



Jessica Laila Ferreira Bittencourt Neto

**Testes de Injetividade em Reservatório
Multicamadas: Solução Aproximada para um
Esquema de Múltiplas Vazões**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Sinésio Pesco
Co-orientador: Prof. Abelardo Borges Barreto Junior

Rio de Janeiro
Maio de 2020



Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto

**Testes de Injetividade em Reservatório
Multicamadas: Solução Aproximada para um
Esquema de Múltiplas Vazões**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Sinésio Pesco

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Abelardo Borges Barreto Junior

Co-orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Emilio Paulo dos Santos Sousa

Petróleo Brasileiro S/A – Petrobras

Rio de Janeiro, 8 de Maio de 2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Fluminense em 2017.

Ficha Catalográfica

Lailla Ferreira Bittencourt Neto, Jessica

Testes de Injetividade em Reservatório Multicamadas: Solução Aproximada para um Esquema de Múltiplas Vazões / Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto; orientador: Sinésio Pesco; co-orientador: Abelardo Borges Barreto Junior. – Rio de Janeiro: PUC-Rio , Departamento de Matemática, 2020.

v., 72 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Teste de Injetividade;. 3. Esquema de Múltiplas Vazões;. 4. Reservatório com Múltiplas Camadas.. I. Pesco, Sinésio. II. Borges Barreto Junior, Abelardo. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 004

Ao meu pai, irmãos e amigos
pelo apoio e encorajamento.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Sinésio Pesco pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

Ao professor Abelardo Barreto, pela orientação, por sempre estar disposto quando precisei de ajuda e pelos momentos de descontração que foram cruciais para o meu desenvolvimento.

Ao Renan Vieira Bela, por todo o suporte prestado para o aperfeiçoamento deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

A Petrobras e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus colegas da PUC-Rio.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda.

A todos os amigos e familiares que me estimularam a continuar estudando.

Resumo

Lailla Ferreira Bittencourt Neto, Jessica; Pesco, Sinésio; Borges Barreto Junior, Abelardo. **Testes de Injetividade em Reservatório Multicamadas: Solução Aproximada para um Esquema de Múltiplas Vazões**. Rio de Janeiro, 2020. 72p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A injeção de água como método de recuperação de petróleo é usualmente utilizada devido à sua eficiência em recuperar óleo que encontra-se recluso no reservatório. Um teste de injetividade consiste basicamente em injetar uma fase (água ou gás) continuamente, por um determinado período de tempo, em um reservatório saturado de óleo. A partir da análise do comportamento da pressão no poço, esse procedimento tem por finalidade estimar, além do volume de óleo recuperável, parâmetros do reservatório, tais como permeabilidade, efeito de película, entre outros. Na atualidade, na literatura são encontrados estudos relativos a um único período de injeção (e um único período de fall-off) em reservatórios multicamadas e estudos relativos a reservatórios de camada única considerando vazão de injeção variável. Em vista disto, este trabalho tem como objetivo propor uma solução analítica aproximada para o comportamento da pressão em um reservatório multicamadas considerando um esquema de múltiplas vazões. A acurácia da solução proposta foi avaliada a partir da comparação com um simulador numérico de diferenças finitas em diferentes cenários. Os resultados exprimem uma considerável consonância entre os dados fornecidos pelo simulador numérico e o modelo proposto.

Palavras-chave

Teste de Injetividade; Esquema de Múltiplas Vazões; Reservatório com Múltiplas Camadas.

Abstract

Laila Ferreira Bittencourt Neto, Jessica; Pesco, Sinésio (Advisor); Borges Barreto Junior, Abelardo (Co-Advisor). **Injectivity Tests in Multilayered Reservoirs: An Approximate Solution Considering Multiple Rates**. Rio de Janeiro, 2020. 72p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The water injection is usually used as an oil recovery method due to its efficiency in recovering oil that is trapped in the reservoir. An injectivity test basically consists of continuously injecting a phase (water or gas), for a certain period of time, into an oil-saturated reservoir. From the analysis of the wellbore pressure behavior, this procedure aims to estimate, in addition to the volume of recoverable oil, parameters of the reservoir, such as permeability, film effect, among others. Nowadays, in the literature are found studies referring to a single injection period (and a single fall-off period) in multilayer reservoirs and studies referring to a single layer reservoirs considering variable injection flow-rates. In this context, this work aims to propose an approximate analytical solution for the pressure behavior in a multilayer reservoir considering a scheme of multiple flow-rates. The accuracy of the proposed solution was evaluated by comparison to a commercial finite difference-based flow simulator in different scenarios. The results express a considerable agreement between the data provided by the numerical simulator and the proposed model.

Keywords

Injectivity Test; Multiple Flow-rate Scheme; Multilayer Reservoir.

Sumário

1	Introdução	14
2	Revisão Bibliográfica	15
2.1	Modelos para Reservatório com Escoamento Monofásico	15
2.2	Modelos para Reservatório com Escoamento Bifásico	16
3	Escoamento Monofásico em Reservatório Multicamadas: Esquema de Múltiplas Vazões	19
3.1	Formulação Matemática	19
3.2	Superposição de Vazões	22
4	Teste de Injetividade em Reservatório Multicamada: Esquema de Múltiplas Vazões	23
4.1	Formulação Proposta	23
5	Resultados	28
5.1	Parâmetros Utilizados	28
5.2	Resultados Comparativos	30
5.3	Permeabilidade Equivalente Estimada	43
6	Conclusão e trabalhos futuros	52
7	Referências bibliográficas	53
A	Escoamento Monofásico em Reservatório com Uma Camada: Múltiplas Vazões	56
B	Teste de Injetividade em Reservatório com Uma Camada: Vazão Constante	59
B.1	Período de Injeção	59
B.2	Período de Falloff	62
C	Teste de Injetividade em Reservatório com Uma Camada: Múltiplas Vazões	63
D	Teste de Injetividade em Reservatório com Uma Camada: Vazão Constante no Campo de Laplace	65
D.1	Modelo com duas regiões	65
D.2	Modelo com três regiões	70

Lista de figuras

Figura 3.1	Modelo de reservatório com n camadas e escoamento monofásico	19
Figura 3.2	Modelo de Reservatório Equivalente	21
Figura 4.1	Modelo de Reservatório com n camadas e escoamento bifásico	23
Figura 5.1	Curvas de Permeabilidade Relativa	29
Figura 5.2	Curva $r_F(t) \times S_w$	29
Figura 5.3	Caso A1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	32
Figura 5.4	Caso A2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	33
Figura 5.5	Caso A3: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	34
Figura 5.6	Caso A4: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	35
Figura 5.7	Caso B1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	36
Figura 5.8	Caso B2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	37
Figura 5.9	Caso B3: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	38
Figura 5.10	Caso B4: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	39
Figura 5.11	Caso C1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	40
Figura 5.12	Caso C2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	41
Figura 5.13	Caso C3: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	42
Figura 5.14	Caso C4: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica	43
Figura 5.15	Curva de Vazão x Tempo	44
Figura 5.16	Casos D1 e D2: Curvas de Pressão x Tempo	45
Figura 5.17	Caso D1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica Normalizados	46
Figura 5.18	Caso D2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica Normalizados	47
Figura 5.19	Caso D1: Gráfico Semilog de Pwf	48
Figura 5.20	Caso D2: Gráfico Semilog de Pwf	49
Figura 5.21	Caso D1: Derivadas Logarítmicas dos Períodos	50
Figura 5.22	Caso D2: Derivadas Logarítmicas dos Períodos	51
Figura A.1	Gráfico de Múltiplas Vazões	57
Figura A.2	Gráfico de Múltiplas Vazões superpostas	57
Figura D.1	Modelo para fluxo bifásico com duas regiões	65
Figura D.2	Modelo com Três Regiões	70

Lista de tabelas

Tabela 5.1	Vazões de Injeção dos Casos	31
Tabela 5.2	Propriedades Casos A1 e A2	31
Tabela 5.3	Propriedades Casos A3 e A4	33
Tabela 5.4	Propriedades Casos B	35
Tabela 5.5	Propriedades Casos B	40
Tabela 5.6	Vazões de Injeção dos Casos D1 e D2	44
Tabela 5.7	Propriedades Casos D1 e D2	44
Tabela 5.8	Caso D1: Erros da Permeabilidade Equivalente Estimada	50
Tabela 5.9	Caso D2: Erros da Permeabilidade Equivalente Estimada	51

Lista de símbolos

B_w – Fator volume formação da água

c_o – Compressibilidade do óleo

c_r – Compressibilidade da rocha

c_t – Compressibilidade total

c_w – Compressibilidade da água

f_w – Fluxo fracionário de água

h_j – Espessura da camada j

h_t – Espessura total do reservatório

k – Permeabilidade absoluta do reservatório

k_{eq} – Permeabilidade equivalente do reservatório

\bar{k}_{eqf} – Permeabilidade equivalente estimada do reservatório utilizando propriedades do fase f

k_j – Permeabilidade absoluta da camada j

k_{rf} – Permeabilidade relativa da fase f

k_s – Permeabilidade do reservatório na região de dano

p – Pressão

p_i – Pressão inicial

p_{wf} – Pressão no poço

q_{inj} – Vazão de injeção

\bar{q}_j – Vazão aproximada ao longo da camada j q_{ji} – Vazão de injeção na camada j no período de tempo i

\bar{q}_{ji} – Vazão aproximada de injeção na camada j

q_{oj} – Vazão de óleo na camada j

q_{wj} – Vazão de água na camada j

r – Raio

r_F – Raio da frente de avanço de água

r_{Fj} – Raio da frente de avanço de água na camada j

r_w – Raio do poço

S_f – Saturação do fluido f

S_{or} – Saturação residual de óleo

S_{wi} – Saturação de água irreduzível

t – Tempo

u – Variável de Laplace

$\alpha_p = 19.03$ – Constante de adequação de medidas do sistema brasileiro

$\alpha_t = 0.0003484$ – Constante de adequação de medidas do sistema brasileiro

λ_f – Mobilidade do fluido f

$\hat{\lambda}_o$ – Mobilidade do óleo na saturação inicial de água

$\hat{\lambda}_w$ – Mobilidade da água na saturação residual de óleo

λ_t – Mobilidade do total

ϕ – Porosidade

μ_f – Viscosidade do fluido f

$\hat{\eta}_f$ – Coeficiente de difusividade hidráulica do fluido f

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin, .

1

Introdução

Com o aumento da demanda mundial por petróleo e dos avanços tecnológicos, a indústria petrolífera tem buscado métodos que visem otimizar a exploração de petróleo. O Teste de Injetividade é um método conhecido por ser baseado na injeção de um fluido (usualmente, água) no reservatório com a finalidade de otimizar a extração de óleo. A partir da resposta de pressão obtida nesse processo, informações relevantes a respeito do reservatório podem ser conhecidas, tais como permeabilidade equivalente, volume de óleo recuperável, entre outros. Atualmente, na literatura são encontrados diversos estudos relativos a testes de injeção em reservatórios. Entre eles então os testes de injetividade utilizando água como fluido injetado. Diferentes suposições em relação a geometria e características físicas do reservatório são adotadas, permitindo assim a ampliação da interpretação de diferentes cenários. Em vista disto, o objetivo principal deste trabalho é desenvolver um modelo analítico aproximado para um esquema de múltiplas vazões de injeção em reservatórios multicamadas. A formulação foi desenvolvida combinando a solução para o período de falloff em reservatórios multicamadas (24) com o modelo existente para múltiplas vazões em reservatório de camada única (25).

A partir da solução analítica proposta neste trabalho foi criado um algoritmo capaz de simular dados da resposta pressão e da derivada logarítmica da pressão a partir da utilização de diferentes parâmetros de rocha e fluido pré selecionados. Os resultados foram avaliados através da comparação com um simulador numérico comercial de diferenças finitas considerando um conjunto selecionado de casos. Este trabalho foi desenvolvido em seis capítulos. O Capítulo 2 mostra uma visão geral de trabalhos anteriores, em relação tanto ao escoamento monofásico quanto ao escoamento bifásico em meios porosos. O Capítulo 3 descreve a formulação para um escoamento monofásico com múltiplas vazões de produção em um reservatório multicamadas. Então, no Capítulo 4, é apresentada a proposta de uma formulação para múltiplas vazões de injeção em um reservatório multicamadas. Os resultados alcançados usando o modelo sugerido e os dados provenientes do simulador numérico são mostrados no Capítulo 5, onde é feito um breve comentário sobre tais resultados. Após isto, o Capítulo 6 apresenta as conclusões com respeito aos resultados obtidos e fornece sugestões para trabalhos futuros. Por fim, nos Apêndices são descritas formulações que auxiliaram a construção das soluções apresentadas nos capítulos (3) e (4).

2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo é dedicado a síntese, em ordem cronológica, de estudos anteriores referentes a duas vertentes de pesquisa que nortearam e motivaram o desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente serão apresentados estudos referentes a modelos envolvendo reservatórios com escoamento monofásico comumente conhecidos como testes de produção. E, por outro lado, modelos envolvendo escoamento bifásico, também conhecido como testes de injetividade.

2.1

Modelos para Reservatório com Escoamento Monofásico

Em 1961, Lefkovits et al. (2) propuseram um modelo analítico direcionado para testes de produção em reservatórios multicamadas, considerando que a única conexão entre as camadas ocorria no poço. Neste modelo, as propriedades de cada camada podem ser distintas, como permeabilidade, espessura, porosidade, entre outros. Seus resultados embasaram inúmeros trabalhos posteriores. Já no trabalho de Cobb et al. (5) em 1974, uma comparação entre técnicas para análise de dados em reservatórios multicamadas foi realizada, considerando camadas de mesma espessura. Além disso, foi mostrado que os métodos utilizados podem ser empregados para estimar a capacidade de fluxo do reservatório. Entretanto, foi constatado que os métodos semilog eram ineficientes para estimar a espessura ou permeabilidade de uma camada específica.

Raghavan (6), também em 1974, apresentou um estudo sobre escoamento monofásico em reservatório com duas camadas, onde por hipótese tais camadas possuíam diferentes espessuras. Foi sugerido um recurso para aferir a permeabilidade de uma camada, assumindo que a razão de espessura é conhecida. Também foi demonstrado que um dos métodos estudados por Cobb et al., o Método de Horner, é o mais eficiente para estimar a pressão do reservatório e permeabilidade relativa de cada camada.

Brown (7) interessou-se pelo estudo relativo a reservatórios compostos devido a variedade de configurações que o mesmo pode assumir. Um método semi-analítico foi utilizado para determinar as características da resposta transiente de pressão. Com isso, conclusões sobre a natureza e a duração do período de transição entre as zonas alteradas, ou seja, a zona de dano próxima ao poço e as zonas inalteradas, foram obtidas.

No trabalho de Gao (8), soluções aproximadas para a pressão e para a

vazão em cada camada foram desenvolvidas. A formulação sugerida é eficaz na obtenção de estimativas para a capacidade de fluxo em cada camada. O comportamento do fluxo cruzado e seus impactos também são abordados.

Com o objetivo de avaliar as propriedades de cada camada, Ehlig-Economides et al. (9), em 1987, propuseram novos métodos tanto para estimar propriedades quanto para sua interpretação. Tais métodos basearam-se em um cálculo a partir da análise dos dados de pressão e vazão de cada camada. Sendo assim, através de seu método, foi possível determinar a permeabilidade e os danos à formação de cada camada. E, em reservatórios com fluxo cruzado de formação, a permeabilidade vertical entre as camadas pôde ser estimada.

Em 1989, Raghavan (12) sintetizou os avanços até então com respeito a reservatórios multicamadas, onde foram relatadas formas com que as diferenças nas propriedades da camada podem induzir a uma resposta incorreta de pressão em comparação a um reservatório equivalente de camada única foram relatadas. Além disso, foi abordado um método para obter propriedades de uma camada com base na análise de dados de pressão e vazão da camada.

2.2

Modelos para Reservatório com Escoamento Bifásico

Modelos relativos a Teste de Injetividade foram conquistando maior importância na literatura. Então em 1989, Abbaszadeh et al. (11) desenvolveram um método de interpretação para testes de injetividade em um reservatório de camada única, onde soluções analíticas para distribuições de pressão e saturação são apresentadas. Os efeitos da permeabilidade relativa, estocagem de poço e dano de formação são considerados nessas soluções.

Posteriormente, Bratvold et al. (14) apresentam procedimentos generalizados para interpretar dados nos períodos de injeção e falloff após injeção de água fria em um reservatório quente. As soluções obtidas fornecem estimativas do tamanho da região invadida, a distância até a descontinuidade da temperatura, as capacidades de calor e os efeitos de estocagem e de skin do poço.

Oliveira et al. (15) partiram do pressuposto que as curvas de permeabilidade relativa podem ser aproximadas por equações, cujos termos são obtidos a partir do skin aparente. Logo, foi possível sugerir uma técnica para estimar tais curvas de permeabilidade a partir dos dados da pressão.

O comportamento dos dados transientes de pressão para escoamentos monofásicos e multifásicos em reservatórios radialmente heterogêneos foi estudado por Thompson et al. (16) com a finalidade de elucidar o comportamento de fluxos multifásicos de forma geral.

Ainda na linha de pesquisa referente a reservatórios radialmente heterogêneos, Banerjee et al. (17) determinaram uma modelagem para o comportamento da pressão durante testes de injetividade. A mesma formulação sugerida também pode ser aplicada a reservatórios homogêneos. Diante disso, um cálculo para o dano da formação foi elaborado.

Peres e Reynolds (18) utilizaram os conceitos propostos por Thompson e Reynolds (16) para determinar soluções analíticas para o comportamento da pressão durante o período de fall-off, após o período de injeção de água. Tais soluções foram validadas através da comparação com a resposta gerada por um simulador numérico de diferenças finitas.

Soluções analíticas aproximadas para poços verticais foram desenvolvidas por Peres et al (19) em 2004. Para isso, os autores utilizaram a solução de fluxo monofásico adicionado a um termo multifásico que representa a zona bifásica e o comportamento da frente de avanço de água. O modelo para o comportamento da frente de avanço de água foi adotado de acordo com a teoria de Buckley-Leverett (1). Além disso, por meio de comparações com soluções geradas por um simulador numéricos foi possível verificar que as soluções analíticas aproximadas proporcionam resultados satisfatórios.

Peres et al (20) utilizaram o princípio da superposição de vazões para detalhar a solução no período de falloff. Os trabalhos de Abbaszadeh (11) e Bratvold (14) foram utilizados como base, pois foi comprovado que a solução analítica no período de falloff pode ser construída considerando que o perfil de mobilidade no instante de fechamento do poço injetor não sofre alteração.

Gahtani et al.(21) apresentaram um estudo, utilizando variáveis no campo de Laplace, referente a um modelo de reservatório composto, com a finalidade de avaliar o impacto do fluxo de mobilidade. A importância da consideração do impacto do fluxo de água na formação também foi relatada.

Considerando um reservatório multicamadas sem fluxo cruzado, Barreto et al. (23) propuseram uma expressão para avaliar a pressão no poço. Para isso, a Lei de Darcy foi aplicada em cada camada com a finalidade de obter uma expressão para a variação da pressão em cada camada durante o período de injeção. Desse modo, a vazão de cada camada pode ser escrita como uma função da variação da pressão da respectiva camada. Um meio para calcular a pressão no poço, então, é alcançado através do somatório das vazões de cada camada.

Em 2019, com o objetivo de estender para o período de fall-off a formulação do período de injeção apresentada no modelo analítico multicamadas de Barreto et al (23), Bela et al (24) propuseram uma solução analítica baseada na utilização de uma vazão adimensional. A eficiência do modelo foi verificada

por meio de comparação com um simulador numérico. Além disso, verificou-se que é possível estimar a permeabilidade equivalente do reservatório a partir da formulação obtida.

Finalmente, em 2020, Bonafé et al. (25) apresentam uma nova formulação para aproximar a resposta de pressão no poço ao realizar testes de injetividade com múltiplas vazões em reservatório de camada única. A formulação proposta também é usada para determinar a permeabilidade equivalente do reservatório em qualquer período específico de injeção ou falloff. A precisão da solução proposta foi avaliada por comparação com um simulador numérico.

Com base na formulação para o período de falloff (24) em reservatórios de multicamadas e na formulação para teste de injetividade com múltiplas vazões (25), propomos a solução para reservatórios multicamadas com múltiplas vazões para escoamento monofásico e teste de injetividade, que serão apresentados neste trabalho, respectivamente, nos Capítulos 3 e 4.

3

Escoamento Monofásico em Reservatório Multicamadas: Esquema de Múltiplas Vazões

No Apêndice A é apresentada uma formulação para um reservatório de uma única camada que utiliza um esquema de múltiplas vazões. Este capítulo é dedicado à extensão da formulação apresentada no Apêndice A para um reservatório multicamada com escoamento monofásico que utiliza um esquema de múltiplas vazões bem como uma solução aproximada para o comportamento da vazão no poço.

3.1

Formulação Matemática

Para a formulação matemática, é necessário descrever o comportamento do fluido no meio poroso, durante o período de produção ou injeção, por meio de um sistema de equações. Para fins ilustrativos considera-se um reservatório com n-camadas análogo à Figura 3.2:

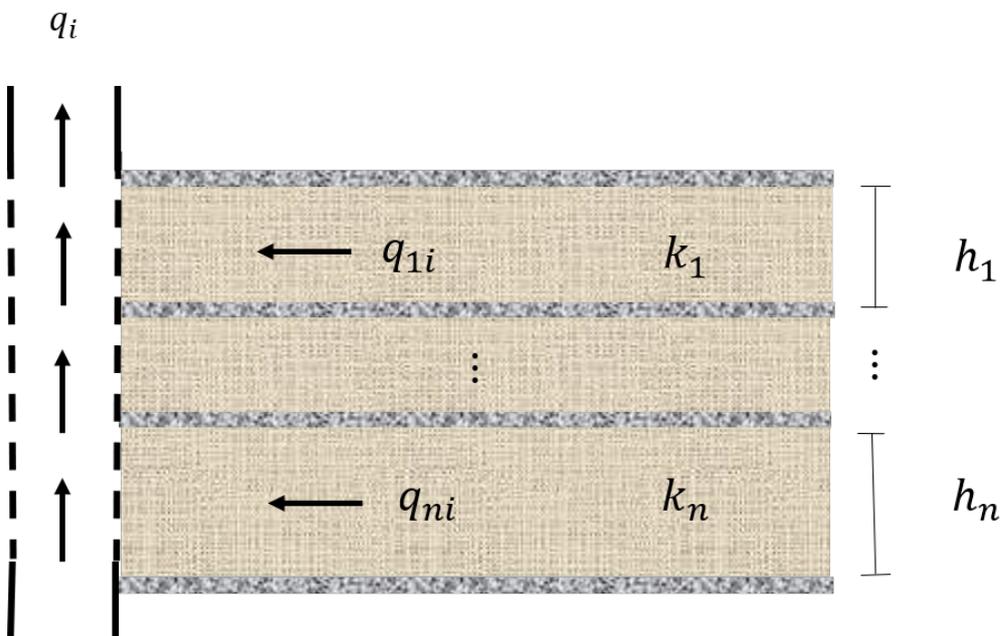


Figura 3.1: Modelo de reservatório com n camadas e escoamento monofásico

Hipóteses que caracterizam tanto o fluido como o reservatório também são necessárias.

Para isso, as seguintes hipóteses são adotadas:

- Reservatório homogêneo, isotrópico e com extensão infinita;

- Forças gravitacionais desprezíveis;
- Fluxo isotérmico;
- Espessura constante (h);
- Viscosidade constante (μ_o);
- Permeabilidade constante (k);
- O poço penetra completamente todas as camadas e produz uma vazão constante q_i no período de injeção i .
- A formação rochosa apresenta uma pequena e constante compressibilidade;
- Não há efeito de estocagem.
- Não há região de dano próxima ao poço (skin);
- No instante $t = 0$, o reservatório está em equilíbrio, ou seja, a pressão é a mesma em todas as camadas.

Além disso, para solucionar o problema, condições de contorno precisam ser assumidas. A Condição Inicial (C.I.) ocorre no instante $t = 0$ e reflete que o reservatório está em equilíbrio, ou seja, a pressão é a mesma em todas as camadas. Já a Condição de Contorno Interna (C.C.I) é relativa ao modo como o poço está produzindo durante o teste. No caso em questão, adota-se um esquema de múltiplas vazões. E por fim, a Condição de Contorno Externa (C.C.E) que é referente ao comportamento do fluxo no limite extremo do reservatório. Por hipótese, será considerado um reservatório infinito. A C.C.E. representa apenas que durante o tempo do teste as fronteiras externas não interferem no comportamento do poço.

Portanto, a partir das hipóteses adotadas, da Equação da Difusividade do Fluido e condições de contorno, o seguinte sistema de equações modela o problema:

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu_o \hat{c}_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} (r, t) \quad (3-1)$$

CI:

$$p(r, t = 0) = p_i \quad (3-2)$$

CCI:

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu_o} \lim_{r \rightarrow r_w} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3-3)$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i \quad (3-4)$$

Neste caso, é considerado um reservatório com n-camadas e um esquema de múltiplas vazões, que ocorrem em m-períodos de produção. Sendo assim, o comportamento da vazão de produção no poço é descrito conforme o seguinte esquema:

$$q = \begin{cases} q_0 = 0, & t_0 = 0 \\ q_1 = \sum_{j=1}^n q_{j1}, & t_0 < t \leq t_1 \\ q_2 = \sum_{j=1}^n q_{j2}, & t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_m = \sum_{j=1}^n q_{jm}, & t_{m-1} < t \leq t_m \end{cases} \quad (3-5)$$

onde q_{ji} representa a vazão na camada j no período de tempo i e q_i representa a vazão total no poço no período de tempo i . Sabe-se que a variação de pressão no poço é a mesma em todas as camadas, então de forma geral:

$$\Delta p_{wf}(t) = \Delta p_{wf_1}(t) = \dots = \Delta p_{wf_n}(t) \quad (3-6)$$

Por outro lado, por conveniência, o reservatório com n camadas pode ser associado a um reservatório equivalente de uma única camada.

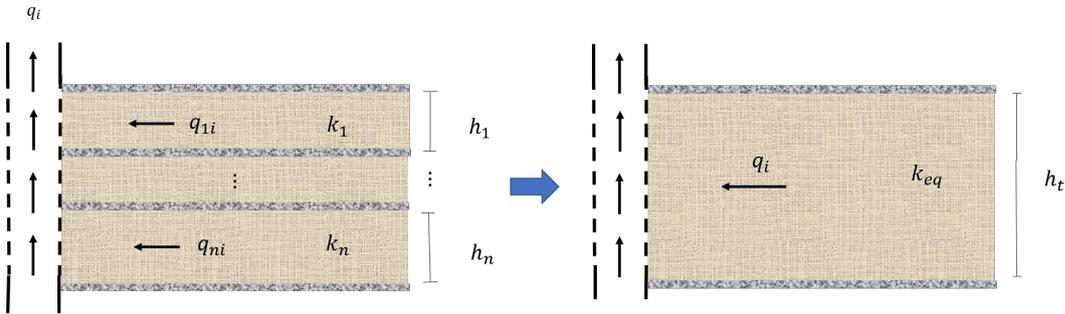


Figura 3.2: Modelo de Reservatório Equivalente

Portanto, as propriedades do modelo equivalente estão relacionadas com as propriedades do modelo com n camadas da seguinte forma:

$$k_{eq} = \frac{k_1 h_1 + \dots + k_n h_n}{h_t} \quad (3-7)$$

e

$$h_t = h_1 + \dots + h_n \quad (3-8)$$

Sendo assim, é possível adaptar a solução para a pressão no poço apresentada no Apêndice A para o modelo de reservatório equivalente. Logo, para $t_{i-1} < t \leq t_i$, onde $1 \leq i \leq m$:

$$\Delta p_{wf} = \frac{\alpha_p B \mu}{k_{eq} h_t} \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \left(-\frac{1}{2} E_i \left(\frac{-r_w^2 \phi \mu c_t}{4 \alpha_t k_{eq} (t - t_{k-1})} \right) \right) \right] \quad (3-9)$$

onde α_p e α_t são constantes de adequação de unidades ao sistema de medidas Brasileiro e a função integral exponencial é dada por $E_i(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Utilizando a aproximação logarítmica para função integral exponencial, a Equação (3-9) pode ser reescrita:

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_p B \mu}{k_{eq} h t} \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \ln \left(\frac{4\alpha_t k_{eq} (t - t_{k-1})}{r_w^2 \phi \mu c_t e^\gamma} \right) \right] \quad (3-10)$$

3.2

Superposição de Vazões

Conforme deduzido no Apêndice A, utilizando a superposição do esquema de múltiplas vazões, é possível aproximar a vazão ao longo de cada camada do reservatório. Sendo assim, para um determinado período de injeção i , onde $t_{i-1} < t < t_i$ e $1 \leq i \leq m$, sabe-se que a vazão ao longo de uma camada j pode ser aproximada pela seguinte relação:

$$\bar{q}_{ji}(r, t) = \sum_{k=1}^i \left[(q_{jk} - q_{j_{k-1}}) e^{\left(-\frac{r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k_j (t - t_{k-1})} \right)} \right] \quad (3-11)$$

Portanto, em um determinado período de injeção i , a vazão no poço pode ser aproximada pela soma das vazões aproximadas de cada camada:

$$q(r_w, t) = \sum_{j=1}^n \bar{q}_{ji}(r_w, t) \quad (3-12)$$

Sendo assim, substituindo a equação (3-11) na equação (3-12) tem-se:

$$q(r_w, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \left[(q_{jk} - q_{j_{k-1}}) e^{\left(-\frac{r_w^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k_j (t - t_{k-1})} \right)} \right] \quad (3-13)$$

4

Teste de Injetividade em Reservatório Multicamada: Esquema de Múltiplas Vazões

A partir da formulação para um Teste de Injetividade em reservatório de uma camada com vazão constante, apresentada no Apêndice B, a formulação para um Teste de Injetividade em um reservatório de uma camada que utiliza um esquema de múltiplas vazões pôde ser apresentada por (25). O desenvolvimento de tal solução é apresentada no Apêndice C. Entretanto, este capítulo apresenta o desenvolvimento da formulação que descreve o comportamento da pressão durante a injeção de água um reservatório multicamadas considerando um esquema de múltiplas vazões.

4.1

Formulação Proposta

Analogamente ao Capítulo 3, nesta formulação será considerado um reservatório com n -camadas onde ocorre a injeção de água com um esquema de múltiplas vazões considerando m -períodos de injeção. Para fins ilustrativos considera-se um reservatório com n -camadas análogo à Figura 4.1:

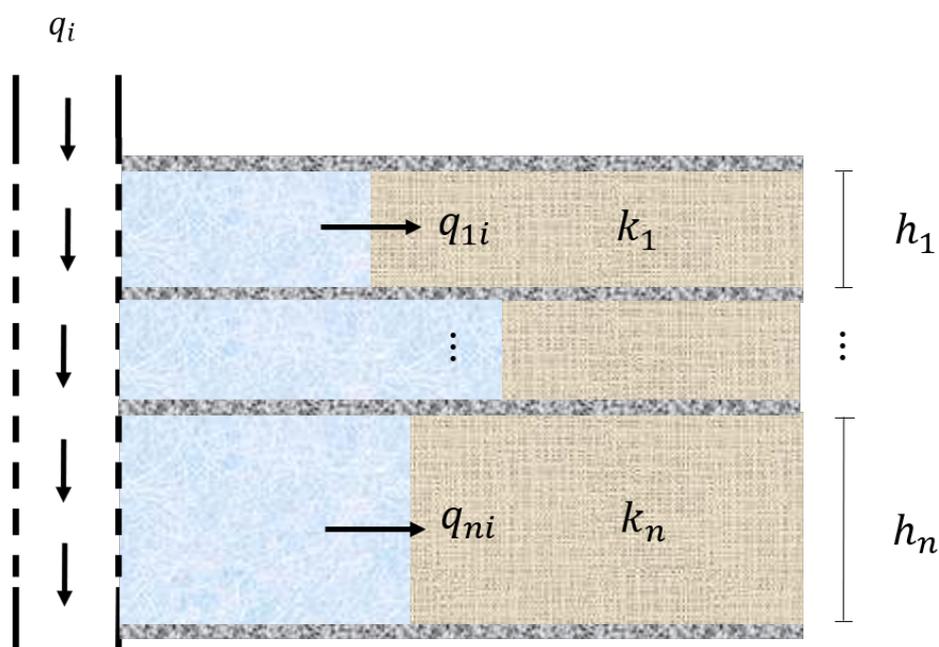


Figura 4.1: Modelo de Reservatório com n camadas e escoamento bifásico

Para a formulação matemática são assumidas as seguintes hipóteses:

- Reservatório é homogêneo e isotrópico, com extensão infinita;

- Forças gravitacionais e capilares desprezíveis;
- Água e óleo são considerados fluidos imiscíveis e levemente compressíveis com viscosidade (μ) constante;
- Fluxo é isotérmico;
- Espessura constante (h);
- O poço penetra completamente todas as camadas e injeta uma vazão constante q_i no período de injeção i ;
- A formação rochosa apresenta uma pequena e constante compressibilidade;
- Não há efeito de estocagem;
- Não há região de dano próxima ao poço (skin);
- No instante $t = 0$, o reservatório está em equilíbrio, ou seja, a pressão é a mesma em todas as camadas.

Sendo assim, o comportamento da vazão de injeção no poço é descrito conforme o esquema a seguir:

$$q_{inj}(t) = \begin{cases} q_0 = 0, & t_0 = 0 \\ q_1 = \sum_{j=1}^n q_{j1}, & t_0 < t \leq t_1 \\ q_2 = \sum_{j=1}^n q_{j2}, & t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_m = \sum_{j=1}^n q_{jm}, & t_{m-1} < t \leq t_m \end{cases} \quad (4-1)$$

onde q_{ji} representa a vazão de injeção na camada j no período de injeção i enquanto q_i representa a vazão de injeção no poço no período de injeção i .

A mobilidade do fluido (λ_f) mede a facilidade com que um fluido escoo pelo meio poroso. Essa propriedade é definida como a razão entre a permeabilidade relativa da fase e sua viscosidade, ou seja:

$$\lambda_f(S_w) = \frac{k_{rf}(S_w)}{\mu_f} \quad (4-2)$$

onde $f = w, o$.

Sendo assim a mobilidade total do sistema pode ser definida por:

$$\lambda_t(S_w) = \lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w) \quad (4-3)$$

Ao aplicar a Lei de Darcy na camada j , as vazões de óleo e água são dadas, respectivamente, por:

$$q_{oj}(r, t) = -2\pi h_j k_j \lambda_{oj} \left(r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) \quad (4-4)$$

e

$$q_{w_j}(r, t) = -2\pi h_j k_j \lambda_{w_j} \left(r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) \quad (4-5)$$

Pela lei de conservação de massa, a vazão total na camada j é dada por:

$$q_j(r, t) = q_{o_j}(r, t) + q_{w_j}(r, t) \quad (4-6)$$

Com isto, substituindo as Equações (4-4) e (4-5) na Equação (4-6):

$$q_j(r, t) = -2\pi h_j k_j (\lambda_{o_j} + \lambda_{w_j}) \left(r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) \quad (4-7)$$

Durante qualquer um dos períodos de injeção, com vazão não nula, uma região de alta saturação de água é formada ao redor do poço. Com o decorrer do tempo tal região se propaga, sendo assim, é possível concluir que a saturação é função do tempo e do raio. Por consequência, as curvas de permeabilidade relativa e as funções de mobilidade do fluido, por serem dependentes da saturação, também são dependentes do tempo e do raio. Portanto, a Equação (4-7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$q_j(r, t) = -2\pi h_j k_j \lambda_{t_j}(r, t) \left(r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) \quad (4-8)$$

Rearrmando os termos da Equação (4-8):

$$\frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi h_j k_j} \frac{q_j(r, t)}{\lambda_{t_j}(r, t)} \frac{1}{r} \quad (4-9)$$

Logo, integrando ambos os lados da equação anterior a partir do poço:

$$\Delta p_{wf_j} = \frac{1}{2\pi h_j k_j} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_j(r, t)}{\lambda_{t_j}(r, t)} \frac{dr}{r} \quad (4-10)$$

Analogamente ao Apêndice C, considera-se a formulação de Buckley-Leveret (1). Portanto, para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, onde $i = 1, \dots, m$, o volume injetado (v_{ji}) e o raio da frente de avanço (r_{F_j}), ambos na camada j, podem ser definidos por:

$$v_{ji}(t) = \int_0^t q_{inj}(t') dt' \quad (4-11)$$

e

$$r_{F_j}(t) = \sqrt{r_w^2 + \frac{v_{inj_j}(t) B_w}{24\pi h_j \phi} f'_{w_j}(S_w)} \quad (4-12)$$

É importante ressaltar que $f'_{w_j}(S_w)$ representa a derivada da curva de fluxo fracionário da água na camada j, em cada ponto de saturação (S_w). De

forma geral e simplificada, a curva de fluxo fracionário depende da mobilidade do fluido. Neste caso, esta é definida por:

$$f_{w_j}(S_w) = \frac{\lambda_{w_j}(S_w)}{\lambda_{t_j}(S_w)} \quad (4-13)$$

Em cada camada, é fácil notar que na região onde $r > r_{F_j}$ há apenas fluxo de óleo. Portanto, utilizando as contantes de adequação ao sistema brasileiro de medidas, a integral da Equação (4-10) pode ser reformulada como a seguinte soma:

$$\Delta p_{wf_j} = \frac{\alpha_p}{h_j k_j} \left(\int_{r_w}^{r_{F_j}(t)} \frac{q_j(r, t)}{\lambda_{t_j}(r, t)} \frac{dr}{r} + \int_{r_{F_j}(t)}^{\infty} \frac{q_{o_j}(r, t)}{\hat{\lambda}_{o_j}} \frac{dr}{r} \right) \quad (4-14)$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{\alpha_p}{h_j k_j} \int_{r_w}^{r_{F_j}(t)} \frac{q_{o_j}(r, t)}{\hat{\lambda}_{o_j}} \frac{dr}{r}$ no lado direito da Equação (4-14):

$$\Delta p_{wf_j} = \frac{\alpha_p}{h_j k_j} \int_{r_w}^{r_{F_j}(t)} \left(\frac{q_j(r, t)}{\lambda_{t_j}(r, t)} - \frac{q_{o_j}(r, t)}{\hat{\lambda}_{o_j}} \right) \frac{dr}{r} + \frac{\alpha_p}{h_j k_j} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_{o_j}(r, t)}{\hat{\lambda}_{o_j}} \frac{dr}{r} \quad (4-15)$$

A Equação (4-15) mostra que a variação de pressão no poço pode ser entendida como a soma de dois termos: um devido às diferenças de mobilidade entre óleo e água (Δp_{λ_j}) e outro relacionado ao fluxo monofásico de óleo (Δp_{o_j}):

$$\Delta p_{wf_j}(t) = \Delta p_{\lambda_j}(t) + \Delta p_{o_j}(t) \quad (4-16)$$

Para determinar a variação de pressão no poço será utilizada uma aproximação para o esquema de múltiplas vazões em cada camada (\bar{q}_j). Supondo que a vazão ao longo de cada camada pode ser aproximada tanto pela vazão na região inundada quanto pela vazão de óleo a frente da região inundada, tem-se:

$$\bar{q}_j(r, t) = q_j(r, t) = q_{o_j}(r, t) \quad (4-17)$$

Portanto, o termo referente a diferença de mobilidade entre água e óleo de uma camada, explicitado na Equação (4-15), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\Delta p_{\lambda_j}(t) = \frac{\alpha_p}{h_j k_j \hat{\lambda}_{o_j}} \int_{r_w}^{r_{F_j}(t)} \bar{q}_j(r, t) \left(\frac{\hat{\lambda}_{o_j}}{\hat{\lambda}_{t_j}(r, t)} - 1 \right) \frac{dr}{r} \quad (4-18)$$

Por hipótese, desconsiderando a pressão hidrostática, a variação de pressão no poço em cada camada é a mesma, isto é:

$$\Delta p_{wf}(t) = \Delta p_{wf_1}(t) = \dots = \Delta p_{wf_n}(t) \quad (4-19)$$

Como artifício algébrico, as variações de pressão no poço em cada camada podem ser somadas. Essa manobra matemática, apesar de não ter sentido físico, tem a finalidade de auxiliar a obtenção de uma solução geral para a variação de pressão no poço. A partir disso, utilizando as Equações (4-16) e (4-19), duas igualdades são obtidas:

$$\sum_{j=1}^n \Delta p_{wf_j}(t) = n\Delta p_{wf}(t) = \sum_{j=1}^n (\Delta p_{\lambda_j}(t) + \Delta p_{o_j}(t)) \quad (4-20)$$

Logo,

$$\Delta p_{wf}(t) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \Delta p_{\lambda_j}(t) + \sum_{j=1}^n \Delta p_{o_j}(t) \right) \quad (4-21)$$

Por outro lado, conforme visto no Capítulo 3, sabe-se que Δp_{o_j} é de fato o mesmo em todas as camadas (23). Ou seja,

$$\Delta p_o(t) = \Delta p_{o_1}(t) = \dots = \Delta p_{o_n}(t) \quad (4-22)$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^n \Delta p_{o_j} = n\Delta p_o(t) \quad (4-23)$$

Onde $\Delta p_o(t)$ é dado pela Equação (3-10).

Finalmente, substituindo a Equação (4-23) na Equação (4-21) é possível obter uma expressão aproximada para o comportamento da pressão no poço:

$$\Delta p_{wf}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta p_{\lambda_j}(t) + \Delta p_o(t) \quad (4-24)$$

Para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, onde $i = 1, \dots, m$, a vazão $\bar{q}_j(r, t)$, utilizada na integral do termo Δp_{λ_j} , pode obtida pela superposição vazões apresentada no Apêndice A:

$$\bar{q}_j(r, t) = \sum_{k=1}^i \left[(q_{jk} - q_{j_{k-1}}) e^{\left(-\frac{r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k_j (t - t_{k-1})} \right)} \right] \quad (4-25)$$

É importante ressaltar que para uma camada a solução proposta na Equação (4-24) reduz-se a solução apresentada no Apêndice C que foi proposta por BONAFÉ et al (25).

5 Resultados

Neste Capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir da implementação da solução proposta no Capítulo 4 pela Equação (4-24). A acurácia da solução proposta foi avaliada a partir da comparação entre os dados resultantes do simulador de fluxo baseado em diferenças finitas IMEX e os dados provenientes da implementação do modelo analítico calculado com o software MATLAB. Cenários considerando diferentes propriedades do reservatório foram utilizados em tais comparações. Para interpretar adequadamente os resultados de um teste de injetividade, é preciso analisar não apenas os dados de pressão, mas também a curva da derivada de pressão em relação ao logaritmo natural do tempo.

É importante destacar que, para os cálculos numéricos, a derivada de pressão foi calculada conforme proposto por Bourdet (10) e para integração numérica foi utilizada a regra do trapézio.

5.1 Parâmetros Utilizados

A viscosidade (μ_w) e a compressibilidade da água (c_w) foram definidas, respectivamente, como 0,52 cP e $1,14^{-4} (kgf/cm^2)^{-1}$ pois correspondem a valores nas condições comuns de pressão e temperatura de um reservatório. Em todos os casos, em cada camada, assume-se que as curvas permeabilidade relativa são fixas e idênticas conforme a Figura (5.1):

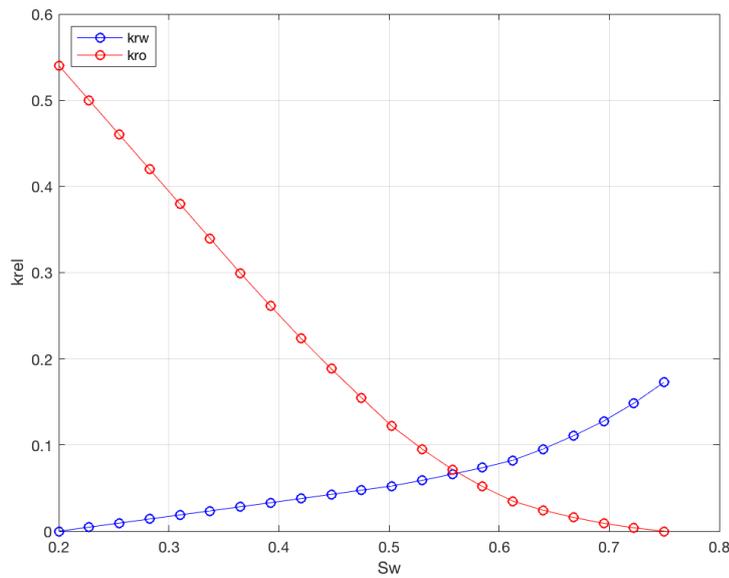


Figura 5.1: Curvas de Permeabilidade Relativa

Como visto na Equação (4-12), por definição, o raio da frente de avanço de cada camada (r_{F_j}) depende da curva de derivada do fluxo fracionário da camada ($f'_{w_j}(S_w)$). Esta por sua vez, depende dos pontos de saturação (S_w). Sendo assim, em cada passo de tempo, cada ponto de saturação é associado a um raio da frente de avanço diferente, conforme exemplificado pela Figura 5.2:

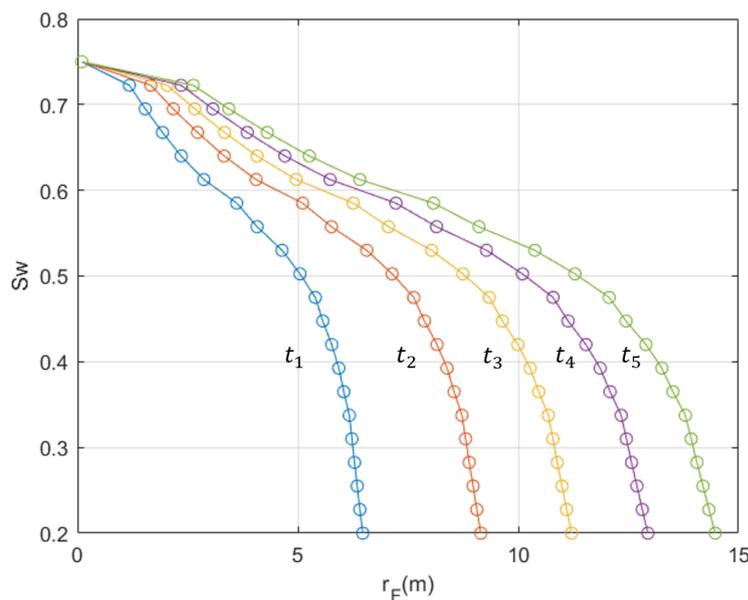


Figura 5.2: Curva $r_F(t) \times S_w$

O mesmo ocorre para a mobilidade total (λ_t), ou seja, $\lambda_t(r, t) = \lambda_t(S_w)$. Além disto, no reservatório o escoamento bifásico pode ser denominado favo-

rável ou desfavorável ao deslocamento da água, a depender da razão de mobilidade do modelo. A razão de mobilidade é uma variável útil para interpretar qual fluido se move com maior facilidade no meio poroso. Este parâmetro não tem sentido físico e é proveniente da curva da razão de mobilidade M , que expressa a razão entre dois pontos correspondentes nas curvas de mobilidade:

$$M(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w)} \quad (5-1)$$

A partir disto, a razão de mobilidade (\hat{M}) será definida como a razão entre a mobilidade da água na saturação residual de óleo e a mobilidade do óleo na saturação inicial de água, ou seja:

$$\hat{M} = \frac{\lambda_w(S_{or})}{\lambda_o(S_{wi})} = \frac{\hat{\lambda}_w}{\hat{\lambda}_o} \quad (5-2)$$

Portanto, para índices de mobilidade $\hat{M} < 1$ tem-se $\hat{\lambda}_w < \hat{\lambda}_o$, ou seja, o fluxo é desfavorável ao deslocamento da água. Por outro lado, para índices de mobilidade $\hat{M} > 1$ tem-se $\hat{\lambda}_w > \hat{\lambda}_o$, isto é, o fluxo é favorável ao deslocamento da água. Para cada configuração do reservatório, uma dupla de valores para a viscosidade do óleo foi selecionada de modo a abranger um caso favorável e um caso desfavorável ao deslocamento da água. Em todos os casos, a compressibilidade do óleo foi definida como $4,04 \times 10^{-5} (kgf/cm^2)^{-1}$.

5.2 Resultados Comparativos

A seguir serão apresentados os resultados comparativos entre os dados obtidos utilizando o simulador de fluxo IMEX e os dados obtidos utilizando a formulação proposta neste trabalho com o software MATLAB. Os gráficos a serem apresentados nesta seção estão em escala log-log com a finalidade de facilitar a visualização do pulso transiente de pressão.

Os resultados a serem apresentados foram divididos em três grupos de casos de acordo com um determinado conjunto de vazões de injeção, conforme a seguinte tabela:

Caso	Período de Injeção	Vazões de Injeção
A	1	500
	2	1500
	3	2500
B	1	2500
	2	1500
	3	500
C	1	1000
	2	0
	3	1000

Tabela 5.1: Vazões de Injeção dos Casos

Para todos os casos, foi considerado um período total de injeção de 72 horas (3 dias), onde cada período é referente a 24 horas (1 dia) de injeção. Além disso, em cada grupo foram considerados cenários com diferentes permeabilidades em cada camada e diferentes valores para viscosidade do óleo.

5.2.1

Casos A

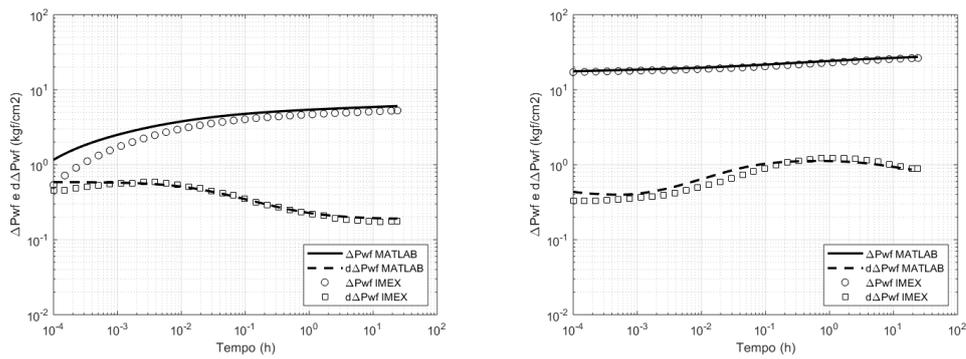
Conforme apresentado na Tabela 5.1, a vazão de injeção neste caso é gradualmente ampliada de um período para outro. Os primeiros dois casos a serem apresentados, denominados Casos A1 e A2, possuem características semelhantes conforme mostrado na Tabela 5.2:

Caso	Camadas	k (mD)	h(m)	μ_o
A1	2	500(cada)	75 (cada)	5.0
A2	2	500(cada)	75 (cada)	1.0

Tabela 5.2: Propriedades Casos A1 e A2

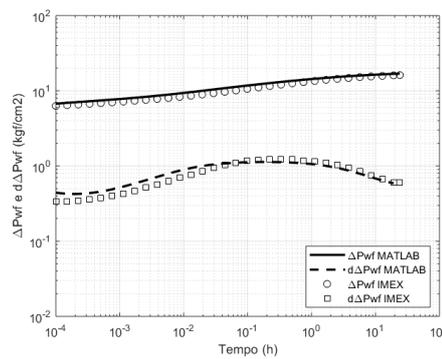
A diferença entre esses casos é relativa a viscosidade do óleo utilizada, que por consequência impacta no valor da mobilidade do óleo (λ_o). Logo, pode-se concluir que o escoamento no Caso A1 ($\hat{M} > 1$) é favorável à água enquanto no Caso A2 ($\hat{M} < 1$) o escoamento não é favorável a água.

De modo geral, nos Gráficos apresentados na Figura 5.3 há uma boa concordância entre as curvas obtidas. A diferença entre as curvas de pressão no início do Período 1 é decorrente da diferente discretização espacial utilizada pelo simulador numérico. Apesar disso, as curvas de derivada apresentam boa similaridade em todos os períodos.



(a) Período 1

(b) Período 2



(c) Período 3

Figura 5.3: Caso A1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

Já nos resultados do Caso A2, apresentados na Figura 5.4, é possível observar que no Período 1 a diferença entre as curvas de pressão de ambos os métodos é mais agravada. Isso ocorre tanto pela discretização espacial do simulador de fluxo quanto pelo não favorecimento do escoamento da água, o que dificulta o início do deslocamento do óleo. Nos períodos subsequentes observa-se uma menor diferença entre as curvas de pressão devido ao fato de o óleo já ter iniciado um deslocamento. A diferença entre as curvas de derivada são referentes as discretizações espaciais utilizadas em cada método, entretanto é fácil verificar que há uma semelhança na tendência do comportamento de ambas.

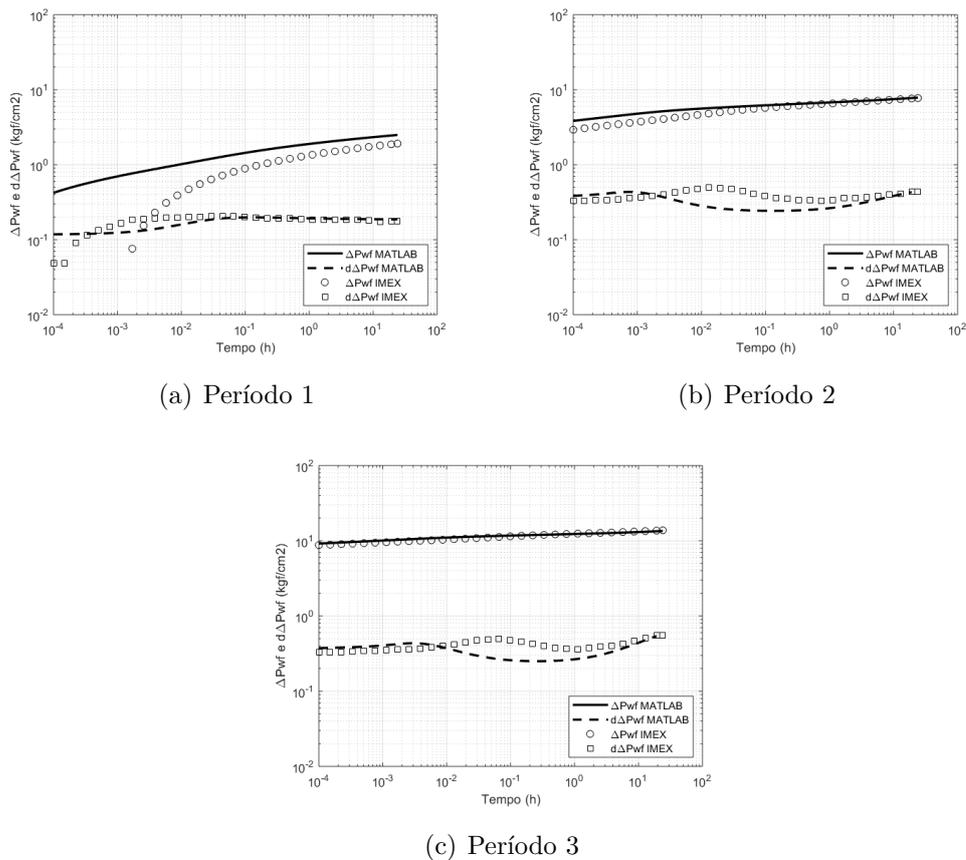


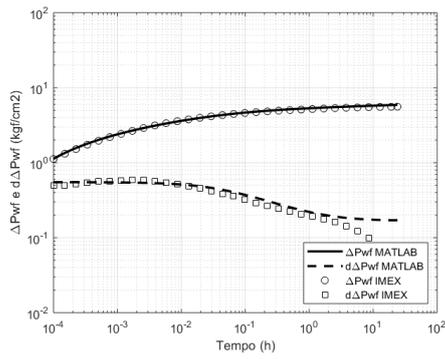
Figura 5.4: Caso A2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

Os próximos dois casos a serem apresentados, denominados Casos A3 e A4, também possuem características semelhantes. Em contraposição à dupla de casos anterior, a dupla atual além de apresentar um número maior de camadas também apresenta diferentes permeabilidades do reservatório em cada camada, indicado na Tabela 5.3:

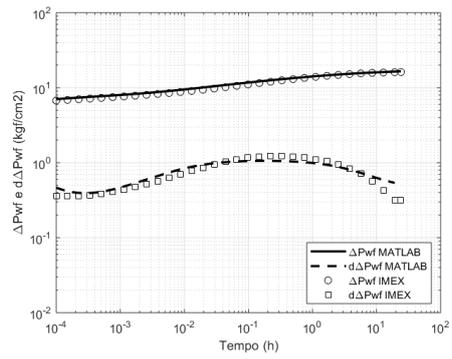
Caso	Camadas	k (mD)	h(m)	μ_o
A3	3	1000	50 (cada)	5.0
		500		
		100		
A4	3	1000	50 (cada)	1.0
		500		
		100		

Tabela 5.3: Propriedades Casos A3 e A4

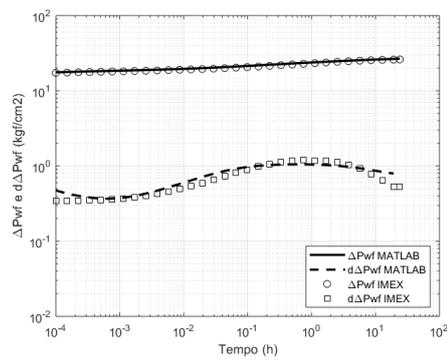
Os Gráficos apresentados na Figura 5.5 mostram uma ótima concordância entre as curvas obtidas havendo apenas pequenas divergências no final de cada período.



(a) Período 1



(b) Período 2



(c) Período 3

Figura 5.5: Caso A3: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

Entretanto, nos resultados do Caso A4 conforme mostra a Figura 5.6 o mesmo problema do Caso A2 ocorre, porém de forma menos grave.

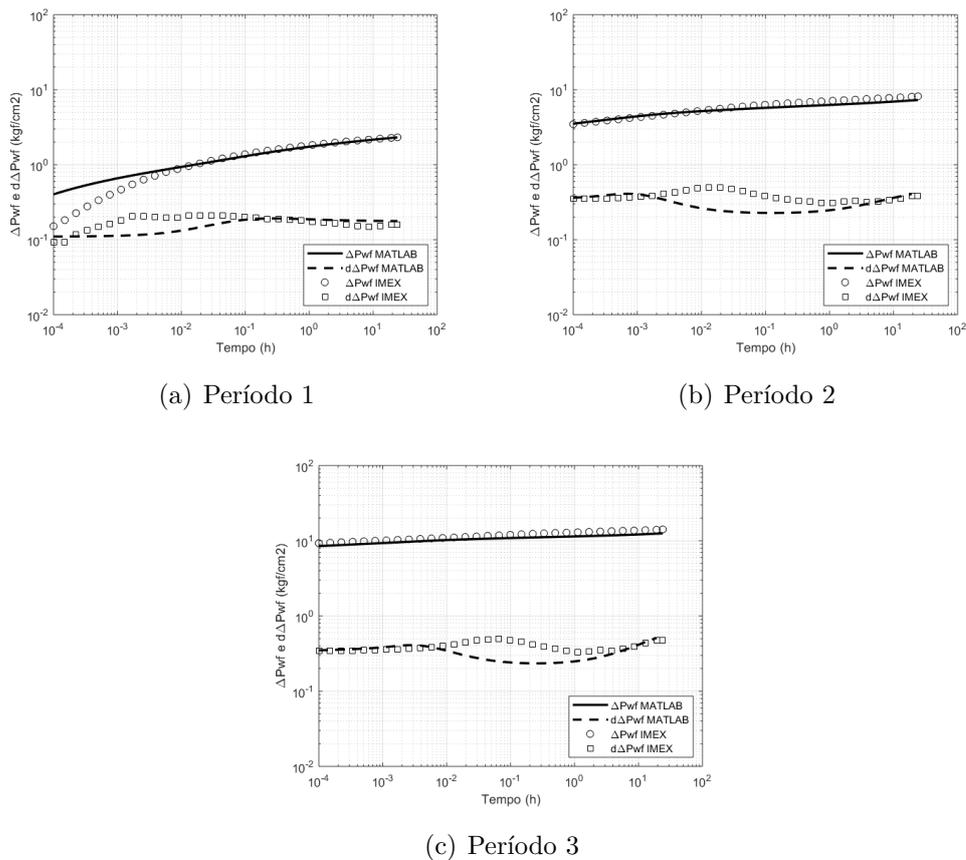


Figura 5.6: Caso A4: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

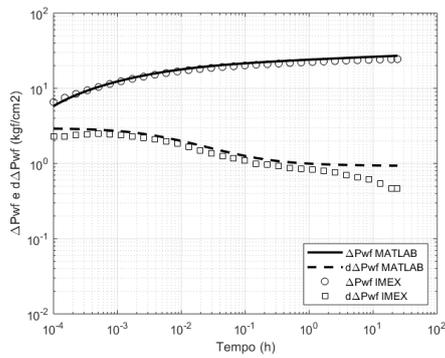
5.2.2 Casos B

Este conjunto de casos, considera propriedades do reservatório análogas às utilizadas nos Casos A. Entretanto, conforme mostrado na Tabela 5.1, as vazões de injeção deste caso, com o decorrer dos períodos, são reduzidas. Portanto, os seguintes casos serão apresentados:

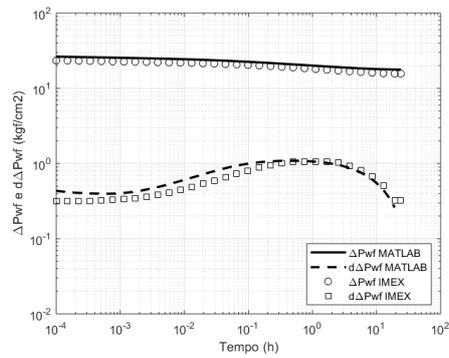
Caso	Camadas	k (mD)	h(m)	μ_o
B1	2	500(cada)	75 (cada)	5.0
B2	2	500(cada)	75 (cada)	1.0
B3	3	1000	50 (cada)	5.0
		500		
B4	3	1000	50 (cada)	1.0
		500		
		100		

Tabela 5.4: Propriedades Casos B

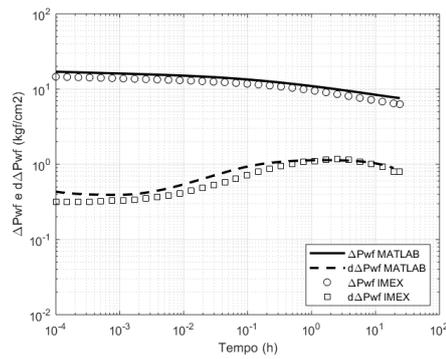
Como esperado devido a redução da vazão, em todos os Casos B a curva de pressão ao longo dos Períodos 2 e 3 passa a decair. As curvas obtidas para os Casos B1, B2, B3 e B4, apesar de considerarem vazões de injeção diferentes dos Casos A, apresentam comportamentos, e justificativas para o mesmo, semelhantes aos do caso anterior.



(a) Período 1

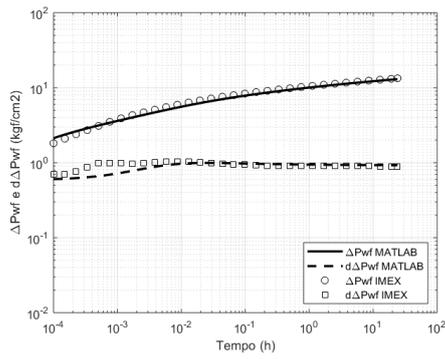


(b) Período 2

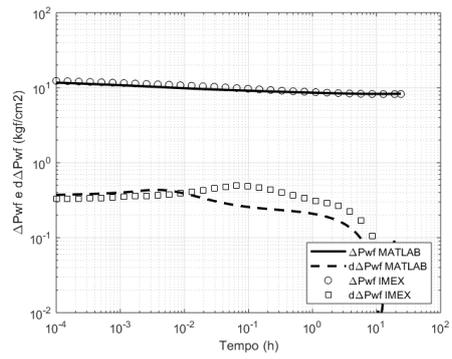


(c) Período 3

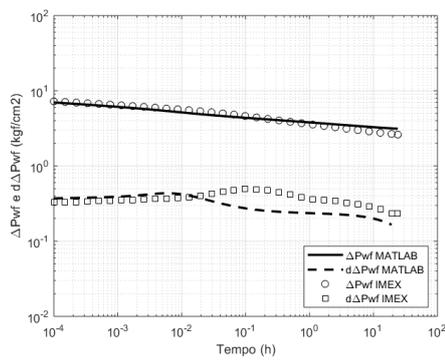
Figura 5.7: Caso B1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica



(a) Período 1

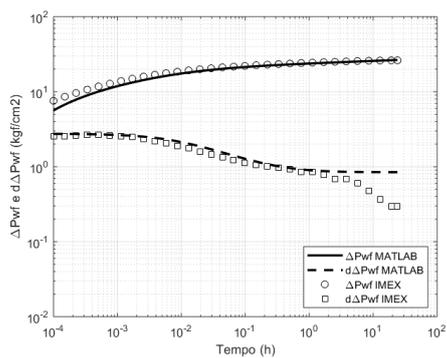


(b) Período 2

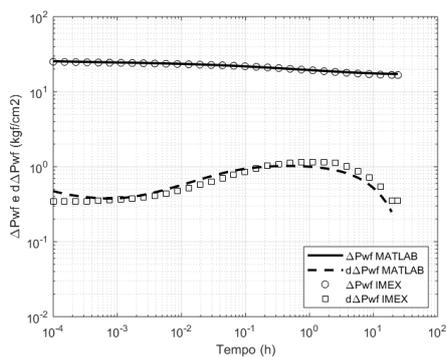


(c) Período 3

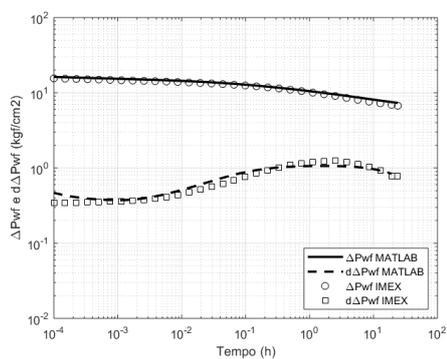
Figura 5.8: Caso B2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica



(a) Período 1

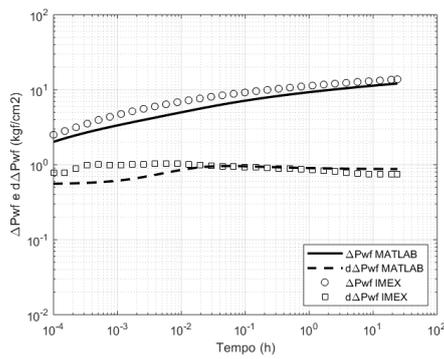


(b) Período 2

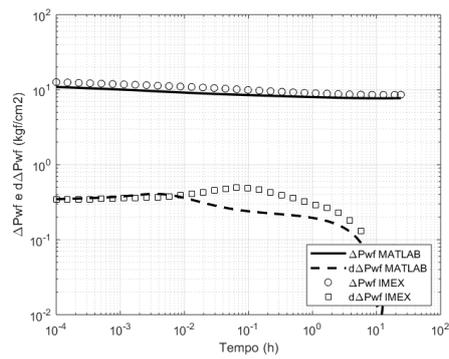


(c) Período 3

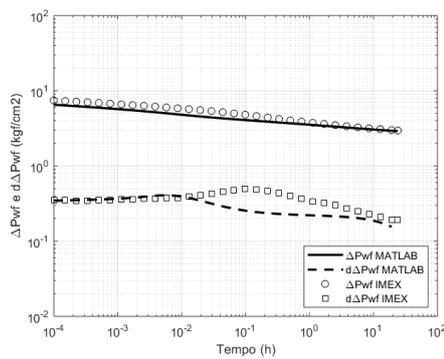
Figura 5.9: Caso B3: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica



(a) Período 1



(b) Período 2



(c) Período 3

Figura 5.10: Caso B4: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

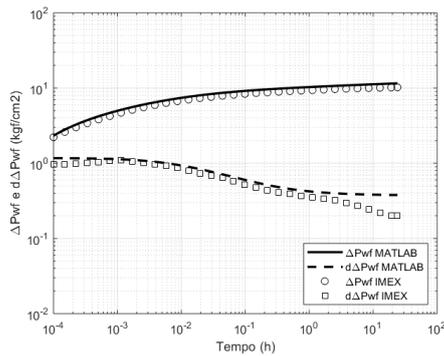
5.2.3 Casos C

Os Casos C, consideram propriedades do reservatório análogas as utilizadas nos Casos A e B. Porém, conforme mostrado na Tabela 5.1, no Período 1 o poço começa a injetar água no reservatório a uma determinada vazão e no Período 2 é considerada uma vazão nula, ou seja, a injeção de água é interrompida. No período seguinte, o poço passa a injetar água novamente com a mesma vazão do Período 1.

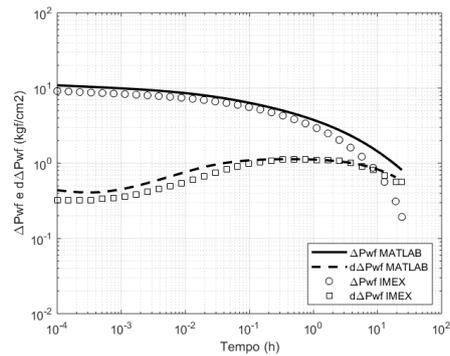
Caso	Camadas	k (mD)	h(m)	μ_o
C1	2	500(cada)	75 (cada)	5.0
C2	2	500(cada)	75 (cada)	1.0
C3	3	1000	50 (cada)	5.0
		500		
C4	3	1000	50 (cada)	1.0
		500		
		100		

Tabela 5.5: Propriedades Casos B

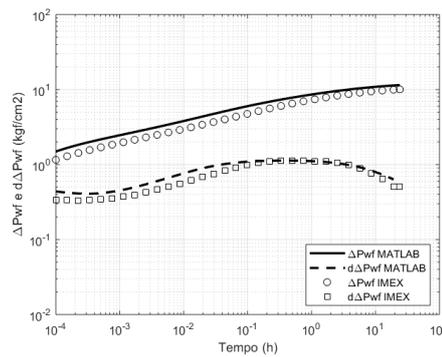
Nos Casos C1, C2, C3 e C4, assim como nos casos anteriores, é possível observar boa similaridade entre as curvas resultantes do modelo analítico proposto e o simulador de fluxo.



(a) Período 1

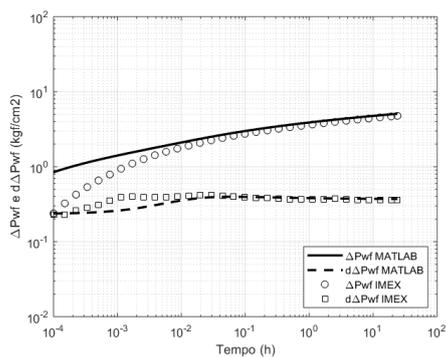


(b) Período 2

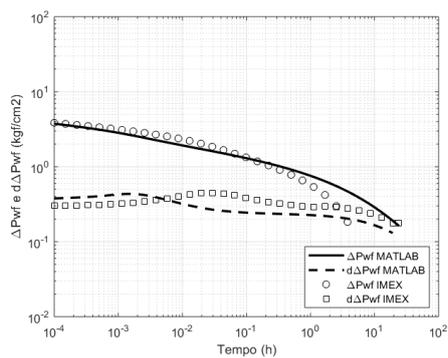


(c) Período 3

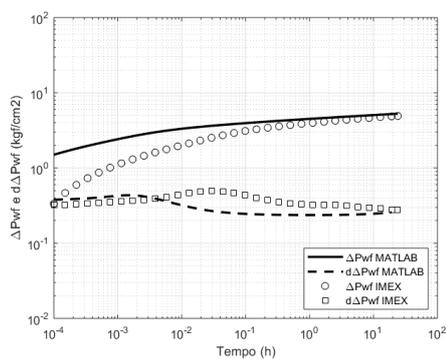
Figura 5.11: Caso C1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica



(a) Período 1

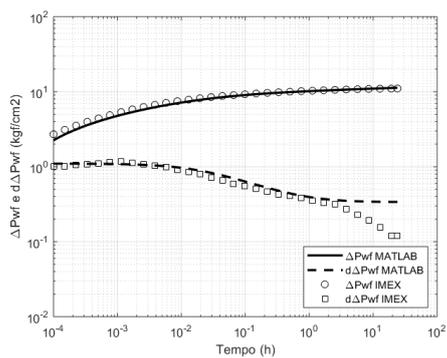


(b) Período 2

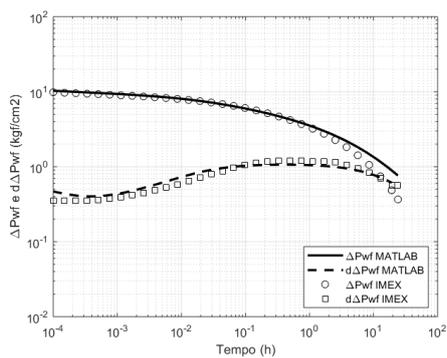


(c) Período 3

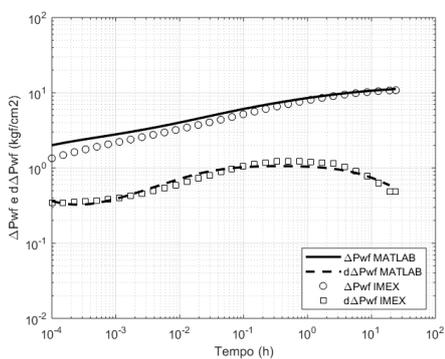
Figura 5.12: Caso C2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica



(a) Período 1



(b) Período 2



(c) Período 3

Figura 5.13: Caso C3: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

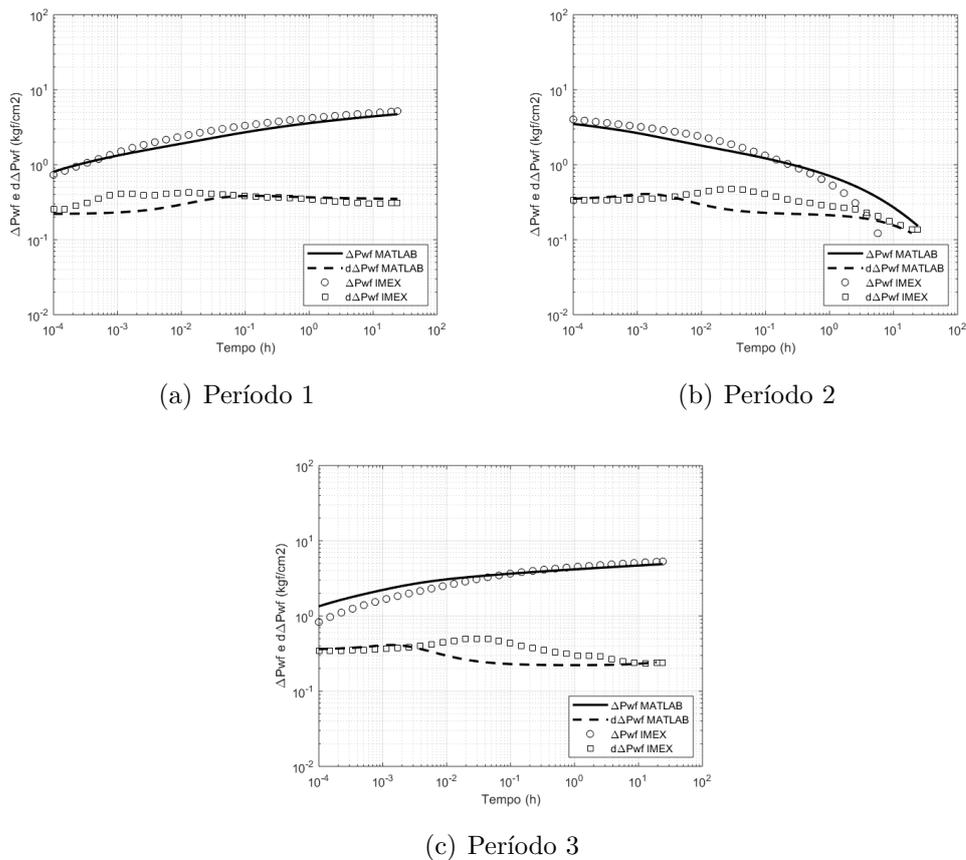


Figura 5.14: Caso C4: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica

De forma geral, apesar de os Casos A, B e C utilizarem diferentes vazões de injeção, nota-se que os casos com propriedades do reservatório similares também apresentam comportamentos de certa forma semelhantes. A partir da análise de todos os gráficos, é possível observar uma considerável consonância entre as curvas do modelo proposto e as curvas geradas pelo simulador de fluxo. Sendo assim, é possível concluir que a modelagem apresentada para o problema é eficaz.

5.3 Permeabilidade Equivalente Estimada

A validação da solução proposta pode ser feita também através da comparação da permeabilidade equivalente estimada com a permeabilidade equivalente do reservatório. A partir das permeabilidades de cada camada inseridas como referência na simulação, a permeabilidade equivalente do reservatório é dada no poço pela seguinte expressão:

$$k_{eq} = \frac{k_1 h_1 + \dots + k_n h_n}{h_t} \quad (5-3)$$

Para o cálculo da permeabilidade equivalente estimada nesta seção serão considerados dois Testes de Injetividade de longa duração (516 horas). Estes dois casos são denominados D1 e D2 e utilizam o seguinte esquema de múltiplas vazões:

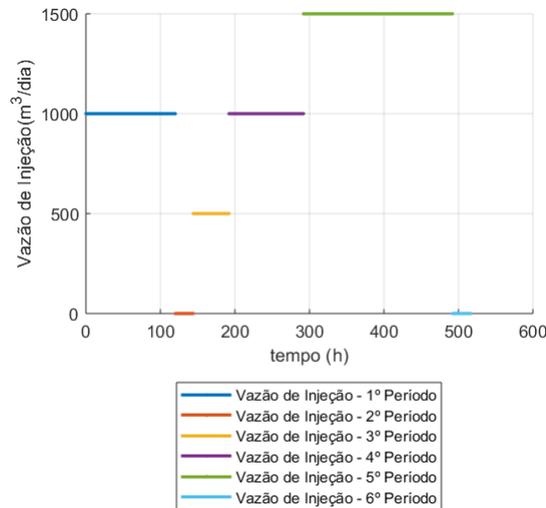


Figura 5.15: Curva de Vazão x Tempo

Para melhor visualização, os dados de vazão de injeção também são indicados na Tabela 5.6:

Caso	Tempo de Injeção (h)	Vazão de Injeção (m^3/dia)
D1 e D2	120	1000
	24	0
	48	500
	100	1000
	200	1500
	24	0

Tabela 5.6: Vazões de Injeção dos Casos D1 e D2

Além disso, nestes casos são consideradas características do reservatório conforme a Tabela 5.7:

Caso	Camadas	k (mD)	h(m)	μ_o
D1	2	500 e 1000	75 (cada)	5.0
D2		500 e 1000		1.0

Tabela 5.7: Propriedades Casos D1 e D2

Portanto, o escoamento é favorável a água no Caso D1 e desfavorável à água no Caso D2. Utilizando as propriedades apresentadas nas Tabelas 5.6 e 5.7 as seguintes curvas de pressão no poço foram obtidas:

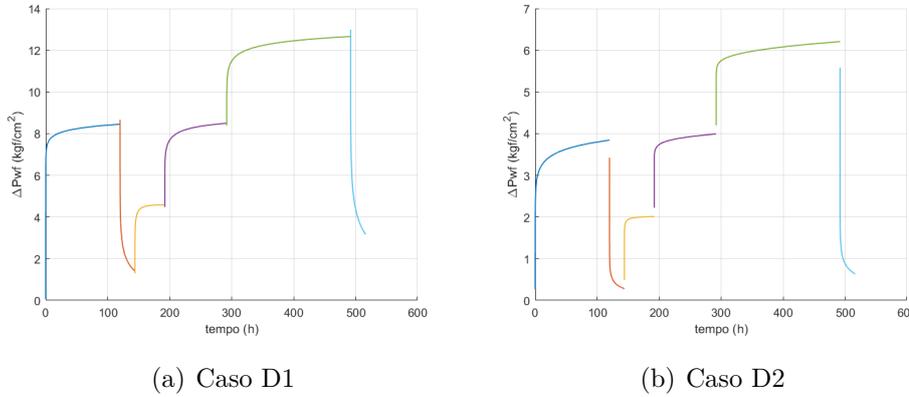


Figura 5.16: Casos D1 e D2: Curvas de Pressão x Tempo

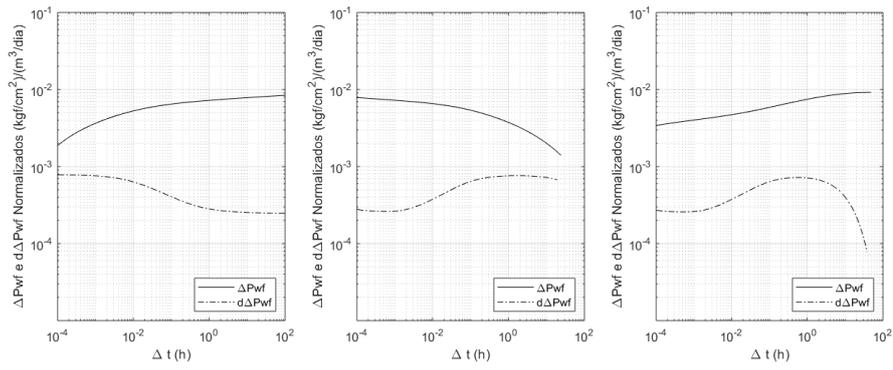
Em ambos os casos, verifica-se que somente nos pontos iniciais da transição de um período de injeção para outro há uma descontinuidade na curva de pressão. Isso decorre em virtude da superposição de vazões das camadas do reservatório utilizada na solução analítica. Todavia, a longo prazo, a superposição de vazões retorna boas aproximações.

A taxa de variação da vazão de injeção (Δq_i) será definida como o módulo da diferença da vazão de injeção de dois períodos subsequentes, isto é:

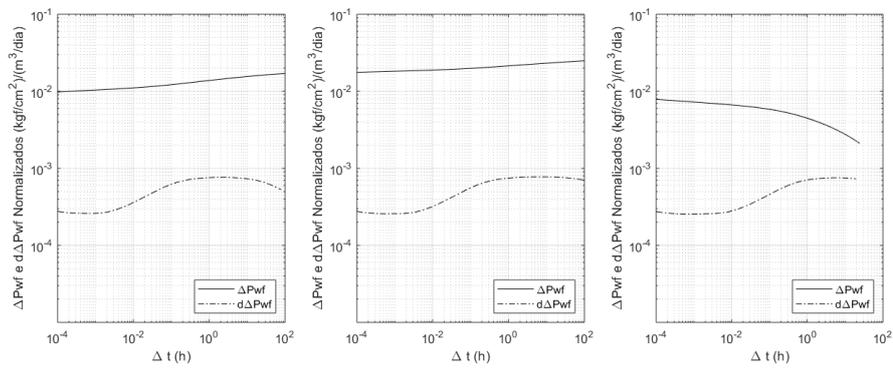
$$\Delta q_i = |q_i - q_{i-1}| \tag{5-4}$$

Neste caso, i representa um período de injeção tal que $1 \leq i \leq 6$.

Gráficos normalizados pela taxa de variação da vazão de injeção otimizam a visualização da similaridade entre os níveis das curvas de derivada da pressão. Tais níveis, através de um método interpretação do gráfico, podem ser associados às propriedades do óleo ou da água. Para os casos analisados nesta seção, os seguintes gráficos normalizados para cada período foram obtidos:

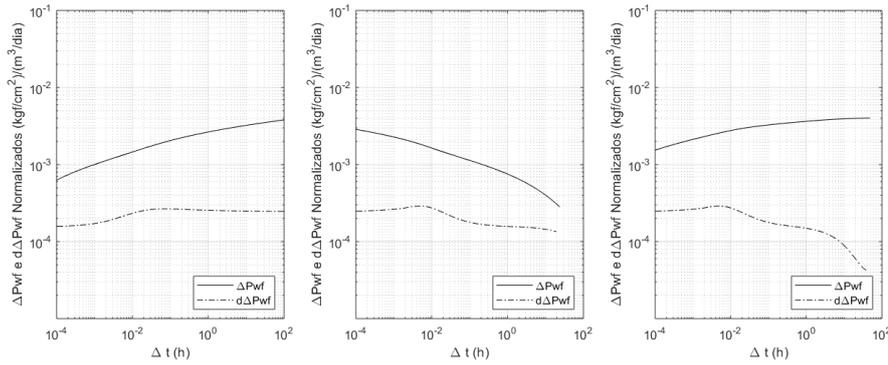


(a) Períodos 1, 2 e 3

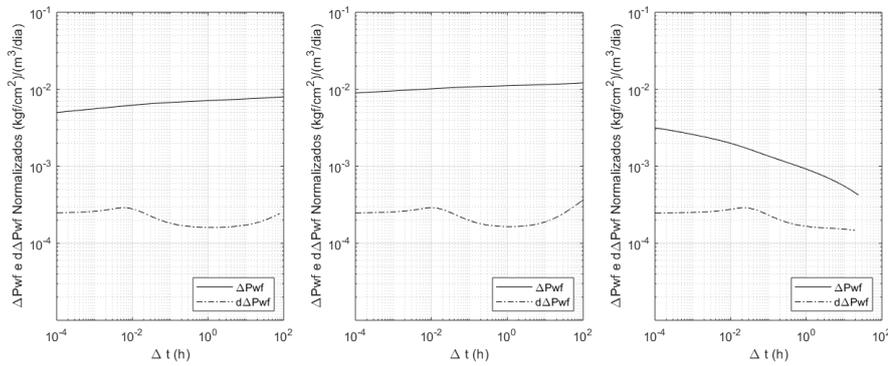


(b) Períodos 4, 5 e 6

Figura 5.17: Caso D1: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica Normalizados



(a) Períodos 1, 2 e 3



(b) Períodos 4, 5 e 6

Figura 5.18: Caso D2: Curvas de Pressão e Derivada Logarítmica Normalizados

A partir da análise da curva de derivada logarítmica da pressão é possível estimar a permeabilidade equivalente do reservatório em cada período de injeção. No caso de vazão constante com fluxo monofásico, a variação na pressão do poço é dada pela seguinte equação:

$$\Delta \hat{p}_o(t) = 1.151 \frac{\alpha_p q_w B_w}{h k \hat{\lambda}_o} \log \left(\frac{4 \alpha_t k \hat{\lambda}_o t}{e^\gamma \hat{c}_t \phi r_w^2} \right) \quad (5-5)$$

É fácil notar que esta equação representa um gráfico linear contra o logaritmo natural do tempo, cujo coeficiente angular é dado por:

$$m_o = 1.151 \frac{\alpha_p q_w B_w}{h k \hat{\lambda}_o} \quad (5-6)$$

A inclinação da reta permite estimar a permeabilidade do reservatório para fluxo monofásico.

Adaptando essa interpretação para o problema proposto, pode-se notar que no primeiro período de injeção, o comportamento da pressão no poço é semelhante ao fluxo monofásico de óleo, visto que a região próxima ao poço está saturada por óleo. Entretanto, nos períodos subsequentes, tal região passa

a ser saturada por água. Sendo assim, o comportamento da pressão do poço torna-se semelhante ao fluxo monofásico de água. Portanto, de forma geral para escoamento bifásico, deve-se considerar duas inclinações correspondentes às mobilidades de óleo e água, a depender do período de injeção.

Nos gráficos a seguir são apresentados os resultados dos gráficos semilog para os Casos D1 e D2, onde as mobilidades de água e óleo associadas a cada inclinação são indicadas.

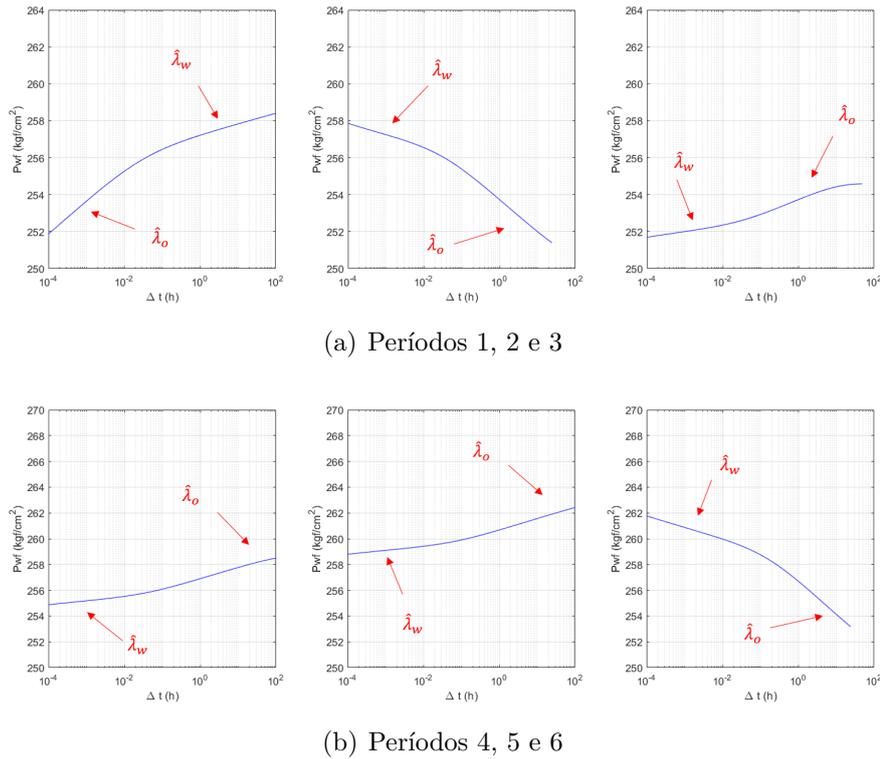


Figura 5.19: Caso D1: Gráfico Semilog de Pwf

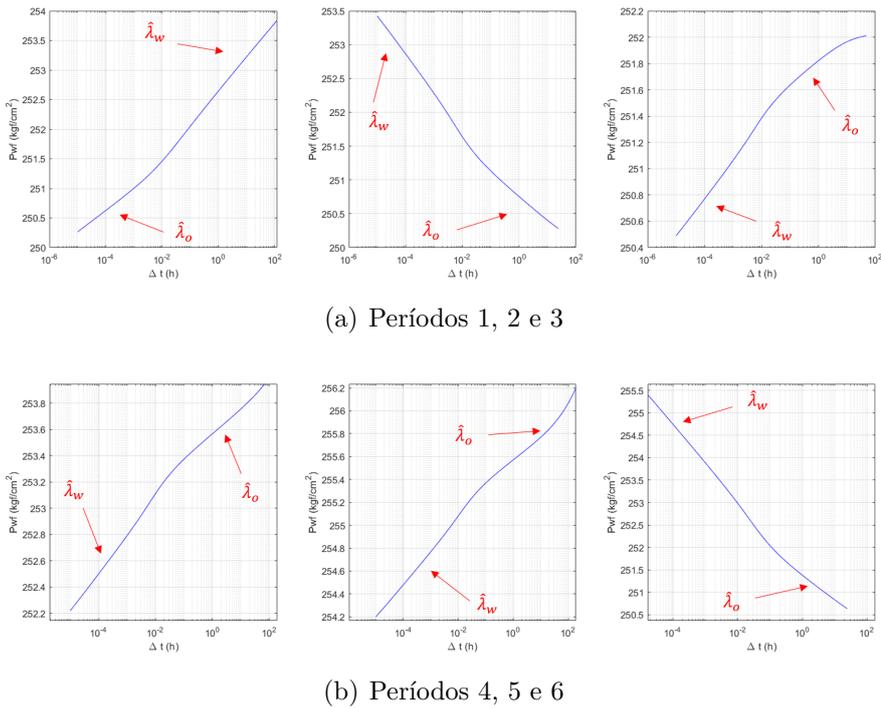


Figura 5.20: Caso D2: Gráfico Semilog de Pwf

A partir da análise desses gráficos, é possível estimar a permeabilidade do reservatório usando os pontos finais da curva de permeabilidade relativa (água e óleo). Utilizando a inclinação das retas dos gráficos apresentados nas Figuras 5.19 e 5.20 a Permeabilidade Equivalente Estimada (\bar{k}_{eqf}) pode ser calculada de duas maneiras.

$$\bar{k}_{eqo} = 1.151 \frac{\alpha_p \Delta q B_w}{h_t \hat{\lambda}_o m_o} \quad (5-7)$$

e

$$\bar{k}_{eqw} = 1.151 \frac{\alpha_p \Delta q B_w}{h_t \hat{\lambda}_w m_w} \quad (5-8)$$

Esse método foi utilizado em cada período dos Casos D1 e D2. A seguir, os resultados obtidos para a Permeabilidade Equivalente Estimada em cada caso são indicados.

A Figura 5.21 mostra as curvas de derivada logarítmica de todos os períodos e os patamares das mobilidades de óleo e água. É possível observar, que nos períodos posteriores ao primeiro, apesar de os patamares de todas as curvas estarem próximos há uma certa diferença em comparação ao primeiro período.

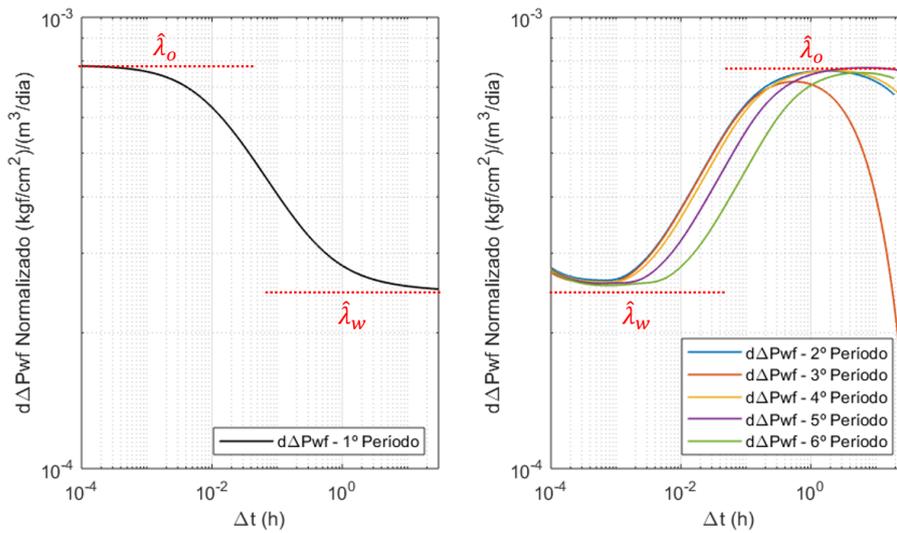


Figura 5.21: Caso D1: Derivadas Logarítmicas dos Períodos

Os valores para a permeabilidade equivalente calculada e o erro percentual em comparação com a permeabilidade equivalente do reservatório para este caso podem ser observados na Tabela 5.8:

Caso	$k_{eq}(mD)$	Período	$\bar{k}_{eqo}(mD)$	Erro	$\bar{k}_{eqw}(mD)$	Erro
D1	750	1	753.07	0.40%	740.22	-1.30%
		2	771.17	2.82%	701.74	-6.43%
		3	814.78	8.64%	710.72	-5.24%
		4	776.00	3.22%	707.45	-5.67%
		5	759.27	1.24%	712.66	-4.98%
		6	778.49	3.80%	720.20	-3.97%

Tabela 5.8: Caso D1: Erros da Permeabilidade Equivalente Estimada

Já para o caso D2, como pode ser visto na Figura 5.22, após o primeiro período de injeção, os patamares das curvas derivadas referentes a $\hat{\lambda}_w$ são muito próximos, inclusive em comparação com o primeiro período. Entretanto, para $\hat{\lambda}_o$ a não proximidade entre as curvas é um pouco mais acentuada.

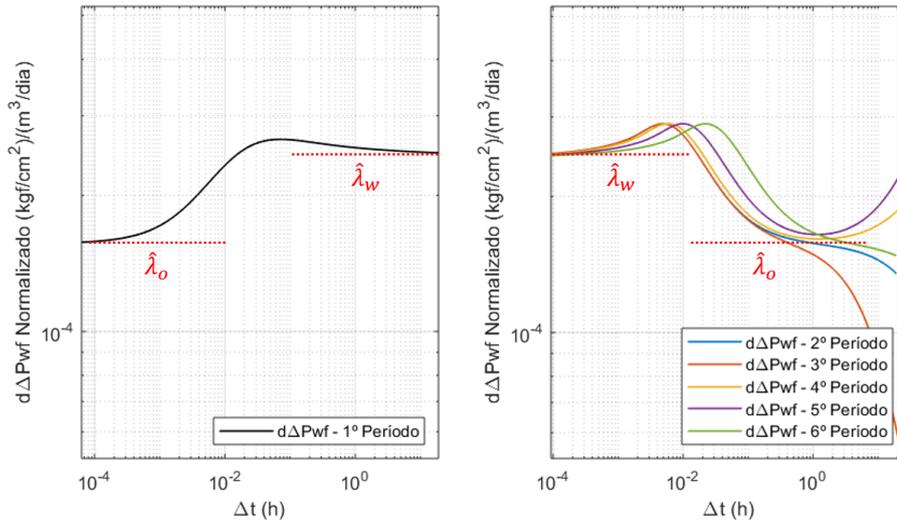


Figura 5.22: Caso D2: Derivadas Logarítmicas dos Períodos

Caso	$k_{eq}(mD)$	Período	$\bar{k}_{eqo}(mD)$	Erro	$\bar{k}_{eqw}(mD)$	Erro
D2	750	1	746.93	-0.41%	743.20	-0.91%
		2	752.01	1.29%	748.25	-0.23%
		3	759.64	2.81%	749.16	-0.11%
		4	728.93	-4.98%	751.56	0.21%
		5	712.65	-0.26%	752.01	0.27%
		6	748.06	-1.88%	751.23	0.17%

Tabela 5.9: Caso D2: Erros da Permeabilidade Equivalente Estimada

Os dados percentuais de erros apresentados nas Tabelas 5.8 e 5.9 refletem o quão próximo os patamares das curvas apresentadas nas Figuras 5.21 e 5.22, respectivamente, estão das reais propriedades dos fluidos com que estão relacionadas. De maneira geral, com os casos apresentados nessa dissertação, embora restritos, podemos intuir que para casos com escoamento favorável a água as propriedades do óleo estimam melhor a permeabilidade equivalente do reservatório. Entretanto, para casos com escoamento desfavorável a água as propriedades da água estimam com melhor eficácia a permeabilidade equivalente do reservatório.

Além disso, a partir dos dados obtidos nas Tabelas 5.8 e 5.9, verifica-se que nos Casos D1 e D2, em todos períodos, há erros menores que 9%. Portanto, a eficácia do modelo proposto para estimar o parâmetro do reservatório em questão é comprovada.

6

Conclusão e trabalhos futuros

Com base na formulação para o período de falloff (24) em reservatórios de multicamadas e na formulação para teste de injetividade com múltiplas vazões (25), foi proposto o desenvolvimento de uma solução para reservatórios multicamadas com múltiplas vazões apresentada neste trabalho.

O modelo analítico desenvolvido também pode ser usado como base para trabalhos futuros. A título de exemplo, pode-se estender a solução apresentada no Apêndice (D) para reservatórios multicamadas e um esquema de múltiplas vazões. Dessa maneira, o modelo apresentado neste trabalho pode ser usado como um modelo comparativo. Por outro lado, o modelo apresentado também pode ser utilizado como base para formulações similares a apresentada porém considerando uma região de dano (skin) ou efeitos de temperatura.

Por fim, como visto anteriormente, o modelo proposto foi aplicado em uma série de casos com diferentes propriedades do reservatório, tais como número distinto de camadas, permeabilidades e vazões de injeção. Para todos os casos testados, a comparação entre a solução analítica aproximada e a simulação numérica indicaram boa concordância. A partir dos resultados obtidos também foi possível estimar a permeabilidade equivalente do reservatório, em cada período de injeção. Além disso, o modelo proposto mostrou-se eficaz para estimar a permeabilidade equivalente do reservatório obtendo um baixo índice de erro percentual.

7

Referências bibliográficas

- [1] BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C.. **Mechanism of fluid displacement in sands**. Petroleum Technology, p. 107–116, May 1941. 2.2, 4.1, C, D.1
- [2] LEFKOVITS, H. C.; HAZEBROEK, P.; ALLEN, E. E. ; MATTHEWS, C. S.. **A study of the behavior of bounded reservoirs composed of stratified layers**. Society of Petroleum Engineers Journal, p. 43–58, March 1961. 2.1
- [3] STEHFEST, H.. **Numerical inversion of laplace transform**. Communications of the ACM, 13(10):47–49, January 1970. D.2
- [5] COBB, W. M.; RAMEY JR., H. J. ; MILLER, F. G.. **Well-test analysis for wells producing commigled zones**. Journal of Petroleum Technology, p. 27–37, January 1972. 2.1
- [6] RAGHAVAN, R.; T OPALOGLU, H. N.; COBB, W. M. ; RAMEY JR., H. J.. **Well-test analysis for wells producing from two commingled zones of unequal thickness**. Journal of Petroleum Technology,, p. 1035–1043, September 1974. 2.1
- [7] BROWN, L. P.. **Pressure transient behavior of the composite reservoir**. 60th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, p. 1–15, September 1985. 2.1
- [8] GAO, C.. **Determination of parameters for individual layers in multilayer reservoirs by transient well tests**. SPE Formation Evaluation, p. 43–65, March 1987. 2.1
- [9] EHLIG-ECONOMIDES, C. A.; JOSEPH, J.. **A new test for determination of individual properties in a multilayered reservoir**. SPE Formation Evaluation, p. 261–283, September 1987. 2.1
- [10] BOURDET, D.; AYOUB, J. A. ; PLRARD, Y. M.. **Use of pressure derivative in well-test interpretation**. SPE Formation Evaluation, p. 293–302, June 1989. 5
- [11] ABBASZADEH, M.; KAMAL, M.. **Pressure-transient testing of water-injection wells**. SPE Reservoir Engineering., p. 115–124, February 1989. 2.2

- [12] RAGHAVAN, R.. **Behavior of wells completed in multiple producing zones**. SPE Formation Evaluation, p. 219–230, June 1989. 2.1
- [14] BRATVOLD, R. B.; HORNE, R. N.. **Analysis of pressure-falloff tests following cold-water injection**. SPE Formation Evaluation, p. 293–302, September 1990. 2.2
- [15] OLIVEIRA, E. A. P.; SERRA, K. V.. **Oil/water relative permeability estimation from falloff tests**. p. 59–66, 1994. 2.2
- [16] THOMPSON, L. G.; REYNOLDS, A. C.. **Well testing for radially heterogeneous reservoirs under single and multiphase flow conditions**. SPE Formation Evaluation, p. 57–64, March 1997. 2.2
- [17] BANERJEE, R.; THOMPSON, L. G., R. A. C.. **Injection/falloff testing in heterogeneous reservoirs**. SPE Formation Evaluation & Engineering, p. 519–527, December 1998. 2.2
- [18] PERES, A. M. M.; REYNOLDS, A. C.. **Theory and analysis of injectivity tests on horizontal wells**. SPE Journal, p. 148–159, June 2003. 2.2
- [19] PERES, A. M. M.; BOUGHARA, A. A.; CHEN, S.; MACHADO, A. A. V. ; REYNOLDS, A. C.. **Approximate analytical solutions for the pressure response at a water injection well**. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, p. 1–17, September 2004. 2.2
- [20] PERES, A. M. M.; BOUGHARA, A. A. ; REYNOLDS, A. C.. **Rate superposition for generating pressure falloff**. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, p. 364–374, September 2006. 2.2
- [21] GAHTANI, A.; YAHAYA, A. U.. **Fiel application of composite reservoir model on non-unit mobility flow**. SPE Annual Technical Symposium and Exhibition, p. 1–11, April 2010. 2.2
- [23] BARRETO JR, A.; PERES, A. ; PIRES. **Water injectivity tests on multilayered oil reservoirs**. Brasil Offshore Conference and Exhibition, p. 1–11, 2011. 2.2, 4.1
- [24] BELA, R. V.; PESCO, S. ; BARRETO, A. B.. **Modeling falloff tests in multilayer reservoirs**. Journal of Petroleum Science and Engineering, 174:161–168, March 2019. 1, 2.2, 6

- [25] BONAFÉ, M. F.; BRAGA, A. ; BARRETO, A. B.. **Approximate solution for pressure behavior during a multiple rate injectivity test.** Journal of Petroleum Exploration and Production Technology, p. 1–14, 2020. 1, 2.2, 4, 4.1, 6, C

A

Escoamento Monofásico em Reservatório com Uma Camada: Múltiplas Vazões

Neste Apêndice será apresentada a solução analítica para o comportamento da pressão no poço em um reservatório de uma camada considerando um escoamento monofásico com um esquema de múltiplas vazões. Para a formulação matemática serão consideradas suposições análogas as do Capítulo 3:

- Reservatório homogêneo de uma camada, isotrópico e com extensão infinita;
- Forças gravitacionais desprezíveis;
- Fluxo isotérmico;
- Espessura constante (h);
- Viscosidade constante (μ_o);
- Permeabilidade constante (k);
- O poço produz uma vazão constante q_i no período de injeção i .
- A formação rochosa apresenta uma pequena e constante compressibilidade;
- Não há efeito de estocagem.
- Não há região de dano próxima ao poço (skin);
- No instante $t = 0$, o reservatório está em equilíbrio, ou seja, a pressão é a mesma em todas as camadas.

Neste modelo, são considerados m períodos de produção onde em cada período é considerada uma vazão, não necessariamente idêntica a anterior. Sendo assim, um possível esquema de vazões no poço pode ser representado pela Figura A.1:

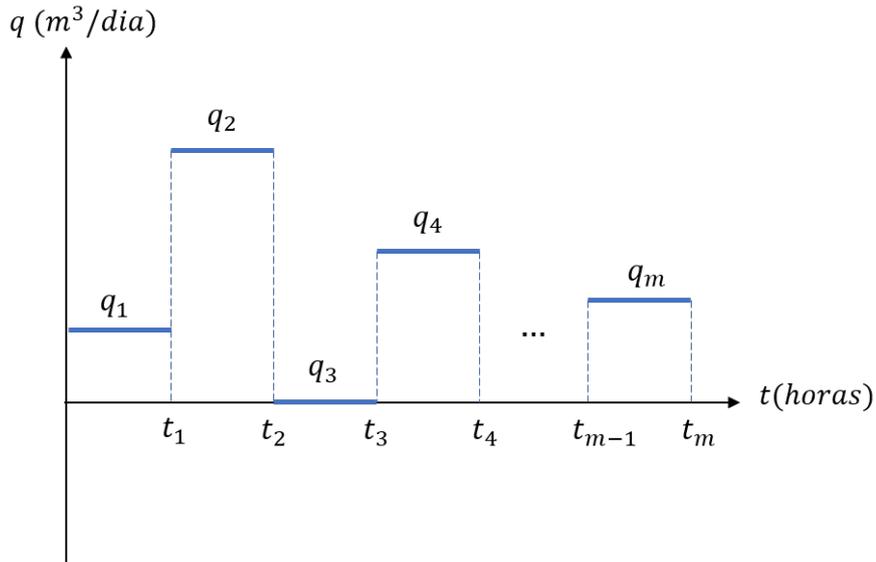


Figura A.1: Gráfico de Múltiplas Vazões

Ou seja:

$$q = \begin{cases} q_0 = 0, & t_0 = 0 \\ q_1, & t_0 < t \leq t_1 \\ q_2, & t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_m, & t_{m-1} < t \leq t_m \end{cases} \quad (A-1)$$

Por conveniência será considerada uma superposição de vazões análoga ao esquema de vazões da Figura A.2:

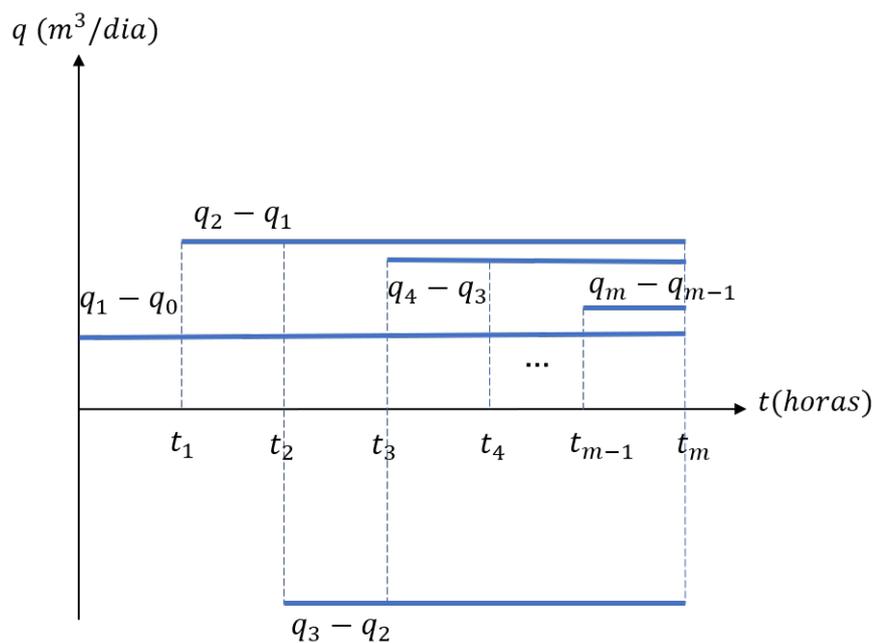


Figura A.2: Gráfico de Múltiplas Vazões superpostas

Considerando t tal que $t_{i-1} < t \leq t_i$, onde $1 \leq i \leq m$, utiliza-se a solução da linha fonte e as constantes de adequação de unidades para Sistemas de Medidas Brasileiro para obter a solução para pressão, isto é:

$$\Delta p(r, t) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_p B \mu}{kh} \left[(q_1 - q_0) E_i \left(\frac{-r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_0)} \right) + \dots \right. \\ \left. + (q_i - q_{i-1}) E_i \left(\frac{-r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{i-1})} \right) \right] \quad (\text{A-2})$$

Onde a função integral exponencial é definida por $E_i(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Logo,

$$\Delta p(r, t) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_p B \mu}{kh} \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \left(E_i \left(\frac{-r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{k-1})} \right) \right) \right] \quad (\text{A-3})$$

Sabe-se que a função integral exponencial pode ser aproximada por $E_i(-x) = \ln(x) + \gamma$ para tempos maiores que um segundo. Sendo assim:

$$\Delta p(r, t) = \frac{1}{2} \frac{\alpha_p B \mu}{kh} \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \left(\ln \left(\frac{4\alpha_t k (t - t_{k-1})}{r^2 \phi \mu c_t e^\gamma} \right) \right) \right] \quad (\text{A-4})$$

Por outro lado, pela Lei de Darcy:

$$q(r, t) = \frac{kh}{\alpha_p B \mu} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right) \quad (\text{A-5})$$

Portanto, substituindo a equação A-3 em A-5, a seguinte igualdade representa a vazão:

$$q(r, t) = -\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \left(E_i \left(\frac{-r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{k-1})} \right) \right) \right] \right) \right) \quad (\text{A-6})$$

Com isto:

$$q(r, t) = -\frac{1}{2} r \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \frac{\partial}{\partial r} \left(E_i \left(\frac{-r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{k-1})} \right) \right) \right] \quad (\text{A-7})$$

Logo,

$$q(r, t) = r \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{k-1})}} \right] \quad (\text{A-8})$$

Portanto,

$$q(r, t) = \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) e^{-\frac{r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{k-1})}} \right] \quad (\text{A-9})$$

B

Teste de Injetividade em Reservatório com Uma Camada: Vazão Constante

Nesta formulação são considerados dois períodos com soluções distintas. O período de injeção representa o período de tempo em que um fluido é injetado no reservatório. Neste caso o fluido injetado a ser considerado é a água. Já o período de fall-off é referente ao período de tempo após o fechamento do poço, ou seja, quando a injeção de fluido no poço é cessada.

Em ambos os casos, a análise do comportamento da vazão é crucial para o desenvolvimento das soluções do comportamento da pressão.

B.1

Período de Injeção

Para a formulação matemática são assumidas as seguintes hipóteses:

- Reservatório é homogêneo e isotrópico, com extensão infinita;
- Forças gravitacionais e capilares desprezíveis;
- Água e óleo são considerados fluidos imiscíveis e levemente compressíveis com viscosidade (μ) constante;
- Fluxo é isotérmico;
- Espessura constante (h);
- O poço injeta a uma vazão constante q_{inj} ;
- A formação rochosa apresenta uma pequena e constante compressibilidade;
- Não há efeito de estocagem;
- Não há região de dano próxima ao poço (skin);
- No instante $t = 0$, o reservatório está em equilíbrio, ou seja, a pressão é a mesma em todas as camadas.

Neste caso, a mobilidade do fluido (λ_f) será definida por:

$$\lambda_f(S_w) = \frac{k_{rf}(S_w)}{\mu_f} \quad (\text{B-1})$$

Sendo assim a mobilidade total do sistema pode ser definida por:

$$\lambda_t(S_w) = \lambda_o(S_w) + \lambda_w(S_w) \quad (\text{B-2})$$

A partir da equação de continuidade do fluido e das condições de contorno, o seguinte sistema modela o problema:

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}(r, t) \quad (\text{B-3})$$

CI:

$$p(r, t = 0) = p_i \quad (\text{B-4})$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i \quad (\text{B-5})$$

CCI:

$$q_w B_w = -2\pi k h \lambda_t \lim_{r \rightarrow r_w} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{B-6})$$

Por hipótese, $q_t = q_w + q_o$. Logo, pela Lei de Darcy:

$$q_t = -2\pi k h \lambda_w \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - 2\pi k h \lambda_o \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{B-7})$$

Logo, pela Equação (B-2):

$$q_t = -2\pi k h \lambda_t \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{B-8})$$

Portanto, isolando o termo $\frac{\partial p}{\partial r}$ tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{q_t}{2\pi k h \lambda_t} \frac{1}{r} \quad (\text{B-9})$$

Integrando de r_w a r ambos os lados da equação (B-9):

$$\int_{r_w}^r \frac{\partial p}{\partial r'} dr' = \int_{r_w}^r -\frac{q_t(r', t)}{2\pi k h \lambda_t} \frac{1}{r'} dr' \quad (\text{B-10})$$

Ou seja,

$$p(r, t) - p(r_w, t) = -\frac{1}{2\pi k h} \int_{r_w}^r \frac{q_t(r', t)}{\lambda_t(r', t)} \frac{1}{r'} dr' \quad (\text{B-11})$$

Para $r \rightarrow \infty$, utilizando a CCE (B-5), é possível reescrever a equação (B-11) da seguinte maneira:

$$p(r_w, t) - p_i = \frac{1}{2\pi k h} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_t(r', t)}{\lambda_t(r', t)} \frac{1}{r'} dr' \quad (\text{B-12})$$

Pela formulação de Buckley-Leverett, o raio da frente de avanço de água (r_F) é definido por:

$$r_F = \sqrt{(r_w)^2 + \frac{q_{inj}}{24\phi h} f_w t} \quad (\text{B-13})$$

Considerando $\Delta p_{wf} = p(r_w, t) - p_i$, a seguinte igualdade é válida:

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F} \frac{q_t}{\lambda_t} \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_F}^{\infty} \frac{q_t}{\lambda_t} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (\text{B-14})$$

Para $r > r_F$ sabe-se que $q_t = q_o$ e $\lambda_t = \hat{\lambda}_o$ pois só há óleo no reservatório.

Logo,

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F} \frac{q_t}{\lambda_t} \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_F}^{\infty} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (\text{B-15})$$

Somando e subtraindo o termo $\int_{r_w}^{r_F} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr'$ do lado esquerdo da equação (B-15):

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F} \frac{q_t}{\lambda_t} \frac{1}{r'} dr' - \int_{r_w}^{r_F} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_w}^{r_F} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_F}^{\infty} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (\text{B-16})$$

Então,

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F} \left(\frac{q_t}{\lambda_t} - \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \right) \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_F}^{\infty} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (\text{B-17})$$

Para $r < r_F$ será assumido que a vazão total é idêntica a vazão de escoamento de cada um dos fluidos, ou seja, $q_t = q_o = q_w B_w$. Logo:

$$\Delta p_{wf} = \frac{q_w B_w}{2\pi kh} \int_{r_w}^{r_F} \left(\frac{1}{\lambda_t} - \frac{1}{\hat{\lambda}_o} \right) \frac{1}{r'} dr' + \frac{1}{2\pi kh} \int_{r_F}^{\infty} \frac{q_o}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \quad (\text{B-18})$$

Portanto, utilizando a constante α_p para adequação de unidades ao sistema de medidas Brasileiro:

$$\Delta p_{wf} = \underbrace{\frac{\alpha_p q_w B_w}{kh \hat{\lambda}_o} \int_{r_w}^{r_F} \left(\frac{\hat{\lambda}_o}{\lambda_t} - 1 \right) \frac{1}{r'} dr'}_{\Delta p_\lambda} + \underbrace{\frac{\alpha_p}{kh \hat{\lambda}_o} \int_{r_F}^{\infty} q_o \frac{1}{r'} dr'}_{\Delta p_o} \quad (\text{B-19})$$

B.2

Período de Falloff

Seja t_p o tempo de produção, ou seja, o instante em que o poço é fechado, e $\Delta t = t - t_p$, analogamente ao período de injeção a seguinte relação é obtida:

$$\Delta p_{ws} = p(r_w, \Delta t) - p_i = \frac{1}{2\pi kh} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t)} \frac{1}{r'} dr' \quad (\text{B-20})$$

Considera-se que a frente de avanço é estacionária após o fechamento do poço, logo o perfil de mobilidade do fluido não se altera. Sendo assim,

$$\Delta p_{ws} = \frac{1}{2\pi kh} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t_p)} \frac{1}{r'} dr' \quad (\text{B-21})$$

A Equação (B-21) pode ser modificada de forma a considerar uma soma de integrais com domínio de integração do raio do poço até o raio da frente e do raio da frente em diante, ou seja,

$$\Delta p_{ws} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F(t_p)} \frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t_p)} \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_F(t_p)}^{\infty} \frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t_p)} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (\text{B-22})$$

Sabendo que região após a frente de avanço é uma região oleica, pode-se considerar que $\lambda_t = \hat{\lambda}_o$ e $q_{ts}(r, \Delta t) = q_{os}(r, \Delta t)$. Logo, a equação B-22 é equivalente a:

$$\Delta p_{ws} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F(t_p)} \frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t_p)} \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_F(t_p)}^{\infty} \frac{q_{os}(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (\text{B-23})$$

Somando e subtraindo o termo $\int_{r_w}^{r_F(t_p)} \frac{q_{os}(r', \Delta t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr'$ do lado direito da Equação (B-23):

$$\Delta p_{ws} = \frac{1}{2\pi kh} \int_{r_w}^{r_F(t_p)} \left[\frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t_p)} \frac{1}{r'} - \frac{q_{os}(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} \right] dr' + \frac{1}{2\pi kh \hat{\lambda}_o} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_{os}(r', t)}{r'} dr' \quad (\text{B-24})$$

Analogamente ao período de injeção, utilizando as constantes de adequação para o sistema brasileiro de medidas, a Equação (B-24) pode ser modificada para:

$$\Delta p_{ws} = \frac{\alpha_p}{kh} \int_{r_w}^{r_F(t_p)} \left[\frac{q_{ts}(r', t)}{\lambda_t(r', t_p)} \frac{1}{r'} - \frac{q_{os}(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} \right] dr' + \frac{\alpha_p}{kh \hat{\lambda}_o} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_{os}(r', t)}{r'} dr' \quad (\text{B-25})$$

Sendo assim, em analogia à Equação (B-19), a Equação (B-25) pode ser reescrita como:

$$\Delta p_{ws} = \Delta p_{os}(\Delta t) + \Delta p_{\lambda_s}(\Delta t) \quad (\text{B-26})$$

C

Teste de Injetividade em Reservatório com Uma Camada: Múltiplas Vazões

Com base nos Apêndices (A) e (B), neste apêndice será apresentada, de forma resumida, a solução analítica para o comportamento da pressão no poço em um reservatório com um esquema de múltiplas vazões proposto por Bonafé et al (25). Analogamente ao Capítulo 4 as seguintes suposições são adotadas:

- Reservatório é homogêneo e isotrópico, com extensão infinita;
- Forças gravitacionais e capilares desprezíveis;
- Água e óleo são considerados fluidos imiscíveis e levemente compressíveis com viscosidade (μ) constante;
- Fluxo é isotérmico;
- Espessura constante (h);
- O poço injeta uma vazão constante q_i no período de injeção i ;
- A formação rochosa apresenta uma pequena e constante compressibilidade;
- Não há efeito de estocagem;
- Não há região de dano próxima ao poço (skin);
- No instante $t = 0$, o reservatório está em equilíbrio, ou seja, a pressão é a mesma em todas as camadas.

Considerando m períodos de injeção, o comportamento da vazão de injeção no poço é descrito conforme o esquema a seguir:

$$q_{inj}(t) = \begin{cases} q_0 = 0, & t_0 = 0 \\ q_1, & t_0 < t \leq t_1 \\ q_2, & t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_m, & t_{m-1} < t \leq t_m \end{cases} \quad (C-1)$$

O volume total de água injetada (v_{inj}) varia em função da vazão, sendo assim, v_{inj} será definido da seguinte forma:

$$v_{inj}(t) = \int_0^t q_{inj}(t') dt' \quad (C-2)$$

Portanto, utilizando a formulação de Buckley-Leverett (1), o raio da frente de avanço ($r_F(t)$) é definido como:

$$r_F(t) = \sqrt{r_w^2 + \frac{v_{inj}(t)B_w}{24\pi h\phi} f'_w(S_w)} \quad (C-3)$$

onde $f'_w(S_w)$ é derivada da curva de fluxo fracionário da água.

Analogamente ao Apêndice (B) tem-se que:

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F} \left(\frac{q_t(r', t)}{\lambda_t} - \frac{q_o(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \right) \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_o(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (C-4)$$

Neste caso, considerando $r < r_F$, utilizando a superposição de vazões da Equação (A-9), é possível aproximar a vazão ao longo do reservatório, ou seja:

$$q(r, t) = \sum_{k=1}^i \left[(q_k - q_{k-1}) e^{-\frac{r^2 \phi \mu c_t}{4\alpha_t k (t - t_{k-1})}} \right] \quad (C-5)$$

Portanto, para $r < r_F$, considerando $q(r, t) = q_t(r, t) = q_o(r, t)$ a Equação (C-4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta p_{wf} = \frac{1}{2\pi kh} \left[\int_{r_w}^{r_F} q(r', t) \left(\frac{1}{\lambda_t} - \frac{1}{\hat{\lambda}_o} \right) \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_o(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (C-6)$$

Utilizando a constante de adequação de unidades para o sistema de medidas Brasileiro (α_p) é possível escrever:

$$\Delta p_{wf} = \frac{\alpha_p}{kh\hat{\lambda}_o} \left[\int_{r_w}^{r_F} q(r', t) \left(\frac{\hat{\lambda}_o}{\lambda_t} - 1 \right) \frac{1}{r'} dr' + \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_o(r', t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr' \right] \quad (C-7)$$

Sabe-se que $\Delta p_o = \frac{\alpha_p}{kh\hat{\lambda}_o} \int_{r_w}^{\infty} \frac{q_o(r, t)}{\hat{\lambda}_o} \frac{1}{r'} dr$ representa a solução de fluxo monofásico com vazão variável, apresentada no Apêndice (A) pela Equação (A-4). Sendo assim, substituindo a Equação (A-4) na Equação (C-7) a seguinte solução para a pressão no poço é obtida:

$$\Delta p_{wf} = \frac{\alpha_p}{kh\hat{\lambda}_o} \int_{r_w}^{r_F} q(r', t) \left(\frac{\hat{\lambda}_o}{\lambda_t} - 1 \right) \frac{1}{r'} dr' + \frac{1}{2} \frac{\alpha_p B \mu}{kh} \sum_{i=1}^j \left[(q_i - q_{i-1}) \left(\ln \left(\frac{4\alpha_t k \hat{\lambda}_o (t - t_{i-1})}{r^2 \phi c_t e^\gamma} \right) \right) \right] \quad (C-8)$$

D

Teste de Injetividade em Reservatório com Uma Camada: Vazão Constante no Campo de Laplace

Neste Apêndice são apresentadas duas formulações para teste de injetividade em reservatório de uma única camada com vazão constante utilizando variáveis no campo de Laplace. A partir da equação da difusividade hidráulica e condições de contorno um sistema que modela o problema no campo real é formado. Com a finalidade de simplificar a equação diferencial do sistema, todas as equações são levadas para o campo de Laplace. O sistema então passa a ser um sistema linear e a solução é encontrada facilmente.

D.1

Modelo com duas regiões

Por hipótese considera-se duas regiões, onde a Região 1 representa a região que contém a água injetada e que a Região 2 representa a região do reservatório que contém o óleo. Esta formulação também pode ser estendida para um modelo considerando três regiões. A figura a seguir representa o modelo adotado:

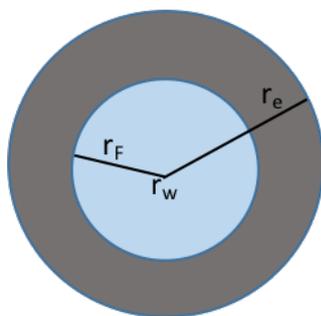


Figura D.1: Modelo para fluxo bifásico com duas regiões

Em cada região são consideradas as propriedades do fluido contido na mesma. Utilizando a formulação de Buckley-Leverett (1), o raio da frente de avanço é definido por:

$$r_F(t) = \sqrt{(r_w)^2 + \frac{q_{inj}}{24\phi h} f'_w t} \quad (D-1)$$

Considerando um deslocamento pistão, a derivada do fluxo fracionário é dada por:

$$f'_w = \frac{1}{(1 - S_{or} - S_{wi})} \quad (D-2)$$

Denotando a permeabilidade do reservatório por k , a difusividade hidráulica (η) e a mobilidade do fluido (λ) são definidos, respectivamente, por:

$$\eta_f = \frac{kk_{rf}}{\phi\mu_f c_t} \quad (\text{D-3})$$

e

$$\lambda_f = \frac{kk_{rf}}{\mu_f} \quad (\text{D-4})$$

onde $f = w, o$.

Tem-se que as seguintes equações modelam o problema na região 1:

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_w} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (\text{D-5})$$

CI:

$$p_1(r, t = 0) = p_i \quad (\text{D-6})$$

CCI:

$$q_{inj} = 2\pi \hat{\lambda}_w h \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (\text{D-7})$$

As seguintes equações modelam o problema na região 2:

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_o} \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (\text{D-8})$$

CI:

$$p_2(r, t = 0) = p_i \quad (\text{D-9})$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_2(r, t) = 0 \quad (\text{D-10})$$

O acoplamento entre as duas regiões ocorre no raio da frente de avanço (r_F), com isso a Condição de Acoplamento entre Regiões (CAR) é dada pelas seguintes equações:

CAR:

$$\begin{cases} p_1(r_F, t) = p_2(r_F, t) \\ q_1(r_F, t) = q_2(r_F, t) \end{cases} \quad (\text{D-11})$$

Aplicando a Lei de Darcy é possível reescrever a igualdade entre as vazões da Equação (D-11) da seguinte forma:

$$2\pi \hat{\lambda}_w h \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_F} = 2\pi \hat{\lambda}_o h \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_F} \quad (\text{D-12})$$

Portanto,

$$\left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_F} = \frac{\hat{\lambda}_o}{\hat{\lambda}_w} \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_F} \quad (\text{D-13})$$

Com a finalidade de reduzir a equação diferencial parcial do sistema apresentado a uma equação diferencial ordinária, aplica-se a transformada de Laplace na Equação (D-5), com isso:

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_w} (u \bar{p}_1(r, u) - p_1(r, t = 0)) \quad (\text{D-14})$$

Portanto, utilizando a CI (D-6) e derivando o lado esquerdo da equação (D-14), a seguinte Equação Diferencial Ordinária para a Região 1 é obtida:

$$\text{EDO:} \quad \frac{\partial^2 \bar{p}_1(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right)^2} + \frac{1}{r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} \frac{\partial \bar{p}_1(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right)} - \bar{p}_1(r, u) = -p_i \frac{\eta_w}{u} \quad (\text{D-15})$$

Analogamente, reduz-se a equação (D-8) a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\text{EDO:} \quad \frac{\partial^2 \bar{p}_2(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right)^2} + \frac{1}{r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}}} \frac{\partial \bar{p}_2(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right)} - \bar{p}_2(r, u) = -p_i \frac{\eta_o}{u} \quad (\text{D-16})$$

Definindo $\Delta \bar{p}(r, u) = p_i - p(r, t)$, o seguinte sistema modela o problema no Domínio de Laplace:

Região 1:

$$\text{EDO:} \quad \frac{\partial^2 \Delta \bar{p}_1(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right)^2} + \frac{1}{r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} \frac{\partial \Delta \bar{p}_1(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right)} - \Delta \bar{p}_1(r, u) = 0 \quad (\text{D-17})$$

CCI:

$$\left(r \frac{\partial \Delta \bar{p}_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} = -\frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_w h u} \quad (\text{D-18})$$

Região 2:

$$\text{EDO:} \quad \frac{\partial^2 \Delta \bar{p}_2(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right)^2} + \frac{1}{r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}}} \frac{\partial \Delta \bar{p}_2(r, u)}{\partial \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right)} - \Delta \bar{p}_2(r, u) = 0 \quad (\text{D-19})$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta \bar{p}_2(r, u) = 0 \quad (\text{D-20})$$

CAR:

$$\begin{cases} \Delta \bar{p}_1(r_F, u) = \Delta \bar{p}_2(r_F, u) \\ \left(r \frac{\partial \Delta \bar{p}_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_F} = \frac{\hat{\lambda}_o}{\hat{\lambda}_w} \left(r \frac{\partial \Delta \bar{p}_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_F} \end{cases} \quad (\text{D-21})$$

No domínio de Laplace, a solução para a pressão na Região 1 é conhecida por:

$$\Delta \bar{p}_1 = A_1 K_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \quad (D-22)$$

onde A_1 e B_1 são constantes a serem determinadas.

Derivando a Equação (D-22):

$$r \frac{\partial \Delta \bar{p}_1}{\partial r} = r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \left[-A_1 K_1 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_1 I_1 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \right] \quad (D-23)$$

Sendo assim, a CCI (D-18) pode ser reescrita como:

CCI:

$$r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \left[-A_1 K_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_1 I_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \right] = -\frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_w h} \frac{1}{u} \quad (D-24)$$

Portanto,

$$A_1 K_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) - B_1 I_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) = \underbrace{\frac{1}{r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} \frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_w h} \frac{1}{u}}_{\text{termofonte}} \quad (D-25)$$

De modo similar, para a Região 2 tem-se

$$\Delta \bar{p}_2 = A_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) + B_2 I_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \quad (D-26)$$

onde A_2 e B_2 são constantes a serem determinadas. E ainda,

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[A_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) + B_2 I_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right] = 0 \quad (D-27)$$

Pelas propriedades das funções de Bessel, sabe-se que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) = 0 \quad (D-28)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) = \infty \quad (D-29)$$

Portanto, para o limite da CCE (D-27) ser satisfeito pode-se afirmar que $B_2 = 0$. Logo,

$$\Delta \bar{p}_2 = A_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \quad (D-30)$$

Sendo assim, derivando a Equação (D-30):

$$r \frac{\partial \Delta \bar{p}_2}{\partial r} = r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \left[-A_2 K_1 \left(r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right] \quad (D-31)$$

Logo, substituindo as equações (D-22) e (D-30) na CAR de pressões (D-21) obtém-se:

$$A_1 K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_1 I_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) = A_2 K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \quad (D-32)$$

Substituindo a Equação (D-32) na CAR de vazões (D-21), a seguinte igualdade é válida:

$$\begin{aligned} r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \left[-A_1 K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_1 I_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \right] \\ = \frac{\hat{\lambda}_o}{\hat{\lambda}_w} r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \left[-A_2 K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right] \end{aligned} \quad (D-33)$$

Logo,

$$A_1 K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) - B_1 I_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) = \frac{\hat{\lambda}_o}{\hat{\lambda}_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} \left[A_2 K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right] \quad (D-34)$$

O sistema formado pelas Equações (D-25), (D-32) e (D-34) pode ser reescrito como:

$$M \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} \frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_w h} \frac{1}{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D-35)$$

Onde M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} K_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & -I_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & 0 \\ K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & -K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \\ K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & -I_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & -\frac{\hat{\lambda}_o}{\hat{\lambda}_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \end{bmatrix} \quad (D-36)$$

Portanto, os coeficientes A_1 , B_1 e A_2 podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} \frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_w h} \frac{1}{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D-37)$$

Sendo assim, conhecendo os termos A_1 e B_1 a pressão no poço pode ser calculada pela seguinte relação:

$$\Delta \bar{p}_{wf} = A_1 K_0 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) + B_1 I_0 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) \quad (D-38)$$

D.2 Modelo com três regiões

Estendendo o caso anterior, por hipótese considera-se três regiões, onde a região próxima ao poço representa uma região de dano (skin). A depender da frente de avanço de água ultrapassar o raio da região danificada, região danificada pode conter água ou óleo. Sendo assim, as seguintes figuras representam este modelo:

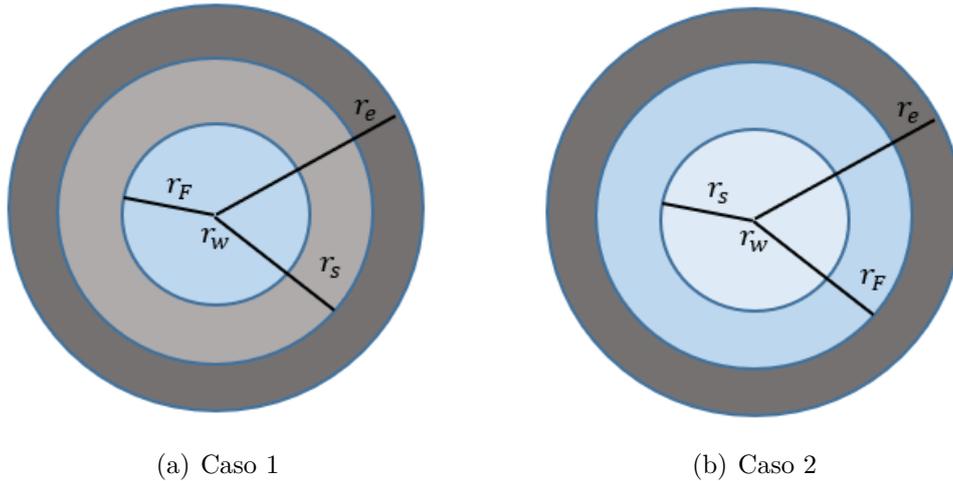


Figura D.2: Modelo com Três Regiões

Será utilizada a mesma definição do Modelo com duas regiões mostrada na sessão (D.1) para o raio da frente de avanço (r_F). A permeabilidade do reservatório será denotada por k enquanto a permeabilidade da zona de dano por k_s . Sendo assim, a difusividade hidráulica (η) e a mobilidade do fluido ($\hat{\lambda}$) serão definidas de duas maneiras:

Na zona danificada:

$$\eta_{fs} = \frac{k_s k_{rf}}{\phi \mu_f c_t} \quad (D-39)$$

e

$$\hat{\lambda}_{fs} = \frac{k_s k_{rf}}{\mu_f} \quad (D-40)$$

Na zona do reservatório:

$$\eta_{fR} = \frac{k k_{rf}}{\phi \mu_f c_t} \quad (D-41)$$

e

$$\hat{\lambda}_{fR} = \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \quad (D-42)$$

onde $f = w, o$ em ambos os casos.

Analogamente ao Modelo com duas regiões (D.1), a partir equação da difusividade hidráulica, das condições de contorno e das condições de acoplamento de cada região em cada caso obtém-se um sistema que modela o problema no campo de Laplace.

Neste caso, o sistema formado pela seguinte igualdade:

$$M \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}}} \frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_{ws} h} \frac{1}{u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D-43)$$

Onde M é pode ser escrita de duas formas:

Para $r_F(t) < r_{skin}$

$$\begin{vmatrix} K_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -I_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & 0 & 0 & 0 \\ K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & I_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & -I_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & 0 \\ K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -I_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -\frac{\hat{\lambda}_{os}}{\hat{\lambda}_{ws}} \sqrt{\frac{\eta_{ws}}{\eta_{os}}} K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & \frac{\hat{\lambda}_{os}}{\hat{\lambda}_{ws}} \sqrt{\frac{\eta_{ws}}{\eta_{os}}} I_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & I_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & -K_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{or}}} \right) \\ 0 & 0 & K_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & -I_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{os}}} \right) & -\frac{\hat{\lambda}_{or}}{\hat{\lambda}_{os}} \sqrt{\frac{\eta_{os}}{\eta_{or}}} K_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{or}}} \right) \end{vmatrix}$$

Para $r_F(t) > r_{skin}$

$$\begin{vmatrix} K_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -I_1 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & 0 & 0 & 0 \\ K_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & I_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -K_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & -I_0 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & 0 \\ K_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -I_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) & -\frac{\hat{\lambda}_{wr}}{\hat{\lambda}_{ws}} \sqrt{\frac{\eta_{ws}}{\eta_{wr}}} K_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & \frac{\hat{\lambda}_{wr}}{\hat{\lambda}_{ws}} \sqrt{\frac{\eta_{ws}}{\eta_{wr}}} I_1 \left(r_s \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & I_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & -K_0 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{or}}} \right) \\ 0 & 0 & K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & -I_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{wr}}} \right) & -\frac{\hat{\lambda}_{or}}{\hat{\lambda}_{wr}} \sqrt{\frac{\eta_{wr}}{\eta_{or}}} K_1 \left(r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_{or}}} \right) \end{vmatrix}$$

Portanto, os coeficientes A_i e B_i podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}}} \frac{q_{inj}}{2\pi \hat{\lambda}_{ws} h} \frac{1}{u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (D-44)$$

Sendo assim, conhecendo os termos A_i e B_i a pressão no poço pode ser calculada pela seguinte relação:

$$\Delta \bar{p}_{wf} = A_1 K_0 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) + B_1 I_0 \left(r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_{ws}}} \right) \quad (D-45)$$

Em ambas as formulações apresentadas neste apêndice, a pressão no poço pode ser convertida para o campo real utilizando o algoritmo de Stehfest (3).