Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Antonio Fábio Serafim

Os Números Irracionais e o Processo Ensino Aprendizagem no Ensino Fundamental: Anos Finais – Um Desafio ao Professor.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profª. Renata Martins Rosa

Rio de Janeiro
Setembro de 2020

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Antonio Fábio Serafim

Os Números Irracionais e o Processo Ensino Aprendizagem no Ensino Fundamental: Anos Finais – Um Desafio ao Professor.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Profa. Renata Martins Rosa
Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Emília Alves
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Victor Goulart Nascimento
Departamento de Matemática – UFES

Profa. Christine Sertã Costa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 3 de setembro de 2020.

Antonio Fábio Serafim

Graduou-se em Ciências – Habilitação em Matemática pela Universidade Castelo Branco (UCB), Rio de Janeiro. Possui especialização em Matemática Pura pela Fundação Educacional Unificada Campograndense (FEUC). Professor aposentado da Rede Municipal de Ensino do Rio de Janeiro. Atualmente trabalha como professor do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior na rede privada do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Serafim, Antonio Fábio

Os Números Irracionais e o Processo Ensino Aprendizagem no Ensino Fundamental: Anos Finais – Um Desafio ao Professor / Antonio Fábio Serafim; orientadora: Renata Martins Rosa. – 2020.

137 f.: il. Color.; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Números Irracionais. 3. Ensino Fundamental – Anos Finais. 4. Livros Didáticos. 5. Origem dos Números. I. Rosa, Renata Martins. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha esposa Roselene da Nóbrega Gomes Serafim, cuja paciência, incentivo e compreensão foram fundamentais para que eu chegasse a esse final.

Às minhas filhas Hellena da Nóbrega Gomes Serafim e Maryane da Nóbrega Gomes Serafim, que souberam compreender esse período de afastamento da família em função dos estudos.

À minha mãe Hortense de Jesus Serafim (*in memorian*), pela educação, carinho e orgulho que sempre sentiu em ter um filho professor de Matemática.

À minha orientadora Professora Renata Martins Rosa, por ser mais do que uma simples orientadora, uma pessoa que sempre me incentivou nas aulas e, em muitas vezes, até sem perceber.
.
A todo corpo docente que participou diretamente ou indiretamente do curso, em especial, aos professores que me deram aula, Professor Nicolau Saldanha, Professor Marcos Craizer, Professor Sinésio Pesco, Professora Christine Sertã Costa, Professora Luana Sá de Azevedo Araújo e Professora Cristiane Pinho Guedes.

Ao meu colega de trabalho e coordenador há alguns anos, Professor Luiz Cláudio Leira, pelo incentivo para fazer o mestrado.

Ao meu ex-aluno da graduação Pablo Barbosa Fonseca, que fez o mestrado junto comigo, estudando junto, um sempre motivando o outro.

A todos os colegas da turma, pelo incentivo e companheirismo ao longo dos dois anos que estivemos juntos.

Por fim, a todos os meus familiares, amigos e colegas de trabalho que contribuíram direta ou indiretamente para que eu pudesse vivenciar este momento, o meu muito obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

Serafim, Antonio Fábio; Rosa, Renata Martins (Orientadora). **Os Números Irracionais e o Processo Ensino Aprendizagem no Ensino Fundamental: Anos Finais – Um Desafio ao Professor.** Rio de Janeiro, 2020. 137 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho disserta sobre o ensino dos números irracionais no Ensino Fundamental – Anos Finais, com o objetivo de discutir as dificuldades que os alunos apresentam em entender a ideia de um número irracional e as formas pelas quais o conteúdo lhes é apresentado. Inicialmente, apresentaremos um breve histórico sobre a origem dos números e os principais sistemas de numeração, realizando uma contextualização histórica dos números irracionais. Falaremos do ensino destes, destacando a abordagem que alguns livros fazem deste conteúdo. Apresentaremos uma pesquisa realizada no *Google Forms*, com 90 professores que trabalham no Ensino Fundamental, a fim de conhecer as formas pelas quais eles ensinam os números irracionais aos seus alunos. Concluindo o trabalho, demonstraremos formas de trabalhar os números irracionais usando o *GeoGebra*, calculadora e jogos matemáticos.

Palavras-chave

Números Irracionais; Ensino Fundamental – Anos Finais; Livros Didáticos; Origem dos Números.

Abstract

Serafim, Antonio Fábio; Rosa, Renata Martins (Advisor). **Irrational numbers and the teaching and learning process in "ensino fundamental - the latter years" - a challenge for teachers.** Rio de Janeiro, 2020. 137 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

.

This paper discusses the teaching process of the irrational numbers in the Elementary Education – Final Years with the objective of reflecting on the difficulties students have in understanding the idea of an irrational number, and the ways by which the content is presented to students. Initially, we introduce a brief history of the origin of numbers and the main numbering systems, making a historical contextualization of the irrational numbers. By talking about the teaching of the irrational numbers, we highlight the ways by which some books present this content. We present a survey conducted on Google Forms, with 90 teachers who work in the Elementary School, in order to know the ways they teach the irrational numbers to their students. Concluding, we propose ways to work with the irrational numbers using the GeoGebra, calculator and mathematical games.

Keywords

Irrational Numbers; Elementary Education – Final years; Teaching Books; Origin of numbers.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Não é possível refazer este país, democratizá-lo, humanizá-lo, torná-lo sério, com adolescentes brincando de matar gente, ofendendo a vida, destruindo o sonho, inviabilizando o amor. Se a educação sozinha não transformar a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.

Paulo Freire

1

Introdução

Ainda na minha infância, já demonstrava interesse pela Matemática. Segundo a minha mãe, impressionava a família a facilidade em fazer cálculos mentais de grande complexidade. Ao chegar à antiga 5ª série, em uma escola municipal considerada fraca na época, onde faltavam professores de várias disciplinas, acabei encontrando um excelente professor de Matemática, fiquei fascinado pela sua forma de ensinar. Tive a oportunidade de continuar com ele nos quatro anos do Ensino Fundamental – Anos Finais, na época conhecido como 1º Grau.

Este professor, ao perceber a minha facilidade com a Matemática, começou a me colocar como uma espécie de “monitor da turma”, motivando-me sempre a ajudar os colegas que apresentavam mais dificuldades, explicando os exercícios, e a minha satisfação estava em perceber que o colega tinha entendido e já sabia fazer sozinho os exercícios. Esta experiência levou-me a passar horas dentro de bibliotecas, querendo estudar, aprender mais, sempre fazendo pesquisas dentro da área da Matemática, seja sobre a história desta ciência, seja sobre Álgebra ou Geometria. Comecei assim a amadurecer a ideia de ser professor. Ao terminar o Ensino Fundamental (1977) e entrar no Ensino Médio, na época 2º Grau, já tinha em mente a certeza de querer ser professor desta disciplina.

Lendo um texto que envolvia o porquê de ser professor, lembro-me de uma frase que mostra que fiz a escolha certa – Não existe nada mais recompensador do que você ouvir do aluno que você fez diferença na vida dele, muitas vezes, não só no ensino da Matemática, mas na vida em geral. Enquanto ensina, você ouvir frases tais como:

— Como você faz para que a Matemática fique mais fácil de entender?

— Por que não tive um professor de Matemática assim antes?

Ainda no Ensino Fundamental, percebia que um dos tópicos que os colegas apresentavam maior dificuldade de entender, considerando os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, que, na época, começavam a ser trabalhados na 5ª série, a partir dos números naturais, e iam até a 8ª série, com números reais) era exatamente o conjunto dos números irracionais. Já na época era assim e continua sendo apresentado até hoje desta forma, define-se primeiramente o conjunto dos números naturais, em seguida, o conjunto dos números inteiros, a partir do qual é introduzida a ideia do número negativo. Muitos colegas tinham grandes dificuldades de entender o conceito de números negativos, pois, até aquele momento, cálculos do tipo "2 – 5" eram impossíveis, não tinham resposta. Como poderia de 2 tirar 5? Mas, a partir daquele momento, 2 – 5 = –3. As operações envolvendo os números inteiros também causavam uma certa dificuldade. Todavia, o processo caminhava, o professor explicava, os outros colegas e eu ajudávamos os alunos que tinham maior dificuldade, usando exemplos do tipo: "tinha 2 e perdeu 5, logo ficou devendo 3 (2 – 5 = –3)".

Antes do conjunto dos números irracionais ser apresentado, explicava-se o conjunto dos números racionais como o conjunto de todos os números que podem ser escritos em forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro não nulo, a partir de vários exemplos, até o aluno chegar à conclusão de que todo número inteiro poderia ser escrito em forma de fração, ou seja, que todo número inteiro é um número racional, logo: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Os racionais que não eram inteiros, logo, eram as frações, e os decimais exatos e as dízimas periódicas poderiam todos ser escritos em forma de fração. Depois, simplesmente afirmava-se que aqueles números que não eram racionais, automaticamente, seriam chamados de números irracionais e que a união dos racionais com os irracionais resultaria no conjunto dos números reais. Quando as dúvidas ocorriam, a resposta era sempre: "dado um número, se não for racional, ele é irracional". Na época, eu ainda não tinha conhecimento para questionar situações do tipo: $\sqrt{-4}$ não é racional, mas também não é irracional, nem muito menos real.

Ao concluir a minha licenciatura em Matemática, em 1984, comecei a observar que conjuntos numéricos como $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q},$ I e $\mathbb{R}$ eram assunto de debates entre professores de Matemática sobre como ensinar, como fazer para o aluno compreender, seja no Ensino Fundamental, seja no Ensino Médio ou no Ensino Superior. O assunto tornava-se ainda mais sério quando se tratava da introdução aos números inteiros negativos ou dos números irracionais, por exemplo. De que forma transmitir esses conteúdo? De que forma fazer com que os números irracionais tenham sentido para os alunos? Eram muitos os questionamentos entre as conversas na sala de professores. No Ensino Fundamental, os números irracionais são trabalhados apenas apresentando-os como conjuntos numéricos, explorando as “operações básicas” dentro destes conjuntos. No Ensino Médio, normalmente, no 1º ano, eles são apresentados apenas como uma revisão do conteúdo do Ensino Fundamental. O único conjunto que, no 3º ano do Ensino Médio, em algumas escolas, é trabalhado por meio de uma fundamentação teórica é o conjunto dos números complexos, conjunto este que ao aluno está sendo apresentado pela primeira vez. Vale ressaltar que nem todas as escolas chegam a trabalhar os números complexos no Ensino Médio, embora faça parte do currículo. No Ensino Superior, os conjuntos numéricos são estudados sob o ponto de vista da Análise Matemática, da Teoria dos Números (Álgebra) e de outras disciplinas específicas, sendo, em alguns cursos, revisados em matérias básicas (Fundamentos da Matemática, Introdução à Álgebra, Cálculo 0, etc).

Em 1985, ao assumir as minhas primeiras turmas no Ensino Fundamental, tanto na rede particular de ensino como na rede municipal do Rio de Janeiro (e nesta, por escolha, na mesma escola que tinha feito grande parte do meu Ensino Fundamental) vi-me obrigado a trabalhar o conjunto dos números irracionais na 7ª e 8ª séries das duas escolas (hoje 8º e 9º anos). Cada uma delas usava um livro didático diferente, mas as maneiras de apresentar o conteúdo eram basicamente as mesmas. Em nenhum dos dois materiais, o conjunto dos números irracionais era apresentado de uma forma clara e objetiva, com o rigor de definição que deveria ter, na verdade, era apresentado de forma bem superficial, como citado anteriormente, os números irracionais eram introduzidos como números não racionais a partir de exemplos do tipo: raiz quadrada não exata e o π . Jamais posso esquecer, na primeira vez que explicava o conjunto dos números racionais e, em seguida, o conjunto dos números irracionais, a dúvida de um aluno do 9º ano:

– Professor, se eu pensar em um triângulo retângulo isósceles de cateto igual a 1, quanto medirá a hipotenusa?

Eu respondi:

– Vamos usar o Teorema de Pitágoras (já imaginava aonde ele queria chegar). Se os catetos medem 1 cm cada, a hipotenusa mede $\sqrt{2}$ cm.

Ele disse:

–Então, professor, como pode? O número $\sqrt{2}$ é um número irracional, é um número decimal infinito, como pode ser a medida de um segmento que tem início e tem fim?

Por este e por outros questionamentos, como descobrir a melhor forma para que o aluno realmente entenda o conceito dos números irracionais?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) da Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental consideram muito importante que o ensino seja significativo, argumentando que:

> [...] a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1998, p. 57).

Mais especificamente para o quarto ciclo, em relação ao pensamento numérico, os PCNs definem que os objetivos da Matemática devem visar ao desenvolvimento de:

> * resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> * selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais. (BRASIL, 1998, p. 81).

Considerando o que definem os PCNs, tentando atingir os seus objetivos, sempre procuro refletir sobre a melhor forma de apresentar, de explicar e de definir para uma turma o conjunto dos números irracionais no Ensino Fundamental - Anos Finais. Observamos, na colocação de um dos objetivos apresentados, os termos números racionais e números que não são racionais como uma forma de distinguir os números irracionais, considerando que estamos falando de Ensino Fundamental. Embora, também seja usado este mesmo procedimento em turmas de Ensino Médio e de Ensino Superior. No Ensino Superior, sempre que tenho uma oportunidade, gosto de saber da turma o que eles acham da forma de apresentar determinados conteúdos, entre eles os números irracionais.

Pensando nos objetivos apresentados, surgem questionamentos como: como podemos consolidar o conceito dos números irracionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos?; como relacionar os números não racionais (irracionais) a outras situações?; de que modo podemos conectar os números irracionais a outras áreas, aos temas transversais, por exemplo?

Durante toda a minha prática docente, sempre procurei observar, analisar, pensar em estratégias para fazer com que os meus alunos entendessem o conteúdo trabalhado. Sempre percebi um certo desconforto dos alunos em trabalhar com números irracionais. Na verdade, o que ocorre, na maioria das vezes, é que os alunos possuem muita dificuldade em compreender os conceitos trabalhados e, se alguns deles não ficarem bem compreendidos, por consequência, comprometerão o entendimento dos subsequentes. O aluno, em geral, quer apenas "passar de ano", não vendo a importância em aprender determinado conteúdo, este pensamento acaba aumentando ainda mais esta dificuldade. Muitos alunos chegam a um curso de graduação, muitas vezes, a cursos de bacharelado ou de licenciatura em Matemática, sem ter conhecimento de conteúdos básicos, o que levou algumas Universidades a criar disciplinas como: Cálculo A, Cálculo 0 (zero), Fundamentos da Matemática, Bases Matemáticas etc... Disciplinas que, dependendo da Universidade, apresentam nomes diferentes, mas que servem para recuperar conteúdos de Ensino Fundamental e Médio. Temos que pensar a Matemática como uma forma de pensamento e de linguagem. As pessoas vão adquirindo o conhecimento de forma gradativa, tendo no professor um mediador de conhecimento.

Isso posto, pretendemos nesse trabalho apresentar um pouco da história dos números, a contextualização histórica dos números irracionais, os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, definir os números irracionais, analisar e discutir as formas pelas quais é apresentado o conjunto dos números irracionais em alguns livros didáticos e, após apresentar uma pesquisa de como alguns professores realizam o ensino dos números irracionais, levantar questionamentos sobre a forma de ensinar tal conceito e propor tarefas para serem trabalhadas com os alunos.

2

A história dos números

Este capítulo traz um breve histórico sobre a origem dos números e alguns dos principais sistemas de numeração.

2.1.
A origem dos números

Para estudarmos a origem dos números precisamos ter pelo menos uma noção da história humana e compreender os motivos religiosos desses criadores. Podemos afirmar que, na verdade, desconhecemos qualquer outro motivo que tenha vindo a gerar os números. Os homens primitivos não tinham a necessidade de contar, pois o que precisavam para sobreviver retiravam da própria natureza.

A história da própria Matemática nos seus primórdios é apresentada de forma fragmentada, são poucos os fatos concretos que marcam o início desta pelo homem. O que se tem de conhecimento são apenas alguns registros de épocas passadas que sugerem como se concebeu a Matemática, logo, como estamos percebendo, os registros históricos que envolvem o desenvolvimento desta ciência não são precisos.

O número e a Matemática surgiram e se desenvolveram juntos e tanto as atividades práticas do homem e das sociedades, quanto aquelas relacionadas à Matemática, foram determinantes na evolução do conceito de número.

> Em uma história dos números é difícil de escolher um ponto de partida. Por onde começar? Em que época? Em que local? Em que civilização específica? Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelha que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, em vez de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas escritas na argila, e essas marcas estariam na origem dos números. Usamos aqui um futuro do pretérito – ‘teria’, ‘estariam’ – para indicar que essa versão não é comprovada. As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas. Historiadores e antropólogos discutem, há tempos, como construir um conhecimento sobre essas culturas com base nas evidências disponíveis. (ROQUE, 2012, p. 34).

Observe que, no texto acima, quando a autora fala a respeito da associação de um animal a uma pedra, ela usa um artifício conhecido como correspondência um a um. O homem tinha a possibilidade de comparar de uma maneira bem simples duas coleções de seres ou objetos, da mesma natureza ou de naturezas diferentes, sem ter que recorrer à contagem abstrata. Hoje em dia, poderíamos dizer que ele fazia uma correspondência biunívoca ou até mais, uma bijeção.

Segundo Carl Boyer (1991), não se pode fixar um ano ou um período da história no qual tenha ocorrido o início dos estudos em Matemática. Existem evidências arqueológicas de que o homem já há 50.000 anos era capaz de contar, o que nos leva a uma ideia de que nesta época eles já tinham algum senso numérico, no mínimo, para reconhecer quando se acrescenta ou quando se retira objetos de uma pequena coleção (mais e menos). Inclusive, há indícios de que alguns animais irracionais são dotados deste senso como, por exemplo, os rouxinóis e os corvos, que reconhecem quantidades concretas que vão até três ou quatro unidades. Como curiosidade, existe um exemplo tradicional que aparece em vários locais sobre um corvo que tinha capacidade de reconhecer quantidades, vejamos este exemplo.

A história de um fazendeiro disposto a matar um corvo que fez seu ninho na torre de observação da sua mansão. Muitas vezes, o fazendeiro tentou surpreender o pássaro, mas não conseguia. Sempre que ele se aproximava, o corvo saía do ninho. De uma árvore distante, o corvo ficava esperando atentamente até que o homem saísse da torre e só, então, ele voltava ao ninho. Um dia, o fazendeiro tentou um ardil: dois homens entraram na torre, um ficou dentro e o outro saiu e se afastou. Mas o pássaro não foi enganado: manteve-se afastado até que o outro homem saísse da torre. A experiência voltou a ocorrer nos dias subsequentes com três e quatro homens, ainda sem sucesso. Quando foram utilizados cinco homens, como ocorreu das outras vezes, todos entraram na torre e um permaneceu lá dentro enquanto os outros quatro saíam e se afastavam. Desta vez, o corvo perdeu a conta. Ele não conseguiu distinguir entre quatro e cinco, voltou imediatamente ao ninho.

Temos que observar que senso numérico não pode ser confundido com contagem, que é um atributo exclusivamente humano que necessita de um processo mental. Sobre isso, Ifrah (1997), complementa, “distinguimos, sem erro e numa rápida vista um, dois, três e mesmo quatro elementos. Mas aí para nosso poder de identificação dos números”.

No decorrer da história, existem relatos de vários sistemas de numeração elaborados pelas grandes civilizações. Os mais conhecidos são: sumérios, egípcio, babilônico, romano, chinês, o nosso atual sistema denominado decimal ou indo-arábico e o dos povos Maias. Vamos citar alguns sistemas de numeração importantes dentro da história dos números de uma forma resumida, já que o assunto é muito amplo e não é o principal objetivo deste trabalho.

2.2.
O sistema de numeração dos Sumérios

Os sumérios, habitantes da Mesopotânia, com o passar dos tempos, sementes, pedras, gravetos e os próprios dedos, não conseguiam mais contar. As quantidades foram aumentando, seja de plantas, seja de animais, de terras etc. As trocas econômicas a cada dia eram mais numerosas e sentia-se cada vez mais a necessidade de conservar de maneira duradoura o registo dos recenseamentos, dos inventários, das vendas, das compras e, em geral, das distribuições que faziam diariamente. Devido à condição que tiveram para desenvolver a linguagem escrita, começaram a pesquisar outras formas de contar, criando símbolos para indicar quantidades. A solução para isto foi criar uma base para os sistemas de numeração. Sabe-se que os sumérios, que costumavam fazer os seus registros e contas em tabletes de argila, criaram tabuadas e um sistema numérico com base sessenta. Sabe-se também que os sumérios foram pioneiros na representação posicional dos números. Os sumérios contando na base sessenta e considerando a dezena como unidade auxiliar, decidiram representar da seguinte forma:

- uma unidade simples por um “pequeno cone”;
- uma dezena por uma bilha (pequena bola);
- sessenta unidades por um cone;
- o número 600 por um “grande cone perfurado”, ou seja, 60 x 10;
- o número 3.600 por uma esfera, ou seja, $60^2 = 60 \times 60$;
- o número 36.000 por uma esfera perfurada, ou seja, $36.000 = 60^2 \times 10 = 60 \times 60 \times 10$.

Observe a figura 1:

Figura 1- Sistema de numeração dos Simérios

1		pequeno cone
10		bilha
60		grande cone
600		grande cone perfurado
3600		esfera
36000		esfera perfurada

Fonte: http://eb1-lobelhe-mato.blogspot.com/2009_02_01_archive.html
Acesso em 31/07/20.

Observando com cuidado, percebemos que a ideia era muito abstrata para aquela época, a perfuração de um objeto indicava simplesmente a multiplicação por 10 do valor do objeto, o "grande cone" vale 60, perfurado vale 600, a "esfera" vale 3.600, perfurada vale 36.000.

Quando queriam representar números intermediários, repetiam cada um deles quantas vezes precisassem. Por exemplo: 202 = 180 (três grandes cones) + 20 (duas bilhas) + 2 (dois pequenos cones).

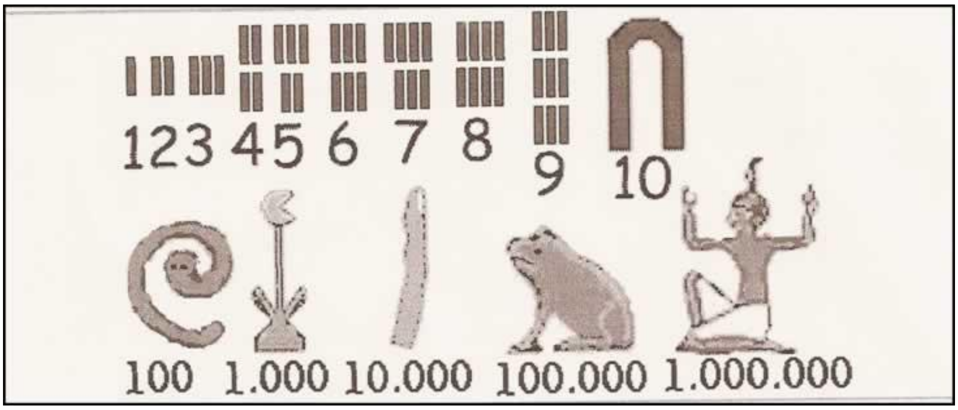
2.3.
O sistema de numeração dos egípcios

Os Egípcios, mais ou menos no mesmo período dos sumérios, no nordeste da África, criavam um outro sistema de numeração. Os egípcios criaram os seus próprios símbolos numéricos, todos eles tirados da fauna e da flora, o que comprova que a escrita foi desenvolvida no local, às margens do Rio Nilo.

Os egípcios, diferentemente dos sumérios, reproduziram seus algarismos e seus hieróglifos gravando ou esculpindo em monumentos de pedra mediante o uso do martelo e do cinzel. O cinzel é um instrumento de corte manual que possui, numa extremidade, uma lâmina de metal aguçada e, na outra, um cabo de madeira reforçado nos extremos, com anéis de aço, de modo a proteger a zona de impacto desferido por uma terceira ferramenta, geralmente o martelo, ou ainda traçando em pedaços de rocha, cerâmica ou em folhas de papiro.

O sistema egípcio trabalhava numa base decimal, o que o diferenciava fundamentalmente do sistema sumério, que era uma base sexagesimal. O sistema primitivo egípcio usava a base dez, mas não tinha símbolo para o zero. Os números de 1 a 9 eram todos escritos por traços verticais. Para as potências sucessivas de 10 até 1.000.000, algumas vezes até mais do que um milhão, eram usados símbolos individuais - para o número 10, usava-se um osso de calcanhar invertido, alguns definiam como um signo em forma de asa, outros diziam que parecia uma ferradura; para 100 unidades, o desenho para uns parece um laço, para outros, uma espiral; para 1.000 unidades é usada uma flor de lótus, para a dezena de milhar, um dedo dobrado; para a centena de milhar, um girino e para o milhão de unidades, um homem ajoelhado erguendo o braço para o céu, talvez representando um deus (Figura 2).

Figura 2- O sistema de numeração egípcio



Fonte: https://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/matematica/o-sistema-numeracao-egipcio.htm. Acesso em 30/07/20.

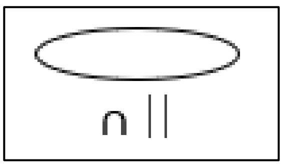
Os egípcios não se preocupavam com a ordem dos símbolos, o que para a atualidade é imprescindível. Para representar um determinado número, escrevia o algarismo da classe decimal sempre que fosse necessário e a partir da potência de dez mais alta até a mais baixa, até as unidades simples. Exemplo: para escrever o número 123, usavam uma espiral, duas ferraduras e três bastões, ou seja, uma vez o algarismo 100, duas vezes o algarismo 10 e três vezes o 1.

Este sistema de numeração servia para efetuar todos os cálculos que envolviam números inteiros. A técnica era efetuar todas as operações matemáticas através de uma adição. Exemplo: para somar 123 e 245, o número 123 é representado por meio de uma espiral, duas ferraduras e três bastões, já o número 245, duas espirais, quatro ferraduras e cinco bastões. Juntando os dois “lotes”, somam-se: três espirais, seis ferraduras e oito bastões. Logo, a soma é 368. Eles tinham a ideia de que dez bastões equivaleriam a uma ferradura, dez ferraduras, uma espiral e assim sucessivamente.

Segundo Boyer (1991), o processo de mensuração das terras consistia em estirar cordas e verificar o número de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. Havia uma unidade de medida assinada na própria corda. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Por este motivo, serem conhecidas como estiradores de cordas. Mas ocorria, muitas vezes, que a medição não conseguia ser finalizada por um número inteiro de vezes em que as cordas eram estiradas, com isso, eles passaram a sentir a necessidade de expressar a parte de um todo e começaram a perceber que só os números inteiros não eram o suficiente. Para lidar com esta dificuldade imposta, deu-se a criação dos números fracionários.

Os egípcios consideravam praticamente todas as frações como frações unitárias, ou seja, aquelas frações cujo numerador é igual a 1, simbolicamente representado por um sinal de forma oval e alongada, conhecido por muitos como “hieróglifo da boca”, escrevendo em baixo o número que seria o denominador (Figura 3).

Figura 3- Fração escrita no sistema de numeração egípcia



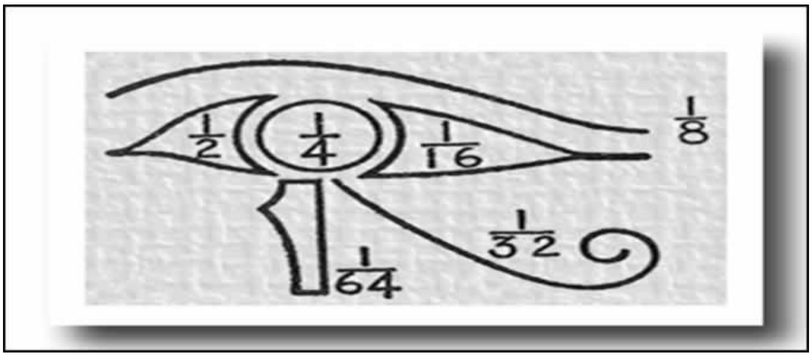
Fonte: elaborada pelo autor.

A figura 3 corresponde à fração $\frac{1}{12}$.

Os antigos egípcios usavam um sistema de frações baseado em caracteres distintos, tipo 1/2 possuía um símbolo, 3/4, um outro, 1/4, um outro próprio, mas tinham alguma regra geral. Em particular, as frações do tipo $1/2^n$ tinham símbolos especiais, surgindo da associação deles, do 1/2 até o 1/64, o olho de Hórus (Figura 4). Essa representação tem a ver com a série infinita 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32... = 1. Não se sabe se eles achavam que se findava no 1/64, porque não conseguiam diferenciar pedaços de coisas menores do que isso, mas a ideia era que, juntando todos, chegariam à unidade. Cada fração, inclusive, representa um sentido:

- 1/2 representa o olfato;
- 1/4 representa a visão;
- 1/8 representa o pensamento, que seria a sobrancelha;
- 1/16 representa a audição;
- 1/32 representa o paladar, uma linguinha bem comprida;
- 1/64 representa o tato, duas perninhas em contato com o mundo embaixo.

Figura 4 - Olho de Hórus



Fonte: BAKOS, 2005, p. 60.

Segundo Ifrah (1997), os egípcios não trabalhavam com frações além da unidade, com exceção de 2/3 e 3/4. Por exemplo, para escrever 2/5, é preciso usar a forma 1/5 + 1/5. Este autor também afirma que os egípcios não inseriam sinais entre as frações, pois os símbolos das operações ainda não tinham sido inventados.

2.4. O sistema de numeração dos Maias

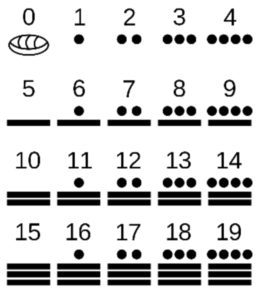
O sistema de numeração dos Maias foi adotado pela civilização pré-colombiana e consiste em um sistema de numeração de base vinte. De acordo com relatos históricos, o sistema é vigesimal, porque possui como base a soma dos números de dedos das mãos e dos pés.

Assim como no sistema egípcio, do outro lado do Oceano Atlântico, os Maias também utilizaram desenhos para fazer contas. Porém, neste caso, os Maias se resumiam a usar apenas três símbolos para representar todos os números: uma concha, um ponto e uma barra. Pensando no sistema de numeração egípcio e no sistema de numeração maia, você pode achar até parecidos, mas há dois aspectos que os diferem totalmente: o uso de diferentes bases e o uso, por parte dos Maias, de um símbolo para o zero.

Estes, dentro da Matemática, chegaram a resultados importantíssimos, além de inventarem o zero, descobriram o princípio de posição. Pelo menos é o que comprovam os manuscritos maias que hoje se tem conhecimento, sobretudo, o *Códice de Dresden*. Este é o mais antigo de apenas quatro manuscritos maias que existem hoje em todo o mundo. Ele é mantido nas coleções da Biblioteca Estadual da Saxônia e da Universidade Técnica de Desdren. Estes manuscritos raros revelam a existência de um sistema de base vinte munido de um zero, no qual o valor dos algarismos é determinado pela posição ocupada na escrita dos números, ou seja, um sistema posicional como temos nos dias de hoje.

O sistema consiste em: de um a quatro pontos para as quatro primeiras unidades; uma barra (pode ser horizontal ou vertical) para cinco unidades; um, dois, três ou quatro pontos ao lado ou acima da barra para os números de seis a nove; dois traços para o dez e assim sucessivamente. Você pode ter uma visão melhor na figura 5.

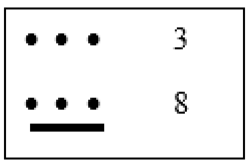
Figura 5 - Sistema de numeração dos Maias



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Numera%C3%A7%C3%A3o_maia
Acesso em 30/07/20.

No sistema maia, quando o número era superior a vinte, era escrito numa coluna vertical com uma fileira para cada ordem de unidades, o algarismo das unidades simples era escrito na parte inferior, e o algarismo das vintenas (base 20), na parte superior. Veja o exemplo abaixo (Figura 6):

Figura 6 - Exemplo do sistema de numeração dos Maias



Fonte: elaborada pelo autor.

A figura 6 corresponde ao número 68, pois temos: 3 x 20 + 8 = 68.

As descobertas dos Maias em relação à elaboração de um sistema de numeração de posição e a invenção do zero não chegaram à maioria dos povos, principalmente, dos povos ocidentais, que tiveram de esperar a Idade Média para que este princípio e este conceito fossem transmitidos pelos árabes, que, por sua vez, tinham herdado dos sábios da Índia.

Em relação ao sistema maia, nunca ficou claro o fato de o sistema não ter sido estritamente vigesimal, como foi a sua numeração oral. Em vez de proceder a potências sucessivas de 20 (1, 20, 20^2 = 20 x 20 = 400, 20^3 = 20 x 20 x 20 = 8000, etc...), ele atribuiu os valores: 1, 20, 18 x 20 = 360 etc... Qual o motivo da terceira posição desta numeração ter vindo a ser ocupada por 360 e não por 400? Em virtude desta irregularidade, o zero foi privado de qualquer possibilidade operatória. Ainda segundo Ifrah (1997), se a numeração maia tivesse sido estritamente vigesimal, o zero disporia da propriedade operatória, como dispõe hoje no nosso sistema decimal. Esta irregularidade foi registrada por Ifrah (1997) na obra *História Universal dos Números*.

2.5. O sistema de numeração romano

O sistema de numeração usado pelos romanos era bastante diferente do que hoje chamamos de sistema romano e que ainda é usado em relógios, capítulos de livros, nomes de reis e papas etc. O moderno sistema romano é resultado de uma longa evolução do sistema usado pelos antigos, tendo tomado a forma atual a partir do Renascimento.

O sistema de numeração dos antigos romanos apresenta várias diferenças do atual sistema que aprendemos, vários algarismos eram diferentes, os romanos raramente usavam o princípio subtrativo e, acima de tudo, não tinham regras fixas para escrever os numerais.

Usualmente trabalha-se com a seguinte denominação: o sistema romano-romano seria o sistema de numeração usado pelos antigos romanos; o sistema romano-medieval era aquele usado durante a Idade Média e o sistema romano-moderno é o sistema que nós conhecemos atualmente.

A forma mais fácil que os historiadores da Matemática aplicam para demostrar que o sistema de numeração romano-romano é muito diferente do que conhecemos é usar uma foto da Columna Rostrata de Duilius,[1] monumento que foi construir a mando do Cônsul Duilius em 260 a.C., o interesse matemático está no fato de ser o documento romano mais antigo que exibe a escrita de números muito grandes (Figuras 7 e 8).

[1] O monumento foi construído em 260 A.C., pelo Cônsul Duilius, em comemoração de sua vitória naval sobre os cartagineses. Originalmente erigido no Fórum de Roma, hoje é uma das atrações turísticas do Palazzo dei Conservatori, na Colina do Capitolium. Seu interesse matemático reside no fato de ser o mais antigo documento romano que exibe a representação escrita de números muito grandes.

Figura 7 - Columna rostrata, reconstrução

Fonte: https://www.livius.org/pictures/italy/rome/rome-forum-romanum/rome-forum-rostra/columna-rostrata-reconstruction/
Acesso em 31/07/20.

Figura 8 - Columna rostrata, Inscrição

Fonte: https://www.livius.org/pictures/italy/rome/rome-forum-romanum/rome-forum-rostra/rome-forum-romanum-columna-rostrata-inscr-cm/
Acesso em 31/07/2020.

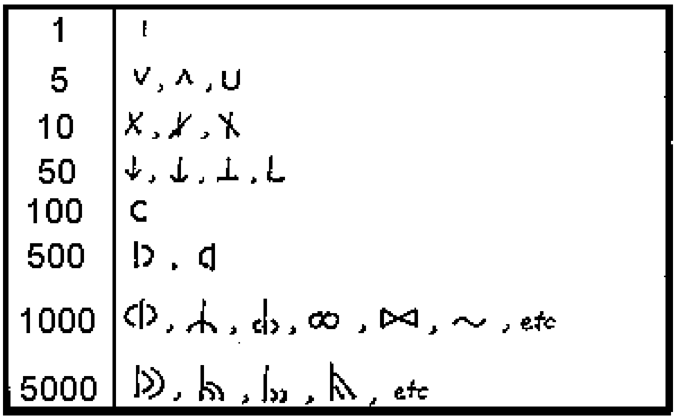
O trecho acima mostra onde os romanos inscreveram a justaposição de 23 cópias do algarismo ((I)), cuja representação equivalia a 100.000.

Ainda contamos com muitos documentos posteriores que comprovam a diferença entre o sistema romano-romano e o romano-moderno, como inscrições de números em edificações, lápides de sepulturas etc. Isto pode ser constatado, sem muitas dificuldades, examinando o *Corpus Inscriptionum Latinarum*, que é uma coleção de mais de 30.000 inscrições registradas por especialistas em história da Roma Antiga.

Através deste estudo, conseguimos observar várias diferenças entre o sistema romano-romano e o sistema conhecido atualmente como sistema romano, tanto no que tange aos algarismos como nas regras usadas para a escritura dos numerais. Segundo Ifrah (1997), no sistema romano-romano, a unidade era representada por um traço vertical, o número cinco pelo desenho de um ângulo agudo, a dezena por uma cruz, o número 50 por um ângulo agudo com um traço vertical, o número 500 por um semicírculo diferenciado e o milhar por um círculo cortado por uma cruz, embora, através de pesquisas, você encontre pequenas variações nesses símbolos.

Uma rápida amostra das diferenças existentes é exibida pelo *Corpus Inscriptionum Latinarum* na tabela abaixo, que foi elaborada pelo historiador David Smith:

Figura 9 - Sistema de numeração romano



Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/
Acesso em 28/07/20.

Se a variedade da escritura dos algarismos entre os romanos era grande, na Idade Média, a situação ficou ainda mais caótica e seria impróprio querermos apontar um conjunto de algarismos que representasse o sistema romano-medieval. Além dos símbolos romanos, usavam-se letras minúsculas e vários símbolos somente encontrados neste período.

Após o surgimento da imprensa, uma rápida padronização nos levou ao atual sistema de numeração romano, o sistema que conhecemos atualmente que estudamos desde o curso primário, chamado sistema romano moderno.

Entre os antigos romanos, como já foi comentado, o uso do Princípio Subtrativo era pouco comum e sua implementação bastante irregular. Tudo isso é compatível com o fato de que seu trabalho com números, da escritura ao cálculo, era baseado no uso do ábaco, a operação do qual não envolve o Princípio. Veja uma placa de mármore colocada numa das torres que o Papa Alexandre VI, 1500 d.C., mandou construir, e nela foi inscrito como mostra a figura abaixo (Figura 10):

Figura 10 - Placa de mármore com irregularidade no Princípio Subtrativo

ALEXANDER.VI.PONT.MAX

INSTAVRAVIT

AN.SAL.MCCCCLXXXXV

Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/
Acesso em 28/07/2020.

Como era comum, a inscrição contém várias abreviações, mas é fácil perceber como está escrito o ano de 1495, não se usava nenhum tipo de subtração e as letras se repetiam quatro vezes, o que hoje seria considerado um absurdo, totalmente errado.

Segundo Georges Ifrah (1997), em *História Universal dos Algarismos*, a numeração romana foi regida, sobretudo, pelo princípio da adição. Seus algarismos I=, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500 e M=1000 eram independentes um dos outros e sua justaposição implicava na soma dos valores correspondentes. No entanto, os romanos, como sabemos hoje, introduziram o princípio subtrativo, no qual qualquer sinal numérico colocado à esquerda de um de valor superior é dele diminuído. Sendo assim, o 4 em vez de ser escrito IIII, é escrito IV, o 90, ao invés de LXXXX, é escrito XC. Um povo que atingiu em poucos séculos um elevado nível técnico, ao contrário, manteve durante toda a sua existência um sistema numérico complicado, não operatório.

Na verdade, o sistema romano continua sendo utilizado até hoje em representações de séculos, capítulos de livros, nomes de papas e reis, em alguns relógios e em outros tipos de documentos oficiais. São usadas as letras I, V, X, L, C, D, M, conforme os valores já descritos acima. Estas letras obedeciam às três regras abaixo:

1º) todo símbolo numérico que possui menor valor do que o que está à sua esquerda deve ser somado ao maior.

Ex.: CLX = 160 (100+50+10);

2º) todo símbolo numérico que possui menor valor do que o que está à sua direita deve ser subtraído do maior.

Ex.: IC = 99 (100 – 1);

3º) todo símbolo numérico com um traço horizontal sobre ele representa milhar, e o símbolo numérico que apresenta dois traços sobre ele representa milhão.

Ex.: $\overline{\mathrm{LII}} = 52.000$

$\overline{\overline{\mathrm{LII}}} = 52.000.000$

Observando que as letras I, X, C e M podem ser repetidas em até três vezes.

2.6. O sistema de numeração Indo-Arábico

O sistema de numeração indo-arábico recebeu este nome porque foi criado pelos hindus e divulgado pelos árabes na Europa Ocidental. Os primeiros símbolos numéricos foram encontrados em colunas de pedra erguidas na Índia por volta de 250 a.C. pelo rei Açoka (304-232 a.C.), também conhecido como Açocavardana, um imperador indiano da dinastia máuria, que reinou entre 273 e 232 a.C.. Segundo Howard Whitley Eves (2011), um matemático estadunidense, encontraram por volta do ano 100 a.C. outros exemplos, desta vez, em registros talhados nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona, uma metrópole em Maharashtra, na Índia. Também já por volta do ano 200 da era cristã, alguns registros gravados nas cavernas de Nasik. Em nenhuma destas amostras, continha o zero e não utilizaram o sistema posicional. Não se tem ideia de quando novos símbolos entraram na Europa, esta e outras são questões que ainda causam discussões entre historiadores. Segundo Eves (2011), o zero e o valor posicional dos algarismos devem ter sido introduzidos na Índia pouco antes do ano de 800 d.C..

No sistema de numeração hindo-arábico, fazia-se de uma forma bem simples, registrava-se em ordem o número de fichas de vários segmentos do ábaco, neste caso, o símbolo zero representava o segmento sem nenhuma ficha. Acredita-se que a palavra zero venha da forma latinizada "zephium", derivada de "sifr", uma tradução para o árabe de "sunja", que, por sua vez, vem do hindu, significando "vazio" ou "vácuo". Segundo Eves (2011, p. 245), "Chin reencontrou as equações indeterminadas onde Sun Tzu havia parado. Foi o primeiro chinês a atribuir um símbolo específico para o zero, uma circunferência".

Segundo Ifrah (1997),[2] não havia mais nenhuma possibilidade de erro. Tudo que era necessário para formar a numeração moderna encontrava-se à disposição dos sábios da Índia:

1º) para as unidades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, eles tinham algarismos distintos e independentes de qualquer intuição visual direta;

2º) já tinham conhecimento do princípio de posição;

3º) já tinham descoberto o zero.

Reunindo as três ideias anteriores, os hindus conseguiram a arte do cálculo-domínio, após inventarem o cálculo e a numeração moderna. O que ainda faltava no final do séc.VI era aperfeiçoar o conceito abstrato do zero e torná-lo um número como os outros números "normais". Assim como para os povos babilônios e para os maias, o zero ainda tinha a única função de preencher os "vazios" pelas unidades em falta nas representações numéricas. Esta lacuna foi preenchida rapidamente em menos de 50 anos, o conceito "vazio" foi enriquecido do sentido que conhecemos hoje "quantidade nula" ou "número zero". Na verdade, o hindu tinha feito a união de duas noções consideradas bem complexas para a época: a noção de ausência e a noção de nulidade. Descoberta esta cuja influência não se limitou à Aritmética, mas abriu caminho para a ideia de número como um todo, desenvolvimento da Álgebra e, consequentemente, de todas as áreas da Matemática e das Ciências.

Atualmente, conhecendo o sistema romano moderno e o sistema hindo-arábico, é fácil perceber a vantagem deste sobre aquele, a ideia é que teria sido prontamente aceito pelo europeu, mas, segundo Ifrah (1997), foram necessários alguns séculos para que as novas ideias fossem aceitas definitivamente, o que só finalmente ocorreu por volta do fim do século XVI.

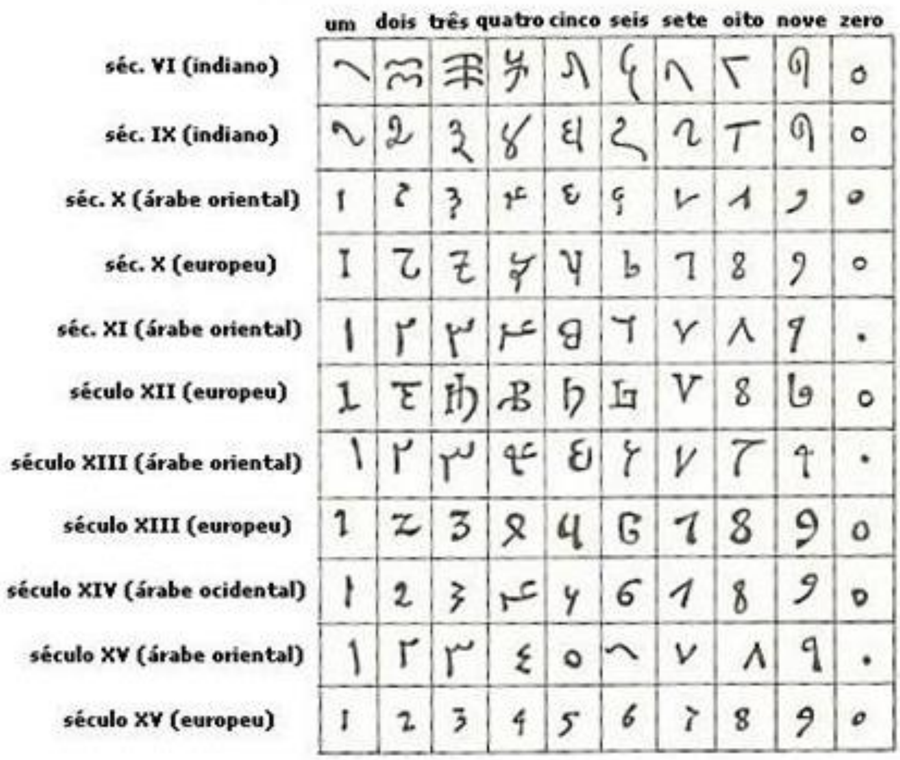
---

[2] Georges Ifrah foi professor de Matemática, autor francês e historiador autodidata da Matemática, nasceu em Marrocos no ano de 1947.

Uma grande vantagem percebida na época é que as técnicas de cálculo do sistema romano eram complexas, só alguns especialistas conseguiam dominar. Já com o sistema indo-arábicos se popularizando, várias pessoas passaram a ter o domínio das técnicas de cálculo. Estes algarismos, com as regras de escrita, constituem o sistema de numeração decimal, tendo suas principais características os princípios da adição e da multiplicação.

Os símbolos dos numerais indo-arábicos sofreram inúmeras alterações, veja a figura abaixo:

Figura 11 - Evolução dos números Indo-Arábicos



Fonte: IMENES, 2002.

A ideia de fazer este pequeno histórico sobre a origem do algarismo e de sistemas de numeração tem por objetivo chamar a atenção para a falta deste tópico em sala de aula. Se fosse incluída um pouco da própria história da Matemática nas aulas, provavelmente estas ficariam muito mais agradáveis e os alunos demonstrassem um interesse maior por elas.

A história da matemática aumenta a motivação do aluno em sala de aula, faz com que ele se interesse mais pela matéria.

Dependendo do conteúdo matemático que está sendo trabalhado, a história da matemática pode ajudar o aluno a compreender melhor, atuando como uma ferramenta didática.

3

Os números irracionais – contextualização histórica

Neste capítulo, iniciamos definindo números comensuráveis e números incomensuráveis, demonstrando a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado e, posteriormente, fazendo uma contextualização histórica dos números irracionais.

3.1.
Números comensuráveis e números incomensuráveis

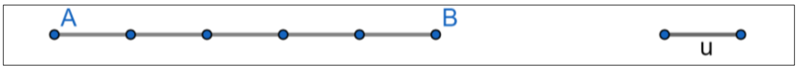
Os conceitos de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis, aparentemente, são muito simples, como outros conceitos dentro da Matemática. No entanto, quando analisados de uma forma mais profunda, verificamos que podem apresentar aspectos que surpreendem. Quando se pensa apenas na definição de um termo da expressão, tal como na pergunta: qual o significado da palavra comensurável? A resposta é “o que se pode medir”, mas nem sempre é tão simples assim.

Quando vamos medir um segmento de reta $\overline{\mathrm{AB}}$, temos que adotar uma unidade de medida, neste caso, vamos considerar uma unidade de medida *u*. Vamos considerar duas situações: a primeira em que o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ pode ser medido usando a unidade *u*, *n* vezes, este *n* equivale a uma quantidade inteira, e em uma situação em que o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ não possa ser medido utilizando-se de uma quantidade *n* inteira de vezes. Vejamos:

a) seja o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ abaixo e a unidade de medida *u*. Se a unidade *u* couber *n* vezes no segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, então med $(\overline{\mathrm{AB}}) = n;$ (med $\rightarrow$ medida);

Exemplo:

Figura 12 - Segmentos comensuráveis, 1º exemplo

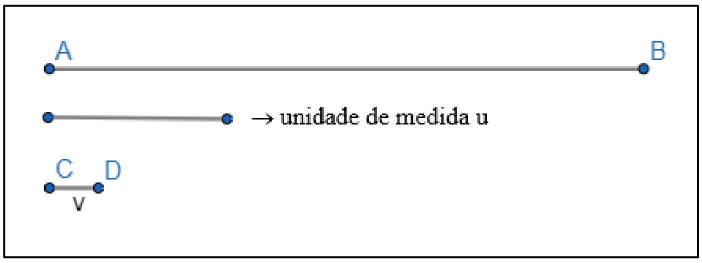


Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.[3]

No exemplo acima, a unidade u "cabe" cinco vezes no segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, logo, podemos escrever med ($\overline{\mathrm{AB}}$) = 5 unidades u. A medida u será sempre um número inteiro positivo, visto que está indicando uma unidade de medida. Logo, podemos afirmar que o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ é comensurável.

b) Seja o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ abaixo e a unidade de medida u. Suponhamos que a unidade u "não cabe" um número inteiro n de vezes no segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. Neste caso, vamos considerar um segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ com medida v de modo que este caiba m vezes no segmento unitário de medida u e n vezes em $\overline{\mathrm{AB}}$. O segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ de medida v terá sua medida igual à fração $\frac{1}{m}$ e, consequentemente, o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ será igual à n vezes $\frac{1}{m}$, ou seja, igual a $\frac{m}{n}$ em relação à unidade u. Exemplo:

Figura 13 - Segmentos comensuráveis, 2º exemplo



Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.

O segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ de unidade de medida v "cabe" três vezes dentro do segmento de medida unitária u e dez vezes dentro do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. Logo, o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ é igual a $\frac{10}{3}$ em relação à unidade de medida u.

Observando a situação acima descrita, podemos afirmar que os segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$ e u são comensuráveis e a medida de $\overline{\mathrm{AB}}$ é $\frac{m}{n}$. Algumas vezes não conseguimos encontrar esse segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ de medida v, quando isso ocorrer vamos dizer que os segmentos são incomensuráveis, ou seja, eles não são comensuráveis. Este fato

[3] *GeoGebra* vem da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra. O *GeoGebra* é um aplicativo de matemática dinâmica que permite enxergar objetos matemáticos tanto geométrica quanto algebricamente. Sua distribuição é livre e disponível em diversas plataformas.

contraria a nossa intuição geométrica e, por esse motivo, a descoberta de grandezas incomensuráveis ocasionou um momento histórico de crise do desenvolvimento da Matemática.

As grandezas incomensuráveis foram descobertas pelos próprios Pitagóricos, isto se faz por um argumento geométrico que vamos demonstrar geometricamente abaixo, apresentando o teorema que afirma que em um quadrado qualquer o lado e a diagonal são segmentos incomensuráveis.

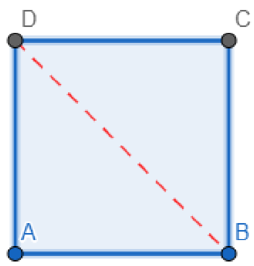
3.1.1. Teorema envolvendo o lado e a diagonal de um quadrado

Em um quadrado qualquer, o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Demonstração:

Consideremos um quadrado ABCD, considerando o lado da medida l e a diagonal de medida d.

Figura 14 - Quadrado de lado *l* e diagonal *d*



Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.

Observe na figura 14 que $\overline{\text{AC}} = \overline{\text{BD}} = d$ e $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{BC}} = \overline{CD} = \overline{\text{DA}} = l$.

Vamos supor, por absurdo, que d e l são comensuráveis. Portanto, tem que existir um segmento que seja submúltiplo comum de d e l.

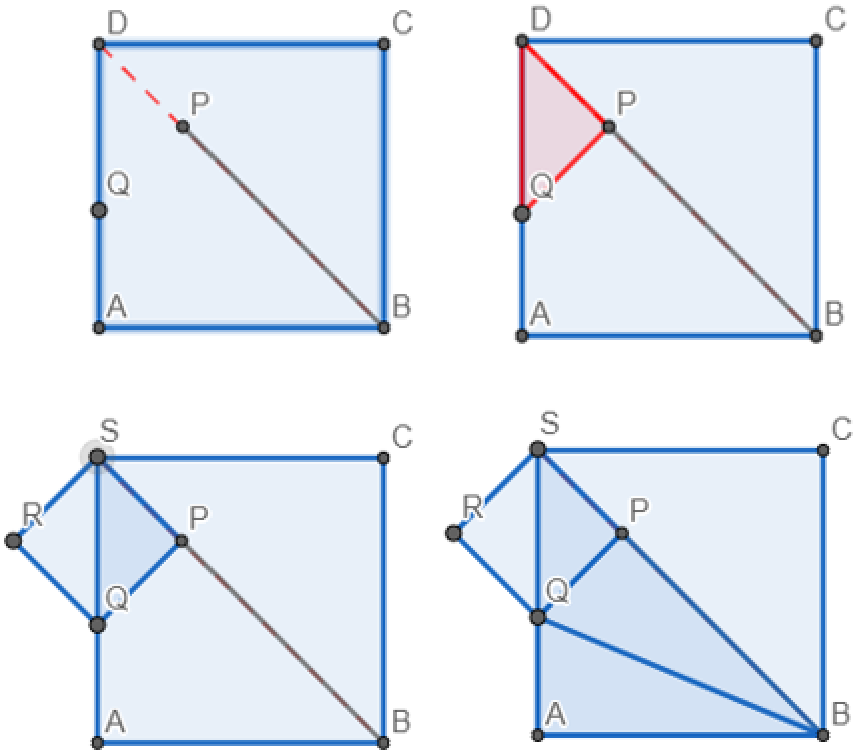
Vamos fazer a seguinte construção, seguindo os seguintes passos (Figura 15):

1º) Marcar na diagonal um ponto P tal que os segmentos $\overline{\text{BP}}$ e $\overline{\text{BA}}$ tenham a mesma medida;

2º) Traçamos o segmento $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{BD}$, assinalando o ponto Q sobre o segmento $\overline{AD}$;

3º) O triângulo PQD é um triângulo isósceles com $\overline{PD} = \overline{PQ}$. Construímos o quadrado PQRS, sendo que o ponto S coincide com o ponto D, e seja l_2 e d_2 o lado e a diagonal deste novo quadrado construído.

Figura 15 - Quadrado de lado l e diagonal d e Quadrado de lado l_2 e diagonal d_2



Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.

Podemos observar que os triângulos AQB e PQB são congruentes, visto que são triângulos retângulos com a mesma hipotenusa e $\overline{AB} = \overline{PB}$. Logo, podemos concluir que $\overline{AQ} = \overline{PQ} = l_2$.

Observemos que:

$d = \overline{BD} = \overline{BP} + \overline{PD} = l + l_2$ e $l = \overline{AD} = \overline{AQ} + \overline{QD} = \overline{PQ} + d_2$ ($\overline{AQ} = \overline{PQ}$).

Resumindo, temos:

$d = l + l_2$ e $l = \overline{PQ} + d_2$

Como supomos que d e l são comensuráveis, temos um segmento que é múltiplo comum de d e l, concluímos que ele também é submúltiplo de l_2, segue-se que também é submúltiplo de $\overline{PQ}$. Concluímos assim que se houver um segmento que seja submúltiplo comum do lado e da diagonal, então, o mesmo segmento será submúltiplo de d_2 e de $\overline{PQ}$, segmentos estes que são o lado e a diagonal do 2º quadrado PQRS. Evidentemente que a mesma construção pode ser repetida com este 2º quadrado para chegarmos a um quadrado menor ainda e assim sucessivamente. Esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, a dimensão de cada um deles, como podemos observar, diminui em mais da metade quando passamos de um quadrado para o outro. Com isso, concluímos que o segmento deverá ser múltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado cada vez menor, enquanto desejarmos. O que nos leva a um absurdo! Sendo assim, temos que negar a suposição inicial de que o lado e a diagonal do quadrado eram comensuráveis. Concluímos assim a demonstração com o lado e a diagonal do quadrado sendo grandezas incomensuráveis.

Observe que, para esta conclusão, poderíamos ter usado o Teorema – Método da Exaustão, que nos traz: se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor da sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor do que a sua metade e, assim sucessivamente, chegar-se-á pôr fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

3.2.
O surgimento dos números irracionais

A origem histórica da necessidade de criação dos números irracionais está intimamente ligada aos fatos que ocorreram de naturezas geométrica e aritmética.

Por volta dos últimos séculos do segundo milênio a.C., segundo Carl Boyer (1991), muitas mudanças ocorreram, tanto políticas como econômicas, nesta época. Para a Matemática, o principal avanço ocorrido neste período, foi o início da Matemática demonstrativa, a partir da qual se começou a questionar como e por que algumas propriedades ocorrem. Um dos principais pioneiros desta "Nova Matemática", Tales de Mileto[4], foi o primeiro matemático a publicar resultados importantes em geometria, como por exemplo:

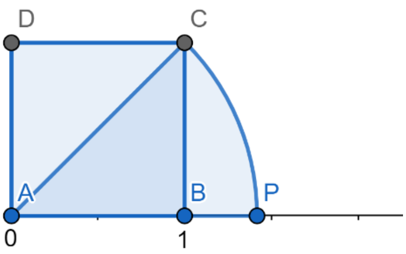
[4] Tales de Mileto, foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, considerado, por alguns, o primeiro filósofo ocidental. Nasceu em 624 a.C. e faleceu em 558 a.C.

1º) Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais;

2º) Em duas retas concorrentes, os ângulos opostos vértices são iguais.

Pitágoras foi outro grande matemático que contribuiu significativamente para o engrandecimento da Matemática. Segundo Boyer (1991, p.37), foi o primeiro a exibir o teorema relativo aos lados do triângulo retângulo: “o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”, teorema este que foi batizado com o seu nome. Ainda Pitágoras[5] veio a fundar a escola pitagórica junto com seus alunos estudantes de Matemática e de Filosofia. Segundo relatos, foi nesta época que Pitágoras e seus discípulos provaram que não há nenhum número racional, na reta numérica, que corresponda ao ponto que represente o comprimento da diagonal de um quadrado de lado igual à unidade.

Figura 16 - O surgimento dos números irracionais - $\sqrt{2}$



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

O segmento $\overline{AP}$ indica o que nós conhecemos hoje como $\sqrt{2}$.

A relação entre o lado e a diagonal de um quadrado foi de fundamental importância para o entendimento dos números irracionais. O problema da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado, comentado no item anterior, seguia em sentido contrário à concepção filosófica grega, em que, para os gregos, os números só tinham duas possibilidades, ou eram inteiros ou eram compostos por uma relação simples entre dois números inteiros. Este fato acarretou o que, no futuro, se torna conhecida como “A Crise dos Incomensuráveis”. Os pitagóricos contornaram esta situação com a seguinte solução: a relação entre a diagonal e o lado do quadrado não deveria ser expressa por um número, mas por meio de elementos geométricos.

[5] Pitágoras, foi um filósofo e matemático grego creditado como fundador do movimento chamado Pitagorismo. Nasceu no ano de 570 a.C. e faleceu no ano de 495 a.C.

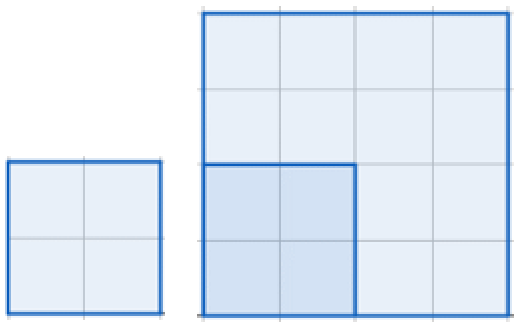
Segundo Eves (2011),[6] um novo conjunto precisou ser criado para poder associar pontos como os da diagonal do quadrado de lado unitário e pelo fato deles não serem racionais, foram batizados como irracionais (não racionais). Esta descoberta foi um marco na história da Matemática.

> Os pitagóricos chamaram esses comprimentos de alogon, que queria dizer não racionais, que hoje traduzimos como 'irracional'. Todavia a palavra alogon tinha duplo sentido: significava também 'não deve ser falado'. (MLODINOW, 2004, p.37).

Inicialmente, acreditou-se que $\sqrt{2}$ era o único número irracional e, por algum tempo, foi o único número irracional conhecido. Segundo Platão, Teodoro de Cirene (425 a.C.) posteriormente mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são números irracionais. Por volta do ano de 370 a.C., Eudoxo[7] fez um tratamento magistral dos incomensuráveis, como aparece no quinto livro de Euclides.

Um problema tradicional da Matemática é retratado num trecho dos *Diálogos de Platão*, em que Sócrates desenha um quadrado de dois pés de lado e pede ao escravo Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro de área. No relato de Platão, o escravo argumenta que este deveria ter de lado quatro pés (o dobro de dois pés), Sócrates desenha a resposta e, através do desenho, mostra que a área, na verdade, quadriplica-se.

Figura 17 - Sócrates - Dobro da área de um quadrado, 1º parte



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Quando o escravo percebeu que a área tinha aumentado mais do que ele mesmo pensava, ou seja, mais do que foi solicitado por Sócrates, logo quis corrigir

[6] Howard Whitley Eves foi um matemático estadunidense, especializado em geometria e história da Matemática. Nasceu em 1911 e faleceu em 2004.
[7] Eudoxo foi um astrônomo, matemático e filósofo grego. Nasceu em 390 a.C. e faleceu em 337 a.C.

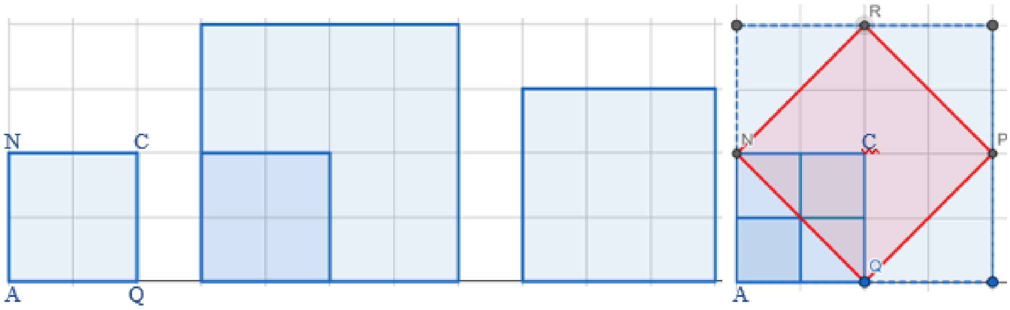
a sua resposta, argumentando que, se quatro pés eram muito, o quadrado deveria ter de lado três pés. Contudo, concluiu que a resposta não resolvia a questão.

Figura 18 - Sócrates - dobro da área de um quadrado, 2ª parte

Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

O escravo não conseguiu chegar à resposta procurada, sendo assim, Sócrates apresentou a resposta correta:

Figura 19 - Sócrates - dobro da área de um quadrado, resposta



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Quando Sócrates traça a diagonal, o triângulo NQC retângulo e isósceles possui exatamente a metade da área do quadrado original. A construção proposta por Sócrates é de quatro triângulos retângulos e isósceles, equivalente entre si, ou seja, que possuem a mesma área. Logo, a área do quadrado NQPR é quatro vezes a área do triângulo NQC. Então podemos escrever que:

$$\text{Área NPQR} = 4 \times \text{Área NQC} = 4 \times \frac{1}{2} \times \text{Área AQCN} = 2 \times \text{Área AQCN}$$

Logo, é a solução procurada, a área do quadrado NPQR é o dobro da área do quadrado AQNC.

No tempo de Pitágoras, o sistema numérico tinha se desenvolvido apenas até o que chamamos hoje de conjunto dos números racionais. Ao se depararem com a existência de números não racionais (irracionais), os pitagóricos contemplavam, em termos filosóficos, segmentos incomensuráveis como uma imagem concreta de algo inimaginável. Karlson (1961, p.104), destaca que "[...] todo número podia ser expresso por um comprimento, mas existiam comprimentos que não correspondiam a nenhum número".

Existem outras histórias, ou mesmo lendas, sobre o aparecimento dos números irracionais. Uma delas conta que Hípaso de Metaponto,[8] discípulo de Pitágoras, quando calculou a diagonal do quadrado de lado unitário e se deparou com um segmento que não podia ser expresso como a razão entre dois números inteiros, foi expulso da escola pitagórica, devido a sua descoberta, e condenado à morte.

Alguns historiadores defendem a tese de que os números irracionais surgiram mediante alguns estudos relacionados às diagonais de um pentágono regular. Boyer[9] (1974), em *História da Matemática*, assegura que foi $\sqrt{5}$ que revelou a existência das grandezas incomensuráveis e, consequentemente, dos números irracionais, a solução da equação $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ leva a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como sendo a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular.

Ainda há outros problemas matemáticos dos quais os irracionais fazem parte, como o problema da Duplicação do Cubo. O período era de 443 a.C. a 429 a.C, denominado como Época de Péricles, homem que governou Atenas. A origem deste problema pode estar relacionada à mitologia grega, em que o surgimento de uma peste teria reduzido 25% da população original de Atenas. Em busca de resolver o problema, que fez de Péricles uma de suas vítimas, os moradores de Atenas enviaram ao templo de Apolo uma delegação em busca de ajuda. A divindade fez um pedido, em um altar em forma de cubo, em troca do fim da peste: "erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará" (CONTADOR, 2008, p.233).

A princípio, parecia um problema fácil de ser resolvido, mas, da mesma forma que dobrar a área de um quadrado, não era tão simples. O cubo tinha arestas

[8] Hípaso de Metaponto foi um filósofo pré-socrático, membro da Escola pitagórica. Nasceu em torno do ano 500 a.C. em Metaponto, cidade grega da Magna Grécia situada no Golfo de Tarento, ao sul do que agora é a Itália.

[9] Carl B. Boyer, ou apenas Carl Boyer, foi um matemático e historiador da matemática norte-americano. Nasceu em 1906 e faleceu em 1976.

de metro, então, seu volume seria V = 1 x 1 x 1 = 1m³, e, para duplicá-lo, teríamos que encontrar um cubo cujo volume fosse V = 2 m³. Em um primeiro momento, pensou-se apenas em dobrar o tamanho das arestas, ou seja, se cada aresta media 1 m, cada aresta passaria a medir 2 metros. Porém, o seu volume passaria a ser V = 2 x 2 x 2 = 8 m³, ou seja, se dobrar a medida de cada aresta, o novo altar em forma de cubo vai ter aumentado em oito vezes, isto é, quatro vezes mais do que o que foi pedido. Assim sendo, o problema passou a ser a medida certa da aresta para que o cubo tenha volume igual a 2m³.

Contador em *Matemática: uma breve história*, diz:

> No plano, duplica-se um quadrado e, no espaço, é impossível duplicar um cubo. Hoje esta resposta não é difícil de ser dada, acontece que para duplicar um cubo precisamos achar uma aresta a que satisfaça a condição $a \times a \times a = 2$ ou a^3=2 $\Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$, e novamente vem daí que $a = 1{,}2$ é pequeno e $a = 1{,}3$ é grande. (CONTADOR, 2008, p.234)

Observe que se $a = 1{,}2 \Rightarrow a^3 = (1{,}2)^3 = 1{,}728$ e se $a = 1{,}3 \Rightarrow a^3 = (1{,}3)^3 = 2{,}197$.

Um relato semelhante sobre o problema da duplicação do cubo é encontrado em *Introdução à História da Matemática* (EVES, 2011), no qual existe uma outra possibilidade para o surgimento desta questão. O rei Minos, filho de Zeus, não satisfeito com o tamanho do seu túmulo, construído em forma cúbica, ordenou, por sugestão de Eurípedes, que fosse duplicado, pois ele teria ficado pequeno para o seu filho Glauco. Portanto, toda duplicação de volume de um sólido tornou-se um desafio para que sua forma original fosse mantida.

Para mostrar a impossibilidade de calcular o comprimento de uma aresta de um cubo de volume 2m³, ou seja, provar que o número encontrado é um número irracional, temos:

Se $a = \sqrt[3]{2}$ fosse um número racional, poderíamos escrevê-lo na forma de uma fração irredutível $a = \frac{p}{q}$, isto é, p e q não possuem divisores comuns. Segue que:

$$a^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2 \Rightarrow \frac{p^3}{q^3} = 2 \Rightarrow p^3 = 2.q^3$$

Mas se $p^3 = 2.q^3$, podemos afirmar que p^3 é um número par, o que acarreta em p também ser um número par, considerando o fato de sabermos que qualquer potência de números pares é sempre um número par (a multiplicação de dois números pares é sempre um número par). Mas observe que se p e q não possuem divisores comuns e p é um número par, obrigatoriamente q tem que ser um número ímpar (se p e q fossem os dois pares, teria pelo menos um número como divisor comum).

Se p é par, ele pode ser escrito como $p = 2k$, k inteiro positivo. Logo, a equação pode ser escrita da seguinte forma: $p^3 = 2.q^3 \Rightarrow (2k)^3 = 2q^3 \Rightarrow 8k^3 = 2q^3$. Dividindo os dois membros da igualdade por 2, obtemos: $4k^3 = q^3$. Mas $4k^3$ é um número par, logo q^3 $(q^3 = 4k^3)$ também é um número par e, se q^3 é par, como vimos no caso de p, o q também é um número par. Chegamos a um absurdo, pois q tinha que ser ímpar. Se concluímos que p e q são números pares, eles têm pelo menos um divisor comum, o 2, portanto $\sqrt[3]{2}$ não pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, logo, ele não é um número racional, ou seja, é um número irracional.

Por muito tempo, tinha-se a ideia de que a reta era uma metáfora para o corpo dos racionais. Acreditava-se que os racionais preenchiam por completo a reta, havendo uma correspondência biunívoca entre ambos. Como a reta é o modelo da continuidade (um conjunto contínuo de pontos), tinha-se a ideia de que o conjunto dos números racionais era contínuo e completo na reta, o que começou a ser questionado com os "buracos" formados pelos números irracionais.

Essa ideia só foi totalmente negada no século XIX, com a obra intitulada *Continuidade e Números Irracionais*, escrita pelo matemático alemão J.W.R. Dedekind,[10] na qual ele cita que a linha reta é infinitamente mais rica em pontos do que o domínio dos números racionais. Com isso, a criação de novos números se fez necessária, para poder se ter um domínio numérico completo e com continuidade idêntica à da reta. A estruturação de números reais que temos conhecimento hoje vem de Dedekind em seu trabalho realizado em 1872. Ele começou a se voltar a problemas envolvendo números irracionais em 1858, quando era professor de Cálculo. Este estudioso imagina o conceito de limite ensinado através apenas da Aritmética, sem usar a Geometria. Ele se perguntava em que a grandeza geométrica continua a se diferenciar dos números racionais. Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta se deve à natureza da divisão

[10] Julius Wilhelm Richard Dedekind foi um matemático alemão que fez contribuições importantes para a álgebra abstrata, na fundamentação axiomática dos números naturais, na teoria algébrica dos números e na definição de número real. Nasceu em 1831 e faleceu em 1916.

do segmento em duas partes por um ponto dado. Se os pontos de uma reta ficam divididos em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda classe, então, existe um só ponto que realiza esta divisão em duas classes, ou seja, um só ponto que separa a reta em duas partes.

Bento de Jesus Caraça (1951, p.83),[11] referindo-se ao axioma da continuidade de Dedekind-Cantor, deu uma nova definição de número real:

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional.

Fica evidente na definição apresentada acima que todos os números racionais também são números reais. Mas os números racionais podem ser definidos apenas com dois números inteiros, como Bento Jesus apresenta, sem precisar recorrer ao infinito, a não ser que se faça em uma categoria mais geral, no caso do conjunto dos números reais. A necessidade de se recorrer ao conceito de infinito, embora, há séculos, já se conheça o fenômeno da incomensurabilidade, nos leva à conclusão de que a obra de Dedekind foi fundamental para se chegar a uma teoria satisfatória sobre os números irracionais.

[11] Bento de Jesus Caraça foi um matemático português, professor universitário, resistente antifascista e militante do Partido Comunista Português. Nasceu em 1901 e faleceu em 1948.

4
Os conjuntos numéricos

O objetivo deste capítulo é fazer uma pequena apresentação dos conjuntos numéricos: conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) e conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

4.1. Números naturais

O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ é um conjunto cujos elementos são chamados números naturais. O primeiro matemático a publicar um tratamento axiomático dos números naturais foi Giuseppe Peano[12] (1858-1932). A axiomatização dos números naturais é chamada Axiomas de Peano. Ele propôs uma lista de axiomas baseados na noção de "sucessor". Intuitivamente, o termo "sucessor" quer dizer que quando $a, b \in \mathbb{N}$, dizer que b é sucessor de a significa dizer que b vem "em seguida" de a, ou seja, b vem logo depois de a, não havendo qualquer outro número natural entre a e b. O termo "sucessor" é um termo primitivo, não definimos.

A construção dos números naturais por Peano consiste em quatro axiomas:

- Axioma 1: $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists|\, n^* \in \mathbb{N}$, onde $n^* = s(n)$; $s(n) \rightarrow$ sucessor de n;
- Axioma 2: $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, se $m \neq n$, então $m^* \neq n^*$;
- Axioma 3: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n^* \neq 1$;
- Axioma 4: Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e dado $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$;

Considerações sobre os axiomas de Peano:

- Axioma 1: todo número natural tem um único sucessor que também é um número natural;

[12] Giuseppe Peano nasceu em 1858 e faleceu no ano de 1932 . Foi um matemático e glottologista italiano. Autor de mais de 200 livros e artigos foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos, para as quais ele também contribuiu bastante. A axiomatização padrão dos números naturais é chamada de axiomas de Peano, em sua homenagem.

- Axioma 2: números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;
- Axioma 3: existe um único número natural, o 1, que não é sucessor de nenhum outro número natural;
- Axioma 4: dado um conjunto X de números naturais, se 1 pertence ao conjunto X e, se para qualquer elemento de X o sucessor ainda pertence a X, então X = $\mathbb{N}$.

A noção de sucessor está relacionada à ideia de adição de uma unidade, somar uma unidade.

O axioma 3 estabelece o número 1 como o primeiro número natural, visto que ele não é sucessor de nenhum outro número natural. Sendo assim, podemos afirmar que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais.

Nos livros didáticos, principalmente nos de Ensino Fundamental e Médio, embora também aconteça em alguns do Ensino Superior, o zero aparece como o primeiro número natural, escrevendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

O axioma 4 de Peano é conhecido como Axioma da Indução, é considerado um método de demonstração importante em relação às proposições referentes a números naturais. O axioma de indução costuma ser chamado nas demonstrações de Princípio de Indução Finita ou Princípio da Indução Matemática. Normalmente ele aparece escrito da seguinte forma:

i) P (1) é válido, quer dizer que é verdadeiro para o primeiro número natural;

ii) para todo $n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n^*)$, onde n^* é o sucessor de n. Observe que n* pode ser chamado de "$n + 1$";

Logo, se vale para o primeiro número natural e se dado $n \in \mathbb{N}$, vale para $(n + 1) \in \mathbb{N}$, então é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: demonstrar que a soma dos n primeiros números naturais é igual a

$$\frac{n.(n+1)}{2}$$

Solução:

Antes da demonstração vamos exemplificar:

a) soma dos dois primeiros números naturais 1 + 2 = 3 = $\frac{2.(2+1)}{2}$;

b) soma dos três primeiros números naturais 1 + 2 + 3 = 6 = $\frac{3.(3+1)}{2}$;

c) soma dos quatro primeiros números naturais: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = $\frac{4.(4+1)}{2}$;

Mesmo que continuássemos exemplificando, só poderíamos garantir que seria válido para todos os números naturais, se conseguíssemos provar, porque não há como dar exemplos envolvendo todos os números naturais.

Demonstração:

1º) $P(1) = 1 = \frac{1.(1+1)}{2}$ (V)

2º) Vamos admitir que é verdadeiro para $P\ (n), n \in \mathbb{N}$.

Logo: $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ → Hipótese de Indução.

3º) Temos que provar que é verdadeiro para $P\ (n\ +\ 1), n \in \mathbb{N}$.

Temos que provar que: $P(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$

Mas,

$P(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + \ (n+1) =$

$$= \frac{n.\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n.\,(n+1) + 2.\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1).\,(n+2)}{2}$$

Sendo assim, provamos que é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando não fazemos demonstração, podemos sempre questionar, "será válido para todos os números naturais?", pergunta muito comum entre os alunos.

Vejamos um engano que pode ser cometido, Fermat (1601-1665) acreditou que a fórmula $y = 2^{2^n} + 1$ definida para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ só resultaria em números primos. Ele foi testando valores de n, por exemplo:

$n = 0 \Rightarrow y = 2^{2^0} + 1 = 3$, o 3 é um número primo;

$n = 1 \Rightarrow y = 2^{2^1} + 1 = 5$, o 5 é um número primo;

$n = 2 \Rightarrow y = 2^{2^2} + 1 = 17$, o 17 é um número primo;

$n = 3 \Rightarrow y = 2^{2^3} + 1 = 257$, o 257 é um número primo;

$n = 4 \Rightarrow y = 2^{2^4} + 1 = 65.537$, o 65.537 é um número primo.

Ele usou o que nós chamamos de indução vulgar (generalização de propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares) e isto pode nos levar a cometer grandes erros, é o que ocorreu neste caso, Euler (1707-1783) mostrou que para $n = 5 \Rightarrow y = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297$. Este número encontrado é divisível por 641, logo, ele não é um número primo.

Observe que os números naturais são fechados em relação à soma e à multiplicação, mas não os são em relação à subtração e à divisão. Dados dois números naturais, podemos afirmar que a sua soma e o seu produto são um número natural, mas não podemos afirmar que a subtração de dois números naturais será sempre um número natural e que a divisão de dois números naturais será sempre um número natural.

4.2.
Números inteiros

O conjunto $\mathbb{Z}$ é um conjunto cujos elementos são chamados números inteiros. O símbolo dos números inteiros $\mathbb{Z}$ vem do alemão zahlen, que significa números, algarismos.

O conjunto $\mathbb{Z}$ difere do conjunto $\mathbb{N}$ pela inclusão do zero e dos números negativos. Sobre a história dos números negativos, sabemos que eles têm sido considerados desde a Antiguidade, mas com muita desconfiança por parte dos matemáticos. Com o desenvolvimento das atividades mercantis, no final da Idade Média, houve a necessidade de considerar os inteiros relativos e efetuar operações. Rafael Bombelli[13], publicou as regras operatórias com os números inteiros. Esta publicação ocorreu em 1572. Porém, a evolução do conceito de números inteiros ocorreu de forma lenta, só no final do século XIX é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados primitivos até então.

Os números negativos foram introduzidos na matemática pelos hindus com o objetivo de indicar débitos. Segundo Silveira (2015, p.15), “a noção de número

[13] Rafael Bombelli, matemático e engenheiro hidráulico italiano nasceu em 1526 e faleceu em 1572.

negativo levou muito tempo para se estabelecer na história da Matemática. Passaram mais de 1000 anos entre a aparição dos números negativos e sua utilização".

Segundo Boyer (1991), nas civilizações babilônica e egípcia, foram encontrados indícios de operações com números negativos, mas não há registros que permitem concluir o uso destes algarismos.

Segundo Eves (2011), na China, no livro intitulado *I-Ching* ou livro das permutações datado do período Shang, que foi uma dinastia surgida por volta de 1500 a.C., escrito por Wön-Wang (1182-1135 a.C.), aparece o mais antigo exemplo de quadrado mágico que se tem registro.

Considerando os textos apresentados acima, concluímos que, no período das civilizações babilônica e egípcia, foram encontrados indícios de números negativos, mas nada comprovado. Apenas na China apareceu o mais antigo exemplo matemático registrado, "o primeiro registro explícito de número negativo foi feito em 628 d.C. pelo matemático hindu Brahamagupta[14]" (SILVEIRA, 2015. p.15).

A aceitação dos números negativos foi um processo longo, observem como eram chamados os números negativos ao longo do tempo:

. Michael Stifel[15] (1486 – 1567) $\rightarrow$ números absurdos;

. Cardano[16] (1501 – 1576) $\rightarrow$ números fictícios;

. Descartes[17] (1596 – 1650) $\rightarrow$ chamava de falsas as raízes negativas de uma equação.

Normalmente escrevemos o conjunto dos números inteiros da seguinte forma: $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$.

Em $\mathbb{Z}$ alguns subconjuntos merecem destaque:

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\rightarrow$ conjunto dos números inteiros não nulos;

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ $\rightarrow$ conjunto dos números inteiros não negativos;

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ $\rightarrow$ conjunto dos números inteiros positivos;

---

[14] Brahmagupta foi um matemático e astrônomo indiano. que ocupa lugar de destaque na história da civilização oriental. Nasceu no ano de 598 d.C. e faleceu no ano de 668 d.C.

[15] Michael Stifel, ou ainda Styfel, Stieffel, Stiefel, foi um matemático alemão. Descobriu o logaritmo e inventou uma breve tabela logarítmica antes de John Napier. Nasceu em 1486 e faleceu em1567.

[16] Girolamo Cardano, físico e matemático italiano, nasceu em 1501 e faleceu em 1576.

[17] René Descartes foi um filósofo, físico e matemático francês. Nasceu em 1596 e faleceu em 1650.

$\mathbb{Z}_{-} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ → conjunto dos números inteiros não positivos;

$\mathbb{Z}_{-}^{*} = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$ → conjunto dos números inteiros negativos.

Observe que o conjunto $\mathbb{Z}$ com as operações de adição e multiplicação não definem um corpo, porque não possui o simétrico multiplicativo. Não podemos afirmar que dado um x inteiro qualquer, existe x^{-1} também inteiro.

Observe que os números inteiros são fechados em relação à adição, à subtração e à multiplicação, mas não os são em relação à divisão. Dados dois números inteiros, podemos afirmar que a sua soma, a sua diferença e o seu produto são um número inteiro, mas não podemos afirmar que a divisão de dois números inteiros será sempre um número inteiro.

4.3.
Números racionais

Os números inteiros não são suficientes para resolver todas as questões do dia a dia. Observe, se você quiser dividir 15 reais entre seus quatro filhos, você não conseguirá efetuar esta divisão pensando somente em números inteiros. Os números racionais surgiram da necessidade de representar partes de um inteiro.

Os números racionais podem ser definidos como aqueles que podem ser expressos como uma relação entre dois inteiros. Podemos definir o conjunto dos números racionais como os números que podemos escrever em forma de fração.

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, onde\ p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{Z}^{*}\}$$

A letra $\mathbb{Q}$ deriva da palavra inglesa *quotient*, que significa quociente, já que um número racional é um quociente de dois números inteiros.

Observe que:

1º) Todo número inteiro é um número racional, logo, temos: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;

Dado $x \in \mathbb{Z}, x = \frac{x}{1}, com\ x \in \mathbb{Z}\ e\ 1 \in \mathbb{Z}$. Logo, qualquer inteiro pode ser escrito em forma de fração. Naturalmente se $b \mid a,$ então $\frac{a}{b}$ é um número inteiro, pois $a = b.q$ para algum q inteiro, $\frac{a}{b} = \frac{b.q}{b} = q$

Exemplos:

a) $2 \in \mathbb{Q}$, o 2 pode ser escrito em forma de fração, $2 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$;

b) $-2 \in \mathbb{Q}$, o –2 pode ser escrito em forma de fração, $-2 = -\frac{2}{1} = -\frac{6}{3}$;

c) $0 \in \mathbb{Q}$, o 0 pode ser escrito em forma de fração, $0 = \frac{0}{1}$;

2º) Todos os números decimais exatos são números racionais;

Exemplos:

a) $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$;

b) $2{,}031 = \frac{2031}{1000}$;

c) $187{,}1 = \frac{1871}{10}$;

3º) Todas as dízimas periódicas são números racionais;

Exemplos:

a) $0{,}3333 \ldots = \frac{1}{3}$; dízima periódica simples;

b) 0,474747... = $\frac{47}{99}$; dízima periódica simples;

c) 1,3566666...= $\frac{1221}{900} = \frac{407}{300}$; dízima periódica composta.

Além da representação em forma de fração e em forma de número decimal, a representação em forma de porcentagem é muito útil no dia a dia das pessoas.

Exemplos:

a) Crescimento no número de matrículas no Ensino Fundamental I foi de 25%;

Neste caso, crescimento de 25% representa 25 em cada 100, ou seja, $\frac{25}{100}$;

b) Desconto de 15% nas comprar para pagamento à vista;

Quer dizer que, para cada R$ 100,00, haverá um desconto de R$ 15,00, ou seja, $\frac{15}{100}$;

O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros por meio das operações de adição e multiplicação não definiam um corpo, mas o conjunto dos números racionais através da adição e da multiplicação define uma estrutura de corpo algébrico.

Vejamos: Seja $(\mathbb{Q}, +, \times)$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais.

Sejam $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Temos:

1ª) Associatividade:

(A1) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, (x + y) + z = x + (y + z)$

(M1) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, (x.y).z = x.(y.z)$

2ª) Comutatividade:

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x + y = y + x$

(M2) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x.y = y.x$

3ª) Existência do elemento neutro:

(A3) $\forall x \in \mathbb{Q}, x + 0 = x$

(M3) $\forall x \in \mathbb{Q}\ x.1 = x$

4ª) Existência do elemento simétrico ad$x$itivo (oposto):

(A4) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists|\ y \in \mathbb{Q}\ |x + y = 0$. Este número y denomina-se simétrico de x e indica-se por $-x$. Assim $x + (-x) = 0$.

4ª) Existência do elemento simétrico multiplicativo (inverso multiplicativo):

(M4) $\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\ \exists|\ y \in \mathbb{Q}\ |\ x.y = 1$. Este número y denomina-se inverso multiplicativo de x e indica-se por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ tal que $x.\frac{1}{x} = 1$.

5ª) Distributiva:

(D) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x.(y + z) = x.y + x.z$

6ª) Reflexiva:

(O1) $\forall x \in \mathbb{Q}, x \leq x$

7ª) Antissimétrica*:*

(O2) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

8ª) Transitiva:

(O3) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

9ª) Tricotomia:

(O4) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$

10ª) Compatibilidade da ordem com a adição:

(OA) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

11ª) Compatibilidade da ordem com a multiplicação:

(OM) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, x \leq y \Rightarrow \begin{cases} z > 0 \Rightarrow x.z \leq y.z \\ z < 0 \Rightarrow x.z \geq y.z \end{cases}$

A terna $(\mathbb{Q}, +, \times)$ satisfaz as propriedades (A1) a (A4), (M1) a (M4) e (D), portanto, podemos afirmar que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ é um corpo e que $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$, além das propriedades (A1) a (A4), (M1) a (M4) e (D), satisfaz também (O1) a (O4), (AO) e (OM) diremos que $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ é um corpo ordenado.

4.3.1.

Proposição

Um número é representado por decimal exato ou por dízima periódica se, e somente se, ele for um número racional.

Demonstração:

1ª parte:

i) Suponhamos x um número decimal exato, $x = A, a_1a_2a_3 \ldots a_n$, onde A é um número inteiro. Podemos escrever:

$$x = A, a_1a_2a_3 \ldots a_n = \frac{Aa_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

ii) Suponhamos x uma dízima periódica, $x = A, a_1a_2a_3 \ldots a_n\overline{D}$, sendo A um número inteiro e $D = d_1d_2d_3 \ldots d_t$, . Podemos escrever:

$$x = A, a_1a_2a_3 \ldots a_n\overline{D} = \frac{A}{1} + \frac{a_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n} \times 0, \overline{D}$$

Fazendo $y = 0, \overline{D} = 0, d_1d_2d_3 \ldots d_t$, temos: $y = 0, \overline{D} \Rightarrow 10^t . y = D, \overline{D}$

Temos: $10^t . y - y = D, \overline{D} - 0, \overline{D} \Rightarrow (10^t - 1). y = D \Rightarrow y = \frac{D}{10^t - 1} \in \mathbb{Q}$

Portanto:

$$x = A, a_1a_2a_3 \ldots a_n\overline{D} = \frac{A}{1} + \frac{a_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n} \times \frac{D}{10^t - 1} \in \mathbb{Q}$$

Logo, podemos afirmar que: se um número é representado por decimal exato ou por dízima periódica, é um número racional.

2ª parte:

Suponhamos x racional, logo $x = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros, n não nulo. Efetuando a divisão de m por n encontramos um quociente q e um resto r.

Logo: $m = q.n + r$. Se $x = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$

Continuando a divisão, multiplicando o resto r por 10^{s_1}, temos:

$$\frac{r.10^{s_1}}{n}$$

Obtemos quociente q_2 e resto r_2. Temos $r_2 = 0$ ou $r_2 < n$. Se $r_2 = 0$ é um número decimal exato. Se $r_2 < n$ continuamos a dividir.

$$\frac{r_2.10^{s_2}}{n}$$

Obtemos quociente q_3 e resto r_3. Temos $r_3 = 0$ ou $r_3 < n$. Se $r_3 = 0$ é um número decimal exato. Se $r_3 < n$ continuamos a dividir.

Como $r_i < n$, temos um número finito de restos diferentes, em um determinado momento, os restos começam a se repetir. Logo, se encontramos $r_i = 0$, é um decimal exato e se r_i começar a se repetir, é uma dízima periódica.

5
Números irracionais

Este capítulo traz o estudo dos números irracionais, propriedades, classificações e um estudo mais detalhado de alguns números irracionais como: a raiz quadrada de 2, a raiz quadrada de um número primo qualquer, o número π, o número de Euler e o Número de Ouro.

5.1.
Definições de números irracionais

Sabemos que os números decimais finitos e as dízimas periódicas são números racionais, como foi demonstrado anteriormente, pois é possível representar esses números em forma de fração. Podemos afirmar que os números irracionais são números cuja representação decimal não é nem finita e nem periódica, ou seja, números que não podem ser escritos como o quociente de dois números inteiros com o divisor diferente de zero.

O número irracional também pode ser definido como um número decimal da forma $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$ que não é uma dízima periódica, isto é, um número decimal que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ em que a é um número inteiro e b um número inteiro, não nulo.

Observe que, ao falarmos de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis, vimos que nem todo segmento possui como medida um número racional, como no caso da diagonal de um quadrado de lado unitário. Esses números cujas medidas representam segmentos incomensuráveis são chamados números irracionais.

O conjunto dos números irracionais é geralmente indicado pela letra maiúscula I, você também encontra representado por $\overline{\mathbb{Q}}$ ou por $\mathbb{Q}'$símbolo este que está indicando o complementar do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$), ou seja, dado x real, $x \in I \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q}$, do qual concluímos que um número pertence ao conjunto dos números irracionais se, e somente se, ele não pertencer ao conjunto dos números racionais.

O primeiro número irracional que temos contato no Ensino Fundamental, geralmente, é o π, como a razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. No entanto, a demonstração não é apresentada, o aluno é apenas informado de que a expansão decimal desse número é infinita e não periódica. O fato da não demonstração do número π, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, deve-se à falta de conhecimento dos alunos ainda para tanto, devido a sua complexidade. Na minha opinião, o que pode ser feito tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio é mostrar uma aproximação para π com o auxílio do *GeoGebra* é possível.

Ainda no Ensino Fundamental, os alunos conhecem outros números irracionais, as raízes não exatas, geralmente no 8º ou 9º ano deste seguimento. Dependendo da turma, a demonstração que $\sqrt{2}$ é um número irracional pode ser trabalhada, apesar de não ocorrer com frequência.

Um grande problema é que, dependendo da forma como esse processo "ensino-aprendizagem" se dá, o aluno pode achar que números irracionais são o π e algumas raízes não exatas, levando-o a imaginar, erroneamente, que o conjunto dos números irracionais é um conjunto "pequeno", induzindo a ele imaginar ser um conjunto enumerável. O que não é verdade, o conjunto dos números irracionais é infinito e não enumerável. Este fato nos leva a destacar a importância de um ensino correto deste tema no Ensino Fundamental para que não haja, por parte dos alunos, conclusões do tipo citado acima.

5.1.1. Propriedades dos números irracionais

O conjunto dos números irracionais não é fechado em relação à adição e nem em relação à multiplicação, como ocorre nos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, ou seja, dados dois números irracionais, não podemos afirmar que a soma desses números seja um número irracional e nem que o produto desses números seja um número irracional. Simbolicamente, podemos escrever:

Dados $x, y \in I$, não podemos afirmar que $(x + y) \in I$ e que $(x.y) \in I$. Veja os exemplos:

a) $x = \sqrt{3} \in I$ e $y = (5 - \sqrt{3}) \in I$, mas $x + y = \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 5 \notin I$

b) $x = \sqrt{3} \in I$ e $y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \in I$, mas $x.y = \sqrt{3}.\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6 \notin I$

Existem algumas propriedades operacionais relacionadas aos números irracionais com os números racionais.

Vejamos:

1º) Seja x um número racional e y um número irracional, logo $(x + y)$ é um número irracional.

Demonstração:

Se $x \in \mathbb{Q}$, então podemos escrever $x = \frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Suponhamos por absurdo $(x + y) \in \mathbb{Q}$. Logo: $(x + y)$ pode ser escrito na forma $\frac{c}{d}$ com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto: $x + y = \frac{a}{b} + y = \frac{c}{d} \Rightarrow y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

Neste caso, y é a subtração de dois números racionais e a subtração de dois números racionais que é um número racional. Portanto, isto nos leva à conclusão de que y é um número racional, o que é um absurdo, por hipótese y é um número irracional.

Portanto, $(x + y)$ não é racional, logo, $(x + y)$ é irracional.

2º) Seja x um número racional e y um número irracional, logo, $(x - y)$ é um número irracional.

Demonstração:

Se $x \in \mathbb{Q}$, então podemos escrever $x = \frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*$.

Suponhamos por absurdo $(x - y) \in \mathbb{Q}$. Logo: $(x - y)$ pode ser escrito na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}\ e\ d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto, $x - y = \frac{a}{b} - y = \frac{c}{d} \Rightarrow y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

Neste caso, y é a subtração de dois números racionais e a subtração de dois números racionais é um número do mesmo tipo. Portanto, isto nos leva a y ser um número racional, o que é um absurdo, por hipótese y é um número irracional.

Portanto, (x – y) não é racional, logo, (x – y) é irracional.

3º) Se x é um número racional não nulo e y é um número irracional, então $(x.y)$ é um número irracional.

Demonstração:

Se $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, então podemos escrever $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Suponhamos por absurdo $(x.y) \in \mathbb{Q}$. Logo: $(x.y)$ pode ser escrito na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto: Se $x.y = \frac{c}{d}, então\ y = \frac{\frac{c}{d}}{x} = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{a} = \frac{c.b}{d.a} = \frac{p}{q}$.

Logo, se $y = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, então y é um número racional. Absurdo, por hipótese y é um número irracional.

Portanto, $(x.y)$ não pode ser um número racional, logo é um número irracional.

4º) Se x é um número racional não nulo e y é um número irracional, então $\frac{x}{y}$ é um número irracional.

Demonstração:

Se $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, então podemos escrever $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Suponhamos por absurdo $\frac{x}{y}$ ser um número racional. Logo, $\frac{x}{y}$ pode ser escrito na forma $\frac{c}{d}, com\ c \in \mathbb{Z}\ e\ d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto, se $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$, temos: $y.c = x.d \Rightarrow y.c = \frac{a}{b}.d \Rightarrow y = \frac{a.d}{b.c}$, com $(a.d) \in \mathbb{Z}$ e $(b.c) \in \mathbb{Z}^*$, y é um número racional. Observe que como $\frac{a}{b} \neq 0, d \neq 0$, $y \neq 0$ e $y.c = \frac{a}{b}.d \Rightarrow c \neq 0$. Por isso, afirmamos que $(b.c)$ é um inteiro não nulo.

Absurdo, por hipótese y é um número irracional.

Logo: $\frac{x}{y}$ é um número irracional.

5º) Se x é um número racional não nulo e y é um número irracional, $\frac{y}{x}$ é um número irracional

Demonstração:

Se $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, então podemos escrever $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Suponhamos por absurdo $\frac{y}{x}$ ser um número racional. Logo, $\frac{y}{x}$ pode ser escrito na forma $\frac{c}{d}, com\ c \in \mathbb{Z}\ e\ d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto, se $\frac{y}{x} = \frac{c}{d}$, temos que: $y.d = x.c \Rightarrow y.d = \frac{a}{b}.c \Rightarrow y.d = \frac{a.c}{b} \Rightarrow y = \frac{a.c}{b.d}$.

Como $(a.c) \in Z\ e\ (b.d) \in\ \mathbb{Z}^*$, y é um número racional. Absurdo, por hipótese o y é um número irracional.

Concluímos que $\frac{y}{x}$ é um número irracional.

5.1.2.
Classificação dos números irracionais

Os números irracionais podem ser classificados em números algébricos e números transcendentes.

Qualquer que seja a solução de uma equação polinomial da forma:

$a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \cdots + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n = 0$, com $a_i \in \mathbb{Z}$, é chamado número algébrico. Portanto, um número α é algébrico, se pudermos construir uma equação polinomial com coeficientes inteiros da qual α seja raiz.

Pela definição acima, podemos concluir que qualquer número racional α = $\frac{m}{n}$, é um número algébrico, porque α é raiz da equação $n.x - m = 0$. Como todo número inteiro é um número racional, podemos concluir que todo número inteiro é um número algébrico. Temos números irracionais que são números algébricos, mas não podemos afirmar que todo número irracional é um número algébrico.

Exemplos:

a) $\sqrt{2}$ é um número algébrico, pois satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$.

b) $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico, pois satisfaz a equação $x^3 - 2 = 0$.

c) π não é um número algébrico, pois não conseguimos obter uma equação com coeficientes inteiros que tenha o π como raiz.

Os números que não são algébricos são chamados transcendentes, ou seja, são aqueles que não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Em outras palavras, não conseguimos escrever um polinômio de coeficientes inteiros de forma que este tenha como raiz um número transcendente. Temos alguns números irracionais importantes classificados como transcendentes.

Exemplos:

a) O número Pi (π); $\pi = 3{,}14159265358979$ ...

b) O número de Euler (e); $e = 2{,}718281828459$ ...

c) O número de ouro (φ); $\varphi = 1{,}61803399$ ...

5.2. A raiz quadrada de 2

Como vimos na contextualização histórica dos números irracionais, para muitos, $\sqrt{2}$ é considerada o primeiro número irracional. Partindo da ideia da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário.

Vamos provar que $\sqrt{2} = 1{,}414213562373$ ... é um número irracional.

Antes de provarmos a irracionalidade de $\sqrt{2}$, vamos enunciar e demonstrar duas propriedades de números naturais que serão usadas.

P_1: Se $n \in \mathbb{N}$ e n é um número par, então n^2 é par.

Demonstração:

Se $n \in \mathbb{N}$ e n é um número par, podemos escrever $n = 2a$, com $a \in \mathbb{N}$.

Logo: $n^2 = (2a)^2 = 4a^2 = 2.(2a^2)$. Escrevendo $2a^2 = b \in \mathbb{N}$. Temos que $n^2 = 2b$. Portanto n^2 é um número par.

P_2: Se $n \in \mathbb{N}$ e n é um número ímpar, então, n^2 é um número ímpar.

Demonstração:

Se $n \in \mathbb{N}$ e n é um número ímpar, podemos escrever $n = 2a + 1$, com $a \in \mathbb{N}$.

Logo, podemos escrever:

$$n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2.(2a^2 + 2a) + 1.$$

Escrevendo $(2a^2 + 2a) = b \in \mathbb{N}$, temos que $n^2 = 2b + 1.$ Logo n^2 é um número ímpar.

Vamos agora provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo $\sqrt{2}$ seja um número racional. Logo, existem a, b inteiros positivos, tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível, isto é, a e b são números primos entre si, ou seja, eles não têm divisor comum maior do que 1.

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, temos:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2.b^2.$ (1)

O número $2b^2$ é um número inteiro par. Logo, $a^2 = 2b^2$ é um número par e se a^2 é um número par, a é um número par (se a fosse um número ímpar, a^2 seria ímpar).

Mas, se a é um número par, podemos escrever, $a = 2n, n \in \mathbb{Z}$.

Substituindo $a = 2n$ na equação (1) temos:

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2n)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2.$$

Logo, b^2 também é um número par e consequentemente b é um número par. Chegamos a um absurdo, acabamos de concluir que a e b são números pares, então a e b são divisíveis por 2 e $\frac{a}{b}$ não é uma fração irredutível. Portanto $\sqrt{2}$ é um número irracional.

5.3. Raiz quadrada de um número primo

A raiz quadrada de qualquer número primo é um número irracional. Não só a raiz quadrada de 2, como provamos no item anterior.

Teorema: Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo $\sqrt{p}$ um número racional. Logo, se considerarmos $\sqrt{p}$ como sendo racional, existem a, b inteiros positivos, tal que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração na forma irredutível, isto é, a e b são números primos entre si, ou seja, eles não tem divisor comum maior do que 1.

Na igualdade $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$\left(\sqrt{p}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = p.b^2.$

Da última igualdade, podemos concluir que p divide a^2 e, como p é primo, ele obrigatoriamente divide a. Então, se p divide a, podemos escrever $a = p.k$, para algum k inteiro. Elevando os dois membros da igualdade $a = p.k$ ao quadrado, temos: $a^2 = (p.k)^2 = p^2.k^2$.

Como $a^2 = p.b^2$ e $a^2 = p^2.k^2$, podemos escrever: $p.b^2 = p^2.k^2$. Simplificando o fator comum p, obtemos: $b^2 = p.k^2$. A equação $b^2 = p.k^2$ nos afirma que p divide b^2 e como p é um número primo, p divide b.

Observe que concluímos que p divide a e que p divide b, ou seja, p é divisor comum de a e b, o que é um absurdo, pois contradiz a hipótese que afirmava que m.d.c. $(a, b) = 1$, ou em outras palavras, que a e b são números primos entre si.

Portanto, concluímos que $\sqrt{p}$ é um número irracional.

5.4. O número π

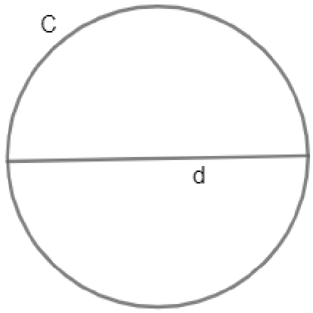
O símbolo (π) é uma letra grega minúscula, a primeira da palavra περίμετρος, que significa "perímetro" (em português). No *Primeiro Livro dos Reis*, também conhecido como *I Reis*, um dos livros históricos do *Antigo Testamento da Bíblia* vem depois de *II Samuel* e antes de *II Reis*, há uma passagem que nos leva à conclusão de que o valor de π é igual a 3. Encontramos este texto no Versículo 23: "Hiram fez também o mar de bronze, que tinha dez côvados de uma borda à outra, perfeitamente redondo e com altura de cinco côvados; sua circunferência media-se com um fio de trinta côvados". (BÍBLIA, 2020).

Analisando matematicamente o Versículo 23, temos que o mar de bronze tinha dez côvados[18] de uma borda à outra, o que deduzimos ser o diâmetro, já que ele era redondo. A circunferência medida por um fio era 30 côvados. O que nos leva a deduzir $\pi = 3$. Considerando que hoje temos conhecimento de que o π é a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro.

[18] O côvado foi uma medida de comprimento usada por diversas civilizações antigas. Era baseado no comprimento do antebraço, da ponta do dedo médio até o cotovelo. Ninguém sabe quando esta medida entrou em uso. O côvado era usado regularmente por vários povos antigos, entre eles os babilônios, egípcios e hebreus. O côvado real dos antigos egípcios media 50 cm.

Os egípcios foram os primeiros a perceber que a razão entre o comprimento da circunferência qualquer e seu diâmetro era sempre uma constante. O primeiro a utilizar o símbolo π para representar isto foi o matemático inglês William Jones[19] em uma publicação de 1706.

Figura 20 – Circunferência



Fonte: elaborado pelo autor, usando o *GeoGebra.*

Na figura 20, temos:

C $\rightarrow$ comprimento da circunferência;

d $\rightarrow$ diâmetro da circunferência;

$\pi = \frac{C}{d}$.

No Oriente antigo, frequentemente usava-se $\pi = 3$, no entanto, a primeira tentativa científica de calcular π parece ter ocorrido por volta de 240 a.C., segundo Howard Eves (2011), em seu livro *Introdução à História da Matemática*, Arquimedes[20] usou um método baseado em polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos a uma circunferência, conhecido método clássico de cálculo de π. O método consistia em considerar uma circunferência de raio igual à unidade e calcular o perímetro de diversos polígonos inscritos e circunscritos a essa circunferência. Com uma relativa facilidade, percebe-se que o comprimento de uma circunferência é maior do que o perímetro de um polígono inscrito e menor do que o perímetro de um polígono circunscrito.

Arquimedes fez este processo com alguns polígonos, com os polígonos de nove lados, de doze lados, de vinte e quatro lados, de quarenta e oito lados e de

[19] William Jones foi um matemático galês. Sua contribuição mais notável como matemático é a proposta para o uso do símbolo π para representar a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Nasceu em 1675 e faleceu em 1749.

[20] Arquimedes de Siracusa foi um matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. Nasceu no ano de 288 a.C. e faleceu no ano de 212 a.C.

noventa e seis lados, chegando à conclusão de que π está entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, considerando seis casas decimais, o π está entre 3,140845 e 3,142857. Se observarmos o que conhecemos hoje para valor de π, está exatamente entre os dois valores apresentados.

Vamos apresentar a seguir alguns períodos ou mesmo anos em que ocorreram avanços significativos do cálculo de π:

- em 1650 a.C., os Egípcios apresentavam o número π com uma casa decimal;

- em 250 a.C., Arquimedes apresentava o número π com três casas decimais;

- por volta do ano de 480 d.C., Zu Chongzhi[21] apresentava o número π com sete casas decimais. Foi o mais notável no cálculo de π entre 3,1415926 e 3,1415927, um recorde que não seria superado por 800 anos;

- em 1150, Bhaskara[22], apresentou o π com quatro casas decimais, calculou o valor de π como $\frac{754}{240} = 3{,}1416$;

- em 1424, Ghiyath al-Kashi[23] apresentava o número π com dezesseis casas decimais. Ele conseguiu realizar o cálculo da constante 2π com 9 dígitos sexagesimais de precisão, sendo equivalente a 16 dígitos decimais de precisão;

- Ludolph van Ceulen[24], empreendeu mais de trinta anos da sua vida aperfeiçoando o método de cálculo do número irracional π. Ludolph van Ceulen, no final do século XVI, calculou, em 1596, um valor de π com 35 casas decimais, começando com um polígono de 15 lados, dobrando o número de lados para 37 vezes, e, logo em seguida, aumentando o número de lados. O resultado foi o número 3,14159265358979323846264338327950288;

- no final do século XVIII, Johann Heinrich Lambert[25] foi o primeiro a provar a irracionalidade de π;

- em 1794, Georg von Vega[26], apresentou o π com 126 casas decimais;

---

[21] Zu Chongzhi, matemático, astrônomo chinês. Nasceu no ano 429 d.C. e faleceu no ano 500 d.C.
[22] Bháskara, matemático hindu, nasceu em 1114 e faleceu em 1185.
[23] Ghiyath al-Kashi, matemático e astrônomo persa, a quem é atribuído o desenvolvimento do teorema lei dos cossenos, nasceu em 1380 e faleceu em 1429.
[24] Ludolph van Ceulens, matemático alemão, nasceu em 1540 e faleceu em 1610.
[25] Johann Heinrich Lambert matemático francês, nasceu em 1728 e faleceu em 1777.
[26] Georg von Vega matemático e oficial da artilharia esloveno, provavelmente de origem espanhola. Nasceu em 1754 e faleceu em 1802.

- em 1824, Carl Friedrich Gauss[27], contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a Teoria dos Números, Estatística, Análise Matemática, Geometria Diferencial, Geodésia, Geofísica, Eletroestática, Astronomia e Óptica, apresentou o π com 200 casas decimais. Gauss é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos;

- em 1874, William Shanks[28], escreveu o π corretamente até a 527ª casa decimal. Na verdade, ele chegou a calcular 707 casas decimais para π, usando a fórmula de Machin em 1873, mas o seu erro a partir da 528ª casa foi demonstrado em 1944 por D. F. Ferguson, utilizando uma calculadora. Logo, demorou cerca de 71 anos para descobrirem o seu erro;

- em 1949, os cálculos começaram a ser auxiliados por computadores, com o auxílio de John William Wrench Jr[29]., um pioneiro na utilização de computadores para cálculos matemáticos, alcançando neste ano 2037 casas decimais para π. Ele se tornou conhecido por seu trabalho, juntamente com Daniel Shanks[30], no cálculo da constante matemática π com cem mil dígitos, em 1961. Mais precisamente 100.265 casas decimais;

- em 1986, com a ajuda de um computador da NASA, o valor de π chegou a 29.360.000 casas decimais, passando logo depois para 134.217.700;

- em 1997 e, posteriormente, em 1999, Yasumasa Kanada[31] e Daisuke Takahashi[32] chegaram a 51.539.600.000 e 206.158.430.000 casas decimais;

- em 2002, Yasumasa Kanada (1949-2020), matemático japonês já citado acima, tornou-se conhecido por vários recordes mundiais, nas últimas duas décadas, no cálculo de casas decimais de π. Em 2002, Kanada obteve o recorde mundial do cálculo do número π, expandindo o número de casas decimais para 1,2411 trilhões de dígitos;

- em 2009, Daisuke Takahashi alcançou a marca de 2.576.980.370.000 casas decimais para o π;

[27] Carl Friedrich Gauss matemático, astrônomo e físico alemão, nasceu em 1777 e faleceu em 1855.
[28] William Shanks matemático inglês nasceu em 1812 e faleceu em 1882.
[29] John William Wrench, Jr. foi um matemático estadunidense. Nasceu em 1911 e faleceu em 2009.
[30] Daniel Shanks matemático estadunidense, nasceu em 1917 e faleceu em 1996.
[31] Yasumasa Kanada, matemático japonês, nasceu em 1949 e faleceu em 2020.
[32] Daisuke Takahashi, engenheiro japonês.

- em 2010, Fabrice Bellard[33], anunciou, mais precisamente no dia 31 de dezembro de 2009, um novo recorde de casas decimais para π, exatamente 2.699.999.990.000;

- em 2010 e, posteriormente, em 2011, Shigeru Kondo[34] e Alexander Yee[35], chegaram, em 2010, a 5.000.000.000.000 e, em 2011, a 10.000.000.000.000 casas decimais;

- em 2016, Peter Trueb calculou 22,4 trilhões de dígitos de π, batendo o recorde até então do número de casas decimais para π. Antes do dia 14 de março, conhecido como o dia do π, ele reflete sobre a natureza de π e seu papel na Matemática, nas Ciências e na Filosofia;

- em 14 de março de 2019, inclusive considerado o dia do π (3,14 – 3/14 – março quatorze), Emma Haruka Iwao, uma funcionária do *Google* Japão, quebrou o recorde absoluto e encontrou números nunca antes catalogados para as casas decimais do pi. A desenvolvedora do *Google Cloud* definiu 31,4 trilhões de dígitos da constante matemática, muito além do recorde anterior de 22,4 trilhões, de Peter Trueb, em 2016. O processo demorou 121 dias e o resultado ocupou 170 *terabytes*[36] de dados.

5.4.1. Demonstração da irracionalidade de π

No século XVIII, em 1761, Johann Heinrich Lambert provou que o π é irracional. Pelo que se tem conhecimento, foi o primeiro a demonstrar a irracionalidade do π. Ele usou frações contínuas para realizar a demonstração.

Para provar a irracionalidade de π, vamos usar a demonstração de Ivan Niven[37], apresentada em 1947 em um artigo intitulado “A simple proof that π is irrational”, cuja tradução é “Uma prova simples que π é irracional”, publicado no *Bulletin of the Americ an Mathematical Society*.

[33] Fabrice Bellard, francês, programador, nasceu em 1972.
[34] Shigeru Kondo, japonês, professor, nasceu em 1959.
[35] Alexander Yee, americano formado em Ciência da Computação e Engenharia Elétrica.
[36] Um *terabyte* (1 TB) é igual a 1.000 *gigabytes* (GB) ou a 1 milhão de *megabytes* (MB).
[37] Ivan Niven, matemático estadunidense, especialista em teoria dos números, nasceu no Canadá em 1915 e faleceu em 1999.

Na demonstração da irracionalidade de π, vamos utilizar ferramentas conhecidas em Cálculo Diferencial e Integral, geralmente aplicadas no 1º período da disciplina Cálculo I, além de Binômio de Newton, assunto geralmente trabalhado na 2ª série do Ensino Médio.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que π seja um número racional. Ao encontrarmos o absurdo, logo, ele não será racional, portanto, será irracional.

Logo, se estamos supondo π racional, existem números inteiros positivos a e b tal que $\pi = \frac{a}{b}$.

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^n.(a-bx)^n}{n!}, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Vamos analisar essa função em alguns aspectos:

1º) Os pontos 0 e π são raízes dessa função.

Explicação:

$$f(0) = \frac{0^n.(a-b.0)^n}{n!} = \frac{0.a^n}{n!} = 0 \quad \text{e}$$

$$f(\pi) = \frac{\pi^n.(a-b.\pi)^n}{n!}; \text{Mas supomos por absurdo } \pi = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Logo: } f(\pi) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n.\left(a-b.\frac{a}{b}\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n.(a-a)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n.0}{n!} = 0$$

Portanto, temos que: $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$.

2º) Quando x está entre 0 e π, a função dada é estritamente positiva.

Explicação:

É óbvio que se x está entre 0 e π , ele é positivo. Logo, $x > 0 \Rightarrow x^n > 0$.

E se x está entre 0 e π, $\pi = \frac{a}{b} > x > 0 \Rightarrow a > bx > 0 \Rightarrow (a-bx) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-bx)^n > 0$.

Como: $x^n > 0$, $(a-bx)^n > 0$ e o produto de dois números positivos é um número positivo, podemos afirmar que: $x^n.(a-bx)^n > 0$. Sabemos que $n!$ é sempre positivo.

$$\text{Logo: } \frac{x^n.(a-bx)^n}{n!} > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

3º) Quando x está entre 0 e π , tem-se $f(x).\operatorname{sen} x < \frac{\pi^n.a^n}{n!}$

Explicação:

Se x está entre 0 e π, $x < \pi \Rightarrow x^n < \pi^n$.

Como $b > 0$ e x está entre 0 e π, temos que $0 < bx$. Somando a nos dois membros da desigualdade, temos: $a < a + bx \Rightarrow a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$. Considerando que: $(a - bx) > 0$, $(a - bx)^n < a^n$ e $0 < \operatorname{sen} x < 1$, concluímos que:

$$f(x).\operatorname{sen} x =.\operatorname{sen} x < \frac{\pi^n.a^n}{n!}.1 = \frac{\pi^n.a^n}{n!}$$

4º) Qualquer que seja x, a imagem de x e a imagem de $(\pi - x)$ são iguais. Escrevendo simbolicamente, temos: $\forall x, f(x) = f(\pi - x)$.

Explicação:

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n.\left(a - b.\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n.(bx)^n}{n!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n.b^n.x^n}{n!} = \frac{\left[\left(\frac{a}{b} - x\right)^n.b^n\right].x^n}{n!} = \frac{\left[\left(\frac{a}{b} - x\right)b\right]^n.x^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n.x^n}{n!}$$

$$= f(x)$$

5º) A derivada de qualquer ordem de $f(x)$ no ponto 0 é sempre um número inteiro. Simbolicamente escrevemos: $f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$, onde $f^{(i)}$ representa a i-ésima derivada de $f(x)$.

Explicação:

Começamos observando que a função $f(x) = \frac{x^n.(a-bx)^n}{n!}$ tem grau igual a $2n$.

Desenvolvendo a função, temos:

$$f(x) = \frac{x^n.(a^n + \cdots + (-b)^n x^n)}{n!} = \frac{a^n x^n}{n!} - \cdots + \frac{(-b)^n x^{2n}}{n!}$$

A título de ilustração observe que:

Se $f(x) = K.x^8$. A partir da 9ª derivada todos os resultados são iguais a 0.

Na 8ª derivada, o resultado é uma constante.

Logo, a função acima é uma função de grau $2n$, então $f^{(i)}(x) = 0$, se $i > 2n$.

Então, para $i\ >\ 2n$, $f^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(i)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Ainda a título de ilustração, observe a função $f(x) = bx^7 + cx^6 + dx^5$. A partir da derivada de 8ª ordem, o resultado é igual a zero. A sétima derivada é uma constante e como o menor expoente de x tem grau 5, até a derivada de 4ª ordem, cada termo vai ter sempre um fator x. Logo, neste caso, $f^{(i)}(0) = 0$.

Então, temos:

Para $i < n$ ou $i > 2n, = 0\ \in \mathbb{Z}$.

Na função, falta verificar para $n \leq i \leq 2n$.

Observe que cada monômio$f^{(i)}(0)$ da função após ser desenvolvida,

$$f(x) = \frac{a^n x^n}{n!} - \cdots + \frac{(-b)^n x^{2n}}{n!} \text{ é da forma } \frac{k.x^{n+j}}{n!}, \text{com } 0 \leq j \leq n.$$

Considerando que $n \leq i \leq 2n$, temos que alguns termos terão grau menor do que i, outros termos terão grau maior do que i e um termo terá grau igual a i (para algum j, $i = n + j$. Ao calcular $f^{(i)}(0)$, os termos que têm grau menor do que i e os termos que têm grau maior do que i se reduzirão a zero, como comentamos anteriormente. Precisamos analisar quando $i = n + j$. Derivando $i = n + j$ vezes a função vamos obter:

$$\frac{(n+j).(n+j-1).(n+j-2),,,.2.1.k}{n!} = \frac{(n+j)!\,k}{n!} \in \mathbb{Z}$$

Observe que o numerador contém o fator $n!$, por isso podemos afirmar que ele é inteiro.

Resumindo temos: ao derivarmos $i = n + j$ vezes, será zero se o grau for menor do que $n + j$, ele permanecerá com um fator igual a x, se o grau for maior do que $n + j$ ou será uma constante inteira se o grau for exatamente $n + j$. Então, a derivada de ordem $n + j$ de cada monômio de f no ponto $x = 0$ vale zero ou é inteiro. Consequentemente $f^{(n+j)}(0)$ também é um inteiro, pois é a soma das derivadas de cada monômio. Logo, o caso que faltava está justificado.

6º) Já vimos que $f(x) = f(\pi - x)$. Logo $f^{(i)}(x) = (-1)^i . f^{(i)}(\pi - x)$

Explicação:

Derivamos os dois membros da igualdade. Observe que o segundo membro usa a regra da cadeia à derivada de "$-x$" é -1, portanto, na 1ª derivada aparece (-1). Na 2ª derivada $(-1).(-1) = (-1)^2 = 1$. Na 3ª derivada (-1), na 4ª derivada 1 e assim sucessivamente. Nas derivadas de ordem ímpar o resultado é negativo e nas derivadas de ordem par é positivo. Por isso aparece o $(-1)^i$.

7º) O número $f^{(i)}(\pi)$ é sempre um número inteiro.

Explicação:

Usando a afirmação anterior, temos:

$f^{(i)}(\pi) = (-1)^i . f^{(i)}(\pi - \pi) = (-1)^i f^{(i)}(0)$.

Como já vimos anteriormente, $f^{(i)}(0)$ é um número inteiro e este multiplicado por $(-1)^i$ resulta no mesmo número inteiro ou no seu simétrico.

Vamos definir agora uma segunda função e analisar alguns aspectos desta nova função.

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \qquad (2)$$

Analisando alguns aspectos desta nova função (2):

1º) Somando a 2ª derivada desta nova função com a própria função, encontramos a função $f(x)$, ou seja, $g^{(2)}(x) + g(x) = f(x)$

Temos:

$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + f^{(8)}(x) - \cdots$

$g'(x) = f'(x) - f^{(3)}(x) + f^{(5)}(x) - f^{(7)}(x) + f^{(9)}(x) - \cdots$

$g^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + f^{(10)}(x) - \cdots$

Somando $g^{(2)}(x) + g(x)$ temos:

$g^{(2)}(x) + g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + f^{(8)}(x) - \cdots +$

$+ f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + f^{(10)}(x) - \cdots = f(x)$.

2º) A integral $\int f(x).\text{sen}\, x\, dx$ é igual a $g'(x).\text{sen}\, x - g(x).\cos x$. Em outras palavras, estamos afirmando que $g'(x).\text{sen}\, x - g(x).\cos x$ é uma primitiva de $f(x).\text{sen}\, x$. Logo, derivando $g'(x).\text{sen}\, x - g(x).\cos x$ encontramos $f(x)\text{sen}\, x$.

Vejamos:

Derivando em relação a x, $g'(x).\text{sen}\, x - g(x).\cos x$ obtemos:

$\frac{d}{dx}[g'(x).\text{sen}\, x - g(x).\cos x] =$

$= g^{(2)}(x).\text{sen}\, x + g'(x).\cos x - g'(x).\cos x + g(x).\text{sen}\, x =$

$= g^{(2)}(x).\text{sen}\, x + g(x).\text{sen}\, x =$

$= [g^{(2)}(x) + g(x)].sen\, x =$

$= f(x).\operatorname{sen} x$

3º) A soma $g(0) + g(\pi)$ é um número inteiro.

Explicação:

$g(0) = f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0)$, como $f(0), f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$ e a soma de números inteiros é sempre um número inteiro, temos que $g(0) \in \mathbb{Z}$.

De forma análoga fazemos com $g(\pi)$. Temos que:

$g(\pi) = f(\pi) - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$;

$f(\pi)$ e $f^{(i)}(\pi) \in \mathbb{Z}$, a soma de números inteiros é sempre um número inteiro, temos que $g(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Como $g(0) \in \mathbb{Z}$ e $g(\pi) \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que $g(0) + g(\pi) \in \mathbb{Z}$.

4º) A integral de 0 a π de $f(x).\operatorname{sen} x\,.dx$ é um número inteiro.

Explicação:

$$\int_0^\pi f(x).\operatorname{sen} x\,.dx = [g'(x).\operatorname{sen} x - g(x).\cos x]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} =$$

$$= [g'(\pi).\operatorname{sen}\pi - g(\pi).\cos\pi] - [g'(0).\operatorname{sen} 0 - g(0).\cos 0] =$$

$= g(\pi) + g(0)$, como foi colocado no item anterior é um número inteiro.

5º) Se x está entre 0 e π vale a desigualdade:

$$0 < \int_0^\pi f(x).\operatorname{sen} x\,.dx < \frac{\pi^{n+1}.a^n}{n!}$$

Explicação:

Já vimos que:

$$0 < f(x).\operatorname{sen} x < \frac{\pi^n.a^n}{n!}$$

Logo:

$$0 < \int_0^\pi f(x).\operatorname{sen} x\,.dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n.a^n}{n!}.dx$$

Desenvolvendo a 2ª integral temos:

$$\int_0^\pi \frac{\pi^n.a^n}{n!}.dx = \left[\frac{\pi^n.a^n}{n!}.x\right]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} = \frac{\pi^{n+1}.a^n}{n!}$$

Da teoria dos limites, segue que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{\pi^{n_0+1}.\, a^{n_0}}{n_0!} < 1$$

Intuitivamente, significa que quando n tende ao infinito $(n \to \infty)$, o denominador é muito maior que o numerador, ou seja, a fração tendo a zero.

Considerando $n = n_0$, temos:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x).\operatorname{sen} x\, .\, dx < \frac{\pi^{n+1}.\, a^n}{n!} < 1$$

Portanto:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x).\operatorname{sen} x\, .\, dx < 1$$

Absurdo não existe número inteiro entre 0 e 1. Como vimos, a integral $\int_0^{\pi} f(x).\operatorname{sen} x\, .\, dx$ representa um número inteiro.

5.5.
O número de Euler

Segundo Maor (2008), em *A História do Número*, as origens do número *e* não são muito claras, elas parecem recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que aparecia na fórmula de juros compostos, tendia a um certo limite, cerca de 2,71828, à medida que n aumenta. Assim, tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Segundo Geraldo Ávila (2006), em *Análise Matemática para Licenciatura*, o número e surgiu na Matemática pela primeira vez no século XVIII, na consideração de um problema de juros compostos instantaneamente. Neste contexto, ele é definido mediante o limite $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basel, Suíça. Adquiriu gosto pela Matemática e fez dela sua principal ocupação após as aulas que frequentou como estudante de Johann Bernoulli (1667-1748) na universidade. A produção científica de Euler é bastante grande e bem variada, distribuindo-se por diversas áreas do conhecimento, tais como a Matemática, Engenharia, Física, Astronomia e

Construção Naval. O mais influente entre os trabalhos de números de Euler foi sua *Introductio in analysin infinitorum* (*Introdução à análise do infinito*), obra em dois volumes escrito por Leonhard Euler que introduz as bases da análise matemática. Escrito em latim e publicado em 1748, o *Introductio* contêm 18 capítulos no primeiro volume e 22 no segundo volume. Neste magnífico trabalho, Leonhard Euler resumiu diversas descobertas sobre séries infinitas e frações contínuas e chamou atenção para o número e e da função e^x.

Euler usou a letra grega e para “aquele número cujo logarítmico hiperbólico é igual a 1” (BOYER, 1991, p.326).

Euler apresentou as seguintes definições para a função e^x e para a função $\ln x$:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad \ln x = \lim_{n\to\infty} n.\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

Ilustração para valores de n em $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Figura 21 - Valores para e = $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

n	$y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037037
4	2,44140625
5	2,48832
10	2,59374246
20	2,653297705
30	2,674318776
40	2,685063838
50	2,691588029
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469

Fonte: elaborado pelo autor usando a calculadora.

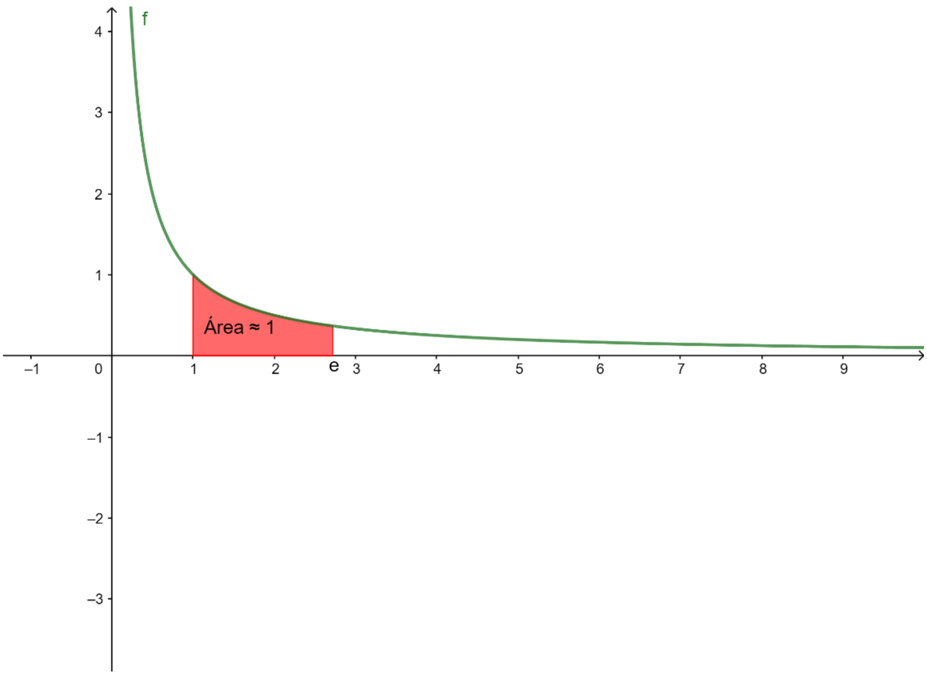
Observe que à medida que o valor de n aumenta $(n \to \infty)$, o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima de 2,71828...

Definimos $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ equivalentemente, $e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Encontramos também a seguinte definição:

Seja a função $f(x) = \frac{1}{x}$, para x $>0.$ O número e é definido como o número real tal que a área limitada pela função $f(x)$, eixo das abscissas, as retas $x = 1$ e $x = e$ seja igual a 1.

Figura 22 - Área limitada pela função f(x), eixo das abscissas e as retas x = 1 e x = e



Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.

A série abaixo foi descoberta por Isaac Newton em 1665 e também é usada para definir o número e:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

5.5.1. Fórmula de Euler

A fórmula de Euler relaciona dois números irracionais e e π.

$e^{i.x} = \cos x + i.$sen x e para $x = \pi$, temos: $e^{i.\pi} = -1$ ou $e^{i.\pi} + 1 = 0$

Demonstração:

Para demonstrar as fórmulas acima, Euler considerou os seguintes desenvolvimentos em série:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Devemos lembrar que: $i^{4n+1} = 1$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$ e $i^{4n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Se desenvolvermos a série para e^{ix} (no lugar de x trabalhamos com ix), temos:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \cdots =$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{i.x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i.\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= \cos x + i.\operatorname{sen} x$$

Logo: $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$. Considerando $x = \pi$, temos:

$e^{i\pi} = \cos\pi + i.\sin\pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1 + i.0 \Rightarrow e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0.$

Esta equação relaciona constantes importantes da Matemática que podem simbolizar quatro de seus grandes ramos: aritmética representada pelo 0 e pelo 1; a álgebra representada pelo i; a geometria representada pelo π e a análise matemática representada pelo e.

A partir da Fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i.\,\mathrm{sen}\, x$ substituindo ix por $-ix$, e, posteriormente, somando e subtraindo as duas expressões obtemos:

$$e^{ix} = \cos x + i.\,\mathrm{sen}\, x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos x - i.\,\mathrm{sen}\, x$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-x}}{2} \;\text{ e }\; \mathrm{sen}\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\;.$$

5.5.2.
Demonstração da irracionalidade do Número de Euler

Suponhamos por absurdo $e \in \mathbb{Q}$, ou seja, podemos escrever $e = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, m.d.c.$(p, q) = 1$.

Como estamos admitindo por absurdo $e = \frac{p}{q}$, $e \notin \mathbb{N}$, logo $q \geq 2$. (Se $q = 1, e \in \mathbb{N}$).

Sabemos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;$$

Sendo assim, temos:

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por $q!$, temos:

$$\frac{p}{q}.\,q! = 2q! + \frac{1}{2!}q! + \frac{1}{3!}q! + \cdots + \frac{1}{(q-1)!}q! + \frac{1}{q!}q! + \frac{1}{(q+1)!}q + \frac{1}{n!}q! + \cdots$$

Desenvolvendo...

$$\frac{p}{q}.\,q.\,(q-1)! = q! + q! + \frac{1}{2}.\,1.2.3 \ldots..\,q + \frac{1}{3!}.\,1.2.3 \ldots..\,q + \cdots +$$

$$+\frac{1}{(q-1)!}.q.(q-1)! \quad +\frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1).q!}.q! + \cdots + \frac{1}{n!}.q! + \cdots$$

O que implica em:

$$p.(q-1)! = q! + q! + 3.4 \ldots..q + 4.5 \ldots..q + \cdots + q + 1 + \frac{1}{(q+1)} +$$

$$+\frac{1}{(q+1).(q+2)} \ldots + \frac{1}{n!}.q! + \cdots$$

Logo, escrevendo os números inteiros à esquerda da igualdade e os números fracionários à direita da igualdade, temos:

$$p.(q-1)! - (q! + q! + 3.4 \ldots..q + 4.5 \ldots..q + \cdots + q + 1) =$$
$$= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1).(q+2)} \ldots + \frac{1}{n!}.q! + \cdots$$

No primeiro termo da igualdade, temos soma, subtração e produto entre números inteiros, logo, o resultado das operações será um número inteiro.

À direita da igualdade, temos frações onde podemos observar que:

$$\frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3} \quad (q \geq 2);$$

$$\frac{1}{(q+1)(q+2)} \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

$$\frac{1}{n!} \times q! = \frac{1}{(q+1).(q+2)\ldots..(q+(n-q))} \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{n-q}}.$$

Logo, no 2º membro da igualdade (*) temos:

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1).(q+2)} \ldots + \frac{1}{n!}.q! + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-q}} + \cdots$$

Mas, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-q}}+\cdots$

Temos acima a soma de termos que representa uma P.G. (Progressão Geométrica). Neste caso, é uma P.G. infinita onde o 1º termo é $\frac{1}{3}$ e a razão é $\frac{1}{3}$.

$$\text{Logo: } S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

Portanto, a partir de:

$$1^{\text{º}})\ p.(q-1)!=q!+q!+3.4\ldots..q+4.5\ldots..q+\cdots+q+1+\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1).(q+2)}\ldots+\frac{1}{n!}.q!+\cdots$$

$$2^{\text{º}})\ \frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1).(q+2)}\ldots+\frac{1}{n!}.q!+\cdots\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-q}}+\cdots$$

$$3^{\text{º}})\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-q}}+\cdots=\frac{1}{2}$$

Segue que: $p.(q-1)!-(q!+q!\ldots+1)\leq\frac{1}{2}$.

Absurdo. Não existe número inteiro entre 0 e $\frac{1}{2}$. O absurdo ocorreu ao supor que o número e é número racional. Logo, o número e é irracional.

5.6.
O número de ouro

O número de ouro também chamado de razão áurea, razão de ouro, divina proporção, número áureo, proporção de ouro, segmento áureo, proporção em extrema razão, divina em extrema razão, entre outros nomes, é um número irracional indicado pela letra grega ϕ (Phi maiúsculo), uma homenagem ao escultor e arquiteto Phidias[38] (Fídias), que teria utilizado para construir o Partenon,[39] em Atenas.

[38] Phidias arquiteto grego, nasceu em 480 a.C. e faleceu em 430 a.C.
[39] Partenon é nome de um templo, erguido no século V a.C., na Acrópolis, uma montanha localizada no centro da cidade de Atenas, cuja estrutura, apesar do tempo, conflitos e poluição, ainda se encontra preservada. A palavra Partenon significa "a sala da virgem" e o objetivo de tal edifício era prestar uma homenagem à deusa Atena.

O valor de ϕ é aproximadamente 1,618.

No livro *VI dos Elementos*, Euclides[40] constrói a seguinte definição: um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo.

Figura 23 - Partenon - Grécia Antiga

Fonte: https://www.infoescola.com/grecia-antiga/partenon/
Acesso em 01/08/20.

Vamos supor um segmento $\overline{\text{AB}}$ de comprimento igual à unidade. Seja um ponto C do segmento $\overline{\text{AB}}$ tal que o segmento maior tenha comprimento x e o segmento menor tenha comprimento $(1 - x)$. Observe a figura abaixo:

Figura 24 - Segmento Áureo

Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

A razão entre o menor segmento $\overline{\text{CB}}$ e o maior segmento $\overline{\text{AC}}$ é igual à razão entre o maior segmento $\overline{\text{AC}}$ e o segmento todo $\overline{\text{AB}}$.

$$\frac{\overline{\text{CB}}}{\overline{\text{AC}}} = \frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{AB}}} \Rightarrow \frac{1 - x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow (1 - x).1 = x.x \Rightarrow 1 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

[40] Euclides de Alexandria foi um professor, matemático platónico e escritor grego. Em relação a data de nascimento e morte, a única coisa que sabemos é que ele nasceu no século III a.C.

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \qquad \Delta = 5 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x é positivo, obtemos: $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$

Logo: $$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(-1+\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

O número de ouro também pode ser enunciado da seguinte forma:

Sejam $a, b > 0, a > b$. Dois valores positivos estão em razão áurea se sua razão for igual à razão da soma pela maior das quantidades. Então:

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$, onde Φ indica a razão áurea. Se $\frac{a}{b} = \Phi$, podemos escrever: $a = b\Phi$.

Substituindo $a = b\Phi$, na igualdade temos:

$$\frac{b\Phi + b}{b\Phi} = \frac{b\Phi}{b}$$

Dividindo os dois membros da equação por b, temos:

$$\frac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi \ \Rightarrow \ \Phi + 1 = \Phi^2.$$

Subtraindo Φ^2 em ambos os membros da equação e multiplicando por (–1), obtemos:

$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como Φ é positivo, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803$ ...

Observe que o número ϕ é um número irracional.

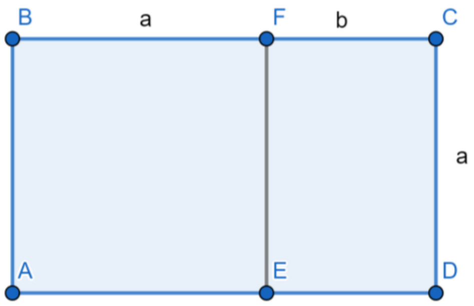
Como foi mostrado na definição e na 1ª propriedade citada, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Logo, no numerador temos a soma de um número racional com um número irracional, e a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional. Portanto, no numerador, temos um número irracional, dividido por 2 que é racional, o quociente é um número irracional. Portanto, ϕ é irracional.

5.6.1. Retângulo áureo

Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como ABFE, o retângulo restante, CDEF, será semelhante ao retângulo original, conforme a figura abaixo:

Figura 25 - Retângulo Áureo



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow ab + b^2 = a^2 \Rightarrow -a^2 + ab + b^2 = 0.$$

Estou procurando o valor da razão: $\frac{a}{b}$.

Logo, vamos dividir a equação toda por b^2 para encontrarmos a razão procurada.

$$-\frac{a^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 0.$$

Chamando $\frac{a}{b}$ de Φ, temos: $-\Phi^2 + \Phi + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

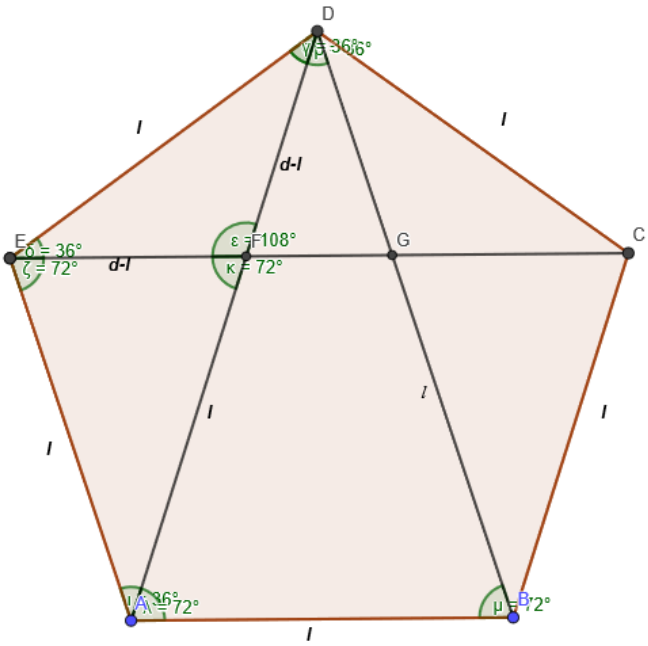
Como Φ é positivo, visto que $\Phi = \frac{a}{b}$, $a > 0$ e $b > 0$.

Considerando $\sqrt{5} \cong 2{,}236$, encontramos: $\Phi \cong 1{,}618 \ldots$

5.6.2.
O número de ouro e o pentágono regular

Considere um pentágono regular de lado igual a *l*. Neste caso, a sua diagonal tem como medida o número de ouro.

Figura 26 - Número de ouro e o pentágono regular

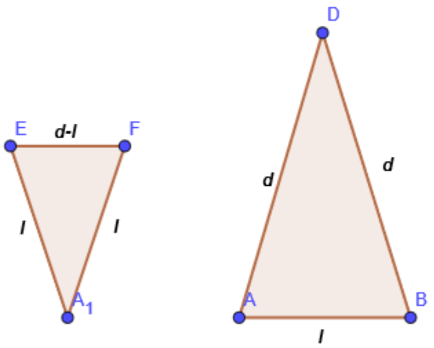


Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

O pentágono regular possui os cinco ângulos internos medindo 108° cada um.

Os triângulos AEF e DAB são semelhantes, os dois são triângulos isósceles, em que os ângulos da base medem 72° cada um deles. Logo, temos:

Figura 27 - Triângulos de um pentágono regular



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Temos: $\frac{d-l}{l} = \frac{l}{d}$. Considerando lado do pentágono unitário, segue:

$$\frac{d-1}{1} = \frac{1}{d} \Rightarrow d^2 - d = 1 \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como a medida da diagonal tem que ser positiva, temos:

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

5.6.3. Sequência de Fibonacci

No século XIII, o matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, nasceu no ano de 1170, a partir da publicação do livro Abacci, em 1202, tornou-se famoso, principalmente devido aos inúmeros temas desenvolvidos nesse trabalho. Entre outros estudos, aparece o clássico problema envolvendo populações de coelhos que foi base para a sequência de Fibonacci, que analisando a razão entre cada termo desta sequência e o termo anterior tende ao número de ouro.

Vejamos o problema inicialmente:

Suponha que um casal de coelhos demore dois meses para procriar. A partir daí, a cada mês produz um novo casal de coelhos. Começando no mês 1 com um único casal, qual é o número de casal de coelhos no mês n?

Solução:

Os dois primeiros termos da sequência são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. O casal original demora dois meses para procriar. O terceiro termo da sequência é $F_3 = 2$, ou seja, o casal original e o primeiro casal de filhotes. O quarto termo da sequência é $F_4 = 3$, o casal original tem mais um, mas o outro ainda não gera filhotes. Em cada mês n, ($n \geq 3$), estarão presentes os casais já presentes no mês anterior, mais um número novo de filhotes correspondentes aos já maduros. Mas observe que, neste caso, são os casais que já estavam presentes nos dois meses anteriores.

Logo, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_1 = F_2 = 1$.

O termo geral da sequência de Fibonacci é:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

O nosso objetivo aqui é mostrar que as razões entre cada termo da sequência de Fibonacci e o termo anterior, a medida que aumenta o valor de n, se aproximam do número de ouro.

Observe a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...).

Veja as razões:

$\frac{1}{1} = 1;$ $\frac{2}{1} = 2;$ $\frac{3}{2} = 1{,}5;$ $\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$ $\frac{8}{5} = 1{,}6;$

$\frac{13}{8} = 1{,}625;$ $\frac{21}{13} = 1{,}615;$ $\frac{34}{21} = 1{,}619\ldots;$ $\frac{55}{34} = 1{,}6176\ldots;$

$\frac{89}{55} = 1{,}61818\ldots;$ $\frac{144}{89} = 1{,}61798\ldots;$

Os resultados estão cada vez mais próximos do número de ouro.

5.6.4.
Curiosidades sobre o número de ouro

Você pode encontrar o número de ouro na Matemática e em outras áreas. Vamos citar alguns exemplos:

a) os gregos representavam o número de ouro através do pentagrama,[41] que contém a proporção áurea em todos os segmentos;

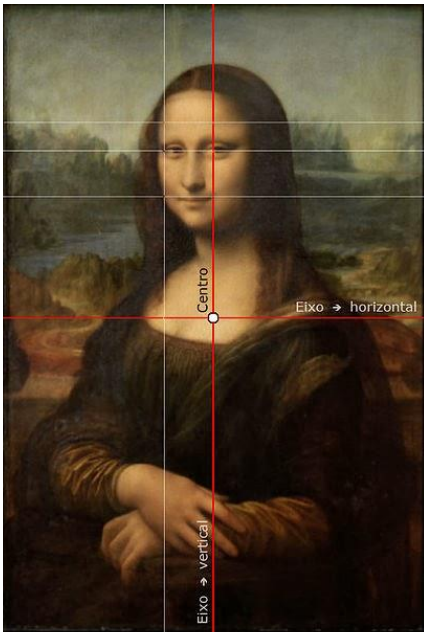
b) um decágono regular, inscrito numa circunferência, possui os lados em proporção áurea com o raio da circunferência;

c) o número de ouro é encontrado em várias obras de Leonardo da Vinci, você encontra a divina proporção, por exemplo, no quadro de *Mona Lisa*. O quadro de *Mona Lisa* tem proporção áurea nas relações entre tronco e cabeça, bem como

[41] Um pentagrama é uma estrela composta por cinco retas e que possui cinco pontas.

nos elementos da face. Inclusive esta característica é inerente à maioria dos seres humanos. Em outras obras como o *Nascimento de Vênus*, quadro de Botticelli, Afrodite está em proporção áurea;

Figura 28 - *Mona Lisa*

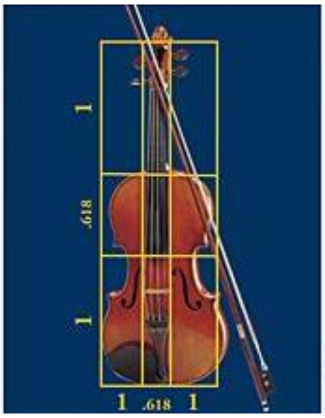


Fonte: https://rafaelmussel.blogspot.com/p/a-proporcao-aurea-numero-de-ouro-numero.html. Acesso em 02/08/20.

d) em relação ao corpo humano, algumas medidas são aproximadas, por exemplo, a altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão; a altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça; as medidas do quadril e do seu joelho até o chão; o tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta; a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo; a medida da cintura até a cabeça e a medida do tórax; a medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta. Todas essas proporções anatômicas ideais foram representadas pelo *Homem Vitruviano*, obra de Leonardo Da Vinci;

e) na música, existem artigos que relacionam as composições de Mozart, Bethoveen (Quinta Sinfonia), Schubert e outros com a razão áurea. Até mesmo a construção de alguns instrumentos está relacionada à proporção áurea. Como, por exemplo, o violino.

Figura 29 - Violino e o número de ouro



Fonte: https://www.pinterest.pt/pin/87538786484378562/
Acesso em 02/08/20.

f) o diretor russo, Sergei Eisenstein, utilizou o número ϕ no filme *O Encouraçado Potemkin* para marcar o início de cenas importantes do filme, medindo a razão pelo tamanho das fitas de películas.

6

O ensino dos números irracionais

Os obstáculos encontrados pelo professor em descobrir a melhor forma de apresentar e explicar o conceito de números irracionais no Ensino Fundamental Anos Finais, usando uma forma contextualizada, fazendo com que o aluno realmente compreenda o significado de um número irracional são inúmeros, tornando-se um grande desafio para o professor. Não podemos deixar de considerar a falta de maturidade que um aluno de 8º ou 9º ano tem em termos matemáticos, sendo para ele, neste período, um conceito muito abstrato. Considerando que alunos do Ensino Médio e, até mesmo, do Ensino Superior apresentam essa dificuldade. Além da falta de maturidade apresentada pelo aluno, devemos analisar também de que forma foram lhe apresentado os conceitos de números naturais, números inteiros e, principalmente, números racionais.

Por exemplo, vários alunos, de forma errônea, têm a ideia de que o conjunto dos números irracionais é infinitamente pequeno quando comparado ao conjunto dos números racionais, talvez isto se deva ao fato de como, geralmente, se conhece o conjunto dos números irracionais. Vejamos a situação abaixo:

No 6º ano, o aluno aprende o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, observando o fato de que, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, o 0 (zero) é incluído como um número natural.

No 7º ano, o aluno chega ao conjunto dos números inteiros, aprendendo os números negativos. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Mostra-se ao aluno que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, todo número natural é um número inteiro.

No 7º ou no 8º ano, o aluno conhece o conjunto dos números racionais, conjunto $\mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q} = \{x | \, x = \frac{p}{q}, \text{onde } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Logo, ele percebe facilmente que todo número inteiro pode ser escrito em forma de fração. Dado $x \in \mathbb{Z}, x = \frac{x}{1}$. Além dos inteiros, é ensinado a eles que os decimais exatos e as dízimas periódicas podem ser escritos em forma de fração, simplesmente encontrando a fração geratriz. Neste último caso, já não é tão simples, porque a grande maioria dos alunos não lembra como encontrar uma fração geratriz.

Normalmente, surge a pergunta - quais os números que não podem ser escritos em forma de fração? - e a resposta, muitas vezes, resume-se ao $\pi = 3{,}1415926\ldots$, o que para o aluno não é tão simples, porque a maioria conhece o π apenas como 3,14, e só o 3,14 pode ser escrito em forma de fração $\frac{314}{100}$ e, além do π, algumas raízes não exatas como $\sqrt{2}, \sqrt{3},$ etc... O que faz com que, para os alunos, fique a ideia de que os racionais são "muitos números" e os irracionais, "poucos números". Infelizmente, a partir deste momento, começa a se falar em números reais como todos os números vistos até o momento.

Quando é apresentado ao aluno o conjunto dos números racionais como o conjunto dos números que podem ser escritos em forma de fração, e o conjunto dos números irracionais como o conjunto dos números que não são racionais, em nenhum momento, estamos afirmando que está errado, desde que consideremos o universo como o conjunto dos números reais. O cuidado deve ser pelo fato de que, muitas vezes, o aluno ainda não foi apresentado a este último tipo de conjunto, sendo assim, ele pode concluir que $\sqrt{-1}$ não é nem um número natural, nem inteiro e nem racional, ou seja, pode vir a concluir que se trata de um número irracional. Caso ele já tenha conhecimento dos números reais, não vai, provavelmente, chegar a este tipo de conclusão.

Vamos apresentar nesta unidade algumas análises de como os livros didáticos apresentam os números racionais. Incluindo algumas pesquisas antigas e atuais realizadas por mim. Quando falamos sobre livros didáticos, estamos incluindo apostilas de alguns sistemas de ensino.

6.1.
Análise de livros didáticos envolvendo números irracionais

O livro didático é um material frequentemente utilizado nas escolas, sendo assim influenciador no processo ensino-aprendizagem. Todas as escolas públicas de educação básica do Brasil utilizam o livro didático fornecido pelo PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático.

> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) compreende um conjunto de ações voltadas para a distribuição de obras

> didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, destinados aos alunos e professores das escolas públicas de educação básica do País. O PNLD também contempla as instituições comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. As escolas participantes do PNLD recebem materiais de forma sistemática, regular e gratuita. Trata-se, portanto, de um Programa abrangente, constituindo-se em um dos principais instrumentos de apoio ao processo de ensino-aprendizagem nas Escolas beneficiadas. (FNDE, 2020).

Algumas escolas da rede privada hoje preferem trabalhar com apostilas de determinados sistemas de ensino, muitas são confeccionadas na própria escola.

Normalmente, os livros didáticos de Matemática mantem uma apresentação uniforme, geralmente seguem a sequência: definições, propriedades, teoremas (alguns com demonstração), exemplos e exercícios. Não devemos deixar de recordar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental consideram de suma importância que o ensino seja significativo para o aluno. O que trouxe, ao longo dos últimos anos, uma mudança considerável no estilo do livro didático, trazendo situações do dia a dia e explicando o "porquê" de algumas situações.

Antes de analisar alguns livros didáticos usados no Ensino Fundamental Anos Finais (com alguns dos quais, inclusive, eu já trabalhei), vamos apresentar certas pesquisas realizadas há alguns anos sobre livros didáticos em geral, mas focando no tema dos números irracionais para podermos fazer uma comparação.

Inicialmente, vamos comentar sobre uma pesquisa diagnóstica realizada por Santos em 2007. Após a pesquisa, a autora conclui que a maioria dos livros didáticos faz uma apresentação dos números irracionais por meio de um enfoque algébrico. Ela destaca que os números irracionais são apresentados de dois modos:

- $\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$ ou
- $\mathbb{Q} = \{x | x \text{ é um número decimal exato ou } x \text{ é dízima periódica}\}$

Segundo a pesquisa realizada pela autora, muito poucos livros mostram a equivalência entre as duas formas apresentadas.

Na verdade, o que pode parecer óbvio, à primeira vista, para a grande maioria dos alunos não é equivalente, principalmente, pelo fato de o conceito de dízima periódica não ser bem claro para ele. Isto é facilmente percebido quando se está explicando o conjunto dos números racionais e se escreve, por exemplo, que uma dízima periódica é um número racional, porque ele pode ser escrito em forma de fração, o que a grande maioria dos alunos não consegue visualizar. Mesmo quando se coloca exemplos do tipo: 0,3333... = 1/3. Alguns alunos só entendem, ou talvez, concordam, quando se arma a conta e divide 1 por 3.

De forma análoga a definição de números irracionais:

- $\mathrm{I} = \left\{ x \middle| x \text{ não é da forma } \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ ou
- $\mathrm{I} = \{ x | x \text{ é um número decimal infinito que não é dízima periódica} \}$

Sem contar o fato de que alguns livros sequer mencionam a existência de números irracionais. A autora ainda destacou que, nos livros pesquisados, existem as definições circulares em relação à definição dos números reais. Ao mesmo tempo que caracteriza o conjunto dos números reais como a união entre os conjuntos dos números racionais e irracionais e, muitas vezes, a partir daí os números irracionais são apresentados.

Em relação à outra pesquisa envolvendo livros didáticos, Silva (2011) destaca que a forma como os números irracionais são introduzidos não favorece a exploração das noções de densidade, incomensurabilidade, infinitude e completude dos números reais.

Essas pesquisas citadas descrevem o tema dos números irracionais no ciclo básico. Como colocamos anteriormente, o objetivo de citar pesquisas anteriores é o de comparar com pesquisas realizadas em livros editados nos últimos anos.

No Brasil, existem diversas coleções de livros didáticos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, procuramos escolher quatro coleções que estão entre os livros aprovados pelo PNLD e que possuem grande circulação a nível nacional. A ideia é verificar como são introduzidos e desenvolvidos os números irracionais numa abordagem mais imparcial, até porque a minha experiência no magistério leva-me a acreditar que o livro didático bom é aquele que se adequa à determinada turma.

As quatro escolhas foram feitas sem ordem de preferência, foram escolhidos livros de minha coleção, dos quais, inclusive, dois já auxiliaram o meu trabalho na Rede Municipal de Ensino. Acompanhei o uso da primeira coleção citada por meio do ensino da minha filha pelo no Colégio Pedro II – Campus Realengo. Embora estejamos falando de coleções, como o assunto tratado é os números irracionais, vamos trabalhar diretamente com livros do 8º ano do Ensino Fundamental, ano em que geralmente é introduzido o conjunto dos números irracionais. As coleções escolhidas foram:

1ª) IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade*. 8º ano. Ensino Fundamental. Editora Atual. 6ª ed., 2009. ISBN 978 - 85-357-1067-0 (aluno). ISBN 978-85-1068-7 (professor). Em relação aos autores, Gelson Iezzi é engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da USP e licenciado pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP; Osvaldo Dolce, engenheiro cívil pela Escola Politécnica da USP e professor efetivo da rede pública estadual de São Paulo; Antonio Machado, licenciado em Matemática e mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP e professor de escolas particulares de São Paulo (dados colhidos na 1ª página do livro da coleção citada). Nos comentários a seguir, vamos chamar esta coleção de "Coleção α";

2ª) ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. *Praticando a Matemática*. 8º ano: Ensino Fundamental. Editora do Brasil. 3ª edição renovada, 2015. ISBN 978-85-10-06114-8 (aluno). ISBN 978-85-10-06115-5 (professor). Em relação aos autores, Andrini é licenciado em Matemática, Física e Desenho Geométrico pela Universidade de Taubaté – SP, pós-graduado em Álgebra Linear e em Equações Diferenciais e autor de diversos livros didáticos; Maria José Vasconcelos, licenciada em Matemática, Física e Desenho Geométrico pela Universidade de São Paulo (dados colhidos na 1ª página da coleção citada). Nos comentários, vamos chamar de "Coleção β";

3ª) GIOVANNI JR., José Ruy; CASSTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática*. 8º ano: Ensino Fundamental. Editora FTD. 4ª e.d. São Paulo, 2018. ISBN 978-85-96-01917-0 (aluno). ISBN 978-85-96-01918-7 (professor). Em relação aos autores, José Ruy Giovanni Junior é licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), foi professor e assessor de Matemática de Ensino Fundamental e de Ensino Médio desde 1985; Benedito Castrucci (falecido em 2 de janeiro de 1995) foi bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP), foi professor da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e da Universidade de São Paulo (USP), foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e de Ensino Médio (dados colhidos no próprio livro). Nos comentários vamos chamar de "Coleção λ";

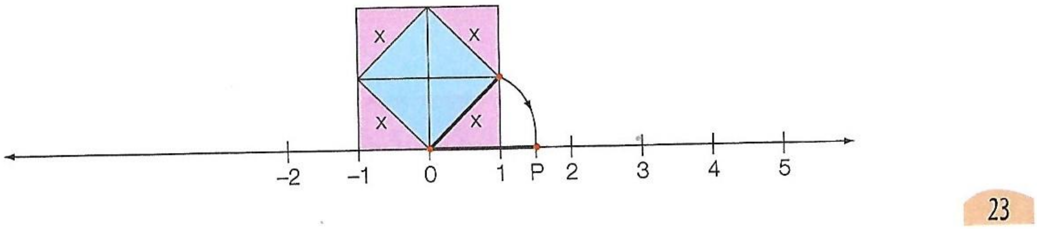
4ª) SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Rosana Morena. *Vontade de Saber*. 8º ano. Editora FTD. 3ª edição, São Paulo, 2015. ISBN 978-85-20-00237-7 (aluno). ISBN 978-85-20-00238-4 (professor). Em relação aos autores, Joamir Roberto de Sousa é licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR) e mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR). Atua como professor de Matemática da rede pública de ensino e é autor de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio; Patrícia Rosana Moreno Pataro é professora graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina e atua como professora de Matemática em escolas da rede particular de ensino (dados colhidos no próprio livro). Nos comentários, vamos chamar de "Coleção θ".

6.1.1. Coleção α

O livro começa tratando dos números irracionais, partindo dos números racionais, afirmando que cada número racional é representado por um ponto na reta e que, mesmo que fosse possível marcar nesta cada um dos pontos que representam números racionais, ainda assim não marcaríamos todos os pontos, afirmando que existem pontos na reta que não correspondem aos números racionais.

Ele apresenta por meio de uma associação geométrica a $\sqrt{2}$, em que traça um quadrado de 1 cm de lado e dentro dele um outro quadrado unindo os pontos médios dos seus lados. Cada lado deste segundo quadrado mede $\sqrt{2}$, medida esta que o aluno pode calcular, ou seja, a área do segundo quadrado é 2 cm². O objetivo é que, com o auxílio do compasso, o aluno projete a medida deste lado sobre a reta numérica, marcando o ponto P, conforme figura abaixo:

Figura 30 - Introdução a números irracionais – coleção α - Reta numérica



Fonte: IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009

Ele mostra ao aluno que P deve corresponder ao valor de x e que é um número compreendido entre 1 e 2, considerando que a área do quadrado azul é 2 cm², de onde se conclui que $x^2 = 2$. Um dos poucos livros que eu conheço que destaca o fato de que não pode ser um racional $\frac{p}{q}$ porque, substituindo p e q por inteiros e calculando a expressão $\left(\frac{p}{q}\right)^2$, não há possibilidade de encontrar resultado 2.

Na minha visão, neste momento, dependendo da turma com a qual se esteja trabalhando, vale apenas fazer a partir de uma linguagem simples a demonstração de que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2. Considerando o fato de se estar numa turma de 8º ano do Ensino Fundamental, esta demonstração, além de ser feita através de uma linguagem simples, pode ser acompanhada de forma paralela por exemplos numéricos.

A partir deste momento, os autores referem-se ao fato de que o ponto P não está representando um número racional e para se ter uma ideia do valor de x eles pedem para observar alguns cálculos usando aproximação: $(1{,}4)^2$ e $(1{,}5)^2$, depois $(1{,}41)^2$ e $(1{,}42)^2$, $(1{,}414)^2$ e $(1{,}415)^2$. A partir dos resultados, eles concluem que a aproximação com uma casa decimal é 1,4, com duas, 1,41 e com três, 1,414. O x não pode ser representado por um número decimal exato e nem por uma dízima periódica, porque, nestes casos, seriam números racionais. Eles concluem que a representação decimal do x é infinita e não periódica.

Depois desta introdução, os autores definem o número irracional como todo número representado em pontos da reta que não corresponder a números racionais. A representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica.

Após apresentar a definição de números irracionais, o livro trata dos números reais, afirmando que o número real é todo número racional ou irracional e parte para os exercícios.

Particularmente, embora nunca tenha trabalhado com a coleção citada, como coloquei anteriormente, acompanhei o desenvolvimento da minha filha no Colégio Pedro II – Realengo, onde era usado este livro, e me surpreendi positivamente com os questionamentos dela sobre os números irracionais e com o interesse em entender pontos como uma demonstração.

6.1.2. Coleção β

O livro apresenta a ideia de números irracionais como um "novo tipo de número". Para indicar este novo tipo de número, os autores introduzem a ideia de $\sqrt{2}$ e orientam a procurar o algarismo que elevado ao quadrado seja igual a 2.

O material começa com $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$. Logo, ele conclui que $\sqrt{2}$ é um número decimal entre 1 e 2. O curioso é que este livro usa uma ilustração para induzir o aluno ao uso da calculadora. Os autores escrevem: "Use uma calculadora para conferir os resultados obtidos por Carla". Mais adiante, eles orientam, inclusive, como calcular a raiz quadrada, usando a calculadora.

E, por aproximação, o livro segue:

$1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2{,}25 \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$;

$1{,}41^2 = 1{,}9881$ e $1{,}42^2 = 2{,}0164 \Rightarrow 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$;

Ele destaca que com mais algumas etapas, Carla poderia encontrar:

$1{,}414213562^2 = 1{,}999999999$ e $1{,}414213563^2 = 2{,}000000002$

Portanto, $1{,}414213562 < \sqrt{2} < 1{,}414213563$.

Segue que Carla poderia prosseguir indefinidamente esta aproximação, pois a representação de $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais e não é periódica. A partir deste exemplo, eles afirmam que há números cuja forma decimal é infinita, mas não é periódica como é o caso de $\sqrt{2}$.

Os autores citam que, no século III a.C., um grande matemático chamado Euclides mostrou que $\sqrt{2}$ não poderia ser escrito em forma de fração.

Depois desta introdução, eles apresentam os números irracionais como números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Os autores explicam que os matemáticos mostram que existem infinitos números irracionais e oferecem vários exemplos de raízes não exatas e seus opostos. Em seguida, apresentam exercícios, para, em seguida, de forma reservada, falar do π.

Quando os autores citam o π, eles partem para algo mais concreto, pedem para o aluno traçar um círculo com diâmetro de 5 cm em uma cartolina. Orientam recortar a circunferência e contorná-la com uma linha grossa (barbante) e medir o comprimento da linha e anotar. Após, repetir o mesmo procedimento com um círculo de 10 cm de diâmetro e, em seguida, com um círculo de 15 cm de diâmetro. Finalmente, eles pedem para, em cada um dos três casos, efetuar a divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro e observar que, nos três casos, o quociente dará perto de 3. Os autores destacam o uso do termo aproximadamente igual a 3, porque, no século XVII, provou-se que este quociente é um número irracional, denotado pela letra grega π (pi), que é a inicial da palavra “contorno” em grego. Concluindo que π = 3,14159265... possui infinitas casas decimais e não possui período.

Particularmente, na Rede Municipal de Ensino, trabalhei alguns anos com esta coleção. Embora eu pense que alguns pontos poderiam ter sido mais enfatizados, foi um dos livros dos quais os alunos tiveram mais facilidade em entender. Observe que, ao contrário da “coleção α”, ele fala de $\sqrt{2}$, usando aproximação sem dar-lhe um sentido geométrico.

6.1.3.
Coleção λ

Os autores já começam o livro pelos números racionais, que ganham espaço em toda a primeira unidade. Eles iniciam pelo conjunto dos números racionais e trabalham a reta numérica, operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação e divisão), porcentagem (atividades envolvendo situações práticas incluindo educação financeira) e dízimas periódicas, encerrando assim a unidade I. A unidade II inicia com o título “Potências, Raízes e Números Reais", cujo conteúdo trata da potência de um número racional, das propriedades da potenciação, dos números quadrados perfeitos, da raiz quadrada exata de um número racional não negativo, da raiz quadrada aproximada de um número não negativo e dos números reais. Quando o material traz, no item 6 da Unidade II, os números reais, ele também começa a falar sobre os números irracionais.

Os autores apresentam os números irracionais a partir do exemplo de uma dízima periódica, pedindo para que o estudante observe o seguinte número racional: 0,45454545... Comentam que este é uma dízima periódica, pois possui infinitas casas decimais e período igual a 45 e destacam que este número pode ser escrito em forma de fração.

Em seguida, o livro traz outro exemplo: 3,8687888990... e faz a observação:

> Observando a formação desse número, podemos dar continuidade do seguinte modo: 3,86878889909 1..., 3,8687888990 9192..., 3,8687888990 919293...; e assim por diante. Se continuarmos a preencher as casas decimais nessa sequência, teremos um número com infinitas casas decimais e sem um período que se repita. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p. 58).

Logo, os autores concluem que números que não podem ser escritos na forma a/b, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, não são números racionais. Em seguida, eles afirmam que o conjunto de números que apresenta esta característica (número infinito de casas decimais e não periódicas) chama-se conjunto dos números irracionais. Definindo número irracional como todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não periódica. Acrescentam três exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}, \pi$ e $1{,}70700070007$ ... e três exercícios.

6.1.4.
Coleção θ

Os autores introduzem o conceito de conjunto dos números irracionais com um texto que trata das medições (comprimento, massa etc.), afirmando que raramente a medida obtida pode ser expressa por um número inteiro, pois a unidade considerada não costuma caber em um número exato de vezes nessa medida. Eles reforçam que, em algumas situações como esta, é necessário usar números racionais (conteúdo já trabalhado anteriormente).

No parágrafo seguinte, eles citam os pitagóricos, discípulos do matemático e filósofo grego Pitágoras, que viveu por volta de 570 a.C., que descobriram que a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade não poderia ser expressa por um número racional.

Figura 31 – Pitágoras

Fonte: SOUZA; PATARO, 2015

O material segue explicando que, para expressar medidas como esta, é necessário estabelecer um novo tipo de número, o número irracional, que significa número não racional.

Os autores citam como exemplo dois cálculos feitos, 357:999 e $\sqrt{3}$, como eles mesmos afirmam e mostram o resultado, citando um número maior de casas, inclusive, maior do que coloco abaixo.

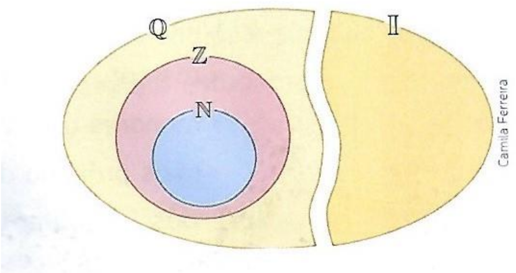
$357/999 = 0,357357357357357\ldots$

$\sqrt{3} = 1,732050807568877293527\ldots$

Os autores fazem uma comparação entre os resultados obtidos, enfatizando que os dois cálculos possuem infinitas casas decimais. No entanto, no cálculo da raiz quadrada, as casas decimais desse número não se repetem de acordo com um padrão, ou seja, não é uma dízima periódica, esta é uma característica dos números irracionais. Em seguida, afirmam que estes números formam o conjunto dos números irracionais, indicado pelo símbolo *I*. O importante é que o livro destaca, no final da página, que os números 357:999 e $\sqrt{3}$ são números que possuem infinitas casas decimais, o que não encontramos no programa do computador, em que são apresentadas apenas as primeiras casas decimais.

A partir desse momento, os autores citam alguns exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \pi$ e $\frac{\sqrt{10}}{4}$. Em seguida, eles representam os conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais (I) por meio de diagramas:

Figura 32 - Conjuntos numéricos



Fonte: SOUZA; PATARO, 2015

A partir desse momento, os autores mostram geometricamente $\sqrt{2}$ de forma semelhante à apresentada na coleção α.

6.1.5. Conclusão sobre as coleções analisadas

Analisando as coleções apresentadas, observamos que, em alguns casos, não é dada a ênfase necessária aos números irracionais para o aluno compreendê-los. Os números irracionais se resumem, muitas vezes, a serem apresentados como os números não racionais ou os reais que não são racionais. De forma semelhante, definem-se os racionais como os números que podem ser escritos em forma de fração, consequentemente, os irracionais, aqueles que não podem ser escritos em forma de fração.

Assim como nas pesquisas citadas anteriormente, nas análises de alguns livros didáticos que acabamos de concluir, observemos que os números irracionais no Ensino Fundamental, mais precisamente no 8º ano, período em que o aluno tem o primeiro contato com os números irracionais, são apresentados de uma forma muito simplificada.

Não podemos deixar sempre de citar que um número irracional, na maioria das vezes, é trabalhado nos cálculos do dia a dia e aproximado a um número racional, tipo $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,41, o π é aproximadamente 3,14 e assim sucessivamente. Ou seja, para efeitos de cálculo, este fato, que aparece em praticamente todos os livros didáticos, é mais do que justificável. O aluno precisa ter a noção de que aquele número representa uma “quantidade”.

Chegamos à conclusão de que o universo numérico dos alunos do Ensino Fundamental Anos Finais restringe-se inicialmente aos números naturais (6ºano), números inteiros (7º ano), quando são introduzidos os conceitos de números negativos e números racionais, acrescidos de alguns números irracionais, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ e π. Em um colégio um pouco mais avançado pode se falar no ensino do número de ouro, geralmente, no 9º ano. Analisando outros livros em geral e apostilas de sistemas de ensino, verificamos que a sua grande maioria apresenta os números irracionais da forma que colocamos acima.

Ao mesmo tempo, podemos questionar o que realmente é importante, o que realmente desejamos que o nosso aluno no Ensino Fundamental venha entender sobre números irracionais. Quando, em uma coleção citada, mesmo os autores destacando este assunto, mas não favorecendo a exploração das noções de densidade, incomensurabilidade, infinitude, por exemplo, será o aluno realmente capaz de abstrair estes conceitos? Até que ponto não seria melhor trabalhar realmente algo mais simples, mas que não faça que ele crie certo “preconceito” em relação aos números irracionais? É importante que o nosso aluno também não veja o número irracional como algo diferente, é apenas um número.

Considero importante que, no Ensino Fundamental, seja introduzido o conceito de números irracionais, partindo da história da Matemática, do surgimento dos números irracionais e, por meio da história, definir o conjunto dos números irracionais. Deve ficar claro para o aluno que as raízes quadradas de números que não sejam quadrados perfeitos são números irracionais. Seja explicada a irracionalidade do π, aproveitando que, geralmente no mesmo ano, o comprimento e a área da circunferência são tópicos abordados. A ideia de números irracionais, desde que bem construída, vai servir de apoio à compreensão de alguns conceitos nos anos subsequentes, por exemplo, no ano seguinte, o aluno ao resolver uma equação do 2º grau, vai encontrar, muitas vezes, raízes irracionais.

Não devemos deixar de chamar a atenção para o fato de que, no ensino atual, poucos alunos talvez tenham condição de ir além do que é apresentado, muitas vezes, por desinteresse e, em outras, por certa dificuldade, ou talvez até pelo fato do ensino da Matemática para ele resumir-se a exercícios. O aluno, geralmente, quer o modelo do exercício, por exemplo: você explica equação do 2º grau, apresenta a fórmula de Báskara, faz um, dois ou três exemplos e passa exercícios semelhantes. Um outro exemplo muito comum no Ensino Médio ocorre em Análise Combinatória, você coloca um problema para o aluno e a primeira colocação dele é: qual a fórmula que eu uso, arranjo, combinação ou permutação? Quando, muitas vezes, o problema é puramente interpretativo. O aluno não tem o hábito de “ler Matemática”, de “compreender Matemática”.

6.2.
Pesquisa com professores sobre o ensino de números irracionais

Com o objetivo de conhecer como os professores têm apresentado no dia a dia os números irracionais aos seus alunos e as dificuldades encontradas para que estes compreendam o conteúdo, resolvemos fazer uma pesquisa diretamente com profissionais que atuam no Ensino Fundamental – Anos Finais. Aproveitamos a pesquisa para saber como está acontecendo o ensino da Matemática durante a pandemia provocada pelo coronavírus.

A pesquisa foi realizada no período de 12 a 19 de julho de 2020, pelo *Google Forms*, sendo os professores contactados por e-*mail* e pelo *WhatsApp*. Foram contactados 90 professores, dos quais 71 responderam à pesquisa, o que corresponde à um retorno de 78,9%.

Podemos afirmar que a amostra é bem significativa, pois captamos para a pesquisa professores de diversas categorias, seja pelo tempo de magistério, seja pela carga horária, seja por trabalhar em escola pública ou privada. Como se pode observar nos resultados mais à frente, a amostra colhida é bem diversificada.

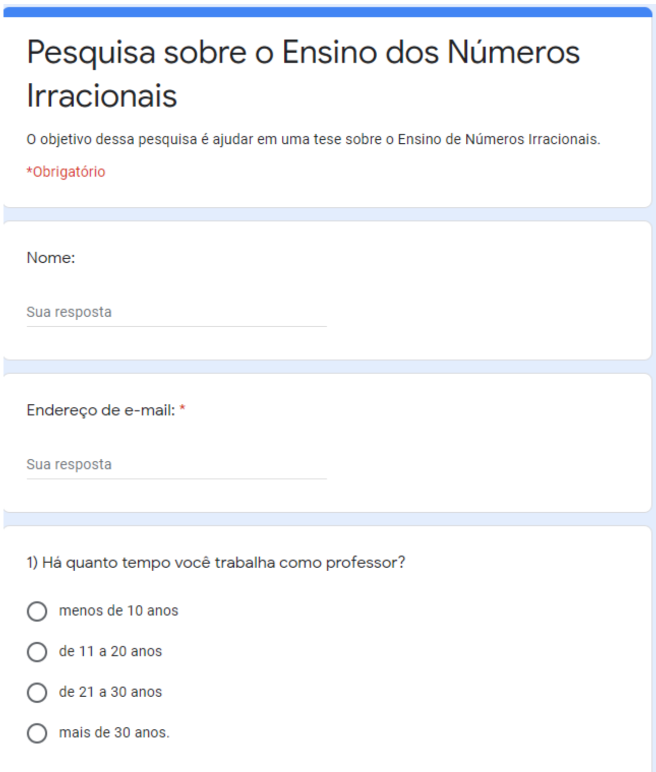
As cinco primeiras perguntas da pesquisa objetivam conhecer um pouco mais o professor que está sendo pesquisado, elas investigam o tempo que ele tem em sala da aula, a carga horária semanal, o tipo de colégio em que ele trabalha (público ou privado), a sua formação acadêmica e se, na sua graduação, foi trabalhado o conjunto dos números irracionais. As quatro perguntas seguintes referem-se à atuação dele como professor: como costuma trabalhar os números irracionais com os seus alunos?; usa algum recurso?; acha que os alunos têm dificuldade em entender os números irracionais e por quê?; trabalhou com números irracionais durante a pandemia? Como está acontecendo o ensino da matemática durante a pandemia?

6.2.1. Apresentação da pesquisa

A pesquisa foi realizada usando o *Google Forms* e os professores acessaram a pesquisa pelo link https://forms.gle/9w4NebuJuMWCdusY8.

Seguem três fotos da pesquisa no *Google Forms*:

Figura 33 - Pesquisa sobre o ensino de números irracionais - 1ª parte



Pesquisa sobre o Ensino dos Números Irracionais

O objetivo dessa pesquisa é ajudar em uma tese sobre o Ensino de Números Irracionais.

*Obrigatório

Nome:

Sua resposta

Endereço de e-mail: *

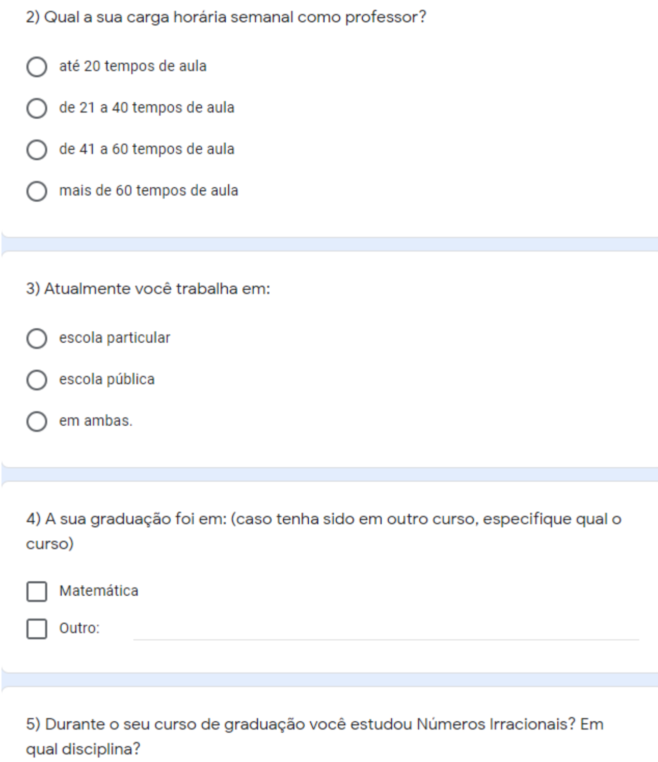
Sua resposta

1) Há quanto tempo você trabalha como professor?

- menos de 10 anos
- de 11 a 20 anos
- de 21 a 30 anos
- mais de 30 anos.

Fonte: Pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google forms.*

Figura 34 - Pesquisa sobre o ensino de números irracionais - 2ª parte


2) Qual a sua carga horária semanal como professor?

- até 20 tempos de aula
- de 21 a 40 tempos de aula
- de 41 a 60 tempos de aula
- mais de 60 tempos de aula

3) Atualmente você trabalha em:

- escola particular
- escola pública
- em ambas.

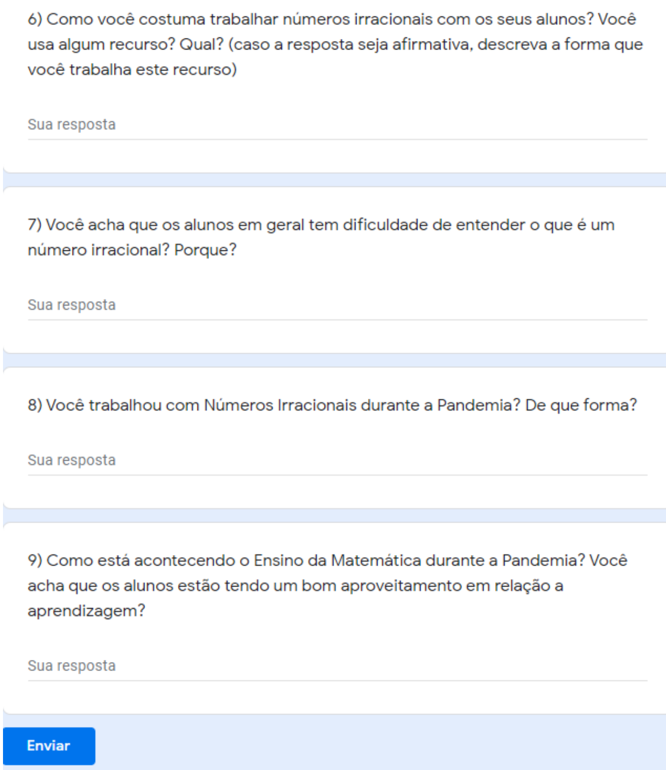
4) A sua graduação foi em: (caso tenha sido em outro curso, especifique qual o curso)

- Matemática
- Outro:

5) Durante o seu curso de graduação você estudou Números Irracionais? Em qual disciplina?

Fonte: Pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google Forms*.

Figura 35 - Pesquisa sobre o ensino de números irracionais - 3ª parte


6) Como você costuma trabalhar números irracionais com os seus alunos? Você usa algum recurso? Qual? (caso a resposta seja afirmativa, descreva a forma que você trabalha este recurso)

Sua resposta

7) Você acha que os alunos em geral tem dificuldade de entender o que é um número irracional? Porque?

Sua resposta

8) Você trabalhou com Números Irracionais durante a Pandemia? De que forma?

Sua resposta

9) Como está acontecendo o Ensino da Matemática durante a Pandemia? Você acha que os alunos estão tendo um bom aproveitamento em relação a aprendizagem?

Sua resposta

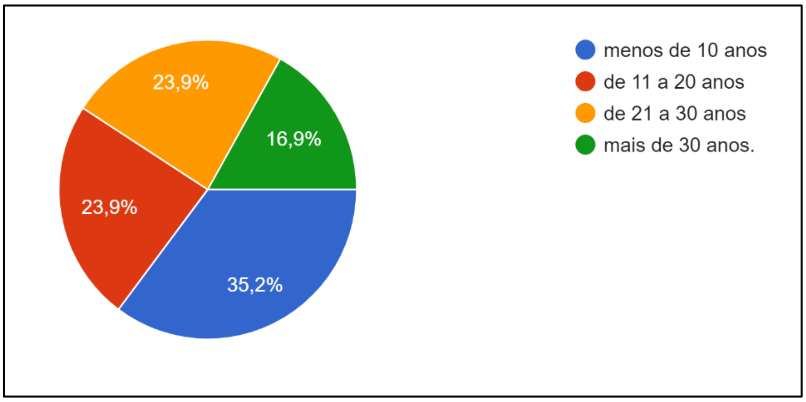
Enviar

Fonte: Pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google Forms*.

6.2.2. Resultado da pesquisa

A primeira pergunta mostra o tempo de carreira de cada professor. 35,2% são professores novos, possuem menos de 10 anos de magistério; 23,9% estão entre 11 e 20 anos; 23,9% entre 21 e 30 anos, e 16,9% estão no magistério há mais de 30 anos.

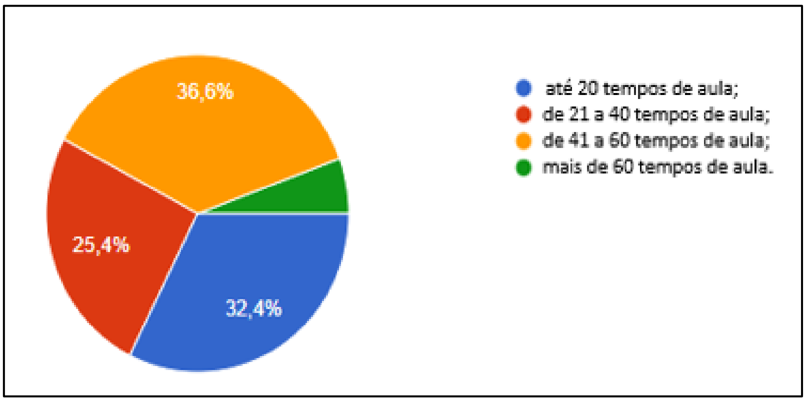
Figura 36 - Pesquisa: Tempo de magistério



Fonte: pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google Forms.*

A segunda pergunta envolve a carga horária de cada professor. Podemos observar no gráfico apresentado que 32,4% dos professores possuem uma carga horária semanal de até 20 tempos de aula; 25,4% possuem uma carga horária de 21 a 40 tempos de aula; 32,4%, uma carga horária entre 41 e 60 tempos, e 5,6% com mais de 60 tempos de aulas semanais.

Figura 37 - Pesquisa: Carga horária semanal do professor

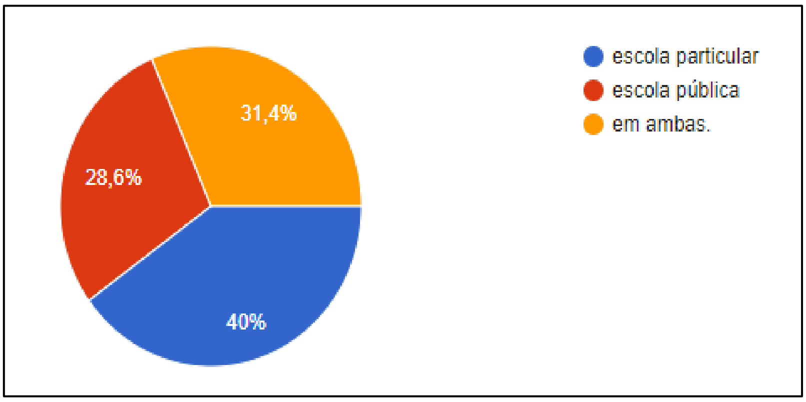


Fonte: pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google forms.*

Na terceira pergunta, eu procurei saber se o professor pesquisado trabalhava em escola pública, escola privada ou em ambas. Sabemos que, em algumas escolas privadas, temos mais recursos para trabalhar, computadores, *softwares*.

O resultado mostrou que mais de 40% dos professores trabalham em escola particular, 28,6% em escola pública e 31,4% trabalham tanto em escola pública como em escola privada. Como podemos verificar, então, 71,4 % dos professores pesquisados trabalham em escola particular e 68,6% em escola pública.

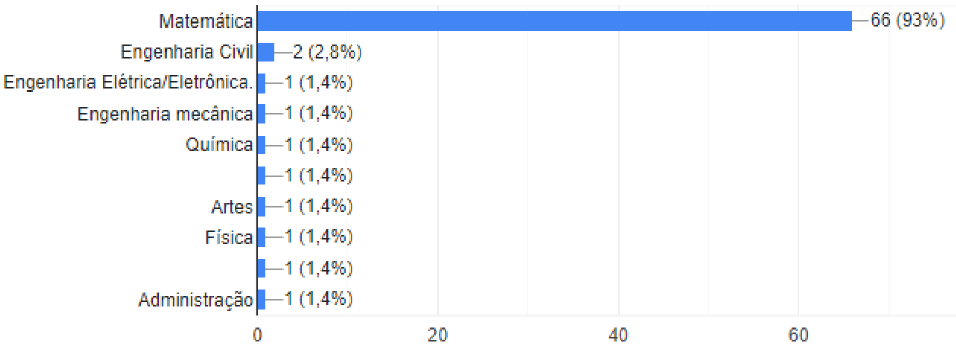
Figura 38 - Pesquisa: local de trabalho



Fonte: pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google Forms*.

A quarta pergunta refere-se ao seu curso de graduação. Sabemos que encontramos vários engenheiros, físicos, químicos entre outros, dando aula de Matemática. O resultado, por um lado, pode até ser visto como surpresa, mas, ao mesmo tempo, animador. No caso de 71 professores que responderam a pesquisa, 66 deles possuem a formação em Matemática. Observando o gráfico, você percebe que o total ultrapassa 71, mas isto se deve ao fato de que uma mesma pessoa pode ter cursado mais do que um curso superior.

Figura 39 - Pesquisa: Curso superior dos professores



Fonte: pesquisa elaborada pelo autor usando o *Google Forms*.

Os dois dados que estão em branco são compreendidos por uma formação em Física e uma em Engenharia Civil, totalizando, então, 2 professores com formação em Física e 3 com formação em Engenharia Civil. A contagem do *Google Forms* não registrou pelo fato dele ter respondido em forma de um texto.

A quinta pergunta refere-se ao curso de graduação que o professor fez. O principal objetivo era saber se ele teve o conteúdo de números irracionais dentro da alguma disciplina voltada para o Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio, ou só em disciplinas mais específicas da própria graduação, como Análise Real, Teoria dos Números, Álgebra Abstrata entre outras.

Nesta pergunta, entre os 71 professores que responderam, 13 não lembram ou não estudaram nada sobre os números irracionais na graduação. Entre os 58 restantes, 33 afirmaram terem visto os números irracionais somente em disciplinas de nível superior, principalmente em Análise Real, citando que em outras disciplinas, o número irracional era pré-requisito. Os outros 25 professores afirmaram que viram também em disciplinas básicas, disciplinas que tinham o objetivo de rever conteúdos de Ensino Médio, citando como exemplo: Pré-cálculo; Cálculo 0 (zero); Fundamentos da Matemática; Matemática Básica. Como poucos colocaram, para ser mais preciso três professores, que, nestas disciplinas, os seus próprios professores comentavam como eles poderiam trabalhar essas disciplinas no Ensino Fundamental e Médio, já que estavam em um curso de licenciatura. Logo, podemos concluir que muitos professores entram em sala de aula para trabalhar com números irracionais exatamente com o que eles aprenderam quando estavam no Ensino Fundamental.

A sexta pergunta refere-se à forma como cada professor costuma trabalhar os números irracionais com os seus alunos, queremos saber como o assunto é abordado por cada professor. Como muitos colocaram na resposta, eles acabam abordando o assunto da forma apresentada no livro ou da apostila adotada, pelo fato deles terem que usar o material adotado e, na maioria das vezes, faltar tempo para fazerem outras abordagens. Entre as respostas citadas no *Google Forms,* destacamos algumas delas:

- definir os números irracionais como os números que não podem ser escritos em forma de fração, ou seja, os que não são racionais e usar o *GeoGebra* (citado por 10 professores) para mostrar o π e a $\sqrt{2}$. Tivemos 6 professores que fizeram procedimentos parecidos, mas, no lugar do *GeoGebra*, citam a calculadora;

- alguns professores afirmam que tentam chamar a atenção para a diferença entre racionais e os irracionais, focando em um decimal infinito que seja uma dízima periódica e em um que não seja;

- “Eu uso o exemplo do π, realizando a medida do comprimento da circunferência dividido pelo diâmetro. Cada aluno faz a medição em tamanhos diferentes e depois a comparação”. Esta resposta foi uma das mais comuns, a diferença é como é feito, uns usam o *GeoGebra*, outros professores mandam levar materiais redondos de casa e barbante para medir o comprimento da circunferência e depois comparar. Outros contam com a ajuda da calculadora. Mas a ideia permanece como uma das mais respondidas;

- “começo a introduzir o conceito pela diagonal de um quadrado de lado unitário, ao encontrar $\sqrt{2}$, faço com eles, com o compasso, a projeção dessa medida na reta. Alguns vão achar 1,4, outros 1,3; outros 1,5. Depois trabalho a $\sqrt{2}$ em separado, normalmente usando a aproximação e vou mostrando que essa aproximação não chega a um valor exato. Se tiver computador disponível ou a maioria dos alunos tiver celular, mostro no *GeoGebra*, tanto no computador como no celular.”;

- “Trabalho a partir dos números racionais completude da reta numérica e, a partir daí, parto para exemplos (raízes quadradas não exatas, dízimas infinitas e não periódicas e o número π).”;

- “Como o universo dos números que os alunos conhecem no fundamental não inclui os complexos, trabalhamos os irracionais como o conjunto das exceções. Assim, aqueles números que não são racionais, são irracionais. Mostro alguns exemplos de números que não são racionais e explico que não existe regra para os irracionais.”;

- “Mostro a importância dos números irracionais no cálculo do comprimento da circunferência, da diagonal do quadrado, da diagonal da face de um cubo e no cálculo aproximado da raiz quadrada com uma ou duas casas decimais. O recurso utilizado é a calculadora para confirmar tais resultados em cálculos aproximados.”;

- “Geralmente eu insiro “novos” conjuntos como uma solução a uma lacuna dos demais conjuntos. Aprendemos os naturais, então, mostro que nem sempre é possível efetuar subtrações, divisões nem raízes. Então, incluímos os inteiros, onde sempre é possível subtrair, no entanto, não se pode dividir e nem extrair raízes sempre. Então incluímos os racionais, onde sempre é possível somar, subtrair, multiplicar e dividir, no entanto, nem sempre é possível extrair raízes. Finalmente, chegamos aos irracionais, onde é possível preencher a lacuna deixada pelos demais conjuntos.”;

Alguns ainda citaram que começam sempre trabalhando com a história da Matemática, outros mostrando que os números racionais precisam de um complemento e este são os números que não são racionais, ou seja, irracionais.

Vamos observar nas respostas dadas o fato de que, em muitas delas, os professores pontuam trabalhar seguindo o livro didático adotado. Devemos observar também que, embora 71 respostas sejam uma quantidade expressiva, o conteúdo delas é basicamente o mesmo. Os recursos utilizados se resumiram ao *GeoGebra* e a calculadora, em nenhum momento foi citado algo diferente.

Em relação à forma de trabalhar o conteúdo, as respostas apresentadas se resumem a definir número irracional como os números não racionais ou os que não podem ser escritos em forma de fração. Para ilustrar ou exemplificar, basicamente, resume-se o número π, relacionando o comprimento da circunferência ao diâmetro da mesma circunferência e as raízes não exatas, para ser mais específico à $\sqrt{2}$. Concordo em especial com a resposta de um professor que afirma que a metodologia a ser usada depende principalmente do conhecimento que você tem da turma.

A sétima pergunta, Você acha que os alunos, em geral, têm dificuldades de entender o que é um número irracional? veio ao encontro do próprio título do trabalho, “OS NÚMEROS IRRACIONAIS E O PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL: ANOS FINAIS – UM DESAFIO AO PROFESSOR”. Quando se analisa as respostas encontradas, observa-se que é um grande desafio. Alguns alunos até fazem os exercícios propostos, identificam os números irracionais, diferenciam os números racionais dos números irracionais, mas não compreendem a ideia do número irracional propriamente dito. A resposta mais comum dada por um grande grupo de professores foi que é um conceito muito abstrato, que o aluno ainda não tem maturidade para entender o conteúdo. Muitos usaram o termo “de difícil compreensão”. Um grande grupo de professores também destacou que o currículo faz com que eles trabalhem o assunto muito rápido, de forma bem superficial e, como os estudantes já aprenderam os números racionais, usam a definição mais corriqueira, se não é racional é irracional.

Mas também temos resposta do tipo: “Talvez pelo desinteresse por não ter uma aplicação direta no seu cotidiano. Hoje em dia, a facilidade em ter nas mãos as novas tecnologias, tais como celular, calculadora, computador, etc., diferentemente de décadas anteriores, facilita o aprendizado”.

Uma resposta dada por um professor que também me chamou a atenção, porque já ouvi várias vezes de alunos, foi: “Por mais que sejam dados exemplos, eles não conseguem compreender, por exemplo, como um segmento que tem princípio e tem fim, pode ter como medida um número com infinitas casas decimais”.

Outras respostas dadas no *Google Forms* para a 7ª pergunta:

- “O fato de não ter um resultado preciso, eles acabam “aceitando” e não compreendendo. O que faz com que em séries adiantes ou até mesmo na Universidade, a dificuldade aumenta.”;

- “Um número que não é tão presente na vida do aluno de uma forma concreta, como os naturais, inteiros e racionais. Não aparece de forma tão explícita no cotidiano dos alunos.”;

- “O aspecto da infinitude cria problemas de compreensão. O comprimento de uma circunferência, $C = 2\pi r$ com o π não sendo só 3,14, mas um número com infinitas casas decimais.”;

- “Eles apresentam muitas dificuldades sim, pois, para eles, é muito abstrato, geralmente eles se referem aos números irracionais como aqueles que não possuem período e apresentam reticências. O fato de não conseguirem fazer uma localização precisa em uma reta numérica aumenta a dificuldade em entender.”;

- “Trata-se de um assunto delicado, com o qual a conexão entre a geometria e a aritmética se faz presente na insuficiência dos racionais em medir determinados comprimentos em que não é possível encaixar uma quantidade inteira de uma determinada unidade de comprimento. O fato da impossibilidade deste encaixamento motiva a criação/surgimento dos irracionais. Se os gregos antigos que dedicaram boa parte do tempo tentando resolver esse dilema tiveram dificuldades para entender o significado dos irracionais, é compreensível que estudantes que estejam entrando em contato com esse fato, pela primeira vez, também o tenham.”;

- “Porque a maneira que os livros abordam o assunto não facilita o entendimento e os professores, por sua vez, não utilizam recursos além dos livros para facilitar o entendimento. Na verdade, isso ocorre em muitos casos por falta de tempo para trabalhar o conteúdo.”;

A 8ª pergunta será referente ao ensino dos números irracionais durante a pandemia. A maioria das respostas aponta que os professores trabalharam este tema antes do isolamento social iniciar. Os professores que trabalharam o assunto durante a pandemia afirmaram que o lado positivo deve-se ao fato de todos estarem acompanhando via celular ou computador, eles puderam compartilhar a tela do *GeoGebra* diretamente para mostrar o π e a $\sqrt{2}$.

6.3. O ensino da matemática durante a pandemia

Durante a pandemia devido ao coronavírus, o Ministério da Educação (MEC) homologou um conjunto de diretrizes, aprovado pelo Conselho Nacional da Educação (CNE). Sabemos que a Educação Básica compreende a Educação Infantil, o Ensino Fundamental obrigatório de nove anos e o Ensino Médio.

Um documento publicado no Diário Oficial da União sugere que as escolas mantenham um fluxo de atividades escolares não presenciais enquanto durar a situação de emergência para o cumprimento da carga horária e busquem alternativas para minimizar a necessidade de reposição presencial de dias letivos após a pandemia. O texto autoriza os sistemas de ensino a computarem atividades não presenciais para o cumprimento da carga horária.

Figura 40 - Diário Oficial da União

DIÁRIO OFICIAL DA UNIÃO

Publicado em: 01/06/2020 | Edição: 103 | Seção: 1 | Página: 32

Órgão: Ministério da Educação/Gabinete do Ministro

DESPACHO DE 29 DE MAIO DE 2020

Nos termos do art. 2º da Lei nº 9.131, de 24 de novembro de 1995, o Ministro de Estado da Educação homologa parcialmente o Parecer CNE/CP nº 5/2020, do Conselho Pleno, do Conselho Nacional de Educação - CNE, o qual aprovou orientações com vistas à reorganização do calendário escolar e à possibilidade de cômputo de atividades não presenciais, para fins de cumprimento da carga horária mínima anual, em razão da pandemia do novo coronavírus - Covid-19, e deixa de homologar o item 2.16 do referido Parecer, o qual submete para reexame do Conselho Nacional de Educação, considerando as razões constantes na Nota Técnica nº 32/2020/ASSESSORIA-GAB/GM/GM, conforme consta do Processo nº 23001.000334/2020-21.

ABRAHAM WEINTRAUB

Fonte: Diário Oficial da União

O CNE listou uma série de atividades não presenciais que podem ser utilizadas pelas redes de ensino durante a pandemia, são elas: videoaulas, plataformas virtuais, redes sociais, programas de televisão ou rádio, material didático impresso e entregue aos pais ou responsáveis.

O MEC apresenta algumas diretrizes para as instituições da Educação Básica. Nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, a orientação é que as atividades pedagógicas não presenciais tenham mais espaço. Entre as sugestões de atividades, está a distribuição de vídeos educativos.

A Medida Provisória 934 de 2020 dispensa, em caráter excepcional, as escolas de Educação Básica da obrigatoriedade de observar o mínimo de 200 dias letivos de efetivo trabalho escolar. Determina que a carga horária mínima de oitocentas horas deve ser cumprida nos termos das normas a serem editadas pelos respectivos sistemas de ensino. Dispensa as instituições de Educação Superior, em caráter excepcional, do cumprimento da obrigatoriedade do mínimo de dias letivos nos termos das normas a serem editadas pelos respectivos sistemas de ensino. Estabelece que as referidas dispensas têm vigência durante o ano letivo afetado pelas medidas de emergência relacionadas ao novo coronavírus. Autoriza as instituições de ensino a abreviarem a duração dos cursos de Medicina, Farmácia, Enfermagem e Fisioterapia, cumpridas as condições previstas.

No caso do ensino da Matemática, que não depende apenas de textos, debates, projetos; a grande maioria dos alunos precisa de explicações, orientações; diante deste contexto, como está acontecendo? Como os professores de Matemática estão fazendo? A pesquisa citada no item anterior sobre o "ensino dos números irracionais" apresentava como última pergunta "Como está sendo o ensino da matemática durante a pandemia?", com base nas respostas dos professores pesquisados, vamos responder a esta pergunta.

Nas respostas dadas pelos professores, ficou muito claro que tivemos que nos reinventar. O que abriu mais uma infinidade de possibilidades para o futuro, mas com muito receio da volta, momento este em que vamos ter a dimensão de como foi todo esse trabalho. Dentro de nossas limitações, conseguimos entregar um bom trabalho, só não sei o quanto os alunos conseguiram de fato absorver todas as informações. O aluno está acostumado a fazer exercícios com o professor ao lado para tirar dúvidas. Na aula *online*, o professor, por mais que interaja, os exercícios acabam ficando para casa para serem corrigidos na aula seguinte, sendo assim, aqueles que tentam fazer acabam fazendo sozinhos ou com orientação de alguém em casa. Considerando os exercícios apresentados pelos alunos, se realmente foram feitos por eles, podemos afirmar que o retorno será muito bom para os que estão tendo a oportunidade de participar de aula *online*.

A pandemia deixou muito claro que estamos diante de duas realidades bem distintas: os alunos da escola pública e os alunos da rede privada de ensino. Como bem colocaram alguns professores em sua resposta a pesquisa:

- "Na rede particular sim. Aulas só ao vivo pelo aplicativo com a turma completa *online*. Atividades sendo feitas mostram que os alunos estão aprendendo. Na escola pública, a realidade já é diferente. A falta de acesso às tecnologias impede os alunos de acessarem os materiais disponibilizados. E se não conseguem acessar o material, quanto mais aula ao vivo ou oportunidade de tirar dúvidas. Nesta pandemia ficou evidente as diferenças entre quem tem possibilidade de acesso e quem não tem.";

- "Como professor da escola pública, percebo que a pandemia provocou danos muito maiores em alunos da escola pública do que da rede privada (onde também trabalhei até ano passado), uma vez que na escola pública uma parcela expressiva dos alunos não tem equipamento ou acesso à internet devido às suas condições financeiras desfavoráveis.";

- "Depende, pois acredito que a pandemia evidenciou ainda mais a desigualdade social. Um estudante com um poder aquisitivo melhor tem acesso a uma internet de qualidade para assistir às aulas. Além disso, ele pode investir em professores particulares *online*, caso precise. Já um estudante que não tem esse tipo de oportunidade, poderá ter dificuldades em aprender algum conteúdo. Estamos vivendo em um momento novo para os estudantes e para os professores. Os professores estão se reinventando (como podem) e os estudantes (que conseguem assistir à aula) com essa nova forma de ensino aprendizado.";

- "Nas minhas escolas particulares, o ensino tem sido feito a partir do *Google Classroom*, juntamente com aulas ao vivo seguindo o mesmo horário que existia antes da pandemia. Já na escola pública, apenas disponibilizamos material pelo *Google Classroom* e esperamos os alunos com alguma dúvida, que dificilmente as têm, pois não estudam o material. As escolas particulares sem dúvida conseguiram se adaptar melhor a nova realidade e seus alunos, até mesmo por presença e exigência dos pais, aproveitaram relativamente bem. Porém, os alunos das escolas públicas pouco participaram ou alcançaram algum tipo de aproveitamento.";

As respostas dadas mostram que a desigualdade social ficou muito evidente, acentuando as diferenças de oportunidades, que já existiam anteriormente. Em relação à metodologia, cada sistema de ensino, cada escola, adotou a sua, inclusive, adotou plataformas diferentes. Apesar de alguns professores afirmarem que estão conseguindo até uma participação maior das turmas, o resultado disso tudo será visto no futuro. Quando retornarmos, se houver retorno neste ano letivo, podemos fazer uma avaliação melhor do que realmente foi aprendido.

6.4.
Atividades para sala de aula para o Ensino Fundamental – Anos Finais

As atividades propostas visam facilitar o entendimento de determinados conceitos envolvendo os números irracionais. As atividades não puderam ser aplicadas, como foi colocado no item anterior, devido à pandemia.

No roteiro de cada atividade foi colocado o tempo previsto, embora o tempo dependa de cada turma e de como cada professor queira explorar a atividade, o assunto e o objetivo dela, os pré-requisitos, o material necessário e uma sugestão sobre a organização da classe. Mas cada atividade deve ser adaptada pelo professor à realidade da sua turma.

Apresentamos um total de oito atividades envolvendo calculadora, uso do *GeoGebra* e de jogos matemáticos.

6.4.1. Cálculo de $\sqrt{2}$ usando o *GeoGebra*

Duração da atividade: 45 minutos;

Assunto: números irracionais;

Objetivo: ajudar o aluno a perceber o fato de que a expansão decimal de $\sqrt{2}$ é infinita e não periódica, ou seja, é um número irracional;

Pré-requisitos: conhecimento básico do uso do *GeoGebra*; conhecimento do sistema cartesiano e de Geometria Plana;

Material necessário: folha para anotações, lápis, borracha, régua e um computador que possa acessar o *GeoGebra*;

Organização da classe: turma dividida em duplas de forma que eles possam trocar informações entre eles, fazer a atividade proposta e posteriormente discutir com a sua dupla, além de registrar em um pequeno relatório o que foi feito e o que ele conseguiu entender.

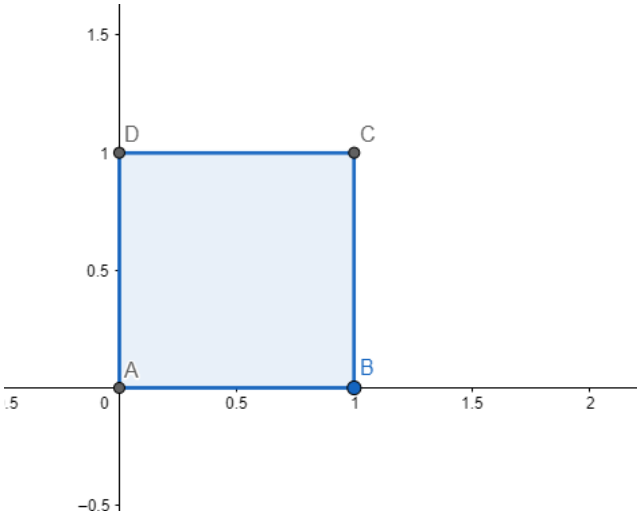
DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º passo: mandar o aluno calcular no papel a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a 1 cm (ele vai usar o Teorema de Pitágoras e encontrar que a diagonal mede $\sqrt{2}$);

2º Passo: no *GeoGebra*, mandar o aluno construir um quadrado ABCD de lado 1, com vértice A na origem do sistema cartesiano e lado AB sobre o eixo das abscissas (eixo x);

Para esta construção, clicar em “polígono regular”, depois selecionar dois pontos, o ponto (0,0) onde será denotado como ponto A e no ponto (1,0), ponto B. Logo, vai aparecer uma janela para indicar a quantidade de lados deste polígono regular, como queremos um quadrado, digitar 4 e ok.

Figura 41 – Cálculo de $\sqrt{2}$ usando o *GeoGebra* – 2º passo

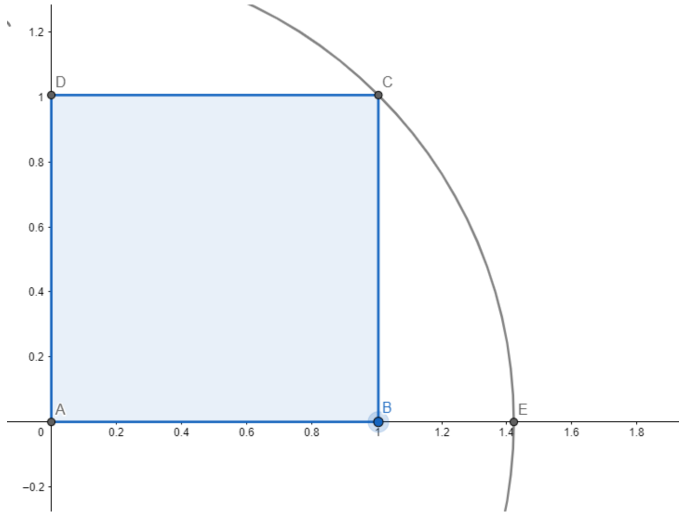


Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.

3º passo: criar uma circunferência com centro em A e raio AC. O ponto de interseção da circunferência com o eixo x e o ponto E.

Para esta construção clicar em "circunferência dados o centro e um de seus pontos". Selecionar o ponto A (centro da circunferência) e o ponto C (um dos pontos da circunferência). Para marcar o ponto E, selecionar "interseção de dois objetos" e clicar na interseção da circunferência com o eixo x.

Figura 42 - Cálculo de $\sqrt{2}$ usando o *GeoGebra* – 3º passo

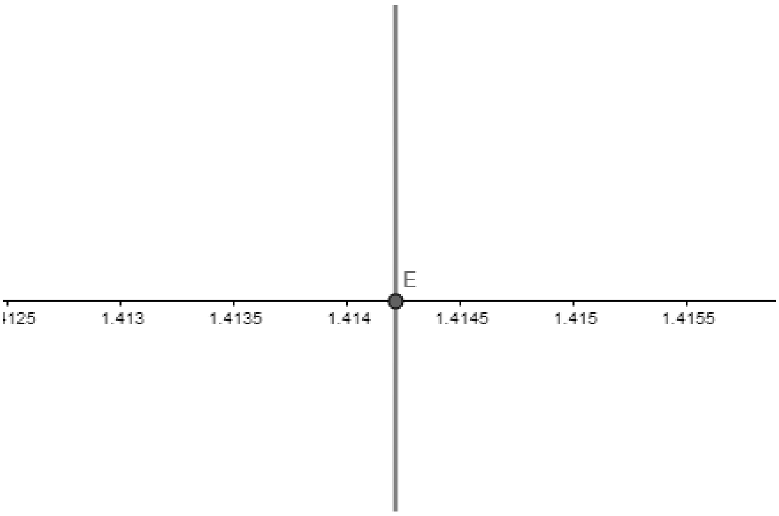


Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*

Como o aluno já sabe que AC = $\sqrt{2}$ e AC = AE (representam o raio da circunferência). A medida do segmento AE corresponde ao valor de $\sqrt{2}$.

4º Passo: Pedindo-lhes para aplicarem zoom, eles vão conseguindo perceber aproximações para $\sqrt{2}$, quanto maior o zoom, mais eles vão percebendo esta aproximação. Veja a figura abaixo:

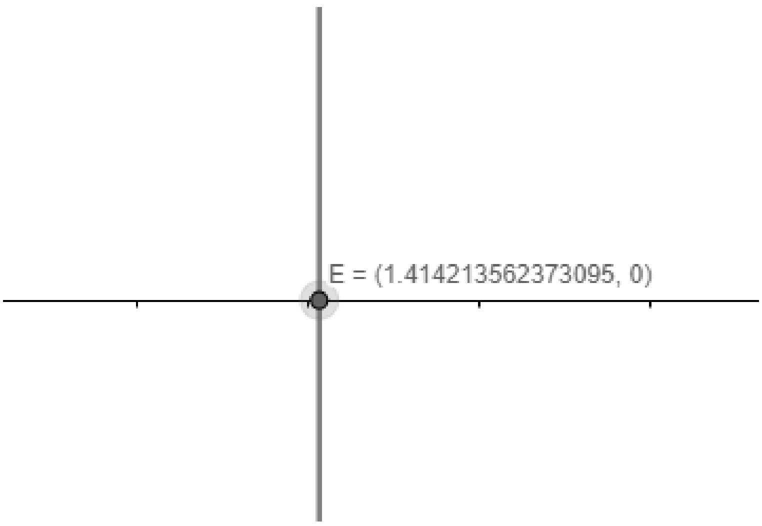
Figura 43 – Cálculo de $\sqrt{2}$ usando o *GeoGebra* – 4º passo



Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*.

Selecionando o ponto E, configurações "nome e valor", ele identifica o valor de *x* do ponto E.

Figura 44 - Cálculo de $\sqrt{2}$ usando o *GeoGebra* – 4º passo (cont.)



Fonte: elaborada pelo autor usando o *GeoGebra*

Portanto, $\sqrt{2} \cong 1{,}414213562373095 \ldots$

6.4.2. Cálculo da raiz quadrada de um número qualquer usando o *GeoGebra*

Duração da atividade: 90 minutos;

Assunto: números irracionais;

Objetivo: encontrar graficamente o valor da raiz quadrada de um número qualquer;

Pré-requisitos: conhecimento básico do uso do *GeoGebra*; Geometria Plana.

Material necessário: folha para anotações, lápis, borracha, régua e um computador que possa acessar o *GeoGebra*;

Organização da classe: turma dividida em duplas de forma que eles possam trocar informações entre eles, devem fazer a atividade proposta e posteriormente discutir com a sua dupla, além de registrar em um pequeno relatório o que foi feito e o que ele conseguiu entender.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

Inicialmente vamos mostrar a raiz quadrada de um número que é quadrado perfeito, para que eles possam "ver o resultado".

Exemplo: calcular $\sqrt{16}$:

1º Passo: construir uma circunferência onde o diâmetro seja $x + y$, onde $x.y = 16$;

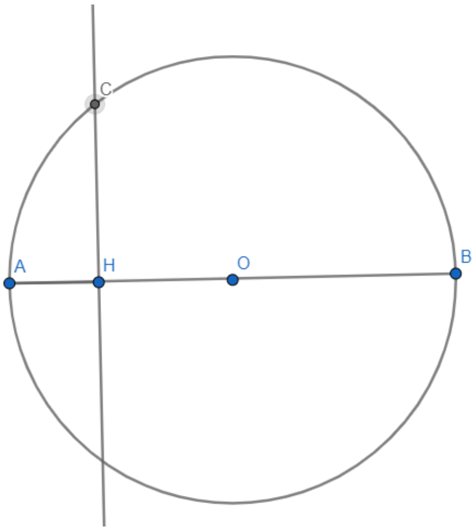
Isto é, precisamos de dois números cujo produto seja 16. Podemos considerar 2 e 8. Portanto se x = 2 e y = 8, o diâmetro da circunferência é 10, consequentemente o raio é 5. Portanto, pedir aos alunos que construam uma circunferência de raio igual a 5.

2º Passo: trace o diâmetro AB da circunferência;

3º Passo: como os valores que escolhemos para que o produto seja 16 foram 2 e 8, use o comando "segmento com comprimento fixo", oriente os alunos a marcar 2 cm a partir de A, assinalando o ponto H;

4º Passo: trace pelo ponto H uma reta perpendicular ao segmento AB, assinalando o ponto C na circunferência;

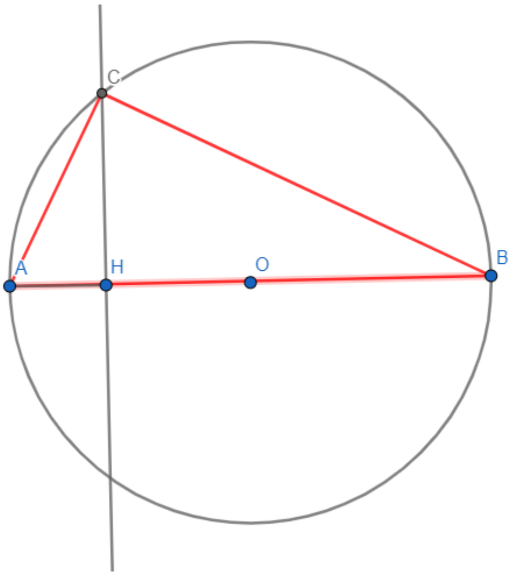
Figura 45 - Cálculo de $\sqrt{16}$ usando o *GeoGebra* – 1º, 2º, 3º e 4º passos



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

5º Passo: unir os pontos A, B e C formando o triângulo ABC;

Figura 46 - Cálculo de $\sqrt{16}$ usando o *Geogebra* - 5º passo



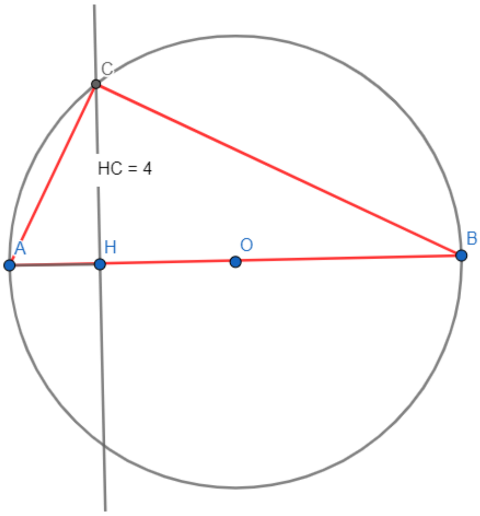
Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*

6º Passo: usando o comando “medir comprimento”, meça o segmento HC. Você vai obter 4. Observe que:

$h^2 = m.n \Rightarrow h^2 = 2 \times 8 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} \Rightarrow h = 4$

Veja a figura abaixo:

Figura 47 - Cálculo de $\sqrt{16}$ usando o *GeoGebra* - 6º passo

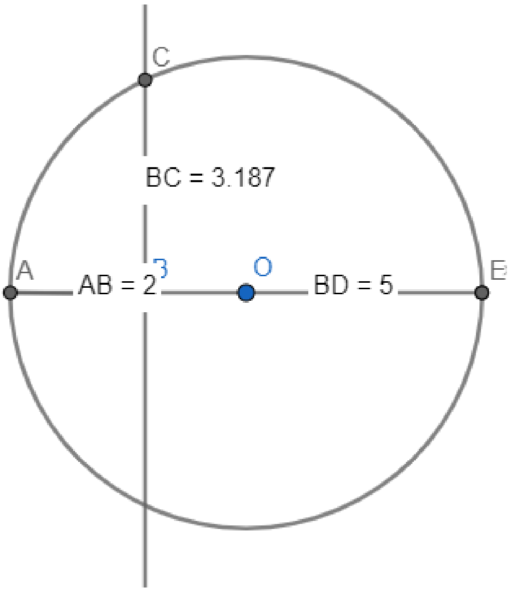


Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Procuramos fazer inicialmente com um número quadrado perfeito para que eles tivessem mais facilidade. Depois como exercícios, pedimos para calcular por exemplo $\sqrt{10}$:

Usando o mesmo procedimento acima (10 = 2 x 5), usando 2 e 5, o diâmetro da circunferência é 7.

Figura 48 - Cálculo de $\sqrt{10}$ usando o *GeoGebra*



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Temos: $\sqrt{10} \cong 3{,}187$

6.4.3. O número de ouro usando o *GeoGebra*

Duração da atividade: 45 minutos;

Assunto: números irracionais – número de ouro;

Objetivo: ajudar o aluno a perceber a aproximação do número de ouro usando o *GeoGebra*;

Pré-requisitos: conhecimento básico do uso do *GeoGebra*; conhecimento do sistema cartesiano e de Geometria Plana;

Material necessário: folha para anotações, lápis, borracha, régua e um computador que possa acessar o *GeoGebra*;

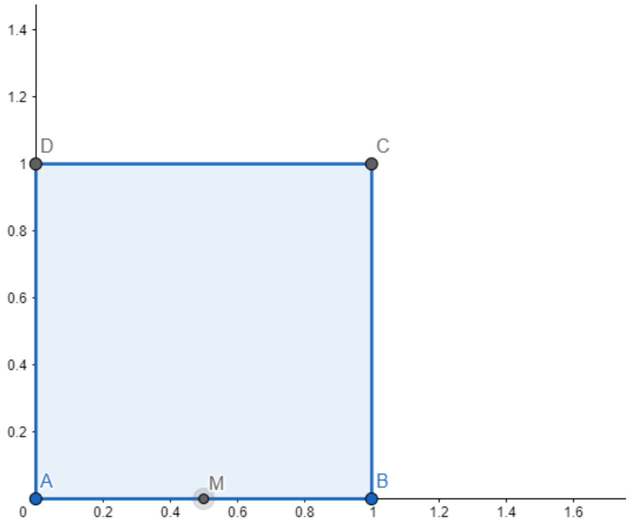
Organização da classe: turma dividida em duplas de forma que eles possam trocar informações entre eles, devem fazer a atividade proposta e posteriormente discutir com a sua dupla, além de registrar em um pequeno relatório o que foi feito e o que ele conseguiu entender. No enunciado de cada passo, estamos considerando que o aluno saiba trabalhar com o *GeoGebra*.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º passo: no *GeoGebra*, pedir para o aluno construir um quadrado ABCD de lado 1, com vértice A na origem do sistema cartesiano e lado AB sobre o eixo das abscissas (estou considerando os eixos somente no sentido positivo).

2º Passo: marque o ponto médio M do segmento AB:

Figura 49 - O número de ouro no *GeoGebra* - 1º e 2º passos

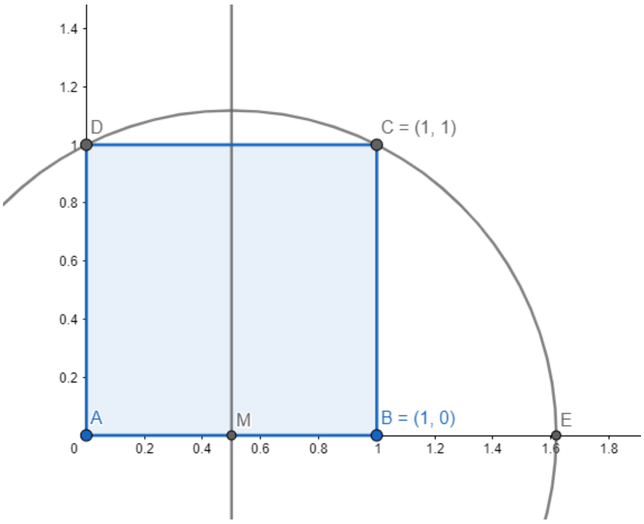


Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

3º Passo: trace uma reta perpendicular a M, dividindo o quadrado em dois retângulos;

4º Passo: escolha um destes dois retângulos, digamos aquele com base MB e trace uma circunferência com centro em M e raio MC (diagonal do retângulo). Chame de ponto E a interseção da circunferência com o eixo *x*;

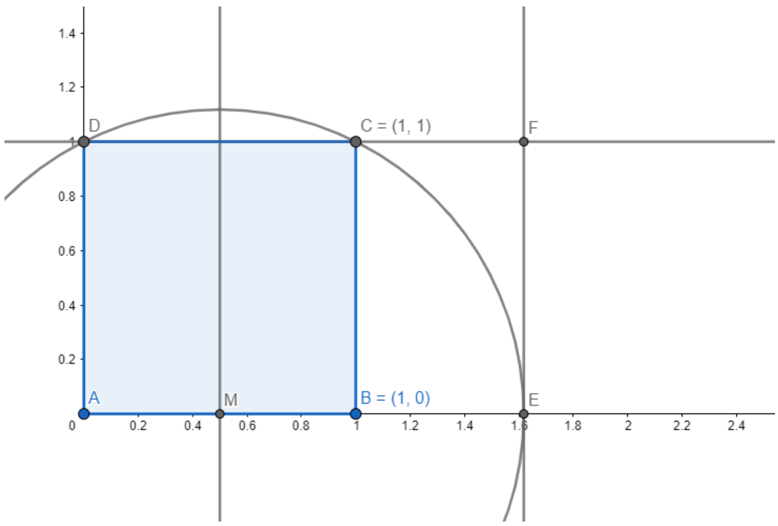
Figura 50 - O número de ouro usando o *GeoGebra* - 3º e 4º passos.



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

5º Passo: construa um novo retângulo, utilizando os pontos C, B e E como vértices deste novo retângulo:

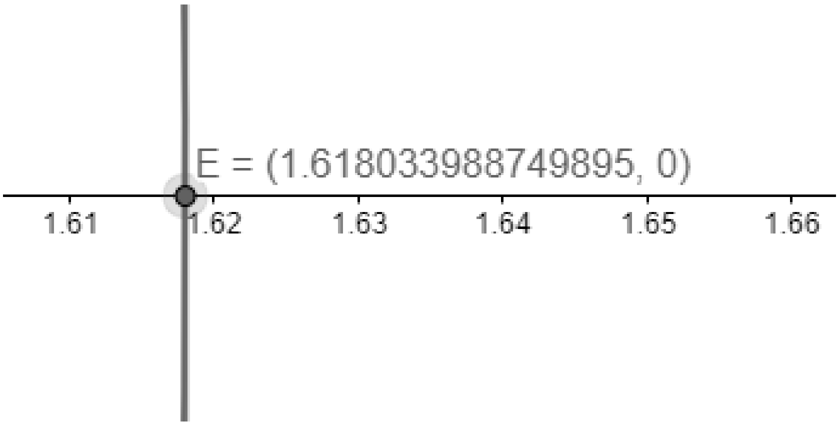
Figura 51 - O número de ouro usando o *GeoGebra* - 5º passo



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

Podemos perceber que a razão entre os segmentos AE e AD é um pouco maior do que 1,6. Este novo retângulo é o retângulo de ouro, isto é, a razão entre o lado maior e o lado menor é igual ao número de ouro. Vamos aproximar para verificar este tipo de número.

Figura 52 - O número de ouro usando o *GeoGebra* - conclusão



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

6.4.4.
O número π usando o *GeoGebra*

Duração da atividade: 45 minutos;

Assunto: números irracionais – número π;

Objetivo: conhecer o número π como a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro;

Pré-requisitos: conhecimento básico do uso do *GeoGebra*; circunferência: R

Material necessário: folha para anotações, lápis, borracha, régua e um computador que possa acessar o *GeoGebra*;

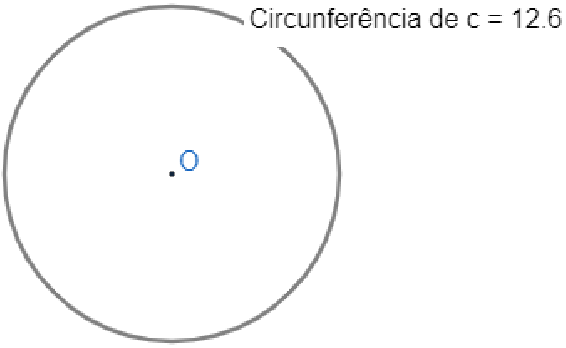
Organização da classe: turma dividida em duplas de forma que eles possam trocar informações entre eles, devem fazer a atividade proposta e posteriormente discutir com a sua dupla, além de registrar em um pequeno relatório o que foi feito e o que ele conseguiu entender. No enunciado de cada passo, estamos considerando que o aluno saiba trabalhar com o *GeoGebra*.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º passo: no *GeoGebra*, pedir ao aluno para construir uma circunferência com o raio que eles quiserem usar. Na figura abaixo, estamos usando r = 2 (diâmetro = 4);

2º Passo: usando o comando “distância comprimento”, clicar na circunferência, obtendo o seu comprimento;

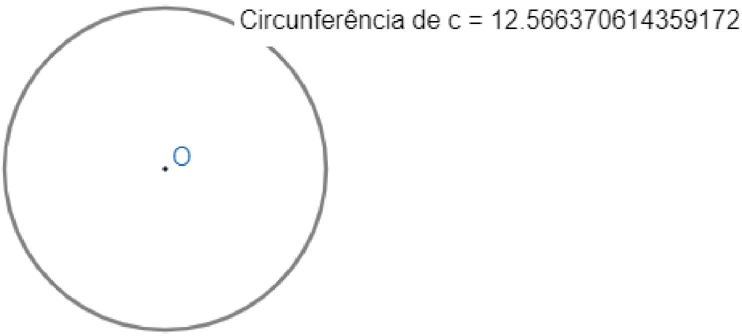
Figura 53 - O número π usando o *GeoGebra* - 1º e 2º passo



Fonte: elaborado pelo autor usando o *GeoGebra*.

3º Passo: mandar configurar com mais casas decimais, no exemplo, fiz com 15 casas decimais;

Figura 54 - O número π usando o *GeoGebra* - 3º passo



Fonte: elaborado pelo autor usando o GeoGebra

4º Passo: pedir-lhes que efetuem a divisão do comprimento obtido pelo diâmetro;

No nosso exemplo:

$$\frac{12{,}6}{4} = 3{,}15 \ldots \text{ e } \frac{12{,}566370614359172}{4} = 3{,}141592654 \ldots$$

Neste caso, consideremos uma circunferência de raio igual a 2. Cada um deles escolhe o raio que quiser e a ideia é comparar os resultados e chegar à conclusão de que todos obtiveram o mesmo valor, ou seja, um valor aproximado para π. Caso tenha tempo, peça a eles mesmos que repitam o procedimento com um raio de medida diferente para que possam comparar novamente os resultados.

6.4.5.
O número π usando material concreto

Duração da atividade: 90 minutos;

Assunto: números irracionais – número π;

Objetivo: conhecer o número π como a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro;

Pré-requisitos: circunferência;

Material necessário: folha para anotações, lápis, borracha, régua, barbante e calculadora, materiais em forma de círculo (tampas redondas, pulseiras, rolo de fita crepe etc...);

Organização da classe: turma dividida em grupos de 5 alunos para que possam juntar os materiais pedidos em forma de círculo. Caso o grupo tenha trago algum material repetido, trocar ou ceder para outro grupo. Os alunos vão trabalhar juntos durante a aula de forma que eles possam trocar informações entre eles, devem fazer a atividade proposta e posteriormente discutir o resultado.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º Passo: pedir para os grupos medirem com um barbante o comprimento dos materiais que trouxeram e registrarem em uma ficha de registro, conforme figura abaixo (fig. 55), que o professor vai distribuir;

2º Passo: pedir para os grupos medirem o diâmetro de cada objeto;

3º Passo: pedir para eles dividirem o comprimento da circunferência pelo diâmetro do objeto. Como eles vão fazer na calculadora, tentar usar uma grande quantidade de casas decimais;

4º Passo: pedir para compararem os resultados obtidos dentro do grupo e com os de outros grupos e verificarem que todos os resultados deram próximos a 3,14...;

5º Passo: induzir os alunos a perceberem que se $\frac{C}{D} = \pi \Rightarrow C = D.\pi \Rightarrow C = 2.r.\pi$

Figura 55 - Ficha de registro para cálculo do valor de π

Objeto	Comprimento (C)	Diâmetro (D)	C / D

Fonte: elaborado pelo autor usando o *Word.*

6.4.6.
Cálculo de uma raiz quadrada não exata por aproximação

Duração da atividade: 90 minutos;

Assunto: raiz quadrada aproximada de um número;

Objetivo: calcular por aproximação a raiz quadrada de um número qualquer;

Pré-requisitos: potenciação;

Material necessário: folha para anotações, lápis, borracha e calculadora;

Organização da classe: turma dividida em duplas de forma que eles possam trocar informações entre eles, devem fazer a atividade proposta e posteriormente discutir com a sua dupla.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º Passo: os alunos devem procurar os dois números quadrados perfeitos mais próximos da raiz solicitada. Vamos trabalhar com o exemplo da $\sqrt{3}$;

Logo, os dois números quadrados perfeitos mais próximos são 1 e 4. Então temos:$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$

Peça para eles calcularem potências com uma casa decimal. Eles vão fazer:

$1,4^2 = 1,96$;

$1,5^2 = 2,25$;

$1,6^2 = 2,56$;

$1,7^2 = 2,89$;

$1,8^2 = 3,24$ (já passou, não serve);

Então, com uma casa decimal $\sqrt{3} \cong 1,7$.

O aluno pode pular algum número, por exemplo, começar pelo $1,4^2$ e passar para $1,7^2$. É preciso ter cuidado para que não passe do valor procurado.

2º Passo: se potências com duas casas decimais forem pedidas, eles já sabem que é 1,7....

Então:

$1,71^2 = 2,9241$;

$1,72^2 = 2,9584$;

$1,73^2 = 2,9929$;

$1,74^2 = 3,0276$ (não serve).

Logo, com duas casas decimais: $\sqrt{3} = 1,73$.

E assim sucessivamente, dependendo da quantidade de casas que você quiser pedir e do tempo disponível para tanto.

6.4.7.
Representação de números irracionais na reta numérica através de um jogo

Duração da atividade: 45 minutos;

Assunto: representação na reta numérica dos números irracionais;

Objetivo: representar na reta números racionais e números irracionais;

Pré-requisitos: números inteiros, números racionais, números irracionais e reta numérica;

Material necessário: folha para anotações, lápis e borracha;

Organização da classe: turma dividida em grupos de 5 alunos de forma que eles possam trocar informações entre eles e, se possível, em círculo, de forma que facilite um grupo desafiar o outro. Caso a quantidade de alunos da turma não seja múltiplo de 5, acrescente os alunos que sobrarem, formando alguns grupos de 6 integrantes.

O jogo será entre os grupos. O primeiro vai escolher aquele que vai desafiar. Este, por sua vez, desafia o próximo, e assim sucessivamente, de modo que todos os grupos participem do desafio.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º Passo: dividir a turma em grupos e sortear quem será o primeiro a desafiar o outro;

2º Passo: cada grupo vai escrever em uma folha de papel dez números: seis racionais e quatro irracionais. Os seis números racionais devem ser: um decimal exato, uma dízima periódica simples, uma dízima periódica composta, um número fracionário, um número inteiro positivo e um inteiro negativo. Os quatro números irracionais devem ser: duas raízes não exatas, um decimal infinito não periódico e o número π (o π é obrigatório para todos os grupos). O professor deve determinar o tempo que achar necessário para os grupos escreverem esses números e conferir se estão corretos;

3º Passo: o primeiro grupo desafia um dos outros. O grupo desafiado deve ir ao quadro e colocar os números do grupo desafiante em ordem crescente, usando o sinal de $<$ e localizar esses números em uma reta numérica. O grupo desafiado agora o faz com outro e assim sucessivamente;

4º Passo: após todos os grupos terem sido desafiados, vamos contar os pontos. Esta contagem será da seguinte forma:

a) o grupo desafiador escolheu 10 números. Para cada número escolhido corretamente, ele ganha um ponto. Exemplo: na hora de escolher dez números, ele não soube escolher corretamente uma dízima periódica composta, o professor teve que corrigir antes dele desafiar outro grupo. Então ele só ganha nove pontos (perdeu um ponto);

b) o grupo desafiado ganha 5 pontos se colocou em ordem crescente de forma correta e mais 10 pontos se fez a representação na reta corretamente (1 ponto por número);

Logo, em uma rodada, o grupo pode ganhar até 25 pontos (10 pontos como desafiador e 15 pontos como desafiado). Quem fizer mais pontos é o vencedor. Caso haja mais de um vencedor, cabe ao professor decidir se deve fazer mais uma rodada entre os grupos que empataram ou fazer um *quiz* entre eles.

Após o término do jogo, cabe ao professor discutir com a turma as dificuldades que eles tiveram.

6.4.8.
Jogo de tabuleiro – *Quiz* sobre conjuntos numéricos

Duração da atividade: 45 minutos;

Assunto: conjuntos numéricos;

Objetivo: identificar os números que pertencem a cada conjunto numérico;

Pré-requisitos: conjuntos numéricos;

Material necessário: um tabuleiro numerado de 1 a 50, dois dados e 30 cartas com perguntas sobre conjuntos numéricos;

Organização da classe: turma dividida em grupos de até 6 alunos, a critério do professor. As partidas serão disputadas dentro dos grupos e o vencedor de cada grupo disputará a final. O jogo pode ser disputado por até 6 jogadores. Para mais do que isso, devem ser feitas mais cartas com perguntas.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DOS ALUNOS:

1º Passo: sortear com um dado o aluno que começará o jogo dentro do grupo;

2º Passo: a cada jogada de dado, o aluno terá que responder uma pergunta. Caso ele erre a pergunta, “anda” as casas correspondentes aos números dos dados em direção a zero. Caso ele acerte a pergunta, “anda” as casas correspondentes em direção a 50. Observando que a menor casa é o zero, ou seja, se ele tiver na casa 6 e tiver que voltar 8 casas, voltará para o 0 (zero). As casas azuis (múltiplo de 10) fazem com que o aluno tenha o direito de jogar novamente. As vermelhas (múltiplos de 12) fazem o aluno perder a vez de jogar;

3º Passo: ganha o aluno que chegar primeiro ao número 50.

Obs.: as perguntas estão em forma de cartas. Um colega faz a pergunta para o outro, pegando a carta de cima, a pergunta está acompanhada da resposta. As respostas são todas: SIM ou NÃO.

PERGUNTAS:

1) Um número natural pode ser um número irracional? NÃO

2) O conjunto dos números racionais está contido no conjunto dos números irracionais? NÃO

3) O conjunto dos números irracionais está contido no conjunto dos números racionais? NÃO

4) O conjunto dos números irracionais é formado pela união entre os conjuntos dos números racionais e reais? NÃO

5) Qualquer raiz quadrada tem como resultado um número racional? NÃO

6) Toda raiz quadrada exata é um número racional? SIM

7) Todos os números racionais são números reais? SIM

8) Existem números racionais que são números inteiros? SIM

9) Existem números reais que não são racionais? SIM

10) Os números reais que não são racionais são chamados irracionais? SIM

11) Existem números inteiros que não são racionais? NÃO

12) As dízimas periódicas são números racionais? SIM

13) O número $\sqrt{25}$ é um número racional? SIM

14) O número $\sqrt{2}$ é um número irracional? SIM

15) Todo número irracional é também um número real? SIM

16) O conjunto dos números reais é formado pela união dos racionais com os irracionais? SIM

17) Todo número natural é um número racional? SIM

18) Todo número racional não é um número irracional? SIM

19) Toda raiz quadrada de um número primo é um número irracional? SIM

20) Todo número decimal exato é um número racional? SIM

21) O π é um número irracional? SIM

22) O π é um número real? SIM

23) Toda fração é um número racional? SIM

24) O número $\sqrt{-1}$ é um número irracional? NÃO

25) O número $\sqrt{-1}$ é um número racional? NÃO

26) O número $\sqrt{-1}$ é um número real? NÃO

27) O zero é um número racional? SIM

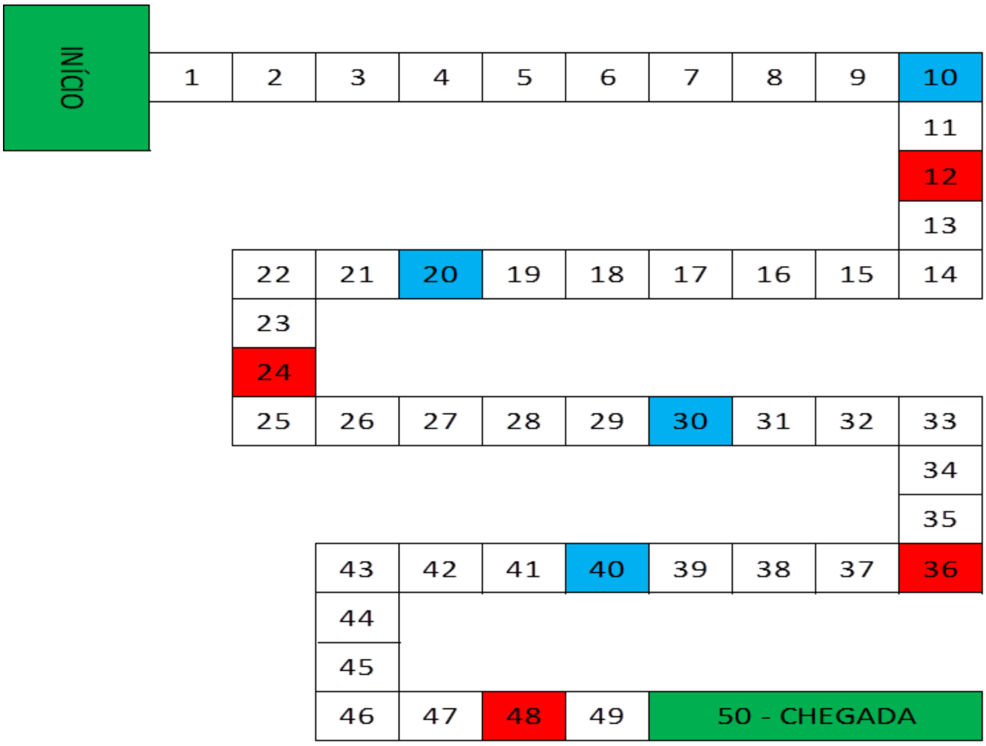
28) O zero é um número irracional? NÃO

29) O zero é um número real? SIM

30) Um número inteiro negativo é um número racional? SIM

TABULEIRO DO JOGO

Figura 56 - Tabuleiro do Jogo



Fonte: elaborado pelo autor usando o *Excel*.

7

Considerações finais

A ideia principal deste trabalho foi levantar questionamentos sobre o processo ensino-aprendizagem de números irracionais, assunto este que é um grande desafio ao professor que busca que o aluno compreenda o seu sentido, associações, a reta numérica, e não apenas realize exercícios mecanicamente.

Neste trabalho, tentamos mostrar a importância de buscar formas alternativas para abordar números irracionais, levando em consideração cada turma, as suas dificuldades, tentando fazer associações geométricas sempre que possível.

Começamos o trabalho com um resumo da origem dos números e dos principais sistemas de numeração, seguindo com uma contextualização histórica dos números irracionais para chamar a atenção para a importância da história da Matemática em nossas aulas no dia a dia.

No capítulo 5, tratamos os números irracionais de uma forma mais conceitual, fugindo um pouco do processo ensino-aprendizagem, apresentando definições e demonstrações.

No capítulo 6, discutimos exatamente sobre o ensino dos números irracionais, apresentamos uma análise de livros didáticos, citando pesquisas de 2007 e, posteriormente, fizemos uma análise de quatro coleções atuais. O objetivo foi apresentar como os professores têm trabalhado o assunto com as suas turmas, considerando que a grande maioria trabalha com livro didático. Fizemos uma pesquisa com os professores exatamente sobre como eles apresentam o conteúdo e o porquê deles acharem que os alunos têm tanta dificuldade em entender os números irracionais. Após a análise dos resultados, chegamos à conclusão de que é preciso buscar sempre alternativas que estimulem e motivem os nossos alunos a compreender o ensino da Matemática na Educação Básica.

Entendemos que este trabalho pode servir para os professores de Matemática como uma leitura fácil de fazer e contribuir na abordagem dos números irracionais, mostrando que as dificuldades que eles podem encontrar são comuns a outros profissionais.

Apresentamos algumas atividades de trabalho com os números irracionais, inclusive, algumas atividades realizadas por professores que tiveram um ótimo retorno. Dentre elas, procuramos diversificar com a utilização do *GeoGebra*, de jogos matemáticos e de atividades que podem ser feitas usando a calculadora.

8

Referências bibliográficas

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando a Matemática 8.** 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2006.

BAKOS, M. M. (Org.). O Imperador na Terra dos Faraós. **Revista Nossa História**, n. 15, v. 2, jan., 2005.

BÍBLIA, A. T. Português. Bíblia Católica Ave Maria: I livro dos Reis. Disponível em: D<https://www.bibliacatolica.com.br/biblia-ave-maria/i-reis/7/23/.> Acesso em 20 jul. 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 9ª reimpressão. Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1991.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. DF: MEC / SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **A nova definição de número real.** Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/novadef.htm. Acesso em 30 jul. 2020.

______. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 1. ed. Lisboa, Editora: Tipografia Matemática, 1951.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática - uma breve história.** 3. ed., v. I**,** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** 5. ed. Trad.: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

FNDE. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.** Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro>. Acesso em 16 ago. 2020.

FREITAS, R. J.; ALVARENGA, A. M. O surgimento do Número Negativo. Universidade Federal do Pampa – Programa institucional de bolsa de iniciação à ADocência - PIBID/ subprojeto de Matemática. Disponível em: <https://sites.unipampa.edu.br/pibid2014/files/2017/08/resenha-roberta.pdf> Acesso em 25 jul. 2020.

GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática, 8º ano:** Ensino Fundamental: Anos Iniciais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GONGORA, M.; ULYSSES, S. **A Origem dos Números – Ensino Fundamental.** Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/numeros.html#menu-closed>. Acesso em 30 jul. 2020.

GUEDES, F. **Número de Ouro.** Disponível em: <https://escolakids.uol.com.br/matematica/numero-de-ouro.htm#:~:text=O%20n%C3%BAmero%20de%20ouro%20%C3%A9%20um%20n%C3%BAmero%20irracional%20e%20pode,um%20segmento%20de%20reta%20qualquer.&text=Essa%20raz%C3%A3o%20corresponde%20%C3%A0%20propor%C3%A7%C3%A3o,em%20distintos%20lugares%20na%20natureza.%20%20Acesso%20em%2001/06/20>. Acesso em 15 jul. 2020.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade:** 8º ano. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 2009

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar.** 10. ed. vol. II**.** São Paulo: Editora Atual, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI**,** C. I. **Fundamentos da Matemática Elementar.** 9. Ed. vol. I**.** São Paulo: Editora Atual, 2013.

.

IFRAH, G. **História Universal dos Números.** 2ª reimpressão. Trad.: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

______. **Os números:** a história de uma grande invenção**.** 9. ed. Trad.: Stella M. de Freitas Senso. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1998.

IMENES, L. M. P. **A numeração indo-arábica**. São Paulo: Scipione, 2002.

KARLSON, P. **A Magia dos Números.** Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

LIMA, E. L. **Análise Real.** vol. I**.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais.** 1. ed. 3ª reimpressão. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas Elementares.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA. P. R. Uma prova que π é irracional. Blog Manthano**.** Disponível em: <http://manthanos.blogspot.com/2012/12/uma-prova-de-que-e-irracional_20.html>. Acesso em 31 jul. 2020.

MAOR, E. **e:** A história de um número. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática para o Ensino Médio.** vol. único**.** São Paulo: Editora Ática, 1998.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides:** a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad.: Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MORAES, D. **O sistema numérico mesopotâmico.** Disponível em < http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=976&sid=9>. Acesso em 16 jun. 2020.

______. **Um, dois, três e já:** com vocês a história dos números. Disponível em: <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=986&sid=9> Acesso em 15 jun. 2020.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, Paulo C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NIVEN, I. **Números Racionais e Irracionais.** 1. ed. Trad.: Renato Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. 2012. 235f. il. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo - Faculdade. De Educação. São Paulo, 2012. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23082012-092642/publico/WAGNER_MARCELO_POMMER_rev.pdf>. Acesso em 19 mar. 2020.

ROQUE, T. **História da Matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora Ltda, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos da História da Matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
X

SANTOS, J.C. **Números Reais: Um desafio da Educação Básica.** Monografia de Especialização em Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio – Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, 2007.

SANTOS, L. M. A.; SCADELAI, L. M. **Pesquisa em Educação Matemática:** desafios à prática docente. Taquaritinga: Agbook, 2013.

SILVEIRA, ENIO. **Matemática: compreensão e prática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUTO, A.M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica,** 2010. 106f. il.Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/22%20Alexandre%20Machado.pdf>. Acesso em 16 ago. 2020.

SOUZA, J. R.; PATARO P. R. **Vontade de Saber Matemática, 8º ano.** 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

STEWART, I. **Uma história da Simetria na Matemática.** Trad: Cláudia Carina. Edição Digital. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora Ltda, Abril de 2012. Disponível em: <https://play.google.com/books>. Acesso em 02 ago. 2020.

VASCONCELOS, D. V. M. **Números Irracionais:** uma abordagem para o ensino básico**.** 1989. 42f. il. Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa – MG, 1989. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/bitstream/handle/123456789/10086/texto%20completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y#:~:text=N%C3%BAmeros%20Irracionais%3A%20uma%20abordagem%20para%20o%20ensino%20b%C3%A1sico.,-Orientador%3A%20Alexandre%20Miranda&text=Este%20trabalho%20traz%20algumas%20discuss%C3%B5es,no%20processo%20de%20ensino%5Caprendizagem.>
Acesso em 20 jul. 2020.

UNIVERSIDADE DE LISBOA/ INSTITUTO DE EDUCAÇÃO - Número de Ouro. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/provaouro.htm.> Acesso em 22 jul. 2020.

: