilidade.

8.1.2.1. Matrizes de rigidez

A estabilidade de uma estrutura está diretamente relacionada à positividade do incremento de segunda-ordem $\Delta\Pi_2$ da energia potencial total, dado que o termo $\Delta\Pi_1 = 0$ é satisfeito de acordo com a condição estacionária. A positividade de $\Delta\Pi_2$ pode ser verificada através da investigação da matriz de rigidez tangente, que é a derivação de segunda-ordem de Π .

A matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} , é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{D}^T + \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{E} \quad \text{Eq. (8-23)}$$

onde

- \mathbf{D} é a matriz de equilíbrio;
- $\bar{\mathbf{K}}$ denota a matriz de rigidez dos membros (a entrada diagonal $E_k A_k / l_k$

de $\bar{\mathbf{K}}$ corresponde à rigidez do membro k);

- $\mathbf{I}_3 (\in \mathbb{R}^{3 \times 3})$ é a matriz de identidade;
- \mathbf{E} é a matriz de densidade de força.

O primeiro termo da Eq. (8-23), $\mathbf{D}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{D}^T$, corresponde à matriz de rigidez linear, \mathbf{K}_E , vinculada à realização geométrica da estrutura e rigidez dos membros. Já o segundo termo da equação, $\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{E}$, diz respeito à matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_G , associada à pretensão atuando nos membros através da matriz de densidade de força.

Para a estrutura livre bidimensional mostrada na Figura 8-1, as matrizes de rigidez são apresentadas abaixo.

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{D}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{D}^T = \frac{AE}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{E} = \frac{t}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.1.2.2. Estabilidade potencial

É sabido que uma estrutura é estável se a mesma retorna à sua configuração inicial (condição de equilíbrio) após sofrer uma pequena deformação imposta. No âmbito da energia, uma estrutura estável possui o mínimo de energia potencial em seu estado de equilíbrio, de modo que qualquer deformação imposta à estrutura levaria a um aumento da energia potencial total.

Neste trabalho, portanto, a definição de estabilidade potencial é dada da seguinte forma:

Definição 8-2: A estrutura é estável se a energia potencial total está em um mínimo local.

Usando a definição acima, obtém-se o seguinte lema para o incremento de segunda-ordem $\Delta\Pi_2$ da energia potencial total quando os membros de ordem superior são desprezados:

Lema 8-3: Se uma estrutura é estável, então seu incremento de segunda-ordem da energia potencial total deve ser positivo enquanto sujeito a qualquer pequena perturbação em sua configuração original de equilíbrio.

Entretanto, para a investigação da estabilidade potencial de uma estrutura, o seguinte lema, derivado do Lema 8-3, é mais conveniente.

Lema 8-4: Uma estrutura é estável se qualquer das condições equivalentes abaixo é satisfeita após restringir os movimentos de corpo rígido.

1. A forma quadrática, Q_K , da matriz de rigidez tangente referente a quaisquer deslocamentos não triviais \mathbf{d} ($\neq 0$) é positiva:

$$Q_K = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} > 0;$$

2. A matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} , é positiva definida;
3. Todos os autovalores da matriz de rigidez tangente são positivos.

Assim, para a estrutura livre bidimensional representada na Figura 8-1, tem-se que, conforme mostrado no capítulo 8.1.1.4, a estrutura é estaticamente indeterminada com um único modo de pretensão e cinematicamente determinada, de modo que não há mecanismo infinitesimal.

Utilizando as matrizes \mathbf{K}_E e \mathbf{K}_G calculadas anteriormente, obtém-se os seguintes autovalores:

$$\{\lambda_i^E\} = AE\{0, 0, 0, 1.0, 1.3820, 1.3820, 2.0, 3.0, 3.6180, 3.6180\}$$

onde A é a área da seção transversal dos membros e E é o módulo de elasticidade do material.

$$\{\lambda_i^G\} = t\{-1.4142, -1.4142, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7.0711, 7.0711\}$$

onde t ($\neq 0$) é um valor arbitrário correspondente ao fator de escala da pretensão aplicada na estrutura.

Nota-se que a matriz \mathbf{K}_E possui três autovalores nulos, enquanto que \mathbf{K}_G possui seis autovalores iguais a zero. Três dos autovalores nulos em \mathbf{K}_E e \mathbf{K}_G representam os três movimentos de corpo rígido da estrutura livre bidimensional. Os demais autovalores iguais a zero em \mathbf{K}_G correspondem às movimentações afins⁸ não triviais.

Em estruturas reais, a magnitude do módulo de elasticidade do material normalmente é muito maior que a magnitude t da pretensão. Consequentemente, os autovalores da matriz de rigidez tangente \mathbf{K} costumam ser dominados pelos da matriz \mathbf{K}_E . Assumindo t como 1% de AE , obtém-se os autovalores abaixo.

$$\{\lambda_i^K\} = AE\{0, 0, 0, 1.0, 1.4094, 1.4094, 2.0, 3.0, 3.6471, 3.6471\}$$

Como os três autovalores nulos de \mathbf{K} dizem respeito aos movimentos de corpo rígido e os demais autovalores são positivos, a estrutura da Figura 8-1 é classificada como estável de acordo com o Lema 8-4.

8.1.2.3. Estabilidade por pretensão

A estabilidade de uma estrutura cinemática indeterminada é geralmente investigada através da verificação de sua matriz de rigidez tangente, conforme

⁸ O movimento afim preserva a colinearidade e as proporções das distâncias, ou seja, todos os pontos em uma linha são transformados em pontos em outra linha e as proporções das distâncias entre quaisquer pares de pontos na linha são preservadas. Contudo, um movimento afim não preserva, necessariamente, ângulos ou comprimentos (ZHANG & OHSAKI, 2015).

mostrado anteriormente. Entretanto, é necessário conhecer as áreas de seção transversal e as propriedades do material, o que pode ser complicado, em estudos preliminares. Deste modo, outro critério de estabilidade pode ser empregado, chamado estabilidade por pretensão.

Definição 8-3: Se a estrutura articulada é estável no estado de auto-equilíbrio na direção do mecanismo infinitesimal, então a mesma é dita estável por pretensão.

Como mostrado no capítulo 8.1.2.1, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita a partir da combinação da matriz de rigidez linear e da matriz de rigidez geométrica. Similarmente, sua forma quadrática, Q_K , com relação ao vetor de deslocamentos, \mathbf{d} , também pode ser escrita como a soma das formas quadráticas de \mathbf{K}_E e \mathbf{K}_G .

$$Q_K = Q_E + Q_G$$

$$Q_K = \mathbf{d}^T \mathbf{K}_E \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{K}_G \mathbf{d} \quad \text{Eq. (8-24)}$$

Para estruturas cinematicamente indeterminadas existe um mecanismo $\mathbf{d}_m \in \mathbb{R}^{3n}$ tal que $\mathbf{K}_E \mathbf{d}_m = \mathbf{0}$ e, portanto, $Q_E = 0$. Logo, a Eq. (8-24) pode ser reescrita como:

$$Q_K = 0 + Q_G = Q_m \quad \text{Eq. (8-25)}$$

onde

$$Q_m = \mathbf{d}_m^T \mathbf{K}_G \mathbf{d}_m \quad \text{Eq. (8-26)}$$

Os mecanismos, obtidos a partir do espaço nulo da matriz de compatibilidade \mathbf{D}^T , formam as colunas da matriz de mecanismos $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3n \times n^m}$. Assim, a forma quadrática, Q_K , da matriz de rigidez tangente com respeito à matriz de mecanismos se torna igual à matriz quadrática $Q_m \in \mathbb{R}^{n^m \times n^m}$ da matriz de rigidez geométrica.

$$Q_K = Q_m \quad \text{Eq. (8-27)}$$

onde

$$Q_K = \mathbf{M}^T \mathbf{K} \mathbf{M}, \quad Q_m = \mathbf{M}^T \mathbf{K}_G \mathbf{M} \quad \text{Eq. (8-28)}$$

Lema 8-5: Se uma estrutura articulada cinematicamente indeterminada é estável por pretensão, então a forma quadrática Q_m definida na Eq. (8-28) da matriz de rigidez geométrica com respeito aos mecanismos é positiva definida.

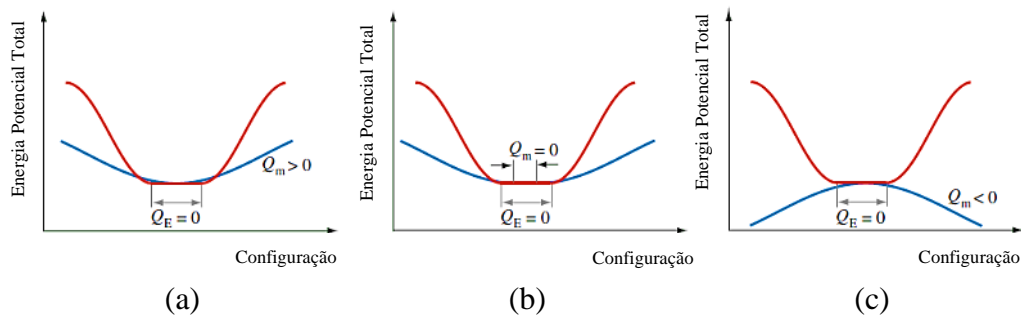


Figura 8-2: Energia potencial total e estabilidade de uma estrutura cinematicamente indeterminada: (a) Configuração estável quando $Q_m > 0$, (b) Configuração instável quando $Q_m = 0$ e (c) Configuração instável quando $Q_m < 0$ (adaptado de ZHANG & OHSAKI (2015))

O Lema 8-5 é uma condição necessária, mas não suficiente para a estabilidade de estruturas cinematicamente indeterminadas. Desta forma, tem-se a seguinte condição suficiente para a estabilidade por pretensão de uma estrutura.

Lema 8-6: Se a forma quadrática Q_m da matriz de rigidez geométrica com respeito aos mecanismos é positiva definida, então a estrutura articulada é estável por pretensão. Ademais, sua estabilidade é garantida se a rigidez axial dos membros for suficientemente maior do que a rigidez geométrica devido à pretensão.

Para a estrutura livre bidimensional mostrada na Figura 8-1, tem-se o seguinte no que se refere a estabilidade por pretensão:

Conforme discutido anteriormente, esta estrutura é cinematicamente determinada, ou seja, não possui nenhum mecanismo infinitesimal. Portanto, a mesma pode ser considerada estável por pretensão. Entretanto, a estrutura pode se tornar instável caso o nível de pretensão seja demasiadamente alto.

Supondo que $t = 2AE$ (que pode não ser factível para estruturas reais), obtém-se os autovalores da matriz de rigidez tangente abaixo.

$$\{\lambda_i^K\} = AE\{-0.4018, -0.4018, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 16.7155, 16.7155\}$$

Os dois autovalores negativos determinam, então, que a estrutura é instável, embora tenha a mesma configuração apresentada no capítulo 8.1.2.2.

Com base nos exemplos apresentados, observa-se que estabilidade potencial implica em estabilidade por pretensão, entretanto, estabilidade por pretensão não necessariamente garante estabilidade, pois depende do nível de pretensão. Contudo, a investigação da estabilidade por pretensão é suficiente na maioria dos casos, posto que o nível de pretensão é geralmente baixo para evitar a falha do material como escoamento e/ou flambagem, por exemplo.

8.1.2.4. Super-estabilidade

Como mostrado nos capítulos acima, estabilidade potencial e estabilidade por pretensão são critérios que apresentam algumas ressalvas em se tratando de estruturas tensegrity. Assim, faz-se necessário introduzir um novo critério, mais robusto que os demais, de acordo com a definição abaixo.

Definição 8-4: Se uma estrutura articulada pretensionada é sempre estável no estado de auto-equilíbrio, no sentido de ter um mínimo local da energia potencial total, independentemente das propriedades do material e do nível de pretensão, então a mesma é super-estável.

Para estruturas super-estáveis, existem duas condições necessárias com relação à matriz de densidade de força e a forma quadrática Q_m .

Lema 8-7: Se uma estrutura articulada livre é super-estável, então as duas condições abaixo são satisfeitas.

1. A forma quadrática Q_m da matriz de rigidez geométrica com respeito aos mecanismos é positiva definida;
2. A matriz de rigidez geométrica K_G , ou, de modo equivalente, a matriz de densidade de força E , é positiva semi-definida.

A estrutura livre bidimensional apresentada na Figura 8-3 adiante, é composta por quatro nós livres ($n = 4$) e seis membros ($m = 6$). Ressalta-se que

os membros [1] e [2] estão sobrepostos. Utilizando as coordenadas nodais e a matriz de conectividade dos membros, é possível obter a matriz de equilíbrio abaixo.

$$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{8 \times 6} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

O posto de \mathbf{D} é igual a cinco. Assim, o número de modos de pretensão e mecanismos podem ser calculados:

$$\begin{cases} n^s = m - r^D = 6 - 5 = 1 \\ n^m = dn - r^D - n^b = 2 * 4 - 5 - 3 = 0 \end{cases}$$

Logo, a estrutura é estaticamente indeterminada e cinematicamente determinada. O vetor de pretensões, \mathbf{s} , e seu vetor de densidade de força correspondente, \mathbf{q} , são:

$$\mathbf{s} = 2t \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{q} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde t é um valor arbitrário positivo de forma a garantir que as estroncas (linhas vermelhas na Figura 8-3) carreguem pretensões negativas e os cabos (linhas azuis) carreguem pretensões positivas.

A matriz de densidade de força $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é dada por:

$$\mathbf{E} = t \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Consequente, tem-se que os autovalores são: $\{\lambda_i^E\} = t\{0, 0, 0, 4.0\}$.

Nota-se que a condição de não-degeneração para estruturas livres bidimensionais apresentada no Lema 8-2 é satisfeita, pois existem três autovalores nulos em \mathbf{E} .

Como não existem mecanismos e tanto a matriz de densidade de força, quanto a matriz de rigidez geométrica, são positivas semi-definidas se $t > 0$, então a estrutura é super-estável.

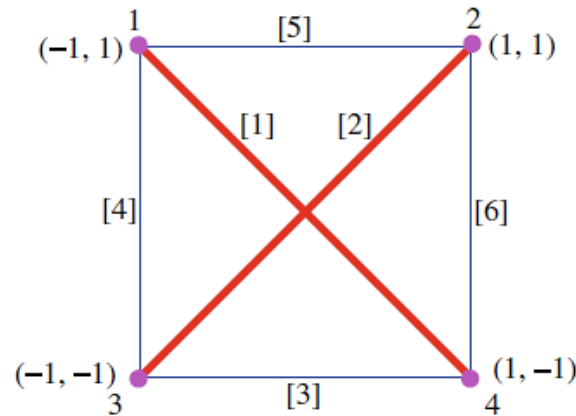


Figura 8-3: Estrutura livre bidimensional super-estável (ZHANG & OHSAKI, 2015).

Entretanto, deve-se notar que uma matriz de rigidez geométrica, ou, equivalentemente, uma matriz de densidade de força, positiva semi-definida não garante que a estrutura seja super-estável. A matriz de rigidez geométrica da estrutura tridimensional mostrada na Figura 8-4, por exemplo, é positiva semi-definida, entretanto a estrutura é instável.

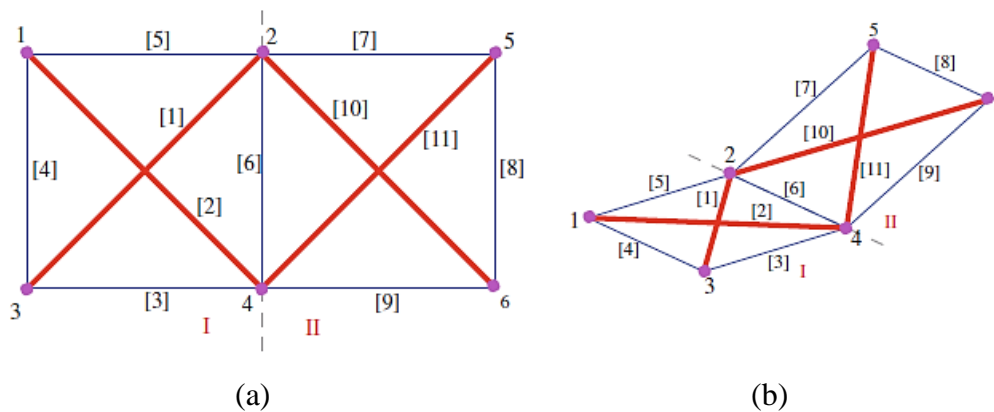


Figura 8-4: Estrutura tensegrity instável: (a) Vista superior e (b) Vista isométrica (ZHANG & OHSAKI, 2015)

Esta estrutura possui matriz de densidade de força positiva semi-definida, que é uma das condições (necessárias) para a super-estabilidade. Porém, a mesma não é estável no espaço tridimensional, porque existe um mecanismo finito: os planos I ou II podem rotacionar ao longo do membro [6] sem afetar o comprimento dos membros do outro plano.

Sendo assim, é preciso estabelecer condições necessárias e suficientes para garantir a super-estabilidade.

A matriz de rigidez linear é sempre positiva (semi-)definida. Logo, se existe um modo de pretensão que garanta que K_G seja positiva semi-definida, então é provável que a estrutura seja estável, já que a matriz de rigidez tangente será positiva definida. Entretanto, pode haver um movimento não trivial \mathbf{d} , excluindo os movimentos de corpo-rígido, que não resulta em um incremento da energia potencial total.

A partir dos movimentos afins para estruturas articulas tensegrity, é possível obter a matriz geométrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times 3}$ abaixo.

$$\mathbf{G} = (\mathbf{U}\mathbf{u}, \mathbf{V}\mathbf{v}, \mathbf{U}\mathbf{v}) \quad \text{Eq. (8-29)}$$

Lema 8-8: Se uma estrutura tensegrity d -dimensional é estável, então o posto de sua matriz geométrica (Eq. (8-29)) é completo, isto é:

$$\text{posto}(\mathbf{G}) = \frac{d^2 + d}{2} \quad \text{Eq. (8-30)}$$

Nota-se que se uma estrutura d -dimensional é degenerada, os vetores de coordenadas nodais são linearmente dependentes, assim como os vetores de diferenças de coordenadas. Por consequência, o posto de \mathbf{G} será menor do que $d^2 + d/2$ e a estrutura será instável no espaço d -dimensional.

Para a estrutura livre bidimensional exibida na Figura 8-3, tem-se que a matriz geométrica é:

$$\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \therefore \text{posto}(\mathbf{G}) = 3$$

Desta maneira, a estrutura pode ser estável, pois sua matriz geométrica possui o ponto necessário.

Por outro lado, para a estrutura tridimensional mostrada na Figura 8-4, obtém-se o seguinte:

Assumindo que o ângulo entre os planos I e II seja $\pi/6$, os vetores de coordenadas nodais \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} ($\in \mathbb{R}^6$) são:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, obtém-se a matriz geométrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{11 \times 6}$ abaixo.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 + \sqrt{3} & \sqrt{3} & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \therefore \text{posto}(\mathbf{G}) = 5$$

Deste modo, a estrutura é instável, já que a matriz geométrica não possui o posto necessário.

De acordo com o Lema 8-8, o posto da matriz geométrica deve ser $d^2 + d/2$ para uma estrutura tensegrity d -dimensional. Os movimentos afins abrangem todo o espaço nulo da matriz de rigidez geométrica se a matriz de densidade de força tiver a deficiência de posto mínima para a condição de não degeneração. Portanto, garante-se que uma estrutura é super-estável se, além de atender as duas condições acima, a matriz de densidade de força (e a matriz de rigidez geométrica) for positiva semi-definida.

Lema 8-9: Se todas as três condições abaixo forem satisfeitas, então a estrutura tensegrity d -dimensional é super-estável:

1. O posto da matriz geométrica \mathbf{G} é $d^2 + d/2$;
2. A matriz de densidade de força \mathbf{E} tem a deficiência de posto mínima necessária $d + 1$;
3. A matriz de densidade de força \mathbf{E} é positiva semi-definida.