

## 4

### Laser a Fibra com Cavidades Acopladas

Nas três seções seguintes apresentamos um tratamento teórico para descrever o sistema, baseado na abordagem encontrada na referência [7].

#### 4.1 As Equações do Campo Eletromagnético

Descreveremos a radiação dentro de uma cavidade a partir das equações de Maxwell (no sistema MKSA):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

onde

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{e} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (4.5)$$

Aplicando o rotacional pela esquerda na equação (4.3) e substituindo a expressão de  $\vec{B}$  dada pela segunda das equações (4.5), temos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}). \quad (4.6)$$

Substituindo, agora, a primeira e a terceira das equações (4.5) na equação (4.4) e, em seguida, substituindo o resultado na equação (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (4.7)$$

Usando a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$  (assumindo que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \approx 0$ ), podemos simplificar o primeiro termo à esquerda da igualdade na equação (4.7).

A equação (4.7) é obtida com a aproximação de onda plana, de forma que  $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$ , juntamente com a suposição de que o campo está linearmente polarizado no plano  $xOy$ .

A dependência temporal da equação de onda pode ser separada da dependência espacial pela expansão do campo em modos normais da cavidade. Isto é,  $\vec{E}(z, t) = -E(z, t)\hat{e}$ , onde  $\hat{e}$  define a direção de polarização. Então:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \sum_n A_n(t) U(z) + c.c.,$$

onde

$$\begin{aligned} A_n(t) &= E_n(t) \exp(-i[\nu_n t + \phi_n(t)]) \\ U_n(z) &= \sin(k_n z), \quad \text{com } k_n = \frac{n\pi}{c}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como a cavidade laser (de comprimento  $L$ ) que estamos considerando é do tipo Fabry-Perot, a onda que se estabelecerá em seu interior será estacionária. Logo, a dependência espacial dos modos normais da cavidade será senoidal, dada por  $U_n(z)$ . A expansão do campo fica, portanto:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \sum_n E_n(t) \exp(-i[\nu_n t + \phi_n]) U_n(z) + c.c., \quad (4.9)$$

enquanto a polarização induzida do meio é dada por

$$P(z, t) = \frac{1}{2} \sum_n P_n(t) \exp(-i[\nu_n t + \phi_n]) U_n(z) + c.c.. \quad (4.10)$$

Na expressão (4.9), toda a fase do modo  $n$  está contida em  $\phi_n$ , de forma que  $E_n$  é real. O que já não vale para a equação (4.10) e, portanto,  $P_n$  é complexo.

Substituiremos agora as equações (4.9) e (4.10) na equação (4.7) e aplicaremos o operador

$$\frac{\exp[i(\nu_n t + \phi_n)]}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z), \quad (4.11)$$

onde  $\mathcal{N} = \int_0^L dz |U_n(z)|^2$  é a constante de normalização.

Analisando cada termo separadamente, vemos que o primeiro fica

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2},$$

pois  $E = E(z, t)$ . Logo:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 E &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_n E_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] U_n(z) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_n E_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] \frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_n E_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] [-k_n^2 \text{sen}(k_n z)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_n E_n k_n^2 \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] U_n(z) \end{aligned}$$

Aplicando o operador (4.11) à equação anterior:

$$\frac{\exp[i(\nu_n t + \phi_n)]}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{-\nabla^2 E} = \frac{1}{2} \sum_n E_n k_n^2 \quad (4.12)$$

A primeira derivada de  $E$  em relação a  $t$  é

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_n E_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] U_n(z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n U_n(z) \left\{ \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] + \right. \\ &\quad \left. + E_n(t) \frac{\partial}{\partial t} \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n U_n(z) \left\{ \dot{E}_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - \right. \\ &\quad \left. - i E_n(t) (\nu_n + \dot{\phi}_n) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aplicando o operador (4.11) à equação (4.13), ficamos com

$$\frac{\exp[i(\nu_n t + \phi_n)]}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_n [\dot{E}_n(t) - i(\nu_n + \dot{\phi}_n) E_n(t)] \quad (4.14)$$

A derivada segunda de  $E$  em relação ao tempo é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \sum_n U_n(z) \left\{ \ddot{E}_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - \right. \\ &\quad - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{E}_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - \\ &\quad \left. - i E_n(t) \ddot{\phi}_n \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - \right. \end{aligned}$$

$$-(\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 E_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)]\}$$

Aplicando o operador (4.11) à equação anterior:

$$\begin{aligned} & \frac{\exp[i(\nu_n t + \phi_n)]}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \ddot{E}_n(t) - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{E}_n(t) - i\ddot{\phi}_n E_n(t) - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 E_n(t) \right\} \quad (4.15) \end{aligned}$$

Finalmente, o termo dependente da polarização:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \sum_n U_n(z) \left\{ \ddot{P}_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - \right. \\ & - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{P}_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - i\ddot{\phi}_n P_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] - \\ & \left. - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 P_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] \right\} \end{aligned}$$

Aplicando o operador (4.11),

$$\begin{aligned} & \frac{\exp[i(\nu_n t + \phi_n)]}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \ddot{P}_n(t) - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{P}_n(t) - i\ddot{\phi}_n P_n(t) - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 P_n(t) \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

Colocando, agora, as equações (4.12), (4.14), (4.15) e (4.16) em ordem, de acordo com a equação (4.7), temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_n E_n k_n^2 + \mu_0 \sigma \frac{1}{2} \sum_n \left[ \dot{E}_n(t) - i(\nu_n + \dot{\phi}_n) E_n(t) \right] + \\ & + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \ddot{E}_n(t) - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{E}_n(t) - i\ddot{\phi}_n E_n(t) - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 E_n(t) \right\} = \\ & = -\mu_0 \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \ddot{P}_n(t) - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{P}_n(t) - i\ddot{\phi}_n P_n(t) - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 P_n(t) \right\} \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\begin{aligned} & E_n k_n^2 + \mu_0 \sigma \left[ \dot{E}_n - i(\nu_n + \dot{\phi}_n) E_n \right] + \\ & + \mu_0 \varepsilon_0 \left\{ \ddot{E}_n - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{E}_n - i\ddot{\phi}_n E_n - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 E_n \right\} = \\ & = -\mu_0 \left\{ \ddot{P}_n - 2i(\nu_n + \dot{\phi}_n) \dot{P}_n - i\ddot{\phi}_n P_n - (\nu_n + \dot{\phi}_n)^2 P_n \right\} \quad (4.17) \end{aligned}$$

Como  $E_n$ ,  $\phi_n$  e  $P_n$  variam pouco num período de oscilação do campo (considerando-se frequências em torno da região visível) e as perdas são pequenas, podemos desprezar os termos  $\ddot{E}_n$ ,  $\ddot{\phi}_n$ ,  $\ddot{P}_n$ ,  $\ddot{E}_n\dot{\phi}_n$ ,  $\sigma\dot{E}_n$ ,  $\sigma\dot{\phi}_n$ ,  $\dot{\phi}_nP_n$  e  $\dot{P}_n$  frente aos outros. Mais precisamente, estamos tomando

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \ll \nu f \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right| \ll \nu \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|,$$

onde  $f$  pode ser  $E_n$ ,  $\phi_n$  ou  $P_n$ . Com isso, obtemos

$$E_n k_n^2 - i\mu_0 \sigma \nu_n E_n - 2i \frac{\nu_n}{c^2} \dot{E}_n - \frac{\nu_n^2}{c^2} E_n = \mu_0 \nu_n^2 P_n. \quad (4.18)$$

O fator de qualidade  $Q$  de uma cavidade para o modo  $n$  é definido como

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\nu_n}{\beta} \\ &= \frac{\nu_n}{\frac{1}{E_n^2} \frac{dE_n^2}{dt^2}} = \frac{\nu_n}{\frac{1}{\tau_c}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde  $\beta$  é a fração da energia armazenada dissipada por unidade de tempo, e  $\tau_c$  é o tempo de vida do modo  $n$ . Por outro lado,  $\tau_c = \varepsilon_0/\sigma$ , de modo que

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \nu_n}{Q}. \quad (4.20)$$

Multiplicando a equação (4.18) por  $c^2$ , ficamos com

$$c^2 E_n k_n^2 - i\mu_0 c^2 \sigma \nu_n E_n - 2i\nu_n \dot{E}_n - v_n^2 E_n = \mu_0 \nu_n^2 c^2 P_n.$$

Lembrando que  $\omega_n = k_n c$  e que  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ , temos

$$E_n \omega_n^2 - \frac{i\sigma \nu_n E_n}{\varepsilon_0} - 2i\nu_n \dot{E}_n - v_n^2 E_n = \frac{\nu_n^2 P_n}{\varepsilon_0}.$$

Substituindo a equação (4.20):

$$(\omega_n^2 - \nu_n^2) E_n - \frac{i\nu_n^2 E_n}{Q} - 2i\nu_n \dot{E}_n = \frac{\nu_n^2 P_n}{\varepsilon_0}.$$

Usando a aproximação  $(\omega_n^2 - \nu_n^2) \approx 2\nu_n(\omega_n - \nu_n)$ , chegamos a:

$$- \frac{i\nu_n}{Q} E_n - 2i\dot{E}_n + 2(\omega_n - \nu_n) E_n = \frac{\nu_n}{\varepsilon_0} P_n, \quad (4.21)$$

Tomando a parte imaginária da equação (4.21) e usando a equação (4.19), chegamos a uma equação para o campo

$$\dot{E}_n + \frac{1}{2} \gamma_c E_n = - \frac{\nu_n}{2\varepsilon_0} \text{Im}(P_n), \quad (4.22)$$

onde  $\gamma_c = (1/\tau_c)$  é a taxa de decaimento da radiação. A parte real da equação (4.21) contém a contribuição da parte real de  $P_n$ , a qual está em fase com o campo elétrico  $E_n$  e descreve os efeitos de dispersão devido ao meio.

## 4.2 Polarização do Meio Alargado Homogeneamente

Consideremos um meio formado por átomos de dois níveis, alargados homogeneamente, cuja frequência de transição entre os níveis superior,  $|a\rangle$ , e inferior,  $|b\rangle$ , é dada por  $\omega$ . Um átomo excitado para o estado  $|i\rangle$  ( $i = a$  ou  $b$ ), no instante  $t_0$ , na posição  $z$ , será descrito pelo operador densidade

$$\rho(i, z, t_0, t). \quad (4.23)$$

O número de átomos excitados para o estado  $|i\rangle$  por unidade de tempo e volume é dado por  $\lambda_i(z, t_0)$ . As taxas de decaimento dos níveis  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  são dadas pelas constantes  $\gamma_a$  e  $\gamma_b$ . A taxa de decaimento do elemento de matriz  $\rho_{ab}$  é dada por  $\gamma_\perp$ .

Se tivéssemos uma amostra com  $N$  átomos idênticos por unidade de volume, a polarização macroscópica deste meio seria dada por

$$P = N\langle ex \rangle = N \text{Tr}(\rho x) = N \text{Tr} \left\{ \rho \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

pois a representação de  $ex$  no espaço formado por  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  é

$$e\langle a|x|a\rangle = e\langle b|x|b\rangle = 0 \quad \text{e} \quad e\langle a|x|b\rangle = e\langle b|x|a\rangle = \mu,$$

devido à paridade de  $|a\rangle$ , de  $|b\rangle$  e do operador  $x$ . Segue, assim, que  $P$  seria dada por

$$P = N\mu\rho_{ab} + c.c..$$

No nosso caso, o meio não é formado por átomos idênticos (cf. (4.23)) e, portanto, a polarização macroscópica  $P(z, t)$ , equação (4.10), é dada pela contribuição de todos os átomos em  $z$  e  $t$  independentemente de seus estados iniciais e momento de excitação, ou seja,

$$\begin{aligned} P(z, t) &= \sum_i \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_i(z, t_0) \langle ex \rangle \\ &= \mu \sum_i \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_i(z, t_0) \rho_{ab}(i, z, t_0, t) + c.c.. \end{aligned} \quad (4.24)$$

A polarização complexa  $P_n$ , que aparece na equação do modo  $n$  do campo, é dada, conforme a equação (4.10), por

$$P_n = \frac{2 \exp[i(\nu_n t + \phi_n)]}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) P(z, t). \quad (4.25)$$

Substituindo (4.24) em (4.25), ficamos com

$$P_n = 2\mu \exp[i(\nu_n t + \phi_n)] \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \sum_i \int_0^L dt_0 \lambda_i(z, t_0) \rho_{ab}(i, z, t_0, t). \quad (4.26)$$

As equações de movimento do operador densidade de um único átomo  $\rho_{ab}(i, z, t_0, t)$  são bem conhecidas e dadas por

$$\dot{\rho}_{aa} = -\gamma_a \rho_{aa} - \frac{i}{\hbar} [\nu_{ab} \rho_{ba} - c.c.] \quad (4.27)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = -\gamma_b \rho_{bb} + \frac{i}{\hbar} [\nu_{ab} \rho_{ba} - c.c.] \quad (4.28)$$

$$\dot{\rho}_{ab} = -(i\omega + \gamma_\perp) \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \nu_{ab} (\rho_{aa} - \rho_{bb}), \quad (4.29)$$

onde

$$\nu_{ab} = -\frac{1}{2}\mu E_n(t) \exp[-i(\nu_n t + \phi_n)] U_n(z) \quad (4.30)$$

é a energia de perturbação para um campo de um único modo na aproximação de onda girante.

Para obtermos a polarização complexa  $P_n$ , vamos integrar a equação de movimento do operador população, definido como

$$\rho(z, t) = \sum_i \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_i(z, t_0) \rho(i, z, t_0, t). \quad (4.31)$$

Observamos que  $\rho_{aa}(z, t)$  e  $\rho_{bb}(z, t)$  fornecem as populações dos níveis  $a$  e  $b$  conforme as definições (4.23) e (4.31). A equação de movimento de  $\rho(z, t)$  é obtida derivando-se a equação (4.31) em relação a  $t$ . Notamos que há duas dependências em  $t$ : a do limite superior da integral em  $t_0$  e a do operador densidade. O resultado é

$$\frac{d}{dt} \rho(z, t) = \sum_i \lambda_i(z, t) \rho(i, z, t, t) + \sum_i \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_i(z, t_0) \dot{\rho}(i, z, t_0, t). \quad (4.32)$$

Por definição, os elementos de matriz do operador densidade são

$$\rho_{km}(i, z, t, t) = \delta_{ik} \delta_{im},$$

e o primeiro termo da equação (4.32) pode ser substituído pelo seguinte operador (dado em representação matricial)

$$\begin{pmatrix} \lambda_b & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix}$$

Os elementos de matriz do segundo termo do lado direito da equação (4.32) são dados por

$$\langle k | \sum_i \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_i \dot{\rho}(i, z, t_0, t) | m \rangle = \sum_i \int_{-\infty}^t dt_0 \lambda_i \dot{\rho}_{km}(i, z, t_0, t), \quad (4.33)$$

onde  $\dot{\rho}_{km}(i, z, t_0, t)$  corresponde às equações (4.27), (4.28) e (4.29). Como  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{\perp}, \omega$  e  $\nu_{ab}$  independem do estado inicial  $|i\rangle$ , para o qual o átomo foi excitado, assim como do instante de excitação  $t_0$ , temos que os elementos de matriz da equação (4.33) são regidos por equações de movimento idênticas às (4.27), (4.28) e (4.29). Assim, a equação (4.32) corresponde ao seguinte conjunto de equações para as correspondentes do operador população:

$$\dot{\rho}_{aa} = \lambda_a - \gamma_a \rho_{aa} - \frac{i}{\hbar} [\nu_{ab} \rho_{ba} - c.c.] \quad (4.34)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = \lambda_b - \gamma_b \rho_{bb} + \frac{i}{\hbar} [\nu_{ab} \rho_{ba} - c.c.] \quad (4.35)$$

$$\dot{\rho}_{ab} = -(i\omega + \gamma_{\perp}) \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \nu_{ab} (\rho_{aa} - \rho_{bb}). \quad (4.36)$$

Em termos de  $\rho(z, t)$ , a polarização complexa  $P_n$  (4.26) é dada por

$$P_n = 2 \exp [i(\nu_n t + \phi_n)] \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \mu \rho_{ab}(z, t). \quad (4.37)$$

O elemento  $\rho_{ab}(z, t)$  é obtido pela integral da equação (4.36):

$$\rho_{ab}(z, t) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt \exp [-(i\omega + \gamma_{\perp})(t - t')] \nu_{ab}(z, t') [\rho_{aa}(z, t') - \rho_{bb}(z, t')].$$

A integração acima pode ser facilmente realizada no limite em que a amplitude  $E_n$  (ver eq.(4.30)), a fase  $\phi_n$  e a diferença de população  $\rho_{aa} - \rho_{bb}$  não variem apreciavelmente num intervalo de tempo  $1/\gamma_{\perp}$ . Com isso, estes termos podem ser substituídos pelos seus valores em  $t$  e retirados da integral. Essa aproximação corresponde à eliminação adiabática de  $\rho_{ab}$  e leva às equações de taxa para as populações atômicas. Com estas aproximações, e substituindo a equação (4.30), chegamos a

$$\rho_{ab}(z, t) = -\frac{1}{2} \frac{i\mu}{\hbar} E_n \exp [-i(\nu_n t + \phi_n)] U_n(z) \left[ \frac{\rho_{aa} - \rho_{bb}}{i(\omega - \nu_n) + \gamma_{\perp}} \right]. \quad (4.38)$$

Substituindo a equação (4.38) na (4.37) e recordando a definição da constante de normalização  $\mathcal{N}$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_n &= 2 \exp [i(\nu_n t + \phi_n)] \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^L dz U_n^*(z) \mu \times \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{2} \frac{i\mu}{\hbar} E_n \exp [-i(\nu_n t + \phi_n)] U_n(z) \left[ \frac{\rho_{aa} - \rho_{bb}}{i(\omega - \nu_n) + \gamma_{\perp}} \right] \right\} \\ &= -\frac{i\mu^2 E_n}{\hbar \mathcal{N}} \left[ \frac{\rho_{aa} - \rho_{bb}}{i(\omega - \nu_n) + \gamma_{\perp}} \right] \int_0^L dz U_n^*(z) U_n(z) \\ &= -\frac{i\mu^2 E_n}{\hbar} \left[ \frac{\rho_{aa} - \rho_{bb}}{i(\omega - \nu_n) + \gamma_{\perp}} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \left[ \frac{i}{i(\omega - \nu_n) + \gamma_{\perp}} \right] \\
&= -\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \left[ \frac{1}{(\omega - \nu_n) + i\gamma_{\perp}} \right].
\end{aligned}$$

Logo, chegamos à seguinte expressão:

$$P_n = -\frac{\mu^2 E_n}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \frac{(\omega - \nu_n + i\gamma_{\perp})}{\gamma_{\perp}^2 + (\omega - \nu_n)^2}. \quad (4.39)$$

Para simplificar a notação, eliminaremos o índice  $n$  das componentes de Fourier do campo e da polarização,  $E_n$  e  $P_n$ , respectivamente. Quando necessário, recorreremos ao índice  $n$  com a devida observação. A inversão de população  $(\rho_{aa} - \rho_{bb})$  chamaremos de  $n$ , e a dessintonia átomo-campo  $(\omega - \nu_n)$  de  $\Delta\omega$ .

Substituindo a equação (4.39) na equação (4.22), obtemos a contribuição deste meio ao campo

$$\begin{aligned}
\dot{E} + \frac{1}{2} \gamma_c E &= -\frac{\nu}{2\varepsilon_0} \text{Im}(P) \\
&= -\frac{\nu}{2\varepsilon_0} \left( -\frac{\mu^2}{\hbar} n E \frac{\gamma_{\perp}}{\Delta\omega^2 + \gamma_{\perp}^2} \right) \\
&= \frac{\nu\mu^2}{2\hbar\varepsilon_0} n E \frac{1}{\gamma_{\perp}} \left( \frac{\gamma_{\perp}^2}{\Delta\omega^2 + \gamma_{\perp}^2} \right) \\
\dot{E} + \frac{1}{2} \gamma_c E &= \frac{\mu^2\nu}{2\hbar\gamma_{\perp}\varepsilon_0} \mathcal{L}(\Delta\omega) n E,
\end{aligned} \quad (4.40)$$

onde chamamos  $\nu_n$  de  $\nu$  e  $\mathcal{L}(\Delta\omega)$  é a Lorentziana definida como

$$\frac{\gamma_{\perp}^2}{\gamma_{\perp}^2 + \Delta\omega^2}. \quad (4.41)$$

Lembrando que a densidade de energia elétrica é dada por  $\varepsilon_0 E^2/2$ , a equação (4.40) em termos da intensidade  $I$  é obtida multiplicando-a por  $c\varepsilon_0 E$ . Logo

$$\begin{aligned}
\dot{I} + \gamma_c I &= \frac{\mu^2\nu}{\hbar\gamma_{\perp}\varepsilon_0} \mathcal{L}(\Delta\omega) n I \\
&= \alpha(\nu) n I,
\end{aligned}$$

onde

$$\alpha(\nu) = \frac{\mu^2\nu}{\hbar\gamma_{\perp}\varepsilon_0} \mathcal{L}(\Delta\omega). \quad (4.42)$$

Em termos da densidade de fótons,  $S = I/\hbar\nu c$ , temos

$$\dot{S} + \gamma_c S = \alpha(\nu) n S. \quad (4.43)$$

As equações de taxa para este meio são obtidas substituindo-se a expansão de  $\rho_{ab}(z, t)$ , dada pela equação (4.38), nas equações (4.34) e (4.35). Isto leva a

$$\dot{\rho}_{aa} = \lambda_a - \gamma_a \rho_{aa} - R(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (4.44)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = \lambda_b - \gamma_b \rho_{bb} + R(\rho_{aa} - \rho_{bb}), \quad (4.45)$$

onde a constante  $R$  é igual a

$$R = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 E^2}{\hbar^2 \gamma_{\perp}} |U_n|^2 \mathcal{L}(\Delta\omega).$$

Supondo  $\gamma_a = \gamma_b = \gamma_{\parallel}$  e subtraindo a equação (4.45) da (4.44),

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{aa} - \dot{\rho}_{bb} &= (\lambda_a - \lambda_b) - \gamma_{\parallel}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - 2Rn \\ &= \gamma_{\parallel}n_0 - \gamma_{\parallel}n - 2Rn \\ &= -\gamma_{\parallel}(n - n_0) - 2Rn, \end{aligned}$$

ficamos com a equação para a inversão  $n$ :

$$\dot{n} = -\gamma_{\parallel}(n - n_0) - 2Rn, \quad (4.46)$$

onde

$$n_0 = \frac{1}{\gamma_{\parallel}} (\lambda_a - \lambda_b).$$

Observamos que na expressão de  $R$  aparece  $|U_n(z)|^2 = \text{sen}^2(k_n z)$ , conforme a equação (4.8). Consideramos aqui que os átomos do meio experimentam um valor médio da intensidade, ou seja, o termo  $|U_n|^2$  pode ser substituído por seu valor médio,  $1/2$ .

A expressão de  $R$  em termos da densidade de fótons é dada por

$$R = \frac{\mu^2 \nu}{2\hbar \varepsilon_0 \gamma_{\perp}} \mathcal{L}(\Delta\omega) S = \frac{\alpha(\nu)}{2} S. \quad (4.47)$$

Portanto, a equação de movimento da inversão se escreve

$$\dot{n} = -\gamma_{\parallel}(n - n_0) - \alpha(\nu) n S. \quad (4.48)$$

Com as equações (4.22) e (4.48) podemos, então, montar o conjunto de equações de taxa que descrevem a nossa montagem experimental.

### 4.3 Equações de Taxa

Nossa montagem é composta de duas cavidades acopladas onde, para cada uma, podemos atribuir um par de equações de taxa, na forma das equações (4.22) e (4.48), descrevendo o meio, o campo, as perdas e o bombeio. Portanto, o sistema completo será dado pelas equações

$$\dot{n}_1 = -\gamma_{\parallel}(n_1 - n_{01}) - \alpha n_1 \rho_1 \quad (4.49)$$

$$\dot{n}_2 = -\gamma_{\parallel}(n_2 - n_{02}) - \alpha n_2 \rho_2 \quad (4.50)$$

$$\dot{\rho}_1 = -\gamma_C \rho_1 + \gamma_C \rho_2 + \alpha n_1 \rho_1 \quad (4.51)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\gamma_D \rho_2 - \gamma_C \rho_2 + \gamma_C \rho_1 + \alpha n_2 \rho_2, \quad (4.52)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se as cavidades  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, de acordo com o esquema a seguir. O  $\alpha$  é dado pela equação (4.42).

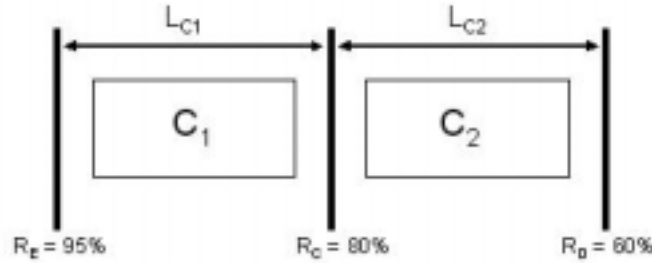


Figura 4.1: Esquema das cavidades acopladas.

As equações (4.49) – (4.52) formam um conjunto de equações que pretendemos usar para descrever a dinâmica (evolução temporal) do sistema. Elas foram obtidas dentro da abordagem semiclássica, na qual o campo é tratado como uma variável contínua (e não em termos de operadores de criação e aniquilação de fótons), e o meio material é tratado em termos do operador densidade associado aos níveis atômicos envolvidos. Dentro desta abordagem, usamos o modelo do átomo de dois níveis para descrever o meio atômico. Embora esse modelo seja o mais simples que existe, acreditamos que seja suficiente para descrever satisfatoriamente o meio material dentro desta abordagem. Quanto ao campo, além de ser considerado uma variável (e não um operador), utilizamos a aproximação de campo médio ao fazermos

$\sin^2(kz) = \frac{1}{2}$ , pois acreditamos que a modulação espacial da intensidade não deva interferir substancialmente na evolução temporal do sistema. Cabe notar que a presença da cavidade neste nosso tratamento é representada, na seção 4.2, pela presença de um meio condutor (fictício), com condutividade  $\sigma$ , responsável pelas perdas do campo.

No apêndice A, apresentamos o programa fonte, desenvolvido na linguagem FORTRAN 77, para simular a evolução temporal do sistema, baseado nas equações de taxa (4.49) – (4.52). Este programa é uma versão preliminar, onde foi usada uma rotina básica (*Rk4*) para calcular os valores das grandezas no instante seguinte  $t + dt$ , a partir dos valores conhecidos no instante  $t$ . Essa rotina é baseada no método de Runge-Kutta de 4ª ordem, e foi retirada da ref. [46]. Na figura 4.2 é apresentado o resultado de uma simulação.

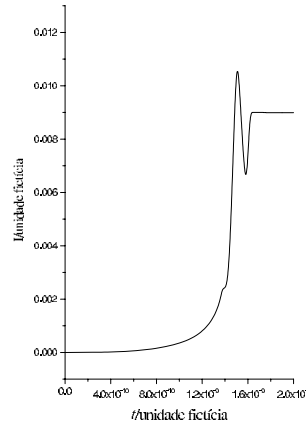


Figura 4.2: Gráfico esperado da simulação com a rotina *Rk4*.

Como as variáveis associadas às inversões de população passam pelo valor zero, ou seja, inicialmente, são negativas e, devido ao bombeio, tornam-se positivas, a rotina *Rk4* não está resolvendo satisfatoriamente o problema, e estamos tendo problema de convergência de valores, à medida que utilizamos o mecanismo controle de que a intensidade no interior da cavidade deve ser  $\geq 0$ . De qualquer forma, a figura 4.2 é um exemplo daquilo que esperamos obter, inclusive prevendo os valores de intensidade e do tempo de estabilização do laser. Nessa figura, as duas grandezas são representadas em termos de unidades "fictícias", visto que, para ajustar a convergência, os valores encontrados não têm ligação com a realidade experimental.