

3 Fundamentação Teórica

A seguir são apresentados os fundamentos teóricos nos quais é embasado o desenvolvimento do trabalho.

3.1. Espectros de Resposta

De acordo com Sampaio [3], é descrita a resposta máxima de um oscilador simples (S1GL), submetido a um sismo, como uma função da frequência natural e do amortecimento do S1GL, Figura 3; a resposta pode ser expressa em aceleração, velocidade ou deslocamento. Note que o S1GL de frequência natural infinita é rígido e sua aceleração espectral igual à máxima aceleração do solo.

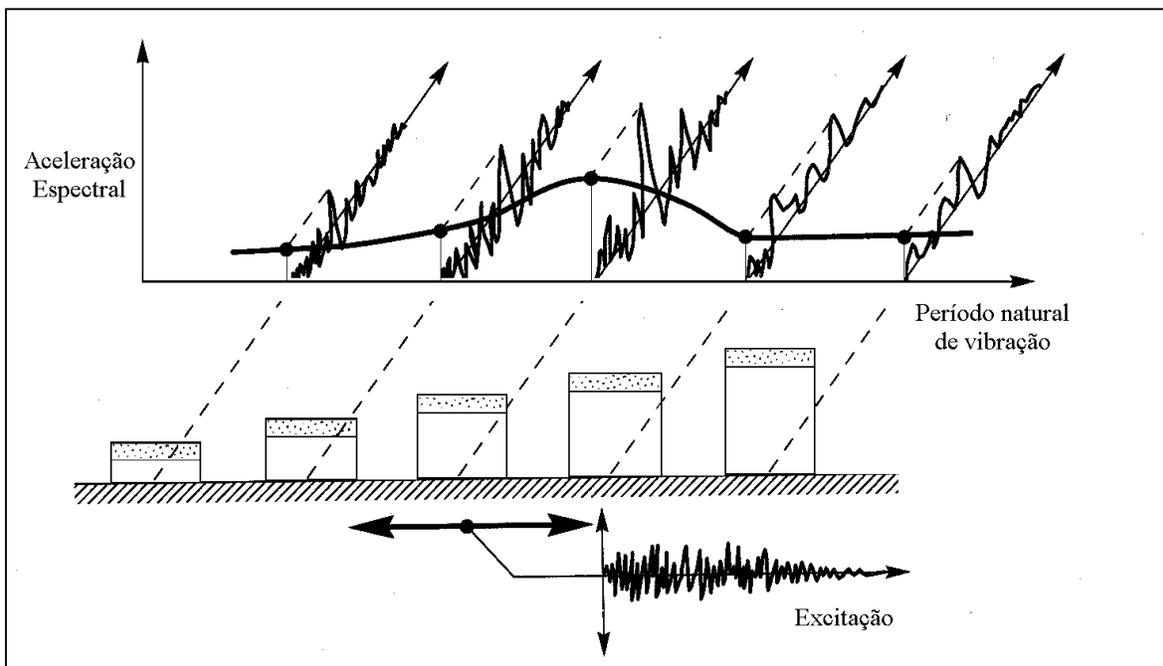


Figura 4 – Espectro de resposta. Acelerações espectrais são os valores da pseudo-aceleração do S1GL em resposta à mesma excitação. Kramer [14].

Uma forma conveniente de representar o espectro de resposta é através do chamado espectro de quatro escalas logarítmicas. O deslocamento máximo do SIGL relativo à sua base é designado por D e denominado de deslocamento espectral. O produto de D pela frequência circular natural (ω) é a chamada pseudovelocidade (PSV) do sistema. De maneira análoga, o produto $V\omega$ refere-se à pseudo-aceleração (PSA), assim:

$$PSV = \omega \cdot D \quad (3.1)$$

$$PSA = PSV \cdot \omega = \omega^2 \cdot D \quad (3.2)$$

Em alguns casos, o deslocamento espectral pode ser mais convenientemente expresso de forma indireta em termos de PSV ou PSA, do que diretamente em termos de D . Ainda, as características do espectro de resposta podem ser mais bem aproximadas com o auxílio das três quantidades do que em termos de apenas uma delas.

Aplicando-se o logaritmo nos dois lados da equação (3.1) tem-se:

$$\log(PSV) = \log(\omega) + \log(D) \quad (3.3)$$

se D é constante e $\omega = 2\pi f$, então:

$$\log(PSV) = a + \log(f) \quad (3.4)$$

onde a é uma constante, representa uma linha reta com inclinação de 45° . De maneira análoga, trabalhando-se com a equação (3.2) chega-se a:

$$\log(PSV) = a - \log(f) \quad (3.5)$$

, que representa uma reta com inclinação de -45° . Assim, no gráfico em escala logarítmica onde a ordenada representa a pseudovelocidade e a abscissa a frequência natural do sistema, as diagonais inclinadas a $+45^\circ$ representam valores constantes de D e as diagonais

inclinadas a -45° , valores constantes de PSA, conforme esquematicamente representado na Figura 5.

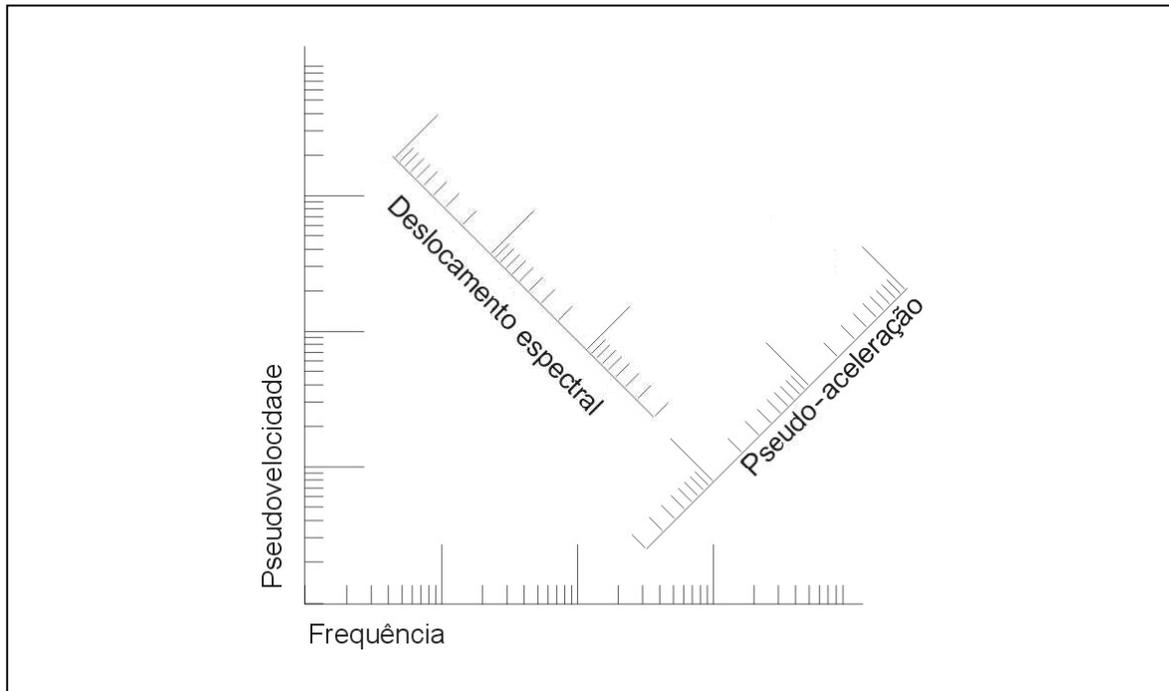


Figura 5 – Representação de um espectro de resposta de quatro escalas logarítmicas.

3.2. Análise modal espectral

A definição da excitação segundo um espectro de resposta de projeto é uma forma sintética de representação que acenou, desde os primeiros tempos, para uma análise envolvendo a discriminação do comportamento dinâmico da estrutura, modo a modo, para sistemas com muitos graus de liberdade, dos valores extremos das grandezas cinemáticas e dos esforços e tensões nos elementos.

A estrutura é decomposta em vários sistemas com um grau de liberdade (modos de vibração), e a cada um deles é atribuída a amplificação máxima prescrita no espectro de resposta (de projeto) para o oscilador simples com a frequência e o amortecimento correspondentes ao modo em consideração:

$$v_i = c_i \phi_i |FAI_i|_{\max} \quad (3.6)$$

, onde:

v_i - contribuição máxima do modo i no deslocamento total, $v|_{\max}$;

c_i - fator de participação do modo i ;

ϕ_i - modo natural de vibração com frequência ω_{0i} ;

$|FAI_i|_{\max}$ - fator de amplificação instantâneo i , máximo; ordenada do espectro de resposta (de projeto) para o oscilador simples, com frequência ω_{0i} e fator de amortecimento, ξ_j .

Em resumo, trata-se de uma análise modal na qual empregam-se $|FAI_i|_{\max}$ ao invés dos fatores de amplificação instantâneos.

Por isso, tal procedimento é designado por “Análise Modal Espectral” ou simplesmente “Análise Espectral”. Os fatores de amplificação máximos concentram modo a modo, todo o efeito dinâmico do sismo sobre a estrutura e podem ser obtidos no domínio do tempo.

Naturalmente, ao fazer-se a sobreposição das componentes modais, v_i , é perdido o faseamento real entre elas, podendo surgir efeitos de majoração ou redução da resposta máxima, em níveis indesejáveis.

O número destas componentes modais a serem incluídas e a maneira de combiná-las, incluindo as chamadas componentes de modos rígidos, têm sido objeto de diversos estudos.

3.3. Densidade de Espectro de Potência

De acordo com Clough e Penzien [5], qualquer função amostra $x_r(t)$ tomada de um processo randômico estacionário tendo média zero, pode ser separada nas suas componentes de frequência usando a análise de Fourier. Se esta função é representada apenas sobre um intervalo finito de tempo, $-s/2 < t < s/2$, a representação em séries de Fourier pode ser usada, assim:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{nr} \exp(in\omega_0 t) \quad (3.7)$$

onde

$$C_{nr} = \frac{1}{s} \int_{-s/2}^{s/2} x_r(t) \exp(-in\varpi_0 t) dt \quad (3.7a)$$

sendo $\varpi_0 \equiv 2\pi/s$. Se $x_r(t)$ é periódica, as Equações (3.7) e (3.7a) são a exata representação da função total desde que o intervalo de integração s seja tomado como um período completo. Esta função periódica consiste de harmônicos discretos tendo freqüência circulares $\varpi_0, 2\varpi_0, 3\varpi_0, \dots$, e correspondentes amplitudes finitas $A_{1r} = 2|C_{1r}|$, $A_{2r} = 2|C_{2r}|$, $A_{3r} = 2|C_{3r}|, \dots$, desde que, é claro, as componentes de freqüência positiva e negativa sejam combinadas.

Usualmente, a quantidade de maior interesse, quando um processo randômico estacionário é analisado, é o valor da média dos quadrados de $x_r(t)$ sobre o intervalo $-s/2 < t < s/2$, que pode ser obtido substituindo-se a Equação (3.7) na relação:

$$[x_r^2(t)] = \frac{1}{s} \int_{-s/2}^{s/2} x_r^2(t) dt \quad (3.8)$$

, para obter:

$$[x_r^2(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_{nr}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{nr}^2}{2} \quad (3.9)$$

Se $\Delta\varpi$ é chamado a representar o espaçamento da freqüência do harmônico discreto, então,

$$\Delta\varpi = \varpi_0 = \frac{2\pi}{s} \quad (3.10)$$

e a Eq. (3.7a) é utilizada, a Eq. (3.9) torna-se:

$$S_{x_r}(\omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \int_{-s/2}^{s/2} x_r(t) \exp(-in\omega_0 t) dt \right|^2}{2\pi s} \Delta\omega \quad (3.11)$$

Se agora $s \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, $n\omega_0 \rightarrow \omega$, o somatório se torna uma integral, e a Eq. (3.11) é convertida na forma

$$[x_r^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_r}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} 2S_{x_r}(\omega) d\omega \quad (3.12)$$

, onde a função:

$$S_{x_r}(\omega) \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_{-s/2}^{s/2} x_r(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2}{2\pi s} \quad (3.13)$$

é definida como *Função Densidade de Espectro de Potência* para a função $x_r(t)$ desde que o limite realmente exista. De acordo com esta definição, a função densidade de espectro de potência é uma função par quando, $x_r(t)$ é uma função real, e é positiva e finita para todos os valores de ω , e resulta na média dos quadrados de $x_r(t)$ quando integrada sobre o intervalo $-\infty < \omega < \infty$.

A densidade espectral do processo aleatório estacionário é obtida pela média simples da função densidade espectral das funções amostras pertencentes ao processo, como segue:

$$S_x(\omega) \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n S_{x_r}(\omega) \quad (3.14)$$

3.4. Sismos Artificiais

A excitação sísmica ainda é um fenômeno cujos mecanismos de formação não são totalmente conhecidos.

Alguns dos principais parâmetros envolvidos neste problema são os seguintes: tipo de solo, distância ao epicentro, profundidade do foco do sismo, características geológicas ao longo do percurso de propagação do sismo, etc.

Uma das maneiras encontradas para caracterizar um sismo, desde que este seja um processo aleatório fracamente estacionário, consiste na determinação do seu conteúdo de frequência e da contribuição dada ao sismo por cada uma das frequências, utilizando uma FDEP (sabendo que esta função caracteriza o espaço amostral dos terremotos de uma determinada região) através de uma análise de Fourier adequada. Por exemplo: a partir de dados medidos por um sismógrafo, em uma determinada localidade, pode-se fazer, com um conjunto adequado de sismos, uma análise de Fourier e obter a FDEP que caracteriza os sismos ocorridos nesta localidade.

“Tanto a densidade espectral quanto o espectro de resposta de projeto são recursos que podem representar a sismicidade de uma região em termos de sua potencialidade de produzir efeitos mecânicos sensíveis nos sistemas estruturais, ou seja, representam um comportamento possível para um conjunto de sismos. Em vista disto, a geração de sismos artificiais é condicionada ao atendimento de um espectro de resposta de projeto e a um requisito mínimo de densidade espectral de potência, recomendada para assegurar à excitação sísmica uma representativa dimensão da sua potência e de uma adequada distribuição ao longo da faixa de frequência de interesse do espectro de resposta de projeto (USNRC, 1989). Esta densidade espectral é chamada de Função Densidade Espectral de Potência Objetivo, FDEPo. Todavia, tendo em vista a característica da densidade espectral de representar um espaço amostral composto por um número infinito de funções temporais (sismos), a ela pode ser atribuída a responsabilidade da representação da própria sismicidade da região à qual ela é vinculada.” Sampaio [3].

3.4.1. Geração de sismos artificiais

Um dos métodos mais difundidos para gerar sismos artificiais, a partir de uma FDEP, é conhecido como o Método da Superposição de Oscilações que é utilizado neste trabalho e apresentado no item a seguir.

3.4.1.1. Método da Superposição de Oscilações

Seja a função:

$$x_i(t) = A_i \cdot \text{sen}(\omega_i \cdot t + \alpha_i) \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.15)$$

, onde: $x_i(t)$ = i-ésima função senoidal para superposição.

A_i = amplitude do i-ésimo harmônico.

ω_i = frequência circular i, correspondente ao i-ésimo harmônico.

α_i = i-ésimo ângulo de fase.

Essas funções senoidais são superpostas (3.16) para obtenção do processo aleatório que serve de base para caracterização do acelerograma de um sismo.

$$X(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (3.16)$$

Os harmônicos com frequência circular $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, têm as correspondentes amplitudes $A_1 = 2|C_1|, A_2 = 2|C_2|, A_3 = 2|C_3|, \dots$, sendo que os valores C_i , correspondem às amplitudes de Fourier. Estes valores são obtidos a partir da média dos quadrados da função $x_i(t)$, no intervalo $-s/2 < t < s/2$, onde s é a duração da fase intensa do sismo, em segundos.

Da correspondência entre a média dos quadrados da função $x_i(t)$ e a função densidade de espectro de potência do processo, chega-se à seguinte relação:

$$S(\omega_i) = \frac{(A_i)^2}{2 \cdot \Delta\omega} \quad (3.17)$$

Esta relação atende à função densidade unilateral, ou seja, a FDEP que tem toda a sua potência concentrada somente no semi-eixo positivo de ω .

A diferença entre as frequências consecutivas ω_i e ω_{i-1} , é um valor fixo, correspondente a:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{s} \quad (3.18)$$

Já o ângulo de fase, α_i , é randômico, com função densidade de probabilidade uniforme entre 0 e 2π . Este ângulo é que garante o caráter aleatório ao processo.

Um exemplo de acelerograma gerado utilizando o exposto acima é mostrado na Figura 6.

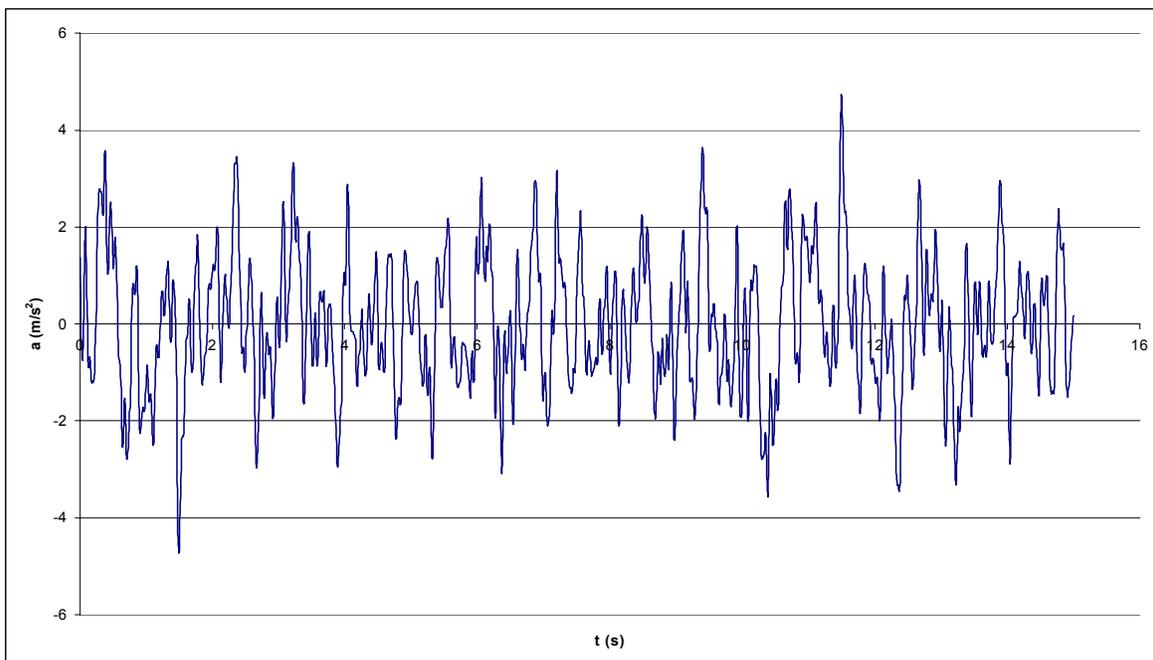


Figura 6 - Acelerograma, com duração de 15s, gerado a partir da FDEPo.

3.4.1.2. Função intensidade

O acelerograma que representa um sismo deve começar com a aceleração igual a zero e gradativamente aumentar seus valores até que atinja a fase mais intensa do sismo e, depois, ter esses valores da fase intensa reduzidos até alcançar o valor de aceleração que se deseja. Assim sendo, é preciso que seja aplicada uma correção nos valores obtidos com base no procedimento descrito no item 3.4.1.1.. Para isto, é utilizada uma função, chamada

Função Intensidade, $I(t)$, Figura 7, que visa fornecer ao acelerograma gerado o caráter não estacionário para simular um sismo mais próximo de um real [5].

Existem várias formas de ser definida uma função intensidade.

A função $I(t)$, utilizada no presente trabalho, tem a seguinte definição:

a) Fase Inicial ($0 < t < T_{inicial}$):

$$I(t) = \left(\frac{t}{T_{inicial}} \right)^2 \quad (3.19a.)$$

onde $T_{inicial} = 10\% \cdot T_{total}$;

b) Fase Intensa ($T_{inicial} < t < (T_{total} - T_{final})$):

$$I(t) = 1 \quad (3.19b.)$$

c) Fase final ($(T_{total} - T_{final}) < t < T_{total}$):

$$I(t) = \exp^{a \cdot [t - (T_{total} - T_{final})]} \quad (3.19c.)$$

onde $T_{final} = 23,33\% \cdot T_{total}$

O fator a é determinado de modo a garantir uma redução de 95% do valor da aceleração máxima.

A função intensidade, $I(t)$, é aplicada no processo aleatório $\sum_{i=1}^n x(t)$, da seguinte forma:

$$X(t) = I(t) \cdot \sum_{i=1}^n A_i \cdot \text{sen}(\omega_i \cdot t + \alpha_i) \quad (3.20)$$

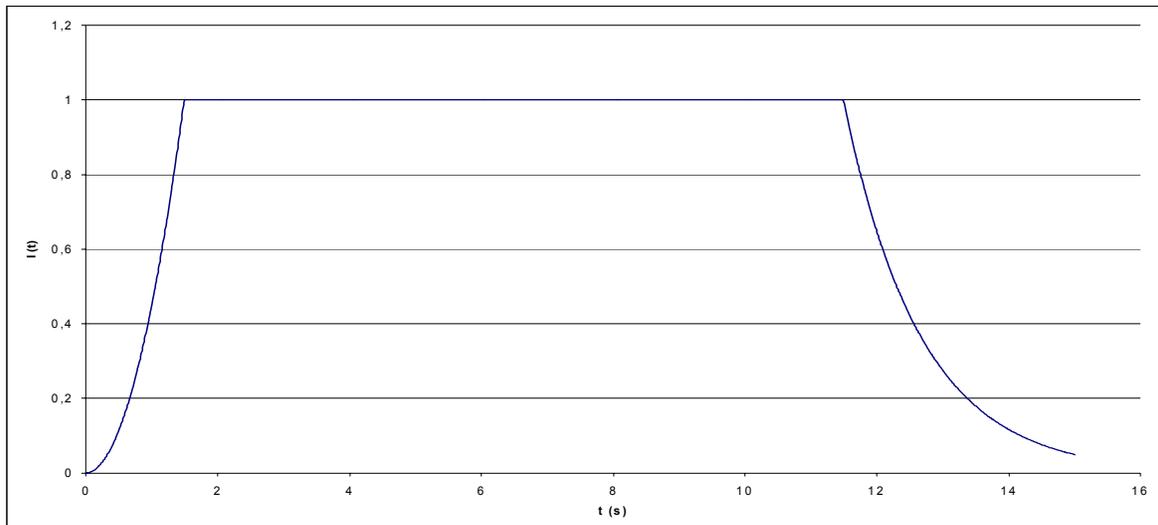


Figura 7 – Função intensidade, para um sismo com duração total de 15s.

Na Figura 8 é apresentado um exemplo de acelerograma gerado com base em 3.4.1.1 e com a função intensidade aplicada de acordo com (3.20).

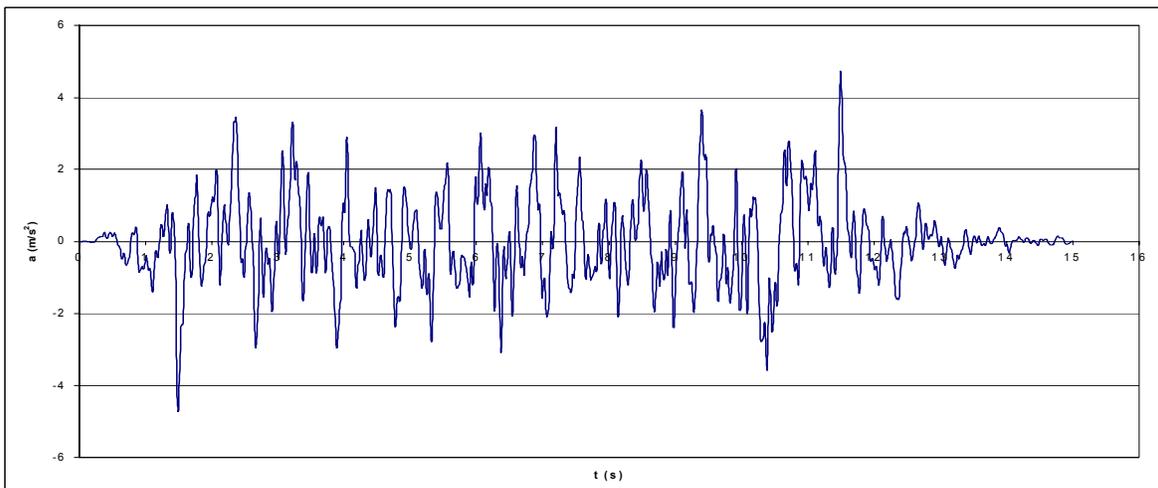


Figura 8 - Acelerograma após a aplicação da função intensidade.

3.4.1.3. Correção da Linha Base.

Uma condição importante, a ser considerada, é que a aceleração, a velocidade e o deslocamento iniciais, bem como a aceleração e a velocidade finais, naturalmente devem ter valores nulos, de forma que o acelerograma gerado simule adequadamente as características de um sismo real [6] e [7]. Estas condições, em parte, são atendidas quando

aplicada a função intensidade $I(t)$. Para que as condições de contorno sejam satisfeitas, utiliza-se uma correção dos valores do acelerograma de modo que ele passe a atender tais critérios.

A correção utilizada é feita ponto a ponto da série discreta de valores do acelerograma, já com a função intensidade aplicada. Esta correção tem a seguinte forma:

$$\ddot{y}_c(t) = \ddot{y}_n(t) + a + 2bt + 3ct^2 \quad (3.21)$$

Os subscritos c e n , indicam o acelerograma corrigido e não corrigido, respectivamente, no tempo t .

O problema, então, consiste na obtenção dos valores adequados das constantes a , b e c . A formulação utilizada para obtenção de tais constantes está apresentada no Apêndice I.

3.5. Embasamento Estatístico

A obtenção dos ERUP é feita de acordo com conceitos fundamentais de estatística [11] e [12]. A seguir são apresentados os principais conceitos utilizados.

3.5.1. Variáveis aleatórias discretas

As variáveis aleatórias envolvidas no contexto da análise efetuada no presente trabalho são todas discretas.

3.5.2. Média amostral

Dado um conjunto de variáveis aleatórias discretas, x_1, \dots, x_n , o valor médio é obtido por:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \quad (3.22)$$

O valor $E(X)$ também é conhecido como esperança matemática de X . E p_i corresponde à probabilidade de ocorrência do valor x_i .

3.5.3. Variância

A variância consiste em uma medida de posição da variável aleatória e é definida pela seguinte expressão:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \cdot p_i \quad (3.23)$$

3.5.4. Desvio Padrão

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = Devp(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \cdot p_i} \quad (3.24)$$

3.5.5. Função de Distribuição de Probabilidade Acumulada

A função de Distribuição de Probabilidade Acumulada, $P(x)$, relaciona os intervalos de valores ($\alpha_i = x_a$ e $\alpha_{i+n} = x_b$) do espaço amostral das variáveis aleatórias discretas, α , e sua probabilidade de ocorrência p_i e se define como:

$$P(x) = \sum_{i=x_a}^{x_b} p_i \quad (3.25)$$

onde as variáveis x_a e x_b , determinam o início e o fim do intervalo considerado.

3.6. Espectro de Resposta Uniformemente Provável (ERUP)

O Espectro de Resposta Uniformemente Provável (ERUP) é um espectro originado com base em uma análise estatística de uma amostra representativa de dados originados a partir de um conjunto de Espectros de Resposta (ER).

Tal análise estatística consiste na determinação da função de distribuição de probabilidades acumuladas de ocorrência dos valores amostrais dos ER. Tais ER são gerados a partir de um acelerograma que caracteriza um movimento do terreno gerado por um sismo.

Com base nas funções de distribuição de probabilidade acumulada recém descritas, os valores de pseudovelocidade (PSV)- correspondentes a uma determinada frequência do SIGL- que estão abaixo de um certo nível de probabilidade -, podem ser obtidos.

Repetindo o processo descrito acima, para cada uma das frequências de interesse, obtém-se o ERUP.

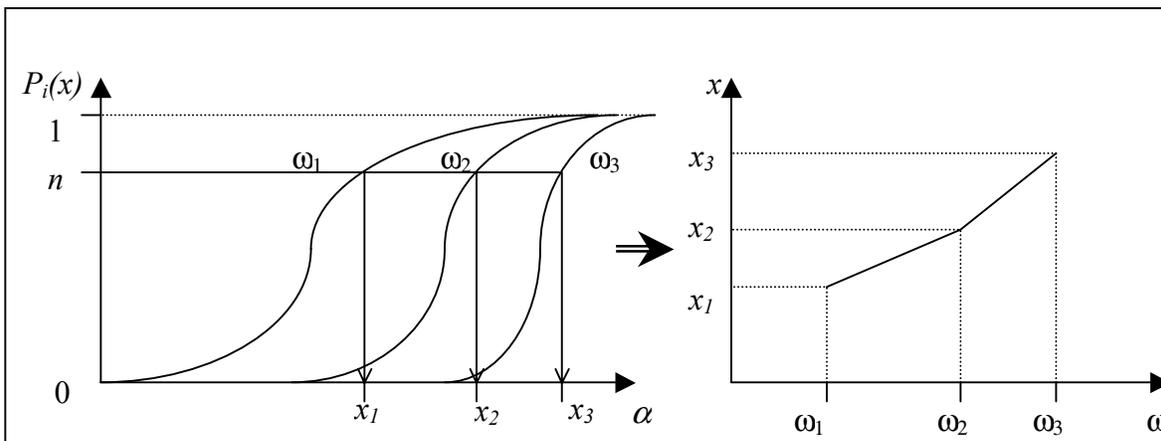


Figura 9 – Esquema de obtenção de um ERUP.

No esquema apresentado na Figura 7, pode-se observar um ERUP obtido para um nível n de probabilidade, de acordo com as $P_i(x)$ das frequências ω_1 , ω_2 e ω_3 , respectivamente.

Exemplo: Para cada valor de frequência de interesse, é obtida uma distribuição de probabilidades acumuladas. Então, com base nestes valores, são levantados os valores das PSV com probabilidades menores ou iguais a 50 e 84% respectivamente. Com tais valores

podem ser gerados os ERUP para 50 e 84% de probabilidade de ser menor ou igual ao valor apresentado no espectro.