



**Eric Allonso Oliveira Alves**

**Análise da instabilidade de estruturas tipo Gridshell**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro  
dezembro de 2019



**Eric Allonso Oliveira Alves**

## **Análise da instabilidade de estruturas tipo Gridshell**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Raul Rosas e Silva  
Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro - UERJ

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

## Eric Allonso Oliveira Alves

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade de Brasília (Brasília, DF, Brasil). Sua área de interesse compreende instabilidade de estruturas, dinâmica e modelagem computacional.

### Ficha Catalográfica

Alves, Eric Allonso Oliveira

Análise da instabilidade de estruturas tipo Gridshell / Eric Allonso Oliveira Alves ; orientador: Raul Rosas e Silva. – 2019.

94 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2019.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Gridshell. 3. Flambagem. 4. Vibrações. 5. Análise não linear. 6. Simulação numérica. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia

*Este trabalho é dedicado ao meu pai **Nelson Oliveira Alves**, que iria se orgulhar muito de ver seu filho Engenheiro Civil e, agora, mestre.*

## **Agradecimentos**

Ao Professor Raul Rosas e Silva por compartilhar comigo um pouco do seu grande conhecimento. Agradeço sua paciência e ensinamentos ao longo de todo o mestrado.

Aos meus amigos Felipe, Chris, Lucian, Ícaro, Manuel, Osmar e João que me apoiaram e me incentivaram durante toda minha trajetória no mestrado. A amizade de vocês foi com certeza uma das melhores coisas durante esses últimos anos e tenho certeza que perdurará por muitos outros.

À minha família por me ensinar os valores e o que é importante na vida. Sem família não poderia ter chegado onde cheguei.

Aos professores integrantes da banca examinadora.

Ao CNPQ e à PUC-Rio pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Resumo

Alves, Eric Allonso Oliveira; Silva, Raul Rosas. **Análise da instabilidade de estruturas tipo Gridshell**. Rio de Janeiro, 2019. 94p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

*Gridshells* são estruturas leves que combinam eficiência e arquiteturas atraentes. Devido ao fato de a transmissão de esforços ocorrer majoritariamente por compressão, esse tipo de estrutura é suscetível a flambagem. Este estudo buscou avaliar como determinados fatores influenciam na instabilidade desse tipo de estruturas e, assim, estabelecer pontos de referência para o desenvolvimento de projetos. Foi realizado um estudo paramétrico de *gridshells* de malha quadrangular reforçados por cabos a partir de simulação numérica, em que foi investigado o efeito da presença de cabos, o efeito do nível de protensão e efeito de imperfeições iniciais. Os resultados mostraram um benefício geral com o reforço de cabos, aumentando de maneira considerável a carga de flambagem da estrutura, além de proporcionar um aumento nas frequências naturais do sistema. Contudo, os resultados mostraram uma redução significativa na resistência a flambagem, bem como uma alteração nas frequências naturais com a presença de imperfeições. Desse modo foi possível concluir que *gridshells* são estruturas altamente não lineares e sensíveis a imperfeições, tanto no aspecto dinâmico como estático.

## Palavras-chave

*Gridshell*; Flambagem; Vibrações; Análise não linear; Simulação numérica;

## Abstract

Alves, Eric Allonso Oliveira; Silva, Raul Rosas (Advisor). **Stability analysis of gridshells**. Rio de Janeiro, 2019. 94p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Gridshells are lightweight structures that combine efficiency and attractive architecture. Due to the fact that the load is mainly carried by compression, this type of structure is susceptible to buckling, thus the stability check is essential. This study investigated how certain factors influence the stability of this type of structure and targeted reference points for the designers. A parametric study was conducted through numerical simulations, in which it was investigated the effect of the presence of a cable net, the level of prestress on the cables and the effect of initial imperfections. The results showed a benefit from the adoption of the cable net as a reinforcement, increasing considerably the buckling load, as well as the natural frequencies of the system. However, a significant reduction of the buckling load and a change in the natural frequencies with the presence of the imperfection were observed. Thus, it was concluded that gridshells are highly nonlinear structures and sensitive to imperfections, so much in the static aspect as dynamically.

## Keywords

Gridshell; Buckling; Vibrations; Nonlinear analysis; Numerical Simulation.

## Sumário

|        |  |    |
|--------|--|----|
| 1      | Introdução   | 12 |
| 1.1.   | Motivação  | 12 |
| 1.2.   | Escopo da dissertação                                | 12 |
| 2      | Revisão bibliográfica                                | 14 |
| 2.1.   | Introdução   | 14 |
| 2.2.   | Projeto de um <i>Gridshell</i>                       | 18 |
| 2.3.   | Estudos realizados                                   | 25 |
| 3      | Fundamentação teórica                                | 29 |
| 3.1.   | Método Newton-Raphson                                | 32 |
| 3.2.   | Newton-Raphson Modificado                            | 35 |
| 4      | Modelagem  | 37 |
| 4.1.   | Metodologia  | 37 |
| 4.2.   | Estudo paramétrico                                   | 37 |
| 4.2.1. | Modelo estudado                                      | 38 |
| 4.2.2. | Aspectos da modelagem                                | 40 |
| 4.2.3. | Validação das técnicas de modelagem                  | 42 |
| 5      | Resultados e discussões                              | 48 |
| 5.1.   | Curva carga-deslocamento                             | 48 |
| 5.2.   | Influência da presença dos cabos e natureza da carga | 50 |
| 5.2.1. | Influência do nível de protensão dos cabos           | 55 |
| 5.3.   | Sistemas imperfeitos                                 | 56 |
| 5.3.1. | Carregamento simétrico                               | 57 |
| 5.3.2. | Carregamento assimétrico                             | 63 |
| 5.4.   | Magnitude das imperfeições iniciais                  | 67 |
| 5.5.   | Análise dinâmica                                     | 70 |
| 5.5.1. | Influência do nível de protensão dos cabos           | 72 |



|  |    |
|--|----|
| 5.5.2. Influência de imperfeições      | 74 |
| 5.5.3. Resposta Harmônica              | 76 |
| 6 Considerações finais                 | 82 |
| 6.1. Conclusões                        | 82 |
| 6.2. Sugestões para trabalhos futuros: | 84 |
| 7. Referências Bibliográficas          | 86 |
| Apêndice                               | 89 |
| Modos de flambagem                     | 89 |
| Modos de vibração                      | 93 |

## Lista de símbolos

### Romanos:

|                |   |
|----------------|---|
| $A$            | Área da seção transversal do elemento                                   |
| $d$            | Vão do <i>gridshell</i>   |
| $E$            | Módulo de elasticidade longitudinal do material                         |
| $E_T$          | Módulo de elasticidade tangente do material                             |
| $f$            | Vetor de forças aplicadas   |
| $K$            | Matriz de rigidez   |
| $K_E$          | Matriz de rigidez elástica  |
| $K_G$          | Matriz de rigidez geométrica  |
| $K_U$          | Matriz de referente aos deslocamentos iniciais                          |
| $K_T$          | Matriz de rigidez tangente  |
| $P_{cr}$       | Carga crítica de flambagem  |
| $P_A$          | Carga de afrouxamento dos cabos   |
| $P_{A_S}$      | Carga de afrouxamento dos cabos para um carregamento simétrico          |
| $P_{A_{AS}}$   | Carga de afrouxamento dos cabos para um carregamento assimétrico        |
| $P_{CL}$       | Carga crítica limite  |
| $P_{CL_S}$     | Carga crítica limite para um carregamento simétrico (sistema com cabos) |
| $P_{CL_{AS}}$  | Carga crítica limite para um carregamento simétrico (sistema com cabos) |
| $P_{CL_{S,S}}$ | Carga crítica limite para um carregamento simétrico (sistema sem cabos) |

|                |   |
|----------------|---|
| $P_{CL\_S.AS}$ | Carga crítica limite para um carregamento assimétrico (sistema sem cabos) |
| $q$            | Vetor de deslocamentos  |
| $r$            | Altura do <i>gridshell</i>  |
| $R_i$          | Raio interno da seção transversal tubular do elemento                     |
| $R_{ext}$      | Raio externo da seção transversal tubular do elemento                     |
| $q_o$          | Estimativa inicial para solução do sistema não linear                     |
| $U$            | Energia Potencial   |

### **Gregos:**

|               |   |
|---------------|---|
| $\alpha$      | Ângulo das barras na treliça de Von Mises |
| $\delta f$    | Incremento do vetor de forças aplicadas   |
| $\delta q$    | Incremento do vetor de deslocamentos      |
| $\Delta q$    | Incremento de deslocamentos               |
| $\varepsilon$ | Deformação do elemento                    |
| $\lambda$     | Parâmetro de carga                        |
| $\nu$         | Coefficiente de Poisson                   |
| $\xi$         | Coefficiente de amortecimento             |
| $\Pi$         | Energia potencial total                   |
| $\rho$        | Densidade do material                     |
| $\sigma_P$    | Tensão de protensão dos cabos             |
| $\sigma_y$    | Tensão de escoamento do material          |
| $\Omega$      | Frequência de excitação da carga aplicada |

# 1 Introdução

Esse trabalho tem como objetivo principal estudar o comportamento mecânico de um *gridshell*, bem como apresentar orientações e pontos chave para projetos desse tipo de estrutura. Um estudo paramétrico foi realizado para avaliar a instabilidade e algumas características do comportamento dinâmico de um *gridshell*.

## 1.1. Motivação

*Gridshells* são estruturas que combinam alta eficiência estrutural com uma arquitetura arrojada. Embora o nome faça analogia a uma estrutura contínua, *gridshells* são, na prática, grelhas espaciais. Consideradas estruturas leves, apresentam vantagens quanto a sustentabilidade, com uma alta eficiência do uso dos materiais, bem como grande variabilidade de materiais que podem ser usados em sua construção. Além disso, apresentam vantagens no aspecto arquitetônico ao possibilitar, não só estruturas esteticamente atraentes, como altamente eficazes em termos de luminosidade e ventilação. Embora apresente todas essas vantagens, *gridshells* ainda são pouco estudadas com profundidade no Brasil e, por consequência, não há muitas construções desse tipo no país. Nesse sentido, esse trabalho busca contribuir para a disseminação do tema.

## 1.2. Escopo da dissertação

No Capítulo 2 são apresentados conceitos fundamentais sobre *gridshells*. A revisão bibliográfica fornece uma visão geral desse tipo de estrutura, apontando alguns aspectos e características essenciais para sua concepção, além de trazer alguns estudos realizados acerca de sua instabilidade.

No Capítulo 3 é apresentada uma breve fundamentação teórica de conceitos utilizados nas análises realizadas.

Aspectos da modelagem, bem como a metodologia utilizada são apresentados no capítulo 4. Os detalhes do estudo paramétrico são apresentados, além dos modelos simulados e as validações das técnicas utilizadas nas simulações numéricas.

O Capítulo 5 traz os resultados das simulações numéricas. São discutidos os resultados para os diferentes parâmetros que compuseram o estudo e como esses parâmetros podem afetar na elaboração do projeto de *gridshells*.

O Capítulo 6 encerra essa dissertação, resumindo os estudos realizados e apresentando suas conclusões e contribuições, bem como recomendações para estudos futuros.

O Apêndice traz os modos de flambagem para diferentes carregamentos, bem como os modos de vibração do sistema.

## 2 Revisão bibliográfica

### 2.1. Introdução

Doutthe et. al [1] definem *Gridshell* como uma estrutura com a forma e resistência de uma casca de dupla curvatura, porém formada por uma grelha espacial ao invés de uma superfície sólida. A grelha é, por sua vez, coberta por painéis, que podem ser de diferentes materiais, formando a estrutura final. Esse tipo de estrutura pode cobrir grandes vãos usando pouco material e podem ser feitas de diversos tipos de materiais como aço, alumínio, madeira ou até papelão. Contudo, não são apenas os materiais que apresentam essa variabilidade, mas também sua forma e função.

Exemplos da variabilidade de materiais, forma e função são o aeroporto Daxing em Pequim (Figura 1), o edifício do Museu Downland (Figura 2) e o pavilhão japonês em Hanover (Figura 3).

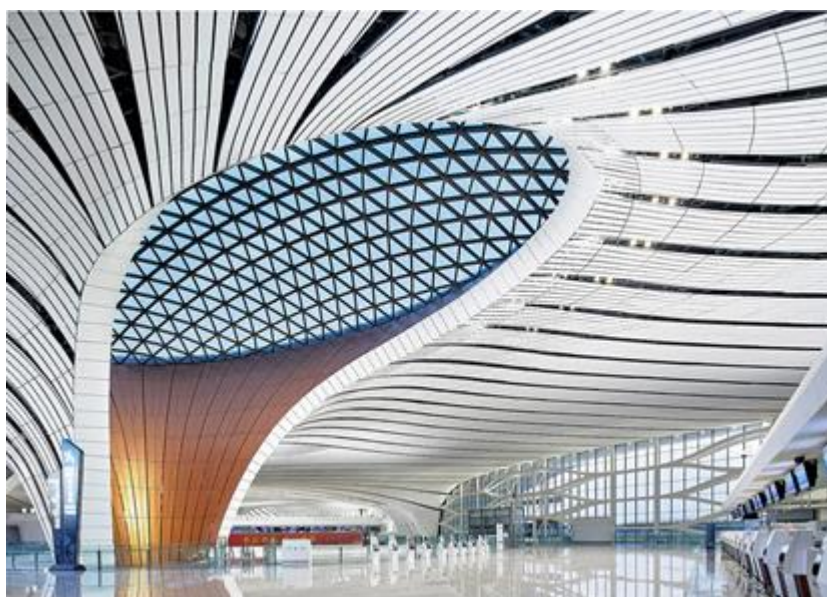


Figura 1 - Aeroporto Daxing, Pequim – Material: Aço. [2]



Figura 2 - Museum Weald and Downland – Material: Madeira. [3]

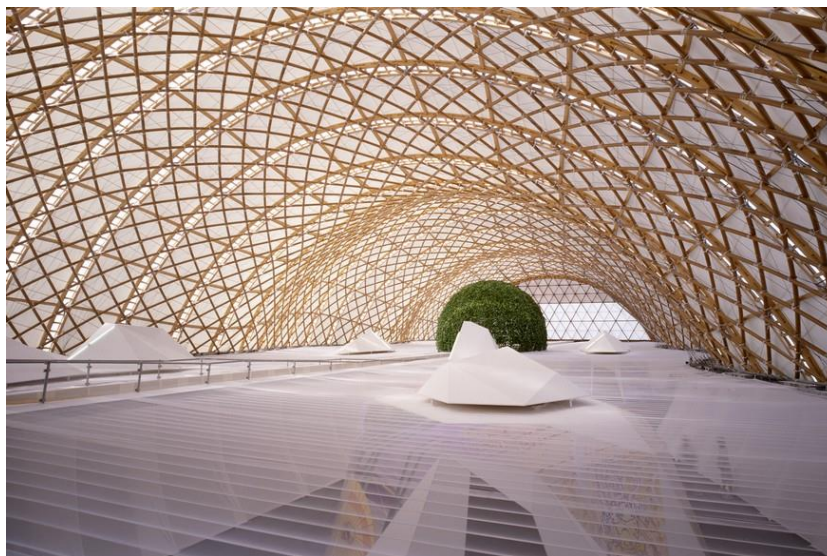


Figura 3 - Pavilhão japonês em Hanover – Material: Papelão. [4]

Enquanto no aeroporto de Pequim o *gridshell* cumpre a função de cobertura, no museu Downland o *gridshell* forma toda a estrutura do edifício. Já no caso do pavilhão japonês, o *gridshell* foi usado como uma estrutura temporária. No aeroporto de Pequim os membros eram formados de aço. No museu Downland são formados de madeira e no pavilhão japonês de papelão.

Além do material e da função exercida, *gridshells* também se diferenciam na sua concepção. A malha estrutural que compõe um *gridshell* geralmente apresenta



duas configurações: quadrangular ou triangular. Segundo Schlaich [5], a escolha mais favorável para um *gridshell* seria a malha triangular pela sua capacidade de adaptação a diferentes formas. Contudo, afirma que uma estrutura composta por painéis de vidro, que representa a grande maioria dos casos, apresenta problemas como a dificuldade da determinação da malha, a utilização de um grande número de vigas e conexões, o que gera um uso excessivo de material, e a preferência da produção de painéis retangulares pelos fabricantes.

Ressalta-se, contudo, que, com o uso da ferramenta de otimização, a determinação da malha dos *gridshells* e o uso excessivo de material não são mais uma grande dificuldade atual, o que leva a uma predisposição ao uso de malhas triangulares nos dias de hoje. De modo geral, para arquiteturas mais simples o uso da malha retangular pode ser preferível, enquanto para arquiteturas arrojadas o uso da malha triangular possa ser preferido.

Um exemplo de um *gridshell* com malha quadrangular é o domo de Neckarsulm, na Alemanha, enquanto um exemplo de malha triangular é a cobertura do *shopping* MyZeil em Frankfurt, Alemanha, mostrados nas Figura 4 e 5 respectivamente.



Figura 4 - Cobertura em *gridshell* de malha quadrangular - Neckarsulm, Alemanha. Schober [6]



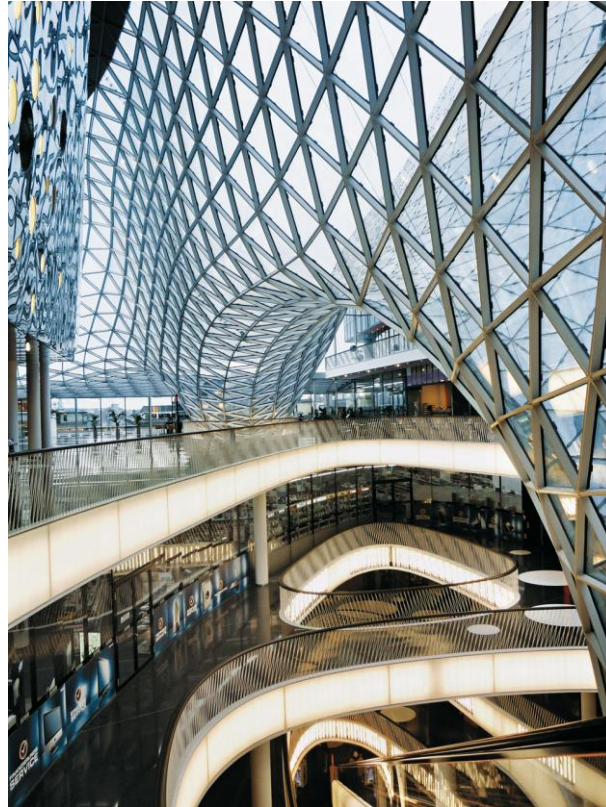


Figura 5 – MyZeil Mall, Frankfurt, Alemanha. [7]

Para combater os esforços no plano da malha quadrangular, Schlaich [5] propôs que a malha fosse reforçada diagonalmente por cabos em cada célula da grelha. O autor defende o uso de cabos tracionados ao invés de barras para o reforço, afirmando que barras diagonais variariam de tamanho ao longo da estrutura, gerando o mesmo problema da malha triangular para esse caso.

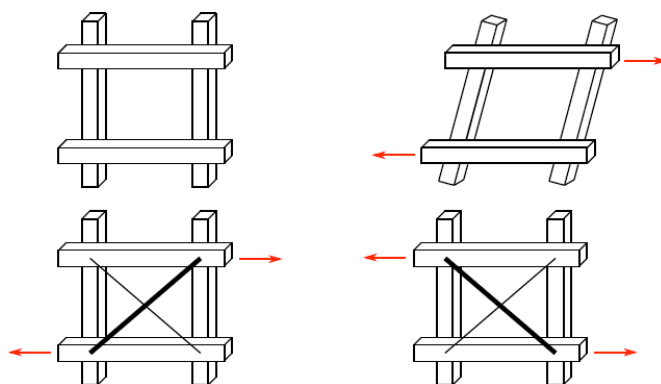


Figura 6 - Reforço da malha do *gridshell*. [8]

Os cabos são protendidos e ancorados nos nós de cada célula. A Figura 7 traz o detalhe de um exemplo de travamento de cabos de um *gridshell* de malha quadrangular.



Figura 7 – Exemplo dos cabos em um *gridshell* de malha quadrangular. [6]

Por fim, há ainda uma variação da classificação do *gridshell* quanto ao número de níveis utilizadas. Essas camadas são definidas pelo tipo e/ou disposição das vigas da malha. A Figura 8 ilustra os dois casos.

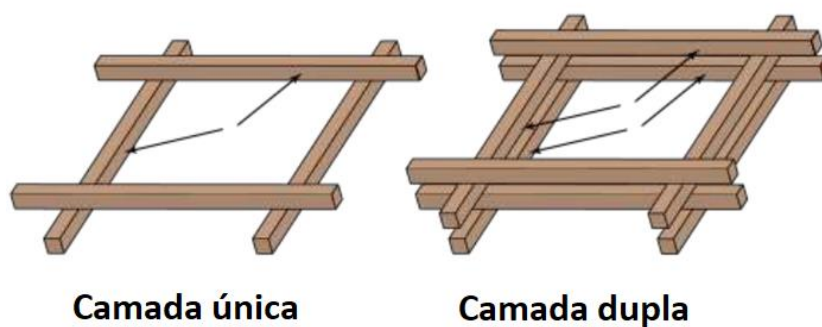


Figura 8 - *Gridshells* de camada única e camada dupla. [9]

## 2.2. Projeto de um *Gridshell*

Como descreve Knippers [10], o processo de desenvolvimento de *gridshells* é designado como *digital chain*, um processo contínuo que busca obter a solução ótima para esse tipo de estrutura, aplicando conceitos de múltiplos campos da

engenharia, desde a primeira concepção de arquitetura, até a execução. Esse processo consiste basicamente nos seguintes passos:

- a. Otimização da forma e geometria;
- b. Construção e otimização da malha da grelha;
- c. Dimensionamento das conexões nodais;
- d. Análises estruturais;
- e. Execução;

O processo de otimização da forma e da geometria é conhecido como *Form-finding*. É o processo arquitetônico de desenvolvimento de um modelo buscando a aparência e funcionalidade ótimas. Kuiken e Mentegazzi [11] classificam os métodos de *Form-finding* em três categorias: Método Físico Clássico, Método Digital Clássico e Método Digital por Algoritmos Generativos.

O modelo físico clássico se baseia em modelos físicos reduzidos posicionados de maneira invertida, usando a gravidade para dar forma ao protótipo. Esse método ficou conhecido por seu uso pelo arquiteto Antoni Gaudí no projeto do templo da Sagrada Família em Barcelona. Outro desenvolvedor do método foi o arquiteto alemão Frei Otto com seu inovador método de modelagem física de *gridshells* conhecido como *hanging chains*.



Figura 9 - Modelo invertido da Sagrada família em Barcelona. [12]

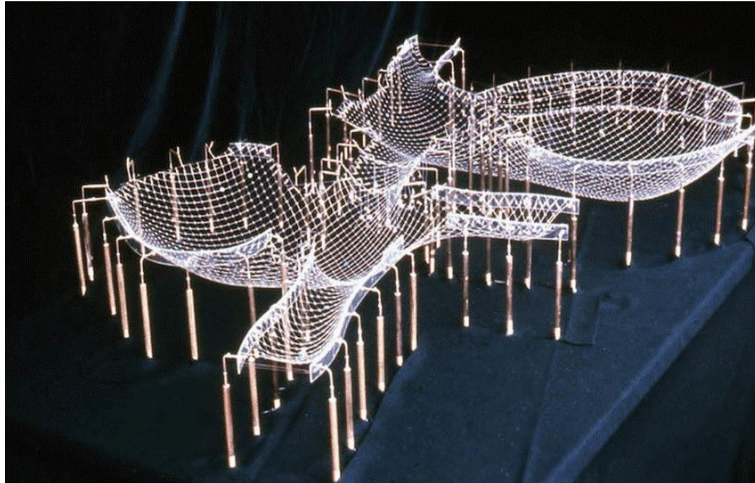


Figura 10 - Modelo físico do Multihalle Lattice em Mannheim. [13]

O método digital clássico nada mais é do que a adaptação computacional do modelo físico clássico. Nesse caso a geometria é encontrada por meio do método matemático da relaxação dinâmica, que consiste na aplicação de deformações da estrutura até atingir o ponto de equilíbrio. Portanto, esse método exige a inserção de propriedades dos materiais do sistema. A variação desses parâmetros levará à geometria desejada. Nesse contexto, um *software* que se destaca é o RHINOCEROS 3D [14], que oferece a possibilidade de utilizar programação visual para parametrização da geometria por meio do módulo GRASSHOPPER.

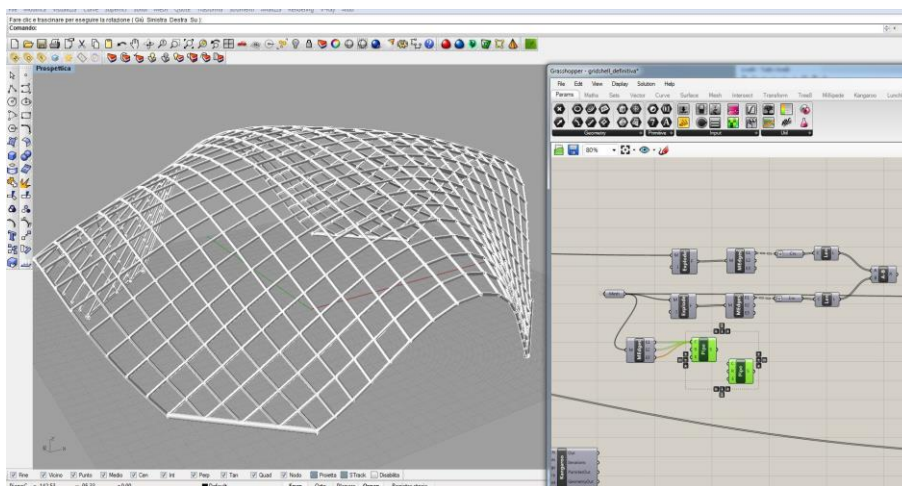


Figura 11 - Geração da geometria por meio de programação visual no Grasshopper. [15]



Para determinação da geometria pelo método da relaxação dinâmica o módulo oferece o *plug-in* KANGAROO PHYSICS [15], em que é possível associar propriedades mecânicas aos elementos.

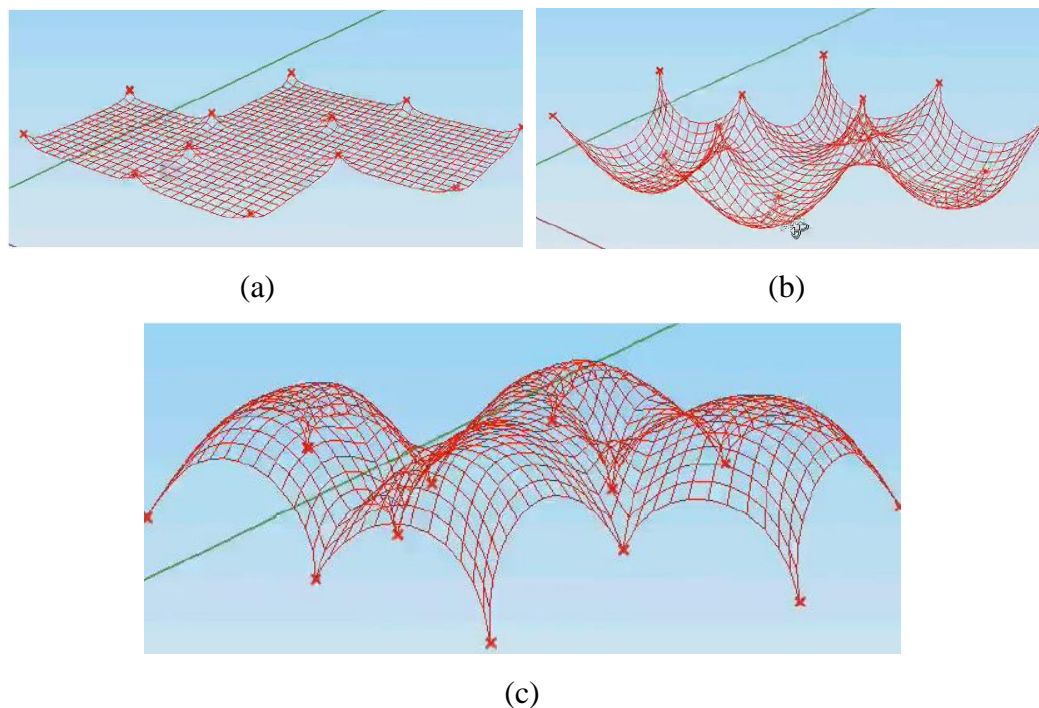


Figura 12 - Simulação usando Kangaroo Physics (a) Início da simulação (b) Inclusão dos parâmetros (c) inversão da gravidade. [16]

O método digital por algoritmos generativos utiliza o processo de otimização por meio de programação genética para determinar geometria dos *gridshells*. O uso de programação genética também tem grande importância na geração da malha da grelha do *gridshell*, especialmente quando sua forma é complexa. Desse modo, esse método deve ganhar mais destaque com o aumento do uso de conceitos de otimização no futuro.

Todavia, nem sempre é utilizado um processo de otimização para a definição da malha. Uma técnica muito eficiente e utilizada para geração de malhas quadrangulares é o Método das Superfícies Translacionais. Segundo Schlaich [5], já em 1994, havia sido demonstrada a grande variedade de *gridshells* que poderiam ser geradas usando malhas quadrangulares. Todavia, o maior desafio da época consistia na criação de uma topologia da malha que fosse contínua, com regiões de transição suaves e que pudesse ser coberta por painéis planos. A solução desse problema foi resolvida por meio da utilização dos métodos das superfícies

translacionais. Transladando uma curva arbitrária no espaço, denominada geratriz, ao longo da outra curva arbitrária no espaço, denominada diretriz, cria-se uma forma tridimensional. Schober [6] provou que a malha gerada por esse processo dá origem a subdivisões em que os quatro pontos da forma quadrangular estarão sempre no mesmo plano.

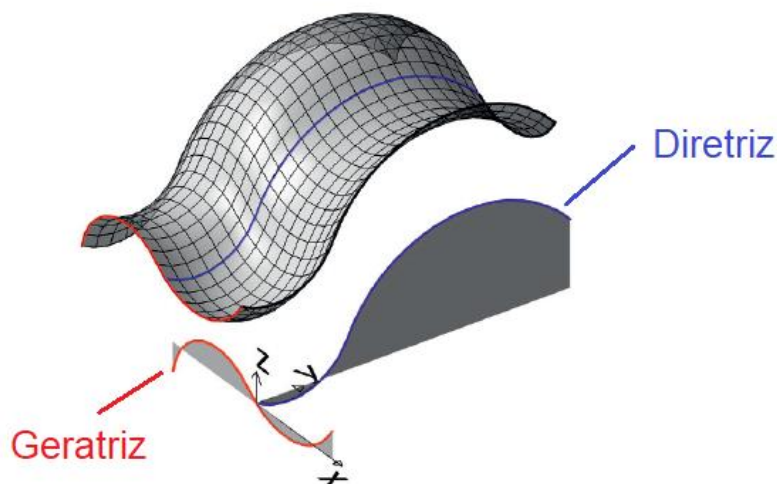
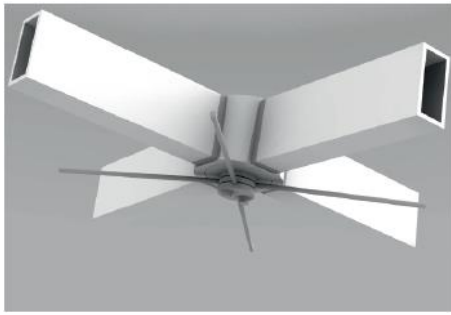


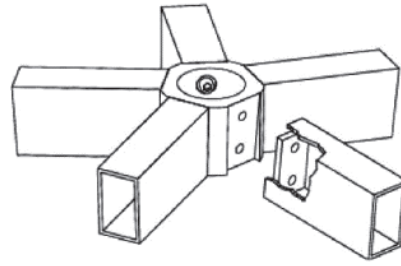
Figura 13 - Superfície translacional. [6]

O princípio geométrico translacional pode ser usado para criação de formas arbitrárias de dupla curvatura com malha quadrilateral plana. Dessa forma, essa técnica será adotada para geração da geometria do modelo estudado nesse trabalho.

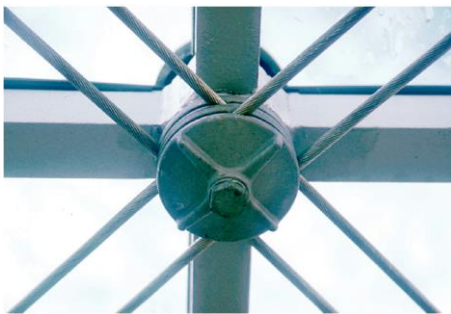
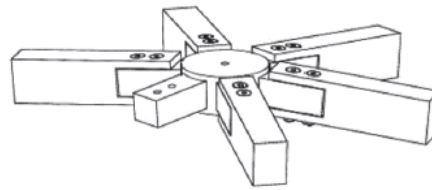
O dimensionamento das conexões nodais é outra etapa no processo do *digital chain*. A discrepância entre a simulação de uma estrutura e seu comportamento real pode ser grande muitas vezes, podendo as conexões serem uma das grandes responsáveis. Desse modo, a escolha do tipo de conexão a ser usada é uma parte fundamental no desenvolvimento de um *gridshell*. Essa escolha envolve aspectos estruturais, aspectos de execução, bem como aspectos financeiros. Dessa forma, a escolha do tipo de nó é muitas vezes exclusiva para cada projeto, sendo necessário em muitos casos a criação de novas conexões para alinhar todos os interesses dos desenvolvedores. As figuras a seguir mostram alguns exemplos de conexões soldadas e parafusadas utilizadas em estruturas executadas.



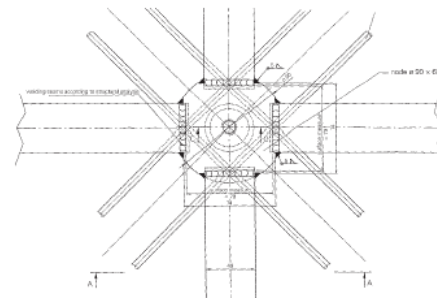
(a)



(b)



(c)



(d)

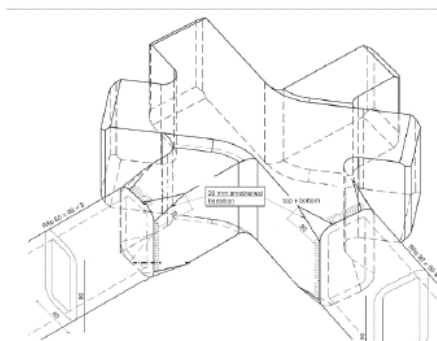


Figura 14 - Tipos de conexões nodais. (a) Yas Mall, Abu Dhabi. (b) DZ Bank, Berlin. (c) Bosch

Areal Stuttgart, Stuttgart. (d) Ernst & Young Plaza, Luxemburg. [6]

A próxima etapa do processo do *digital chain* é a análise estrutural do *gridshell*. Essa etapa é o foco desse trabalho. Nessa etapa são realizadas as análises de esforços, bem como a análise da instabilidade da estrutura. A partir desses resultados realiza-se o dimensionamento dos elementos da estrutura.

Por fim, o processo é finalizado com a execução dos projetos. A execução desse tipo de estrutura é outra etapa fundamental que tem influência em todas as etapas anteriores do processo. Essa etapa requer intenso planejamento devido a complexidades intrínsecas dos *gridshells* e não deve ser considerada menos importante do que as demais.

Sendo assim, fica visível que o projeto desse tipo de estrutura é uma harmonia entre múltiplos parâmetros, de forma que cada projeto tende a ser singular em suas soluções e concepções. Isso, atrelado à infinidade de formas possíveis para a arquitetura, reflete a imensa variabilidade de projetos executados até hoje. O processo do *digital chain* pode ser resumido em um fluxo de trabalho, que é apresentado na Figura 15.

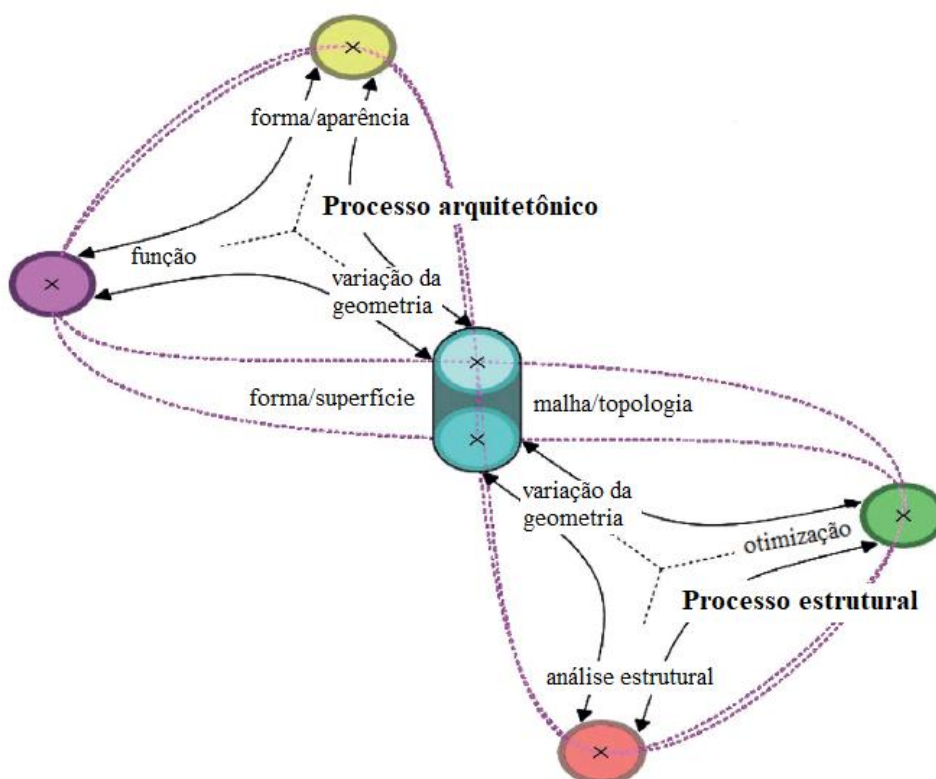


Figura 15 - Fluxo de projeto de um *gridshell*. [6] (modificado)



### 2.3. Estudos realizados

*Gridshells* são estruturas arrojadas que combinam arquiteturas atraentes e eficiência estrutural. Segundo Bulenda [17], esse tipo de estrutura trabalha principalmente a compressão, tendo a verificação da estabilidade um papel importante na análise estrutural de *gridshells*. Afirma ainda que a suscetibilidade a instabilidade desse tipo de estrutura aumenta pelo fato de *gridshells* se comportarem como uma espécie de combinação de placas e cascas contínuas, mostrando, portanto, modos de falha semelhantes a esses dois tipos de estrutura ou até mesmo a combinação desses. Ele realizou um estudo paramétrico de cargas de instabilidade de *gridshells*. No estudo foram comparados *gridshells* de única curvatura (*barrel vaults*) e dupla curvatura enrijecidos por cabos e sujeitos a uma carga vertical uniformemente distribuída. O estudo concluiu que *gridshells* são estruturas sensíveis a imperfeições e que a forma e escala dessas imperfeições tem papel importante na carga crítica.

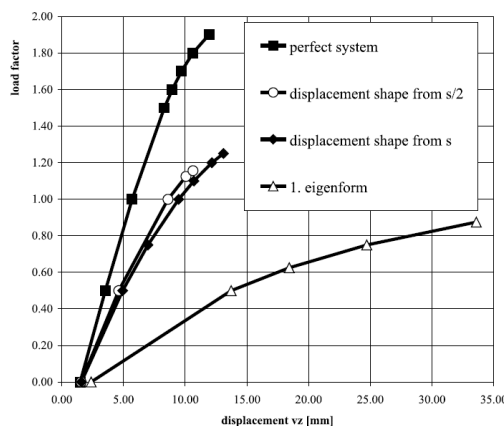
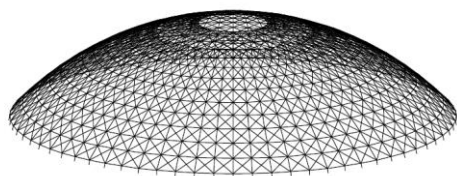


Figura 16 - Curvas carga-deslocamento. [17]

Análises posteriores realizadas por Bulenda [18] avaliaram a influência da discretização dos elementos, bem como a influência da rigidez das conexões da estrutura na sua instabilidade a partir da variação da seção transversal das vigas. O estudo revelou que a discretização dos elementos apresenta pouca influência na

carga de flambagem e que a rigidez dos nós da estrutura apresentou grande influência na instabilidade do *gridshell*. Adicionalmente, López [19] investigou o comportamento de um *gridshell* a partir da modelagem dos conectores da estrutura. Foram realizados ensaios experimentais para as condições da simulação e os resultados foram comparados. Novamente os resultados mostraram a influência da consideração da rigidez das conexões nodais na instabilidade da estrutura.

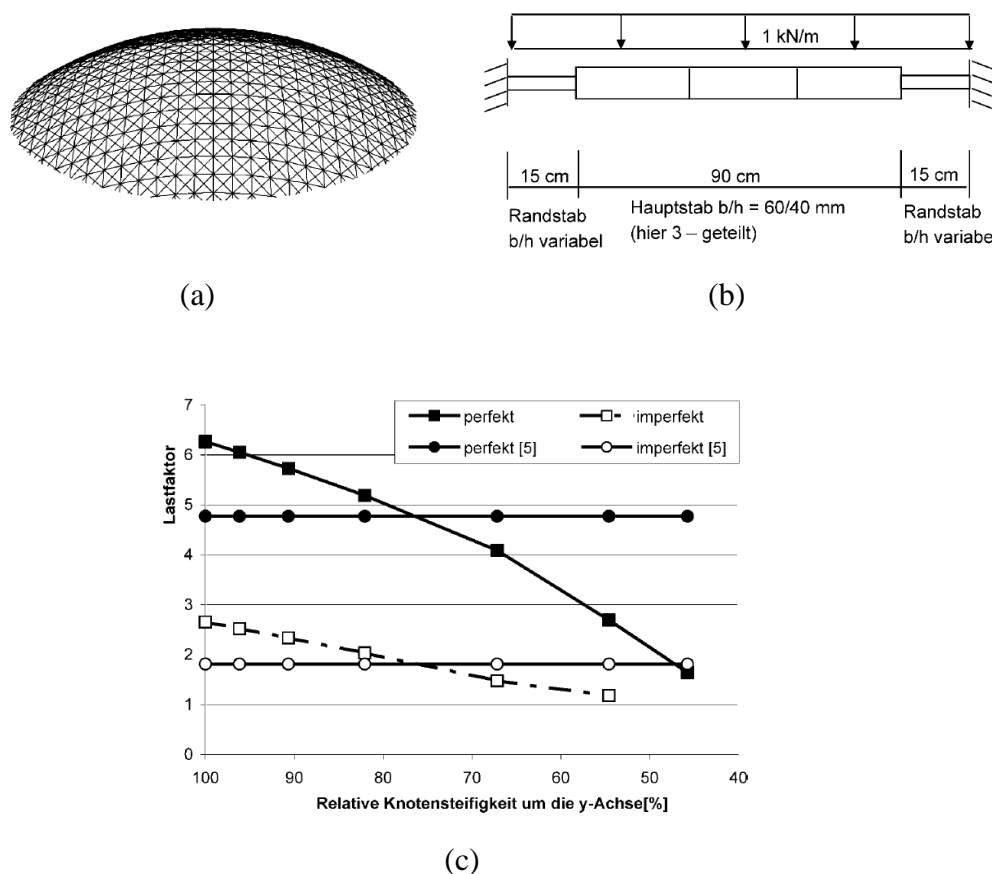


Figura 17 - *Gridshell* (a) modelo (b) Elemento típico (c) Influência da rigidez do nó. [18]

Cai [20] realizou um estudo paramétrico de um *gridshell* parabólico de base elipsoidal enrijecido com cabos. Nesse estudo foram avaliados os efeitos de diferentes parâmetros da topologia como razão altura sobre vão, dimensão da seção das vigas, área e nível de protensão dos cabos e condições de contorno. Foram avaliadas ainda diferentes formas e magnitudes de imperfeições iniciais. Os resultados mostram novamente a sensibilidade desse tipo de estrutura a imperfeições, bem como a existência de um diâmetro ótimo de cabos e o aumento da carga de flambagem com o aumento da razão altura/vão. O autor concluiu, por

fim, que os modos de flambagem da análise linear representam o pior cenário de imperfeições iniciais para um *gridshell*.

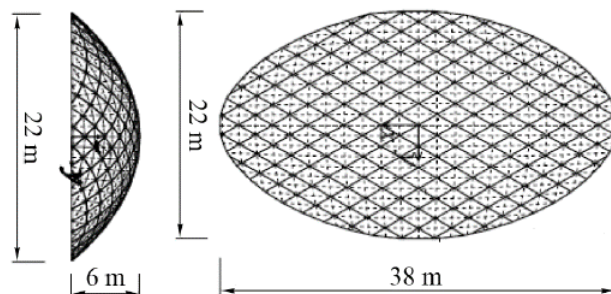


Figura 18 - Modelo estudado por Cai [20]

Li [21] estudou a influência de diferentes *layouts* de cabos, bem como diferentes tipos de nós, níveis de protensão e a variação da seção dos cabos. O autor conclui que o aumento da protensão dos cabos aumenta a carga de flambagem da estrutura até determinado valor, quando passa a não ter mais efeito. Conclui também que diferentes disposições de cabos podem levar mudanças significativas da carga de flambagem do *gridshell*. Por fim, constata que diferentes tipos de nó têm pouca influência na carga crítica de estruturas enrijecidas por cabos, ou seja, a introdução de cabos na estrutura diminui consideravelmente a sensibilidade de *gridshells* à variação de rigidez dos nós.

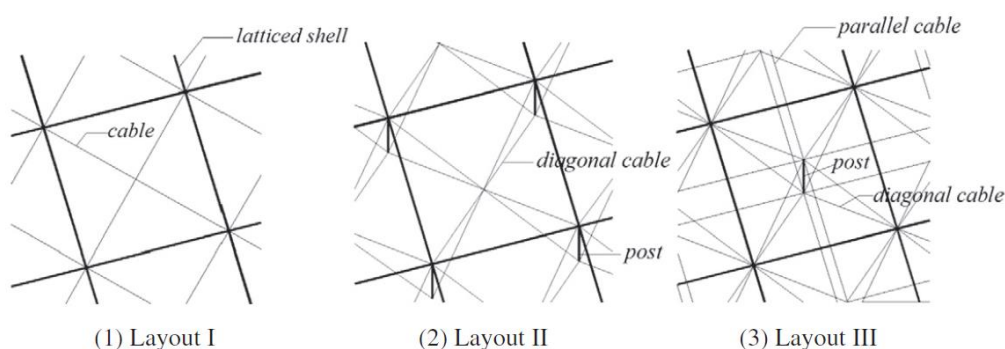


Figura 19 - *Layouts* dos cabos. [21]

Gioncu [22], em seu estado da arte da flambagem de cascas reticuladas, afirma que *gridshells* (especialmente *single-layers gridshells*) apresentam um comportamento não linear importante, com *softening* considerável. Tezcan e Ovunc

[23] afirmam que a inclusão de mudanças na geometria na análise da instabilidade de domos de camada única não é um luxo buscando atingir resultados mais precisos, mas a absoluta necessidade imposta pela natureza própria do fenômeno de flambagem envolvido.

Embora uma análise realística da instabilidade de *gridshells* deva avaliar tanto não linearidade geométrica como física, a consideração de ambos os tipos de não linearidades pode exigir um gasto computacional excessivo. Desse modo, é de interesse do projetista saber qual fonte de não linearidade tem o papel mais importante. A Figura 20 mostra o efeito das não linearidade para diferentes tipologias de *gridshell*, como sugerido por Gioncu [22].

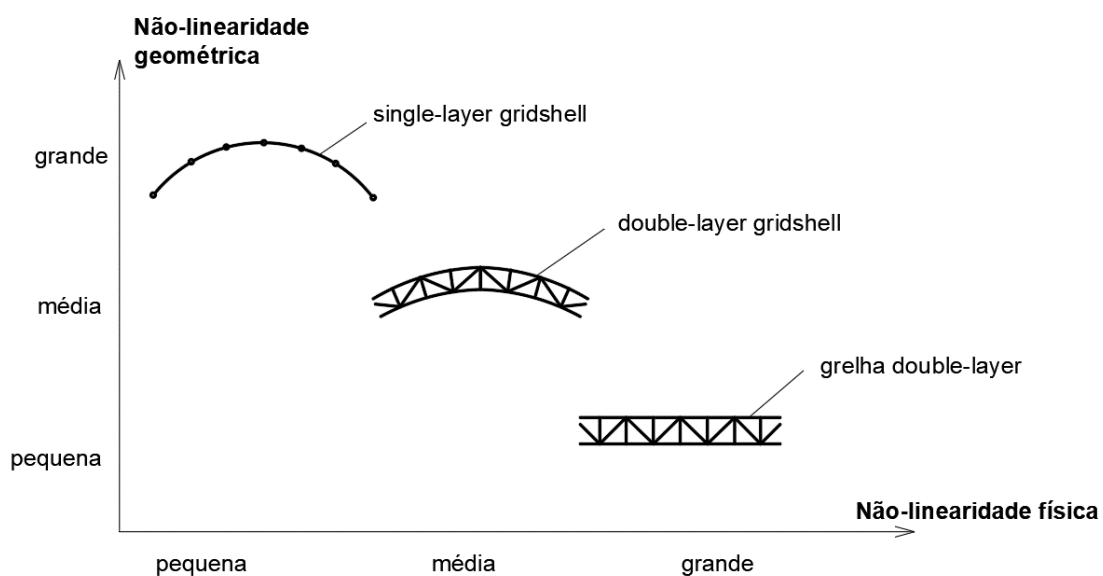


Figura 20 - Efeito das não linearidades. [22] (adaptado)

Portanto, de acordo com Gioncu [22], a influência da não linearidade geométrica para *single-layer gridshells* é grande, enquanto a não linearidade física tem pouca influência. Para grelhas *double-layer* a situação se inverte. A não linearidade geométrica passa a ser pouco influente, enquanto a não linearidade física tem um grande efeito. Para o caso dos *gridshells double-layer* ambas as não linearidades têm efeito importante.

### 3 Fundamentação teórica

Segundo Bazant [24], o colapso de estruturas na engenharia pode ser dividido em duas simples categorias: falha dos materiais ou instabilidade estrutural. No caso da falha dos materiais, o colapso pode normalmente ser previsto a partir da análise da estrutura baseada em condições de equilíbrio para um estado inicial indeformado. Em contrapartida, a previsão de colapso devido à instabilidade requer equações de equilíbrio baseadas na configuração deformada da estrutura. Na prática, o colapso ocorre, em grande parte das estruturas, por um efeito combinado destas duas condições, i.e., a redução da rigidez proveniente de falha dos materiais induz a instabilidade.

Leipholz [25] afirma que a avaliação da estabilidade de um corpo em equilíbrio é realizada por meio de uma perturbação na configuração indeformada. O comportamento do corpo após a perturbação dependerá do tipo de equilíbrio ao qual esse corpo está associado e, portanto, definirá sua estabilidade. A Figura 21 traz as situações de equilíbrio.

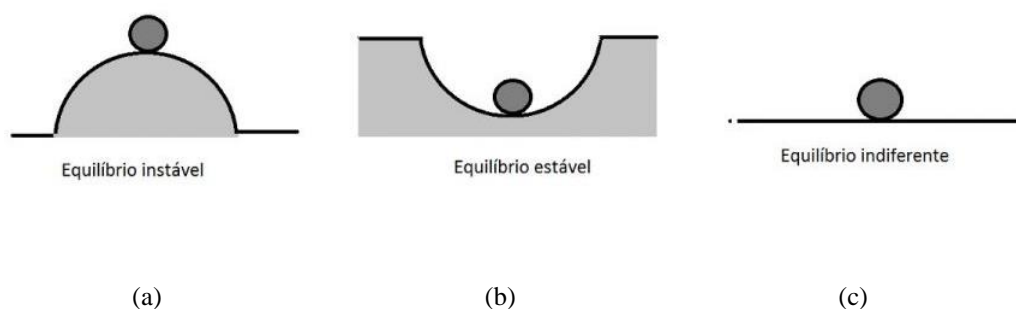


Figura 21 - Tipos de equilíbrio (a) instável (b) estável (c) indiferente. Fonte: Autor

Quando um corpo se encontra em equilíbrio instável (a), uma perturbação retira o corpo da posição de equilíbrio, afastando-o da mesma. No caso de um equilíbrio estável (b), uma perturbação causa um deslocamento do corpo, contudo

a tendência é que esse corpo oscile em torno da posição de equilíbrio até voltar para a posição inicial. Já no caso do equilíbrio neutro ou indiferente, uma perturbação gera um deslocamento e o objeto permanece em equilíbrio em uma nova posição.

O estudo da instabilidade de estruturas teve início com a publicação dos trabalhos de Euler sobre flambagem de colunas, dando origem ao período clássico da teoria de flambagem. O começo da teoria moderna de instabilidade pode ser relacionado a tradução da tese de doutorado de Koiter [26], em que se dedicou ao estudo do efeito de imperfeições iniciais e comportamento pós-crítico das estruturas.

Dentro do contexto atual do uso de *softwares* para análises estruturais, são apresentados alguns pontos chave na abordagem da instabilidade pelo método dos elementos finitos.

No âmbito da formulação com o enfoque computacional, a formulação incremental do método da rigidez é utilizada no estudo do equilíbrio do sistema. As equações de equilíbrio são definidas por:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{f} \quad (3.1)$$

Em que,

$\mathbf{K}_T$  = matriz de rigidez tangente

$\delta \mathbf{q}$  = incremento do vetor de deslocamentos

$\delta \mathbf{f}$  = incremento do vetor de forças aplicadas

A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  pode ser decomposta em:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_U \quad (3.2)$$

Em que,

$\mathbf{K}_E$  = matriz de rigidez elástica;

$\mathbf{K}_G$  = matriz de rigidez geométrica;

$\mathbf{K}_U$  = matriz de rigidez referente à deslocamentos iniciais;

Deve ser mencionado que  $\mathbf{K}_E$  pode ser atualizada com propriedades material a cada passo incremental. Como mencionado, isto mostra que o colapso da

estrutura, na verdade, irá ocorrer, em muitos casos, de forma combinada entre efeitos geométricos e variações de propriedades do material. No caso do problema estático para um sistema conservativo, na condição crítica, podem ocorrer deslocamentos sem incrementos de carga. Sendo assim, a equação (3.1) dá origem a um problema de autovalor não linear, com a matriz de rigidez singular, portanto:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{q}_{cr} = 0 \quad (3.3)$$

Adotando a hipótese de carregamento proporcional tem-se que:

$$\delta \mathbf{f} = \delta \lambda \mathbf{f}' \quad (3.4)$$

Em que,

$\mathbf{f}'$  = vetor básico de cargas;

$\lambda$  = parâmetro de carga;

Sendo assim, a equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$\left[ \mathbf{K}_E + \lambda (\mathbf{K}_G + \mathbf{K}_U) \right] \delta \mathbf{q} = \delta \lambda \mathbf{f}' \quad (3.5)$$

Com a linearização dos deslocamentos e a considerando o caso crítico tem-se:

$$\left( \mathbf{K}_E + \lambda_{cr} \hat{\mathbf{K}}_G \right) \mathbf{q}_{cr} = 0 \quad (3.6)$$

Em que,

$\hat{\mathbf{K}}_G$  = matriz de rigidez geométrica linearizada;

A equação (3.6) representa a flambagem estática de um sistema e corresponde a um problema de autovalor linear generalizado, em que o autovalor  $\lambda_{cr}$  é o parâmetro de carga crítico e o autovetor  $\mathbf{q}_{cr}$  representa o modo de flambagem.

A análise linear é usada para a maioria das estruturas, porém existem estruturas em que essas simplificações não são válidas. Gioncu [22] afirma que para estruturas com *softening response* (a rigidez diminui com o aumento da carga) por

exemplo, a utilização da análise linear não é segura. De modo geral a equação (3.1) pode ser escrita como;

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Nesses casos, é necessária uma solução de um sistema não linear. A Figura 22 ilustra o caminho de equilíbrio para ambos os casos.

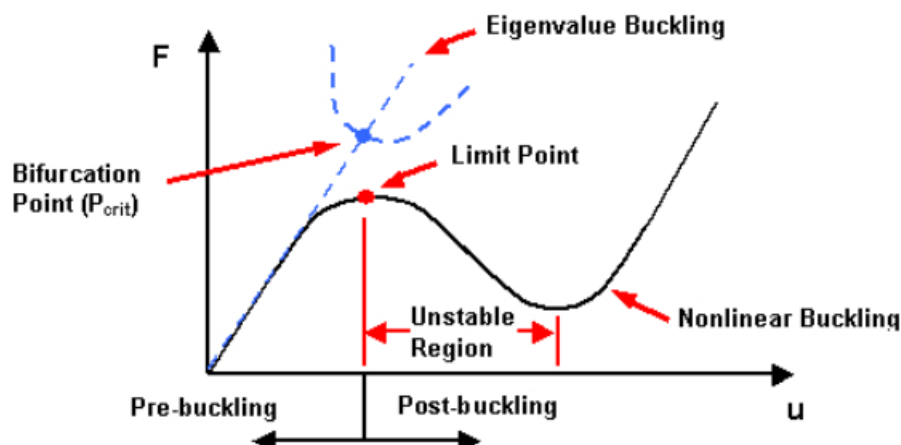


Figura 22 - Caminho de equilíbrio - Análise linear vs análise não linear. [27]

É possível perceber a partir da ilustração como a análise linear de autovalor se difere da análise não linear. Nota-se também como a carga crítica linear pode ser distante da carga correspondente ao ponto limite. Embora a Figura 22 seja uma ilustração, representa bem o comportamento típico de *gridshells* como o estudado nesse trabalho, conforme será visto mais à frente.

Desse modo, são apresentados alguns métodos clássicos para a solução de equações não lineares.

### 3.1. Método Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson consiste basicamente em uma série de aproximações lineares a partir da tangente em um ponto estimado. Considerando o seguinte sistema não linear:



$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{f} \quad (3.8)$$

Em que,  $\mathbf{q}$  é o vetor de variáveis  $\mathbf{f}$  é o vetor de grandezas conhecidas e  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  é o vetor de funções não lineares. No universo da análise estrutural  $\mathbf{q}$  representa os deslocamentos,  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças aplicadas e  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  é o vetor de forças internas, de modo que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_T \cdot \mathbf{q} \quad (3.9)$$

Para a solução do sistema não linear uma estimativa inicial  $\mathbf{q}_0$  é assumida, em seguida encontra-se seu incremento  $\Delta\mathbf{q}$ , de forma que a nova estimativa,  $\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}$ , seja próxima da solução da equação (3.8). Para determinação do incremento, as equações não lineares são localmente aproximadas por retas. Esse processo se repete até as equações originais sejam satisfeitas. Supondo que uma solução aproximada na  $n$ ésima iteração é conhecida e designada por  $\mathbf{q}_n$ . Expandindo  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  em série de Taylor, solução da próxima iteração pode ser aproximada pelo termo de primeira ordem como:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}_{n+1}) \approx \mathbf{P}(\mathbf{q}_n) + \mathbf{K}_{T_n} \cdot \Delta\mathbf{q}_n = \mathbf{f} \quad (3.10)$$

Em que,

$$\mathbf{K}_{T_n} \equiv \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)_n \quad (3.11)$$

é a matriz jacobiana referente à  $n$ ésima iteração, também chamada de matriz de rigidez tangente. Portanto, o objetivo é calcular o incremento  $\Delta\mathbf{q}_n$  e iterativamente corrigir a solução  $\mathbf{q}_{n+1}$ . Desse modo, o sistema linearizado é dado por:

$$\mathbf{K}_{T_n} \cdot \Delta\mathbf{q}_n = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{q}_n) \quad (3.12)$$

Vale ressaltar que o lado direito da equação (3.12) corresponde à diferença entre as forças aplicadas e as forças internas. Essa diferença é comumente denominada resíduo. Após a solução da equação (3.12) para o incremento  $\Delta\mathbf{q}_n$ , a nova aproximação para o deslocamento é dada por:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n \quad (3.13)$$

Em geral, a solução não irá satisfazer o equilíbrio do sistema de maneira exata, de forma que existirá um resíduo de forças não balanceadas. Esse resíduo é dado por:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{q}_{n+1}) \quad (3.14)$$

Para finalizar a análise adota-se um critério de convergência a partir de limitação máxima dos resíduos. A Figura 23 ilustra o procedimento para um sistema de um grau de liberdade.

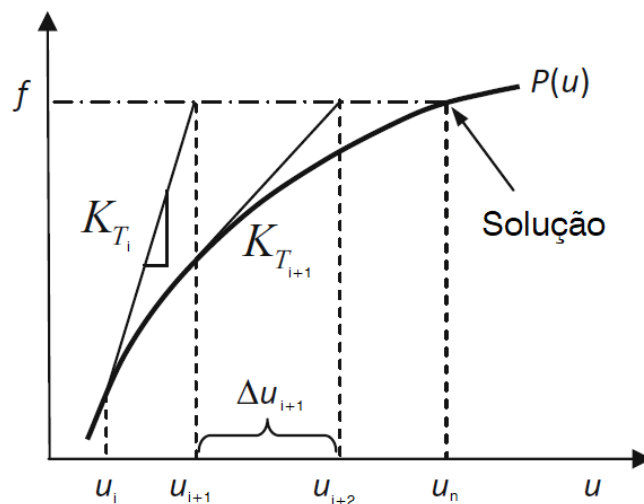


Figura 23 - Método Newton-Raphson. [28] (adaptado)

Uma variação para melhorar a convergência do método é a utilização incrementos de carga menores, que corresponderia a menos iterações para cada incremento de carga. Essa variação é comumente denominada Método Newton-Raphson incremental. Essa variação do método é apresentada na Figura 24.

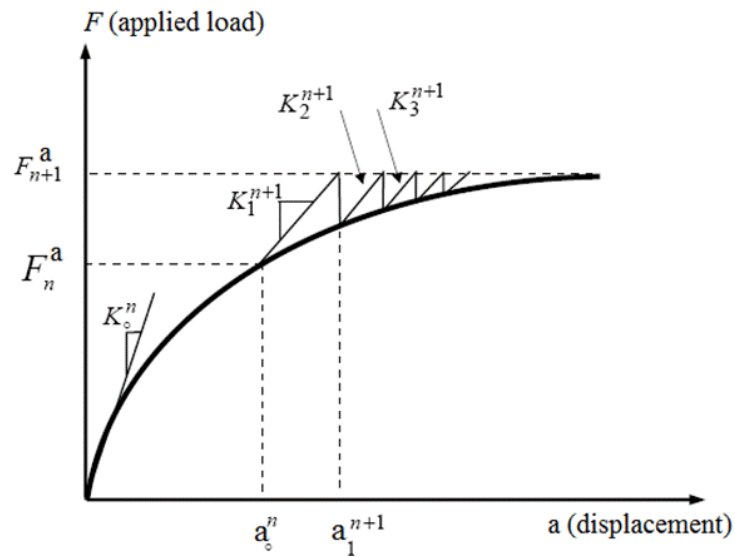


Figura 24 - Método Newton-Raphson incremental. [28] (adaptado)

### 3.2. Newton-Raphson Modificado

O método Newton-Raphson requer que a cada iteração a matriz de rigidez tenha que ser calculada e que o sistema de equações seja resolvido a cada iteração. Isso exige um gasto computacional muito grande. Nesse sentido, o método Newton-Raphson modificado é uma alternativa para diminuir o gasto computacional e melhorar sua convergência. Ao invés de calcular uma nova matriz de rigidez a cada iteração, a matriz de rigidez inicial é usada para todas as iterações. Para melhorar a convergência é possível também utilizar a alternativa incremental do método. A Figura 25 ilustra graficamente o método.

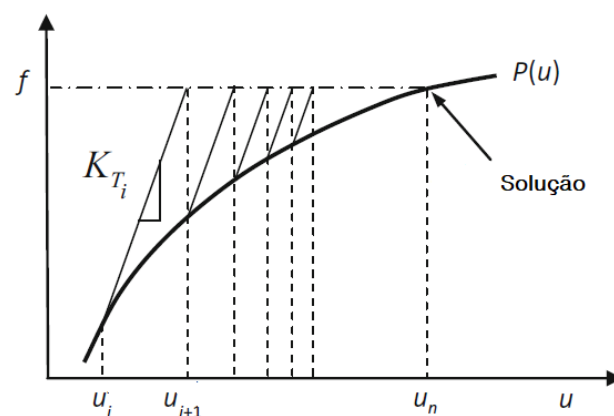


Figura 25 - Método Newton-Raphson modificado [28] (adaptado)

O método de Newton-Raphson é comumente utilizado para solução de equações não lineares e é uma alternativa para solução de problemas de instabilidade. Com cuidado adequado, esse método é uma boa alternativa para o cálculo de cargas críticas e para traçar o caminho de equilíbrio pré-flambagem. Isso porque no ponto limite a matriz de rigidez se torna singular e a análise irá divergir. Para contornar os problemas no ponto limite, bem como estudar o comportamento pós-crítico de uma estrutura, outros métodos são utilizados. Dentre esses destaca-se o método de Riks, método de Ramm e o método de Crisfield.

## 4 Modelagem

### 4.1. Metodologia

O estudo realizado nesse trabalho buscou avaliar o desempenho mecânico de uma estrutura *gridshell*, com ênfase na sua instabilidade. Para tanto, foi realizada uma simulação numérica com elementos finitos por meio do *software* ANSYS [29].

O procedimento teve início com a geração da geometria por meio do *software* de modelagem tridimensional RHINOCEROS 3D [14]. Esse *software* apresenta ferramentas muito úteis na modelagem de estruturas, não apenas na sua geometria, mas também com características mecânicas em alguns casos. Dentre essas ferramentas destaca-se o GRASSHOPPER, já comentado nesse trabalho. O modelo estudado nesse trabalho utilizou o método de superfícies translacionais desenvolvido por Schober [6] para a geração da geometria. Esse método é explicado no item 2.2 deste trabalho.

A geometria final é exportada para o ANSYS, onde todas as análises são realizadas. Foi utilizada a plataforma *Workbench* do ANSYS, com a utilização de alguns comandos do *Mechanical APDL* no modelo.

Nesse trabalho, buscou-se estudar a instabilidade de estruturas tipo *gridshell*, bem como uma breve investigação do seu comportamento dinâmico. Para isso, foi realizada uma análise não linear de instabilidade, considerando não linearidade geométrica da estrutura e não linearidade física dos materiais. Quanto ao comportamento dinâmico, foi realizada uma análise modal, seguida da avaliação do seu comportamento quando sujeita à carga harmônica.

### 4.2. Estudo paramétrico

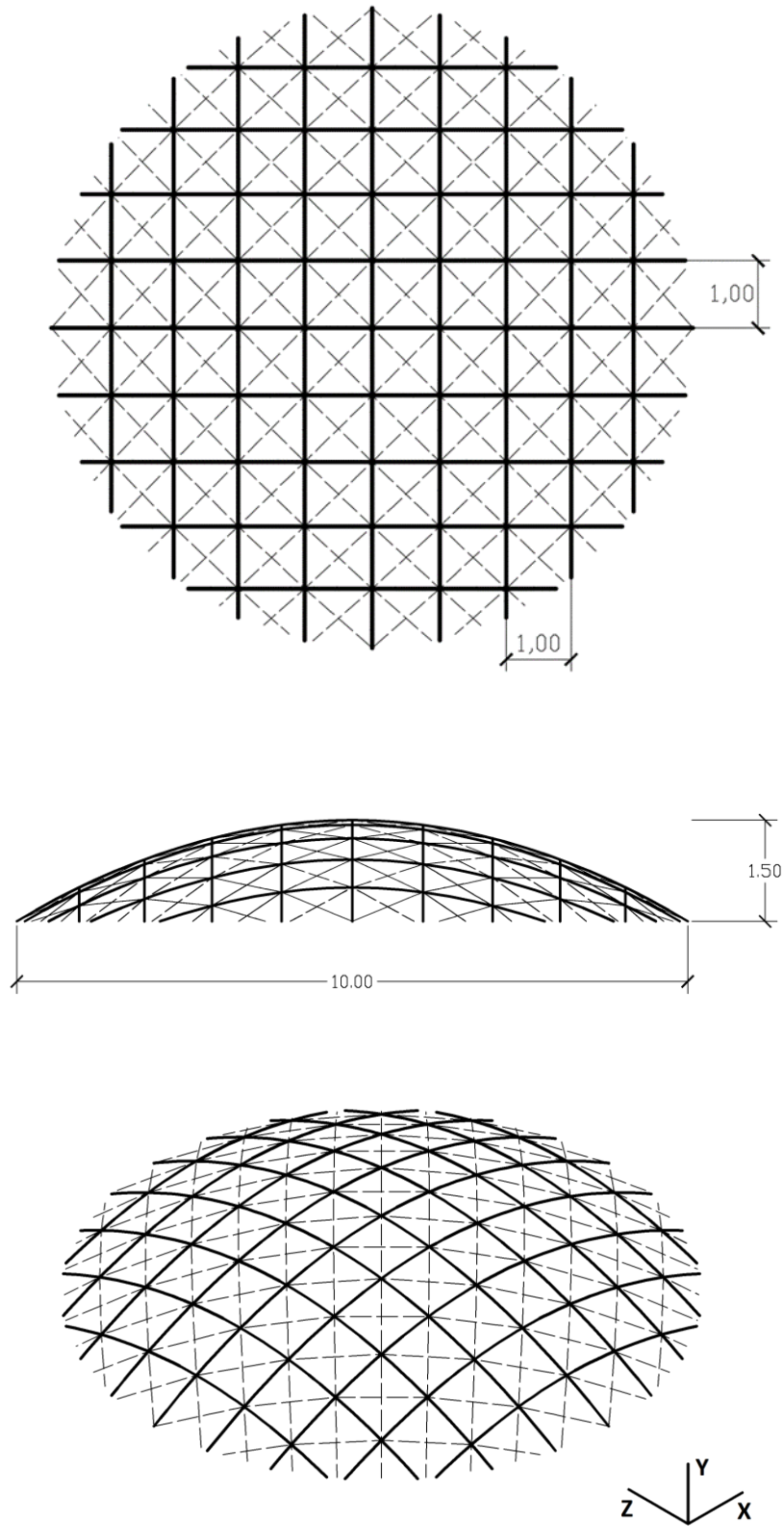
O estudo da instabilidade de estruturas tipo *gridshell* é de fundamental importância, uma vez que a o sistema trabalha majoritariamente a compressão. Sendo assim, a avaliação dos parâmetros que influenciam na flambagem do

*gridshell* se torna muito relevante. Esses parâmetros englobam tanto características geométricas, tais como espaçamento malha, altura, tamanho do vão, mas também características de viés mecânico como presença de cabos, nível de protensão, natureza da carga e magnitude das imperfeições. Parâmetros topológicos foram estudados por Mesnil [8] e Malek [30]. Os parâmetros escolhidos a serem estudados são os parâmetros de viés mecânico, trazendo as seguintes questões a serem esclarecidas:

- i) Qual a influência da presença dos cabos?
- ii) Qual a influência do nível de protensão?
- iii) Como se comporta a estrutura para cargas simétricas e assimétricas?
- iv) Qual a influência de diferentes formas de imperfeição?
- v) Qual a influência da magnitude dessas imperfeições?
- vi) Há influência da não linearidade física dos materiais na instabilidade da estrutura?

#### **4.2.1. Modelo estudado**

O modelo estudado neste trabalho foi um *gridshell* de camada única e base circular. A malha estrutural é quadrangular reforçada diagonalmente por simples disposição de cabos. Como já comentado anteriormente, a geometria do modelo foi concebida a partir da técnica de superfícies translacionais. A geometria do modelo estudado é apresentada na Figura 26.

Figura 26 - Modelo *Gridshell*

O vão da estrutura é de  $d=10\text{ m}$ , sendo a relação altura/vão  $r/d = 0,15$ . A grelha é dividida em módulos de  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ . Os membros principais da estrutura são compostos por vigas de seção tubular de raio interno  $R_i = 26\text{ mm}$  e raio externo  $R_{ext} = 28\text{ mm}$ . Os cabos foram adotados com seção circular de raio  $R_c = 9\text{ mm}$ . O modelo constitutivo adotado para as vigas foi elasto-plástico bi-linear com *hardening* cinemático. O módulo de elasticidade adotado para as vigas foi  $E = 206\text{ GPa}$ , módulo tangente  $E_t = 7000\text{ MPa}$ , tensão de escoamento  $\sigma_y = 345\text{ MPa}$  e  $\nu = 0,3$ . O material dos cabos foi adotado como linear elástico de  $E = 160\text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ . Além disso, o sistema é engastado em suas extremidades. Os nós do sistema foram considerados rígidos.

#### 4.2.2. Aspectos da modelagem

Para os membros principais da estrutura foi utilizado o elemento de viga BEAM 188. Já para os cabos foi utilizado o elemento de barra LINK 180 *tension-only*, simulando o comportamento dos cabos. Na geração da malha de elementos finitos foi adotado um elemento único por cabo, enquanto as vigas foram discretizadas em mais elementos. Após um estudo de convergência, um tamanho final do elemento de  $0,1\text{ m}$  foi adotado.

A modelagem no ANSYS *Workbench* é realizada por meio de uma árvore de diferentes módulos de análise. A Figura 27 mostra a árvore de análise construída para a análise não linear de instabilidade para esse trabalho.

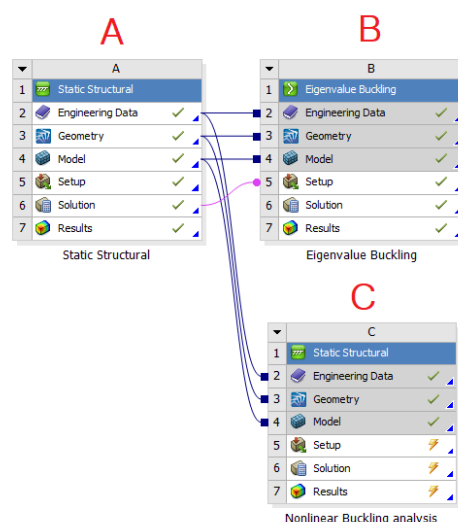


Figura 27 - Árvore de módulos para análise não linear de instabilidade.



**A.** A análise não linear da instabilidade se inicia com o módulo estático, onde são aplicadas as cargas e as condições de contorno do modelo. Nesse passo é aplicada também a protensão nos cabos. O efeito da protensão é feito a partir da inserção de uma tensão inicial nos elementos em questão. No estudo foram considerados também dois tipos de carregamento: simétrico, onde são aplicadas cargas nodais de mesma magnitude uniformemente distribuídas nos nós principais da estrutura (nós onde há cruzamento de vigas) e assimétrica, onde as cargas nodais de um lado da estrutura apresentam o dobro da magnitude em relação ao seu lado oposto. A disposição da aplicação da carga para os dois casos é apresentada na Figura 28.

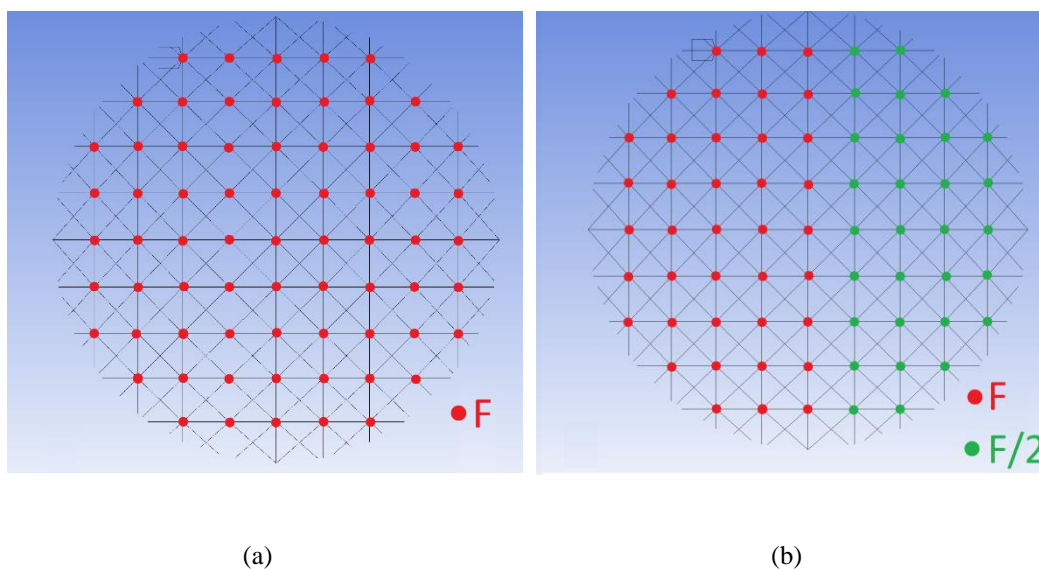


Figura 28 - (a) Carga simétrica e (b) carga assimétrica.

**B.** A seguir é realizada uma análise linear de autovalor. Nesse passo são avaliados os modos de flambagem bem como as cargas críticas lineares.

**C.** O próximo passo é a análise de flambagem não linear propriamente dita. Esse módulo é novamente o módulo de análise estática, contudo, com importantes alterações. A primeira é a consideração de grandes deslocamentos. A segunda é o *input* da geometria deformada gerada no passo B. Essa geometria

deformada é usada como as imperfeições da estrutura, sendo, portanto, a fonte de não linearidade geométrica do modelo. Para isso utiliza-se o comando UPGEOM, que carrega as coordenadas dos nós geradas a partir de um arquivo previamente gerado. Além disso, define-se a magnitude dessas imperfeições. Para a solução não linear do sistema é utilizado o método de Newton-Raphson. A estrutura é carregada incrementalmente até ocorrer a divergência na análise, representando que a flambagem ocorreu na estrutura.

### 4.2.3. Validação das técnicas de modelagem

Como citado no item anterior, algumas técnicas de modelagem foram utilizadas para simular efeitos e comportamentos da estrutura. Sendo assim, foi necessário realizar a validação dessas técnicas, a fim de se obter simulações coerentes fisicamente.

#### 4.2.3.1. Protensão por meio do comando INISTATE

Para inserção de tensões iniciais nos elementos foi utilizado o comando INISTATE. Para validar esse comando como efeito da protensão foi feito um modelo simples de 3 elementos, mostrado na Figura 29.

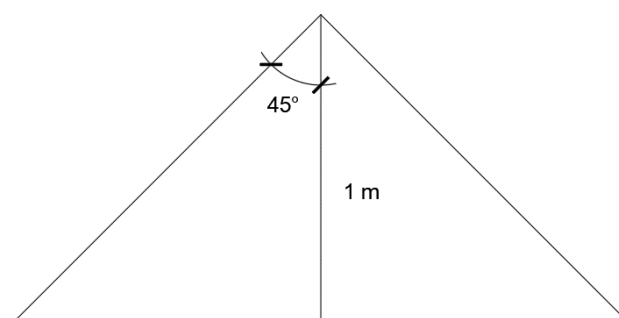


Figura 29 - Modelo para validação do comando INISTATE.

Os elementos em diagonal representam cabos, definidos como elementos de barra tipo LINK 180 *tension-only*, enquanto o elemento vertical foi discretizado

como elemento de viga BEAM188. Aos elementos foi aplicada uma protensão de 10 MPa, o que representa uma força de protensão de 1 kN em cada cabo. A representação dos esforços axiais na estrutura, é apresentada a seguir.

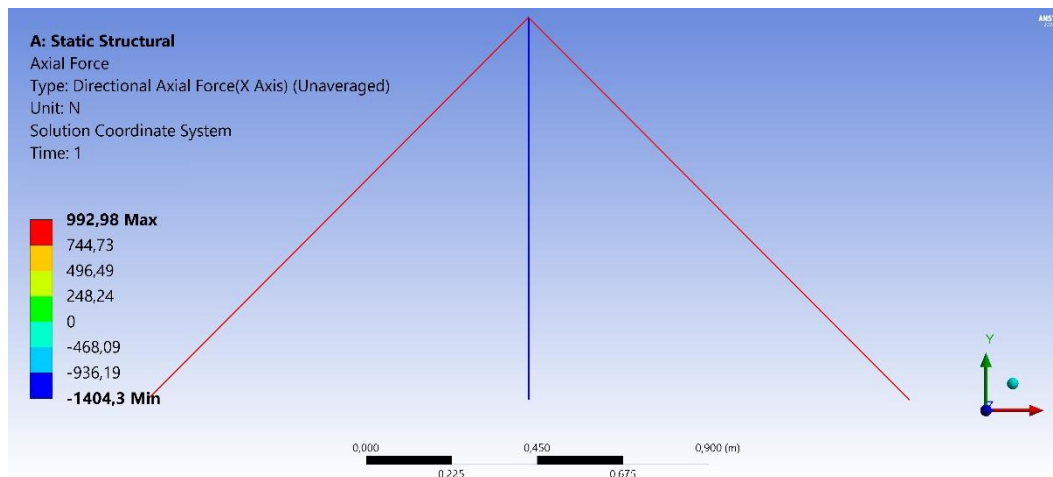


Figura 30 - Esforços axiais devido a protensão.

A Figura 30 mostra uma força de tração 992,98 N nos elementos diagonais e uma força de compressão de 1404,3 N no elemento vertical, o que representa a soma do efeito dos cabos. Isso valida o comando INISTATE para representação da protensão no modelo numérico.

Em seguida foi verificado o comportamento dos elementos diagonais para o funcionamento apenas a tração, simulando o comportamento de um cabo. Para isso foi retirada a protensão desses elementos e foi aplicada uma força de 10 kN na direção do eixo X. A Figura 31 mostra os novos esforços axiais para essa situação.

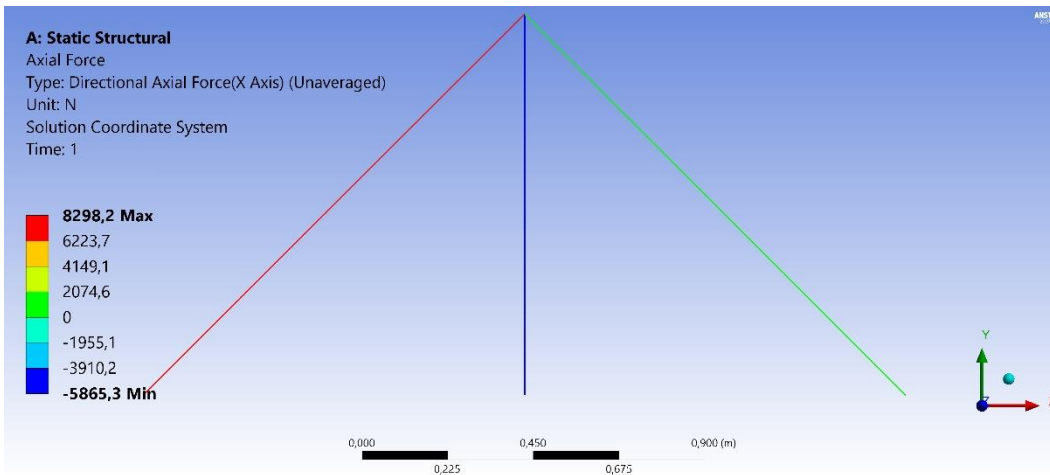


Figura 31 - Esforços axiais para uma força horizontal.

Como esperado, o elemento diagonal do lado direito apresenta esforço axial nulo, uma vez que o mesmo estaria comprimido, o mesmo efeito causado pelo afrouxamento total de um cabo. Portanto, é possível simular o comportamento de cabos com o uso do elemento LINK 180.

#### 4.2.3.2. Flambagem não linear

Para validar o processo descrito no item 4.2.2 foi escolhido o caso clássico da treliça de Von Mises. O problema original consiste em treliça de duas barras apresentado na Figura 32. As barras são consideradas elásticas e a carga de flambagem de Euler de cada elemento é considerada muito grande, de forma que as barras não flambam isoladamente.

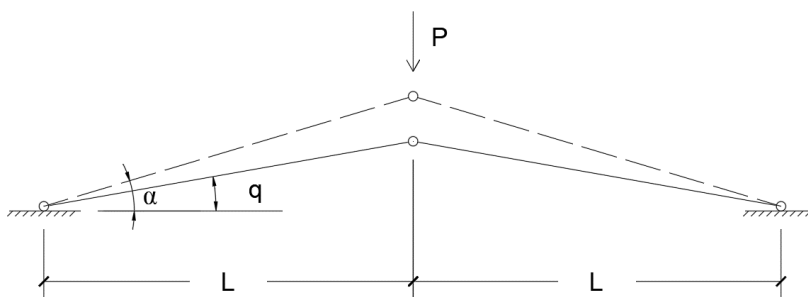


Figura 32 - Treliça de Von Mises

A deformação das barras é

$$\varepsilon = [L \cos(\alpha) / \cos(q) - L] / L \quad (4.1)$$

A energia potencial dada por:

$$\Pi(q) = U - Pw = \frac{EAL}{\cos(q)} \left( \frac{\cos(\alpha)}{\cos(q)} - 1 \right)^2 - PL[\tan(\alpha) - \tan(q)] \quad (4.2)$$

Por diferenciação são obtidas as condições de equilíbrio:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{L}{\cos^2(q)} [2EA(\cos(\alpha) \tan(q) - \sin(q)) + P] = 0 \quad (4.3)$$

Do qual determina-se:

$$P = 2EA[\sin(q) - \cos(\alpha) \tan(q)] \quad (4.4)$$

Fazendo a segunda diferenciação para análise da estabilidade do equilíbrio, temos

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = \frac{2EAL}{\cos^4(q)} [\cos(\alpha) - \cos^3(q)] \quad (4.5)$$

Portanto, a treliça será estável se e somente se a equação (4.5) for positiva, ou seja,  $q > q_0$ , onde,

$$\cos(q_0) = [\cos(\alpha)]^{1/3} \quad (4.6)$$

Com isso a carga crítica limite  $P_{CL}$  é dada por

$$P_{CL} = 2EA \left[ 1 - \cos(\alpha)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (4.7)$$

Os parâmetros adotados foram:

- $\alpha = 10^\circ$ ;
- $E = 200 \text{ GPa}$ ;
- $A = 0,01 \text{ m}^2$ ;

Sendo assim, a carga crítica limite teórica é  $P_{CL} = 4,093 \text{ MN}$ .

A modelagem da treliça é feita de acordo com o procedimento descrito no item 4.2.2 e é apresentada na Figura 33.

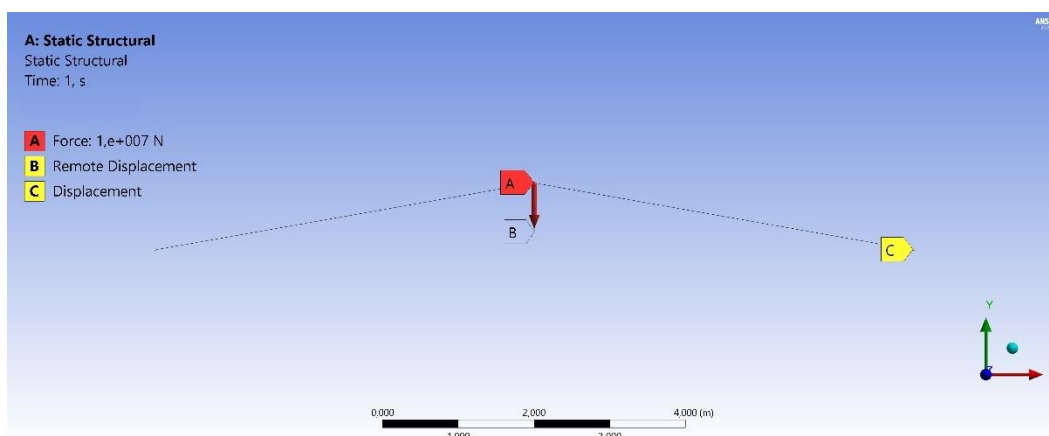


Figura 33 - Modelo da treliça de Von Mises no ANSYS

A carga aplicada foi  $P = 10 \text{ MN}$ . Sendo assim, foi realizado o carregamento de forma incremental até que houvesse a divergência da análise. A Figura 34 apresenta o exato incremento em que a análise divergiu. O eixo tem dimensão de tempo, contudo, esse eixo representa nada mais do que o fator de carga para o carregamento aplicado. Esse fator indica a fração do carregamento que causou a flambagem, nesse caso o *snap-through* da estrutura.

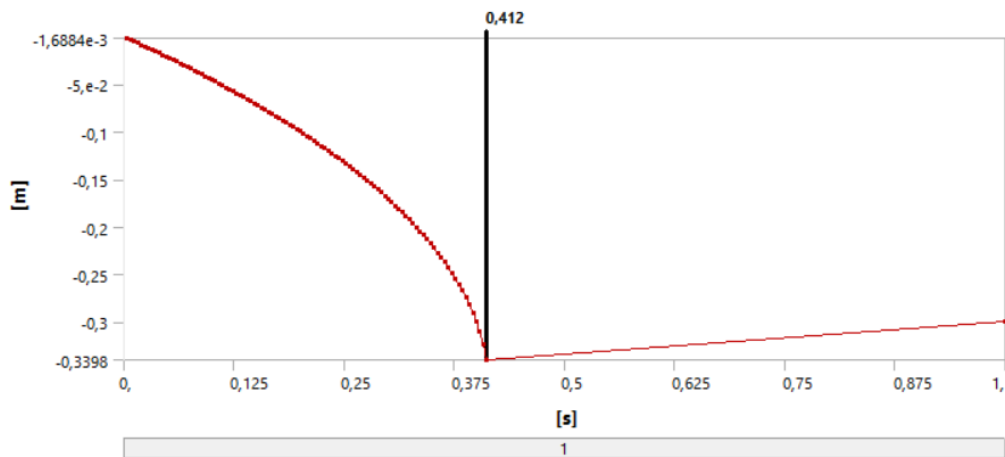


Figura 34 - Divergência da análise da treliça de Von Mises.

Portanto, o valor da carga crítica limite é 41,2% da carga aplicada inicialmente, ou seja,  $P_{CL} = 4,12 \text{ MN}$ . Esse valor representa uma diferença inferior a 1% em relação ao valor teórico, comprovando a validade da modelagem para a flambagem não linear.

## 5 Resultados e discussões

### 5.1. Curva carga-deslocamento

O primeiro passo para o estudo do *gridshell* foi entender seu comportamento no contexto da instabilidade do sistema. Para isso, foi considerado o modelo da Figura 26 sem imperfeições, enrijecido com cabos tensionados com 75 MPa e sujeito à um carregamento simétrico. Foi realizado o processo descrito no item 4.2.2 a fim de traçar o caminho de equilíbrio do sistema. Foi escolhido o ponto de maior deslocamento da análise linear para o desenho da curva. A Figura 35 traz o caminho de equilíbrio encontrado para o modelo em questão.

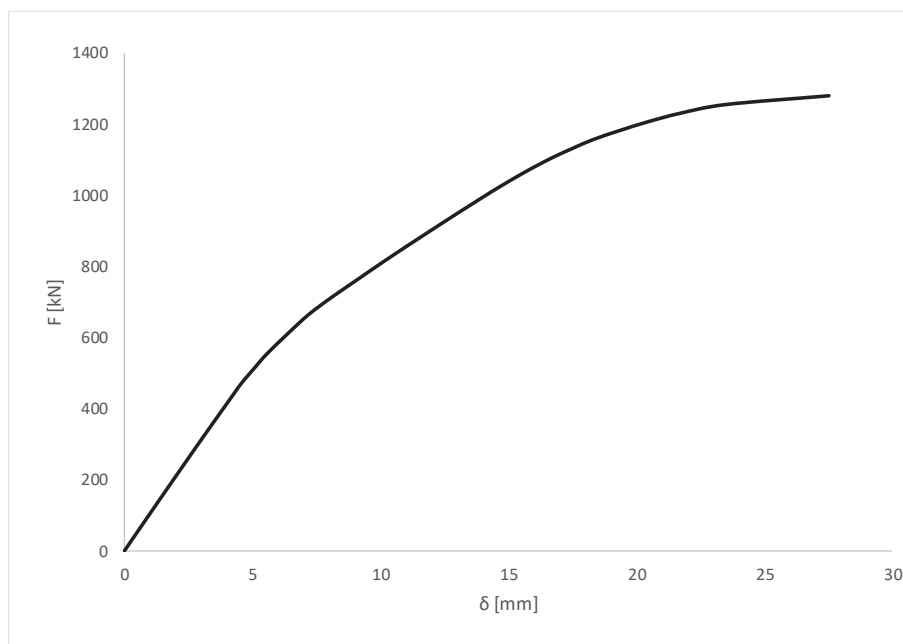


Figura 35 - Curva carga-deslocamento

O eixo vertical representa a força aplicada por nó, enquanto o eixo horizontal representa o deslocamento vertical do ponto em questão. Essa prática irá se repetir ao longo do trabalho para construção dos caminhos de equilíbrio dos modelos.



A primeira observação a ser feita é quanto à extensão do caminho de equilíbrio. A curva termina no ponto limite, não se estendendo ou tomando a forma característica do fenômeno de *snap-through*. Isso porque a análise realizada foi por meio de controle de carga e, portanto, ocorre o salto dinâmico da estrutura. Esse evento caracteriza a ocorrência da flambagem do sistema e pode ser detectado pela divergência da análise. Portanto, o ponto limite será considerado o ponto de falha da estrutura. Neste trabalho esse ponto será referido como ponto crítico limite.

Outro fator que chama a atenção é a mudança de comportamento da estrutura após um certo valor de carga. Nota-se um comportamento praticamente linear a princípio, quando então há uma redução da rigidez do sistema. A verificação do comportamento da estrutura revelou que nesse ponto há uma grande perda da protensão nos cabos, causada pela deformação imposta pelo carregamento externo. Em outras palavras, esse ponto representa o momento em que há o afrouxamento de grande parte dos cabos. Desse modo, esse é um ponto notável na análise desse tipo de estrutura, pois representa a primeira perda de rigidez significativa do sistema. Esse ponto será denominado ponto de afrouxamento.

No caminho de equilíbrio do *gridshell* destacam-se dois pontos de referência para o projeto desse tipo de estrutura. Fazendo uma analogia ao método dos estados limites, o ponto crítico limite é análogo a um estado limite último, enquanto o ponto de afrouxamento é análogo a um estado limite de serviço. A Figura 36 traz o detalhe do caminho de equilíbrio, com destaque para os pontos notáveis.

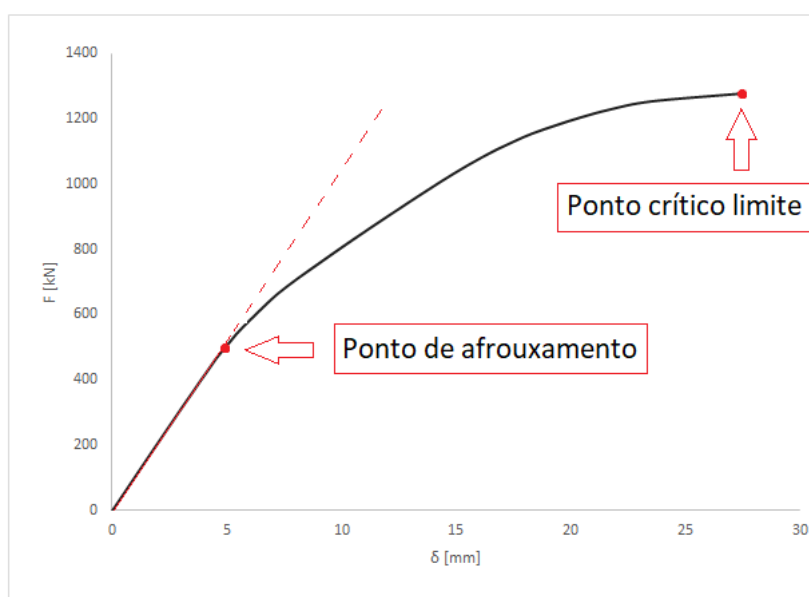


Figura 36 - Curva carga-deslocamento – pontos notáveis

Como forma de auxiliar o entendimento das análises realizadas, a Tabela 1 traz o significado das abreviações de cargas notáveis utilizadas nesse trabalho.

Tabela 1 - Siglas

| Código                     | Significado   |
|----------------------------|---|
| <b>P<sub>A_S</sub></b>     | Carga de afrouxamento – carga simétrica – com cabos   |
| <b>P<sub>CL_S</sub></b>    | Carga crítica limite – carga simétrica – com cabos    |
| <b>P<sub>A_AS</sub></b>    | Carga de afrouxamento – carga assimétrica – com cabos |
| <b>P<sub>CL_AS</sub></b>   | Carga crítica limite – carga assimétrica – com cabos  |
| <b>P<sub>CL_S.S</sub></b>  | Carga crítica limite – carga simétrica – sem cabos    |
| <b>P<sub>CL_S.AS</sub></b> | Carga crítica limite – carga assimétrica – sem cabos  |

## 5.2. Influência da presença dos cabos e natureza da carga

A primeira análise do estudo paramétrico consistiu em avaliar o comportamento do *gridshell* com a presença dos cabos. Para tanto, uma tensão de protensão  $\sigma_p = 75$  MPa foi adotada para os cabos nessa análise. Além disso, foram considerados os casos de carregamentos simétrico e assimétrico. A estrutura foi modelada sem imperfeições. A Figura 37 traz os modos de flambagem da estrutura para o caso simétrico.

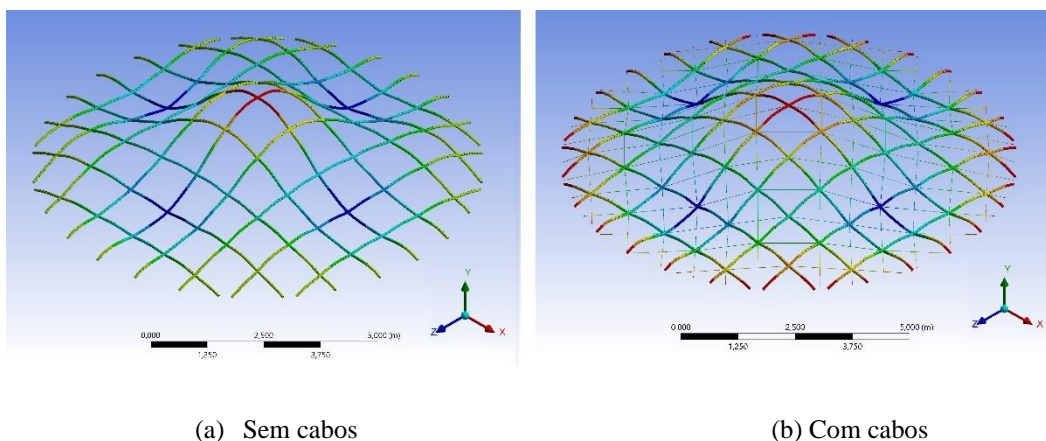


Figura 37 – Modo de flambagem para uma carga simétrica (fator de escala = 29)

É possível notar que a presença dos cabos para o caso de carregamento simétrico não altera o modo de flambagem da estrutura. Contudo, a presença dos cabos gera um ganho de rigidez perceptível, com deslocamentos menores e mais suaves. Em seguida foi avaliado o mesmo efeito para a carga assimétrica na estrutura. A Figura 38 apresenta os modos de flambagem para o carregamento assimétrico.

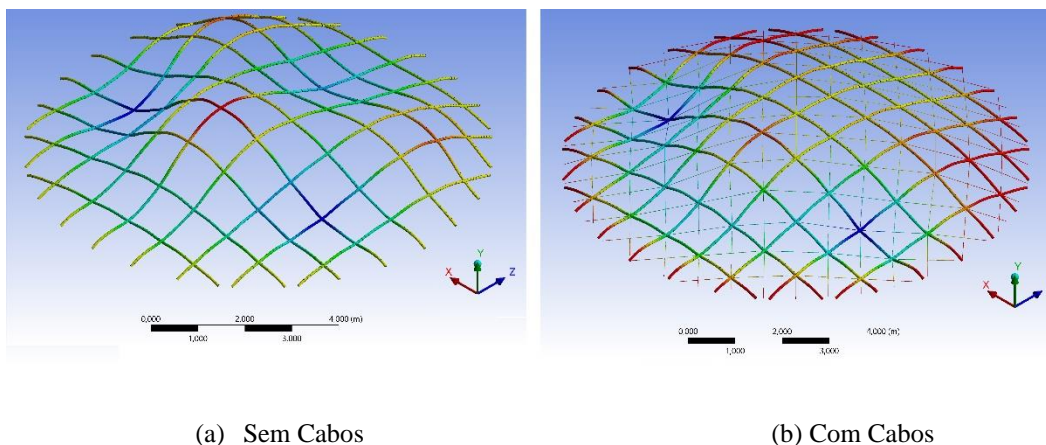


Figura 38 - Modo de flambagem para carga assimétrica (fator de escala = 29)

Diferentemente do que ocorreu no caso simétrico, no carregamento assimétrico há uma alteração no modo de flambagem da estrutura com a presença dos cabos. Enquanto no modelo sem cabos observam-se deformações globais e contínuas, no modelo com cabos notam-se deformações locais, aparentando ser *snap-through* de dois nós. Mais uma vez é possível notar como o sistema ganha rigidez com os cabos.

Para aferir de maneira mais metódica a diferença desses casos foi traçada a curva de carga-deslocamento de cada caso.

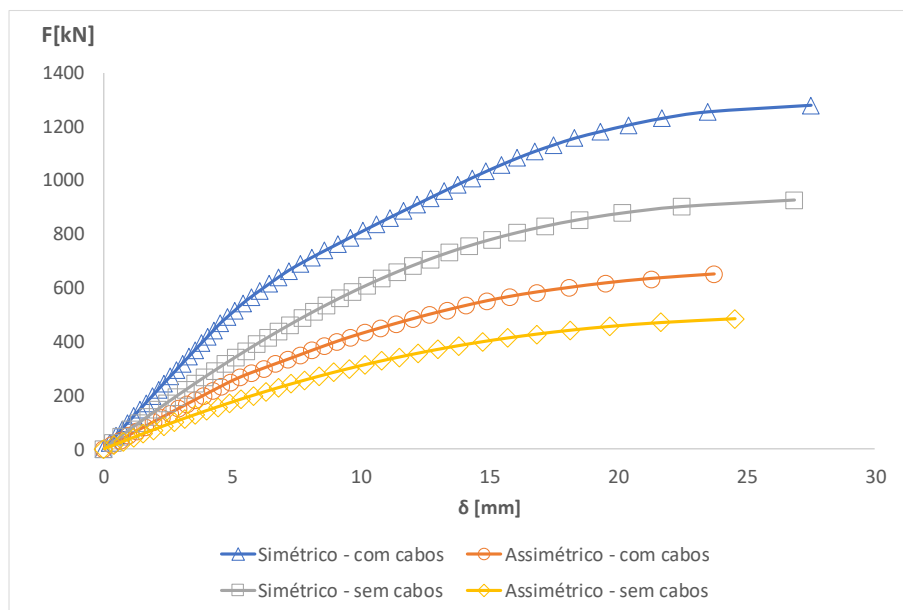


Figura 39 - Curva carga-deslocamento com e sem cabos/ carga simétrica e assimétrica

A Figura 39 traz o comportamento do ponto de máximo deslocamento vertical para cada um dos casos. A força representada no eixo y é referente a carga aplicada em cada nó.

O primeiro fato que chama a atenção é como a assimetria de carga diminui a carga crítica limite da estrutura. Para o caso de carregamento simétrico com cabos, a carga crítica limite foi  $P_{CL_S} = 1280,10$  kN, enquanto para o caso assimétrico com cabos foi  $P_{CL_{AS}} = 650,10$  kN. Quando analisado para os modelos sem cabos essa discrepância se mantém, sendo  $P_{CL_{S.S}} = 926,82$  kN e  $P_{CL_{S.AS}} = 500,01$  kN. Isso representa uma redução de cerca de 50% da carga crítica limite da estrutura quando sujeita a um carregamento assimétrico.

Outro aspecto a ser observado é o efeito da presença dos cabos. Nota-se um aumento da carga crítica limite com a presença dos cabos. Embora em ambos os casos de carregamento ocorra o ganho esperado na carga crítica limite, no caso do carregamento assimétrico, esse ganho é um pouco inferior ao caso simétrico. Para o carregamento simétrico houve um ganho de cerca de 38% com a presença dos cabos, enquanto para o assimétrico esse ganho foi de 30%. A Tabela 2 resume as cargas notáveis dessa investigação.

Tabela 2 - Resumo das cargas notáveis

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| <b>P<sub>A,S</sub></b>     | 446,34 kN  |
| <b>P<sub>CL,S</sub></b>    | 1280,10 kN |
| <b>P<sub>A,AS</sub></b>    | 283,33 kN  |
| <b>P<sub>CL,AS</sub></b>   | 650,10 kN  |
| <b>P<sub>CL,S,S</sub></b>  | 926,82 kN  |
| <b>P<sub>CL,S,AS</sub></b> | 500,01 kN  |

Sendo assim é possível apontar que a utilização de cabos tem um efeito muito favorável na estabilidade de *gridshells*. Há um esperado ganho de rigidez do sistema, que traduz um aumento da carga crítica limite. É preciso destacar também o efeito da assimetria de carga no comportamento do sistema. Com e sem a presença de cabos, o carregamento assimétrico reduziu consideravelmente as cargas críticas limite da estrutura. Esse efeito se repetiu para a carga de afrouxamento nos modelos com cabos. Consequentemente, pode-se concluir a existência de uma sensibilidade da estrutura quanto a assimetria de cargas.

Em seguida foram avaliadas as tensões nos elementos. Para isso foram investigadas a combinação das tensões de flexão e axiais dos elementos no ponto limite das estruturas, para os sistemas com e sem cabos sob um carregamento simétrico.

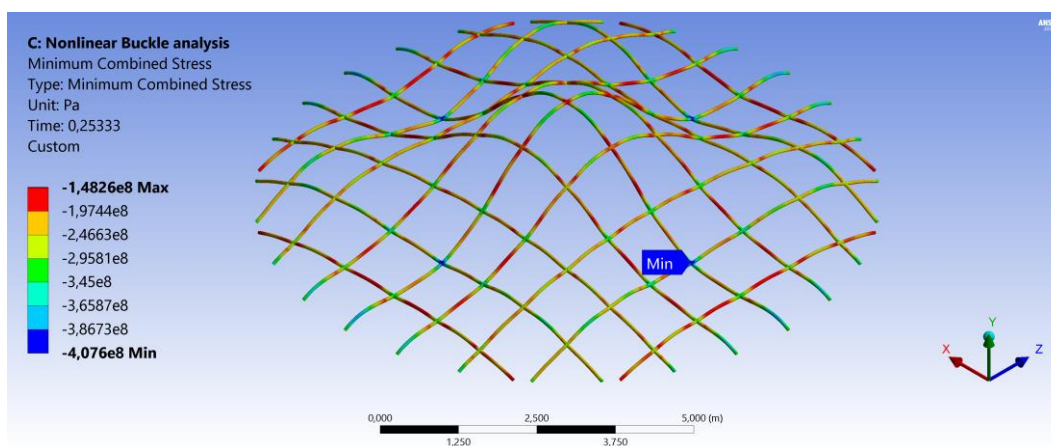


Figura 40 - Tensões combinadas de compressão para o sistema sem cabos

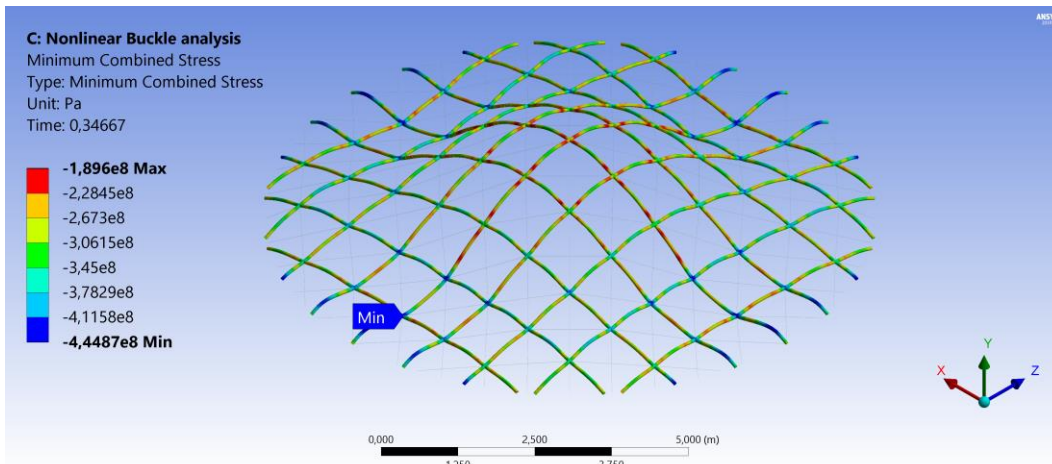


Figura 41 - Tensões de compressão combinadas para o sistema com cabos

A análise das Figuras 40 e 41 mostram que há plastificação em diversos pontos isolados dos sistemas com e sem cabos. As maiores tensões se concentraram nos nós da grelha, em especial nos pontos de maior deslocamento vertical. Para determinar o efeito dessas plastificações na instabilidade dos sistemas, voltou-se mais uma vez a atenção para as curvas de carga-deslocamento de ambos os casos.

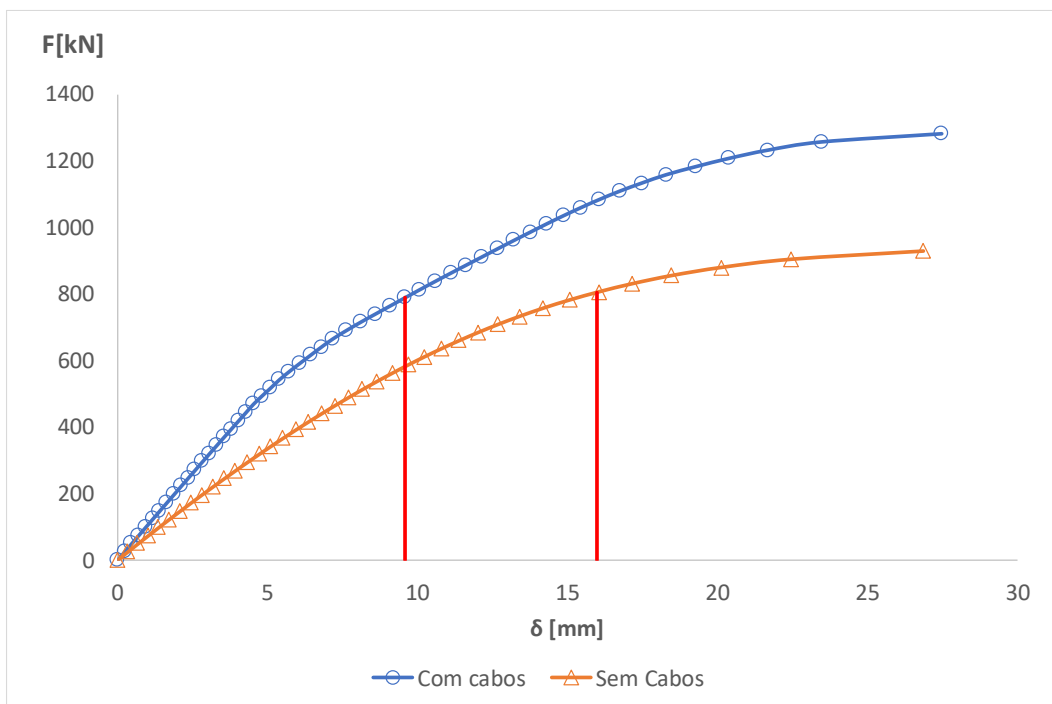


Figura 42 - Detalhe do caminho de equilíbrio para os modelos com e sem cabos

A Figura 42 traz o detalhe do momento da primeira plastificação em cada um dos modelos. Nota-se que, diferentemente do ponto de afrouxamento, não há uma perda de rigidez notável a partir do ponto da primeira plastificação ou até mesmo nos pontos seguintes. As curvas mantiveram suas tendências de trajetória, não apresentando variações, como é o caso do efeito do afrouxamento dos cabos. Esse fato sugere, a priori, que não existe uma influência direta da plastificação na flambagem do sistema.

### 5.2.1. Influência do nível de protensão dos cabos

Como demonstrado, há um efeito favorável na estabilidade de *gridshells* com presença de cabos no sistema. Desse modo, todas as próximas análises serão de modelos com cabos.

A utilização dos cabos, embora benéfica, ainda apresenta pontos a serem esclarecidos, qual o nível de protensão que deve ser adotado e como esse nível de protensão pode influenciar na sua instabilidade. Para esclarecer esses pontos, foi realizada uma análise para diferentes níveis de protensão, com  $\sigma_P$  variando de 0 a 150 MPa. A análise foi realizada para o carregamento simétrico. A Figura 43 apresenta o comportamento da carga crítica limite para cada nível de protensão.

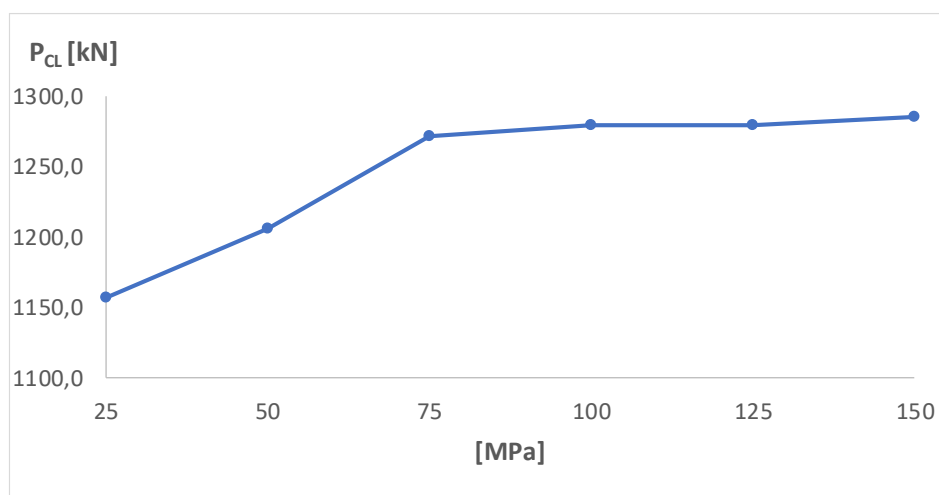


Figura 43 - Carga crítica limite vs tensão de protensão dos cabos

Nota-se que carga crítica limite cresce com o aumento da protensão e então se estabiliza. Após um certo nível não há alteração significativa na carga crítica

limite. Isso indica a existência de um nível de protensão desejado, ao qual a carga crítica limite seja máxima.

Analisou-se então como se comporta a carga de afrouxamento com a variação do nível de protensão.

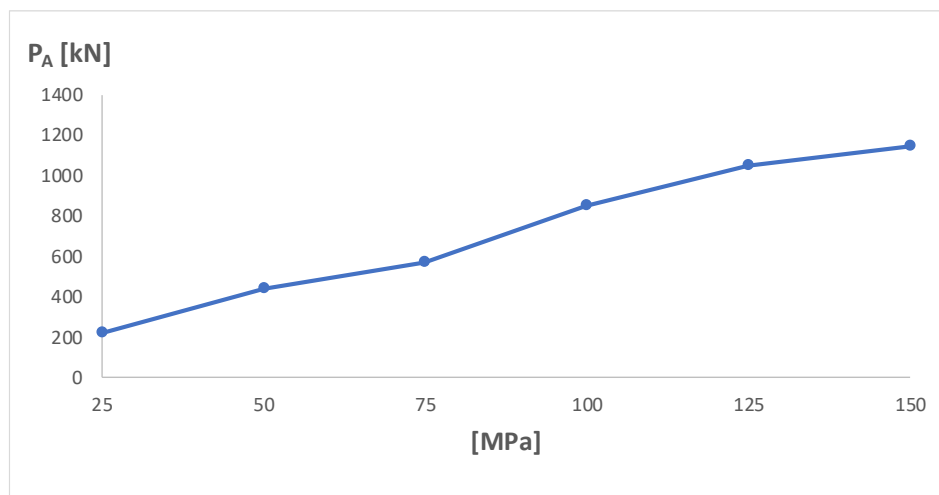


Figura 44 - Carga de afrouxamento vs tensão de protensão dos cabos

A Figura 44 mostra que há um crescimento proporcional da carga crítica inicial com o aumento da protensão dos cabos, quanto maior a protensão, maior a carga de afrouxamento.

Desse modo, a escolha do nível de protensão da estrutura pode ser tida como um balanço entre a carga de afrouxamento e a carga crítica limite. Com um nível de protensão abundante, a estrutura pode atingir o ponto limite antes que haja uma perda significativa da protensão. Contudo, essa é uma abordagem antieconômica e talvez excessivamente conservadora. A escolha do nível de protensão requer uma ponderação de múltiplos fatores, como segurança, custo e desempenho, sendo a escolha desse parâmetro um importante fator na concepção da estrutura. No caso deste trabalho, todos os modelos foram concebidos com protensão  $\sigma_p = 75$  MPa.

### 5.3. Sistemas imperfeitos

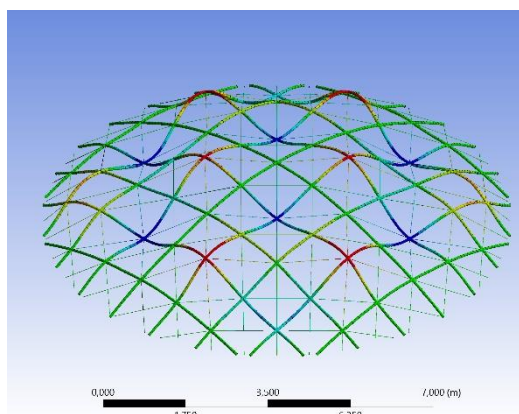
Até esse momento, as análises foram feitas para modelos sem imperfeições. Portanto, o próximo estudo realizado visou apreciar o comportamento do *gridshell* quando sujeito a imperfeições iniciais. Essas imperfeições foram escolhidas



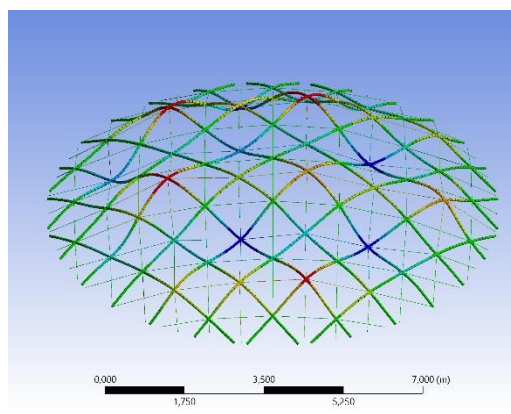
supondo os piores cenários. Sendo assim, foram adotados os dez primeiros modos de flambagem linear como imperfeições iniciais. A máxima imperfeição geométrica foi definida com referência ao vão da estrutura, sendo o valor de  $d/300$  o escolhido para esse procedimento. Logo, a imperfeição máxima corresponde a 0,033 m. Essa análise foi realizada tanto para o carregamento simétrico como para o carregamento assimétrico. Por fim, foram traçadas as curvas de carga-deslocamento para cada caso. Cada curva traçada representa o caminho de equilíbrio do ponto de maior deslocamento vertical em cada caso.

### 5.3.1. Carregamento simétrico

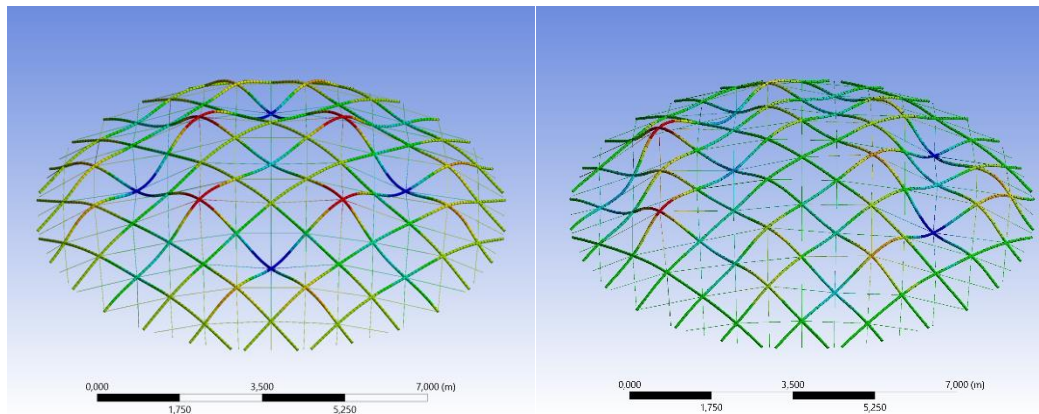
A Figura 45 traz 4 modos de flambagem da análise linear para o carregamento simétrico de maneira a ilustrar a forma de algumas das imperfeições usadas. Todos os modos de flambagem estão no Apêndice 1 desse trabalho. Em seguida são apresentados os valores de carga crítica para os dez primeiros modos da análise de autovalor.



(a) 1º Modo de flambagem



(b) 2º Modo de flambagem



(c) 4° Modo de flambagem

(d) 5° Modo de flambagem

Figura 45 - Modos de flambagem análise linear – carregamento simétrico

Tabela 3 - Cargas críticas da análise linear – carregamento simétrico

| Modos de flambagem | Pcr [kN] |
|--------------------|----------|
| 1                  | 3658,5   |
| 2                  | 3702,4   |
| 3                  | 3702,4   |
| 4                  | 3721,4   |
| 5                  | 3782,5   |
| 6                  | 3782,5   |
| 7                  | 3813,3   |
| 8                  | 3869,5   |
| 9                  | 3874,3   |
| 10                 | 3874,3   |

Para entender o comportamento da estrutura quando sujeita a essas imperfeições foram traçadas as curvas de carga-deslocamento para cada imperfeição.

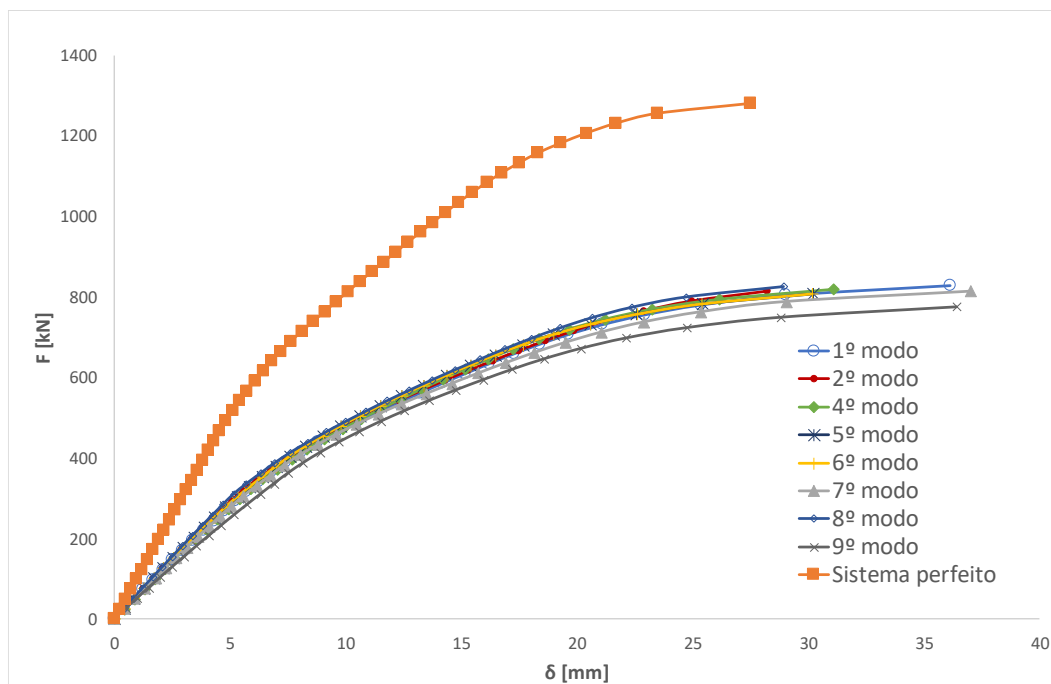


Figura 46 - Curva-Carga deslocamento para sistemas com modos de flambagem como imperfeições iniciais - carregamento simétrico

A Figura 46 traz as curvas de carga-deslocamento para diferentes casos de imperfeição inicial. O primeiro ponto a ser destacado é em relação à sensibilidade da estrutura a imperfeições. Há uma perda de rigidez significativa da estrutura para a existência de imperfeições. Conseqüentemente, a carga crítica limite se reduz de maneira considerável. Enquanto para o sistema perfeito a carga crítica limite foi de 1280,1 kN por nó, os modelos com imperfeições iniciais tiveram carga crítica limite em torno de 820 kN por nó. Isso representa uma redução de quase 40% na carga crítica limite. Portanto, pode-se afirmar que a estrutura é sensível a imperfeições.

Outra importante conclusão é em relação a forma da imperfeição. Nota-se que diferentes tipos de imperfeições iniciais causam praticamente o mesmo efeito na estrutura. Isso é notável pela proximidade entre as curvas. Nota-se também que as menores cargas críticas limite não ocorrem necessariamente para os primeiros modos como imperfeição inicial. A menor carga crítica limite ocorre, nesse caso, para a forma do 9º modo como imperfeição inicial.

A análise da Figura 46 também revela um comportamento já discutido anteriormente, acerca da perda de rigidez a partir do afrouxamento dos cabos. É possível perceber a mudança de comportamento tanto para o sistema perfeito, quanto para os sistemas imperfeitos, embora esse efeito pareça ser mais presente no

sistema perfeito. A Figura 47 destaca esse efeito, trazendo o detalhe do sistema sujeito ao 7º modo de flambagem como imperfeição inicial.

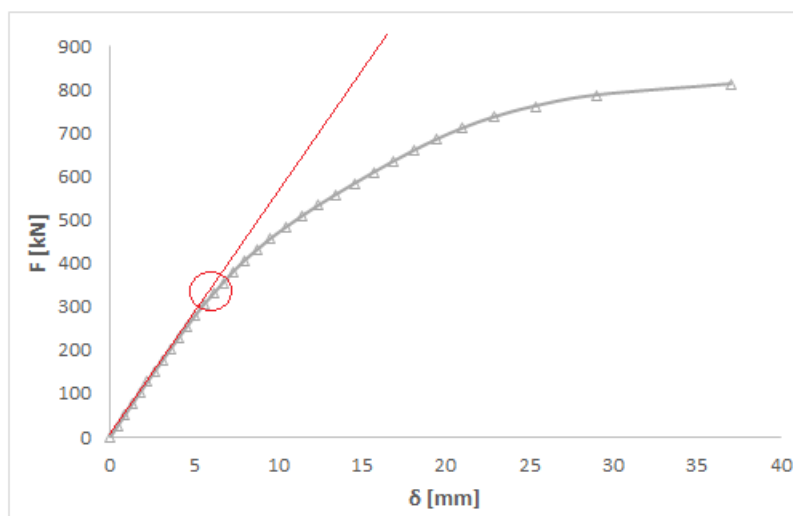


Figura 47 - Curva carga-deslocamento para 7º modo de flambagem como imperfeição inicial – carregamento simétrico

Quando analisado o comportamento do sistema da figura anterior é notável a perda de rigidez a partir do ponto destacado. O sistema apresenta um comportamento quase linear, quando passa a apresentar maiores deslocamentos para os mesmos incrementos de carga.

Para entender melhor o efeito das imperfeições nas cargas notáveis, a Tabela 4 resume as cargas críticas, cargas limites e cargas de afrouxamento.

Tabela 4 - Cargas notáveis para diferentes formas de imperfeição inicial - carregamento simétrico

| Imperfeição inicial     | Carga crítica (linear) [kN] | Carga crítica limite [kN] | Carga de afrouxamento [kN] |
|-------------------------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| <b>Sistema perfeito</b> | -                           | 1280,10                   | 446,34                     |
| <b>1º modo</b>          | 3658,5                      | 841,46                    | 414,63                     |
| <b>2º modo</b>          | 3702,4                      | 836,74                    | 419,61                     |
| <b>3º modo</b>          | 3702,4                      | 836,74                    | 419,61                     |
| <b>4º modo</b>          | 3721,4                      | 833,59                    | 421,76                     |
| <b>5º modo</b>          | 3782,5                      | 824,59                    | 428,68                     |
| <b>6º modo</b>          | 3782,5                      | 824,59                    | 428,68                     |
| <b>7º modo</b>          | 3813,3                      | 816,05                    | 432,17                     |
| <b>8º modo</b>          | 3869,5                      | 835,81                    | 438,54                     |
| <b>9º modo</b>          | 3874,3                      | 782,61                    | 439,09                     |
| <b>10º modo</b>         | 3874,3                      | 782,61                    | 439,09                     |

Deve ser destacada também a discrepância entre as cargas críticas limite e as cargas críticas lineares. As cargas correspondentes aos dez primeiros modos de flambagem tiveram valores em torno de 3700 kN e as cargas críticas limite encontradas tiveram valores em torno de 820 kN. Essa discrepância reflete o fato de que *gridshells* são estruturas altamente não lineares e que a análise linear de autovalor não deve ser usada no estudo da instabilidade dessas estruturas.

De modo geral, o sistema se mostrou bastante sensível a imperfeições, todavia, a forma da imperfeição mostrou ter pouca influência no comportamento e nas cargas notáveis.

Em seguida foram verificadas as tensões na estrutura. Dentre todos os modelos imperfeitos, o modelo com imperfeições iniciais correspondentes ao 1º modo de flambagem foi o que apresentou as maiores tensões no ponto limite. Por esse motivo, esse será o modelo usado para exemplificar o procedimento de investigação da influência da plastificação na flambagem do *gridshell*. A Figura 48 traz as tensões combinadas de compressão no ponto limite da estrutura.

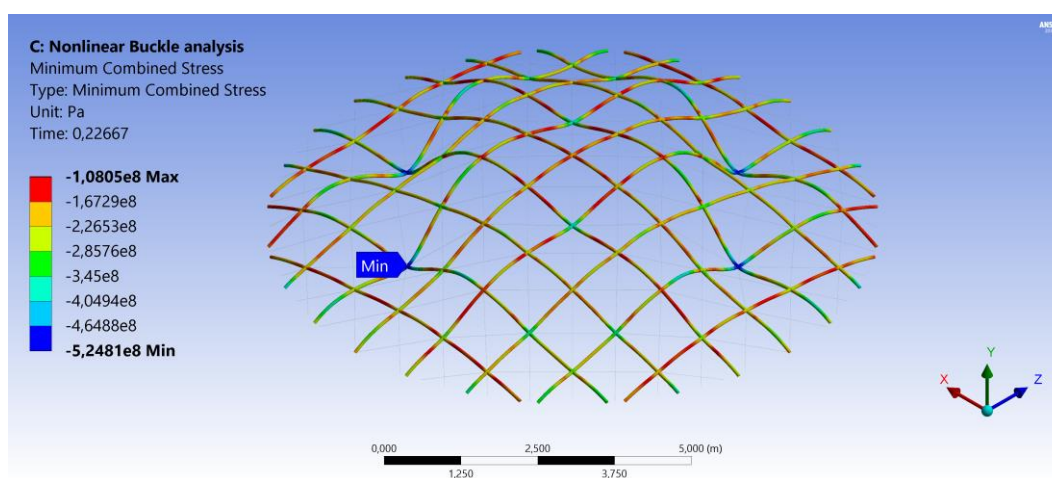


Figura 48 - Tensões combinadas de compressão para o sistema com imperfeições iniciais do 1º modo de flambagem

Como mostra a Figura 48, a máxima tensão encontrada foi uma tensão de compressão de aproximadamente 524 MPa, incluindo diferentes pontos com tensões superiores a tensão de escoamento do material. Os pontos de plastificação ocorreram majoritariamente nos nós do sistema. Para investigação do efeito da plastificação na flambagem da estrutura foi analisado seu caminho de equilíbrio, a partir da primeira plastificação.

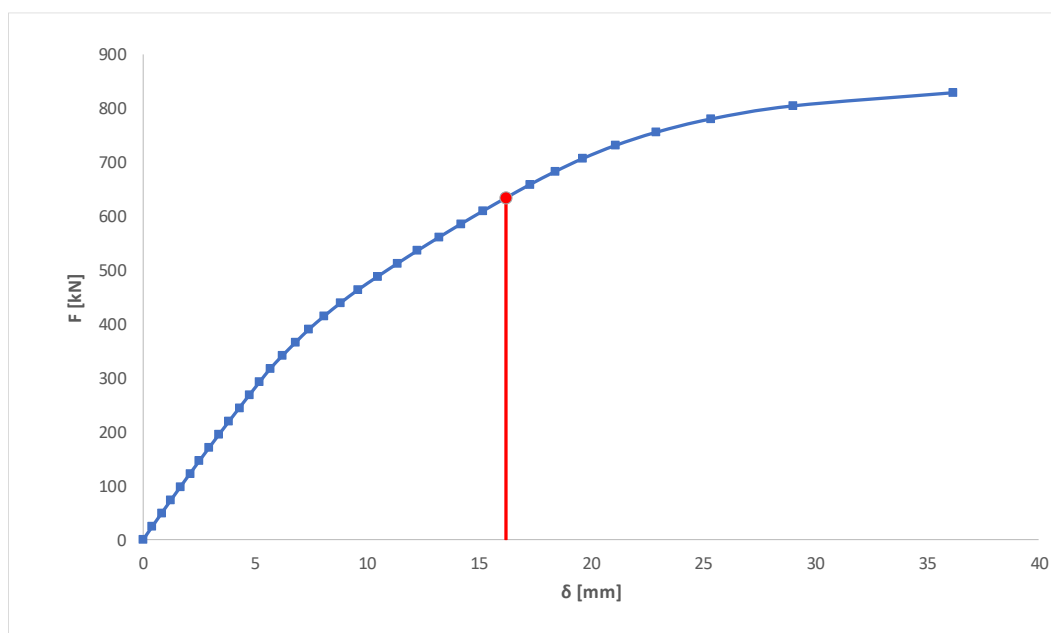


Figura 49 - Curva carga deslocamento para o sistema com imperfeições iniciais do 1º modo de flambagem – detalhe do ponto da 1ª plastificação

A Figura 49 traz o caminho de equilíbrio do ponto de maior deslocamento e maior tensão do sistema com imperfeições iniciais referentes ao 1º modo de flambagem. Novamente não é possível notar uma perda de rigidez a partir da primeira plastificação ou dos próximos pontos imediatos a esse fato. Existe uma relativa flexibilização do sistema, com deslocamentos maiores para os mesmos incrementos de carga nas próximas iterações, contudo essa flexibilização se deve provavelmente a perda de estabilidade do sistema e a aproximação do ponto limite da análise. Dessa forma, não há indícios claros que apontem um grande efeito das plastificações na flambagem da estrutura. Todavia, é importante destacar que a flambagem ocorre na presença de plastificações do sistema e, dessa forma, a presunção de que *gridshells* de camada única trabalham em regime elástico e/ou considerações sobre a plastificação das vigas possam ser previamente negligenciadas não é necessariamente verdadeira.

De modo geral, esse resultado corrobora com o exposto por Gioncu [22], de que o efeito de não linearidade física do material é muito pequeno para *gridshells* de camada única, contudo esse efeito não deve ser desprezado de imediato.



### 5.3.2. Carregamento assimétrico

O mesmo procedimento foi realizado para o carregamento assimétrico. A Figura 50 traz alguns modos de flambagem da análise linear como ilustração das imperfeições adotadas.

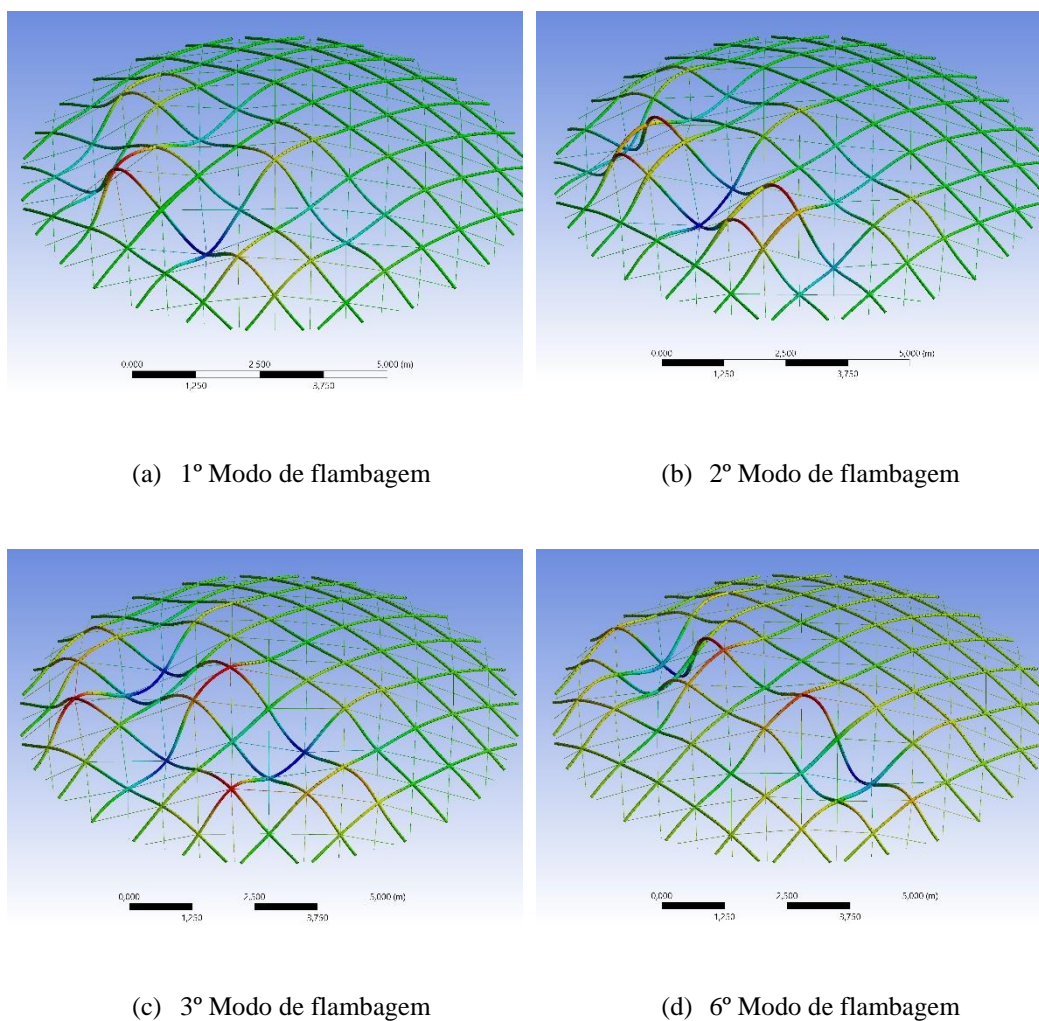


Figura 50 - Modos de flambagem análise linear – carregamento assimétrico

Novamente foram traçadas as curvas de carga-deslocamento para cada forma de imperfeição, com a mesma magnitude máxima de imperfeição de 0,033 m.

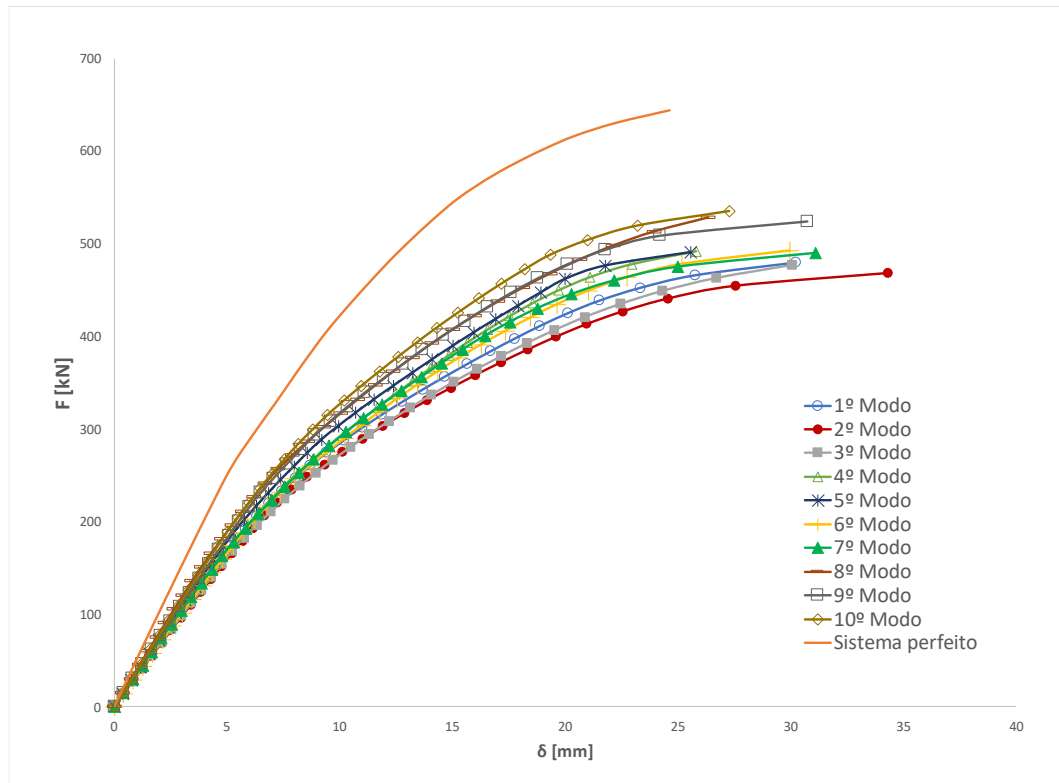


Figura 51 - Curva-Carga deslocamento para sistemas com modos de flambagem como imperfeições iniciais - carregamento assimétrico

A Figura 51 mostra que há uma diferença em relação ao caso de carregamento simétrico. A forma da imperfeição parece ter uma importância maior, com as curvas mais espaçadas entre si. Além disso, o carregamento assimétrico se mostrou menos sensível a imperfeições iniciais. Enquanto a redução média da carga crítica limite foi de 36% para o carregamento simétrico, essa redução média foi de apenas 23% para o carregamento assimétrico.

A Tabela 5 resume as cargas notáveis para os sistemas imperfeitos sujeitos a carregamento assimétrico.



Tabela 5 - Cargas notáveis para diferentes formas de imperfeição inicial - carregamento simétrico

| Imperfeição inicial | Carga crítica (linear) [kN] | Carga crítica limite [kN] | Carga de afrouxamento [kN] |
|---------------------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Sistema perfeito    | -                           | 650,10                    | 283,33                     |
| 1º modo             | 2054,3                      | 479,34                    | 273,91                     |
| 2º modo             | 2065,1                      | 468,09                    | 289,11                     |
| 3º modo             | 2103,8                      | 476,86                    | 280,51                     |
| 4º modo             | 2108,6                      | 492,01                    | 281,15                     |
| 5º modo             | 2164,4                      | 490,60                    | 281,76                     |
| 6º modo             | 2173,1                      | 492,57                    | 289,75                     |
| 7º modo             | 2226                        | 489,72                    | 296,8                      |
| 8º modo             | 2262,7                      | 527,96                    | 286,61                     |
| 9º modo             | 2312,9                      | 524,26                    | 292,97                     |
| 10º modo            | 2362,1                      | 535,41                    | 299,2                      |

As Figuras 52 e 53 ilustram graficamente o efeito da forma das imperfeições nas cargas notáveis.

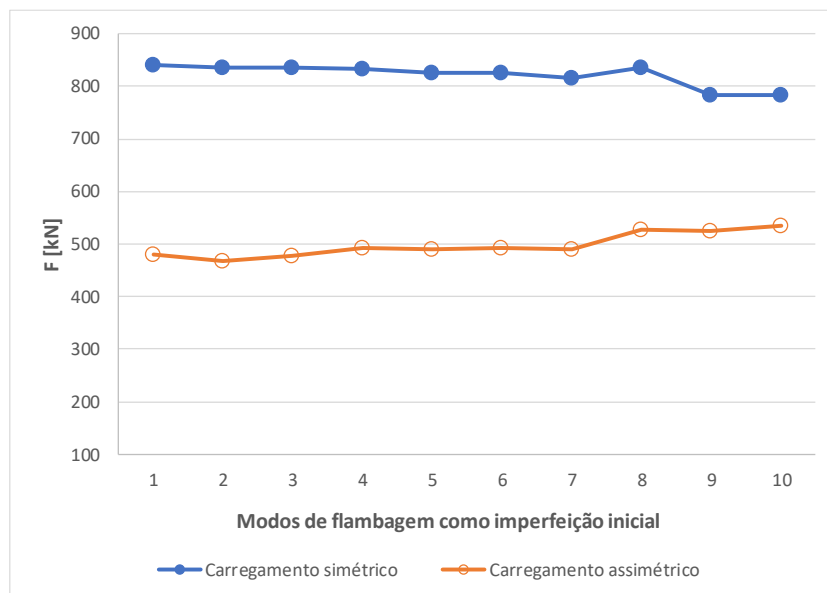


Figura 52 - Efeito de imperfeições iniciais na carga crítica limite

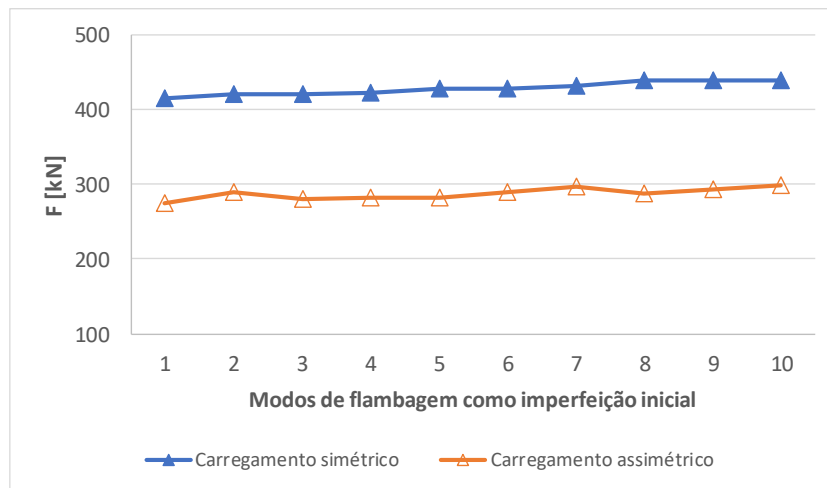


Figura 53 - Efeito de imperfeições iniciais na carga de afrouxamento

Desse modo, nota-se que a forma da imperfeição, independentemente da natureza do carregamento, não mostrou ter grande influência sobre as cargas notáveis do *gridshell*. Isso tem relevância quanto a considerações de projeto, uma vez que a escolha de uma imperfeição referente a qualquer modo de flambagem poderá representar o pior dos casos, excluindo a necessidade da análise de imperfeições iniciais de variadas formas.

Para a análise das tensões no sistema foi escolhido o sistema com imperfeições iniciais referentes ao 1º modo de flambagem para exemplificar o processo. A Figura 54 traz a distribuição das tensões de flexão e axiais combinadas no ponto limite da análise.

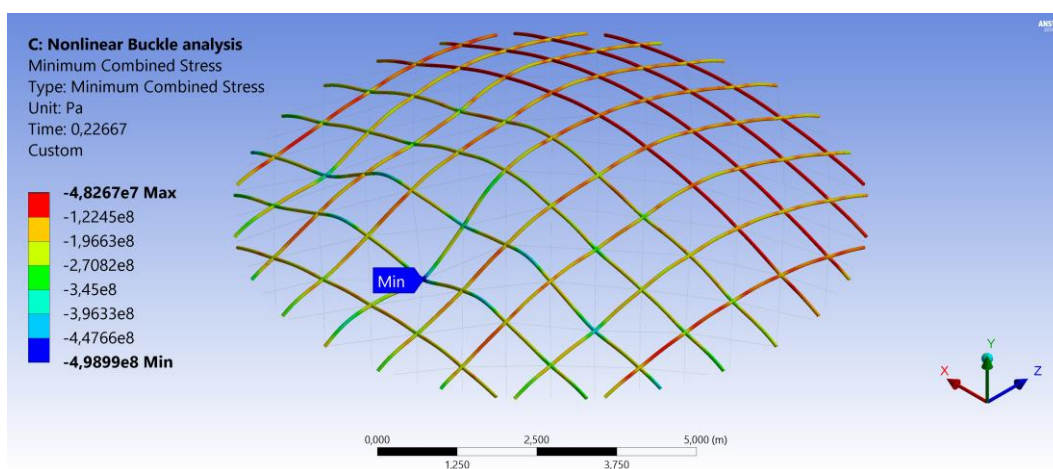


Figura 54 - Tensões combinadas de compressão para o sistema com imperfeições iniciais do 1º modo de flambagem

Assim como no caso do carregamento simétrico, múltiplas regiões apresentaram tensões superiores a tensão de escoamento do material. Essas tensões se concentraram nos nós da estrutura. A maior tensão encontrada foi aproximadamente 500 MPa, no ponto de maior deslocamento no caso em questão. Para analisar a eventual influência dessas plastificações na flambagem do *gridshell* observa-se seu caminho de equilíbrio.

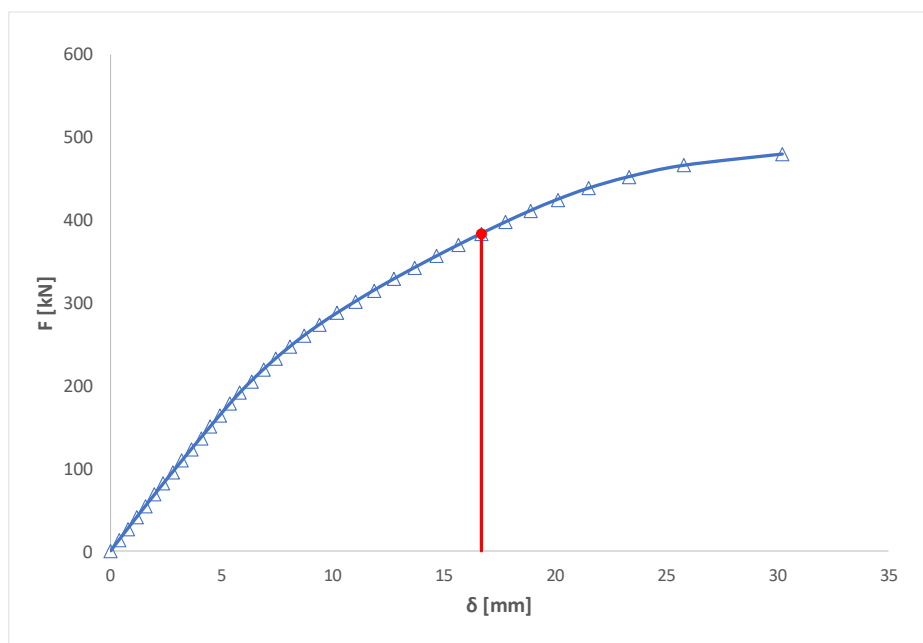


Figura 55 - Curva carga deslocamento para o sistema com imperfeições iniciais do 1º modo de flambagem – detalhe do ponto da 1ª plastificação

A análise da Figura 55 mais uma vez não apresenta uma queda de rigidez notável, não apresentando mudança clara do comportamento a partir da primeira plastificação. Bem como nos casos anteriores, a flambagem ocorre na condição de presença de plastificação de alguns elementos, contudo não há indícios que indiquem alguma influência significativa dessas plastificações na instabilidade do *gridshell* em questão.

#### 5.4. Magnitude das imperfeições iniciais

Até esse momento foi possível constatar a natureza não linear dos *gridshells*, atrelada à sua sensibilidade a imperfeições. O próximo estudo investigou mais a fundo o comportamento referente ao sistema imperfeito. Foram analisadas diferentes magnitudes máximas de imperfeições iniciais para o 1º modo de

flambagem. Os valores das magnitudes foram novamente relacionados ao vão da estrutura. Esses valores são apresentados na tabela a seguir,

Tabela 6 - Magnitude máximas das imperfeições

| Imperfeição máxima [mm] |        |
|-------------------------|--------|
| <b>d/700</b>            | 14,29  |
| <b>d/600</b>            | 16,67  |
| <b>d/500</b>            | 20,00  |
| <b>d/400</b>            | 25,00  |
| <b>d/300</b>            | 33,33  |
| <b>d/200</b>            | 50,00  |
| <b>d/150</b>            | 66,67  |
| <b>d/100</b>            | 100,00 |

Mais uma vez foram realizadas análises para os dois tipos de carregamento. A Figura 56 traz o comportamento da carga crítica limite para as diferentes escalas de imperfeição inicial.

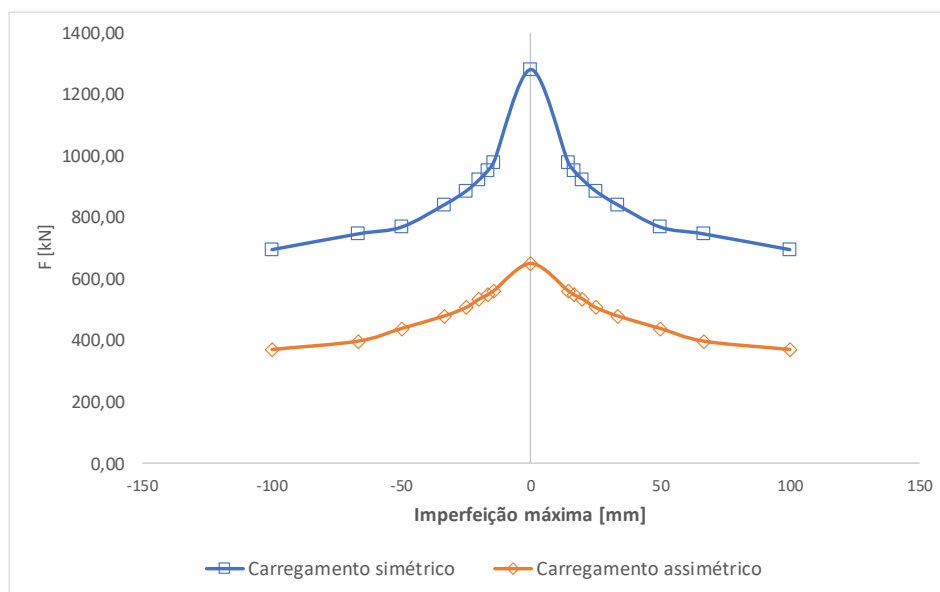


Figura 56 - Diagrama de sensibilidade de imperfeição

É possível notar como a sensibilidade a imperfeições se altera de acordo com o carregamento. A estrutura é mais sensível a imperfeições quando sujeita a um carregamento simétrico. Além disso, o caso simétrico mostrou-se mais sensível ao

aumento da escala da imperfeição. A análise do diagrama de sensibilidade sugere novamente que a assimetria de carregamento é bastante prejudicial a estabilidade da estrutura, sendo nesse caso pior do que a presença de imperfeições. A redução da carga crítica limite do sistema perfeito sob um carregamento simétrico para o sistema sujeito a uma imperfeição máxima de  $d/100$  é de 46%, enquanto a redução da carga crítica limite para um sistema perfeito sujeito a um carregamento assimétrico é de 49%. Isso demonstra que o efeito da assimetria de carga é muito próximo ao efeito da existência de uma imperfeição inicial de escala máxima correspondente a 1% do vão da estrutura. Dessa forma, fica evidente que a assimetria de carga é um parâmetro fundamental no estudo da instabilidade de *gridshells*.

Por último destaca-se a simetria do diagrama de sensibilidade. A redução da carga crítica limite ocorre independentemente do sinal da imperfeição, tanto para o carregamento simétrico quanto para o carregamento assimétrico.

A tabela a seguir traz o resumo das cargas críticas limite para os diferentes casos.

Tabela 7 - Cargas críticas limite

| Carregamento simétrico |               | Carregamento assimétrico |               |
|------------------------|---------------|--------------------------|---------------|
| Imperfeição máx.       | $P_{CL}$ [kN] | Imperfeição máx.         | $P_{CL}$ [kN] |
| <b>d/100</b>           | 695,12        | <b>d/100</b>             | 369,77        |
| <b>d/150</b>           | 746,33        | <b>d/150</b>             | 397,16        |
| <b>d/200</b>           | 768,29        | <b>d/200</b>             | 438,25        |
| <b>d/300</b>           | 841,46        | <b>d/300</b>             | 479,34        |
| <b>d/400</b>           | 885,36        | <b>d/400</b>             | 506,73        |
| <b>d/500</b>           | 921,94        | <b>d/500</b>             | 534,12        |
| <b>d/600</b>           | 951,21        | <b>d/600</b>             | 547,81        |
| <b>d/700</b>           | 980,48        | <b>d/700</b>             | 561,51        |
| <b>0</b>               | 1280,10       | <b>0</b>                 | 650,10        |
| <b>d/700</b>           | 980,48        | <b>d/700</b>             | 561,51        |
| <b>d/600</b>           | 951,21        | <b>d/600</b>             | 547,81        |
| <b>d/500</b>           | 921,94        | <b>d/500</b>             | 534,12        |
| <b>d/400</b>           | 885,36        | <b>d/400</b>             | 506,73        |
| <b>d/300</b>           | 841,46        | <b>d/300</b>             | 479,34        |
| <b>d/200</b>           | 768,29        | <b>d/200</b>             | 438,25        |
| <b>d/150</b>           | 746,33        | <b>d/150</b>             | 397,16        |
| <b>d/100</b>           | 695,12        | <b>d/100</b>             | 369,77        |

## 5.5. Análise dinâmica

Com a compreensão do comportamento de instabilidade do *gridshell*, a atenção foi voltada para o comportamento dinâmico dessa estrutura. Essa parte do estudo teve como objetivo investigar aspectos dinâmicos da estrutura e como certos parâmetros influenciam seu comportamento.

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, a primeira análise foi realizada buscando aferir a diferença de comportamento para os sistemas com e sem cabos de protensão. Mais uma vez a protensão foi adotada como 75 MPa inicialmente. Além disso, foi considerada a densidade  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  para ambos os materiais. A seguir são apresentadas as dez primeiras frequências naturais, bem como alguns modos de vibração para os dois sistemas.

Tabela 8 - Frequências naturais

| <b>Frequências de vibração [Hz]</b> |                  |                  |
|-------------------------------------|------------------|------------------|
| <b>Sistema</b>                      | <b>Sem cabos</b> | <b>Com cabos</b> |
| <b>1ª</b>                           | 14,39            | 36,768           |
| <b>2ª</b>                           | 20,407           | 36,918           |
| <b>3ª</b>                           | 20,407           | 38,718           |
| <b>4ª</b>                           | 26,322           | 40,149           |
| <b>5ª</b>                           | 27,709           | 41,336           |
| <b>6ª</b>                           | 31,645           | 41,889           |
| <b>7ª</b>                           | 34,35            | 44,844           |
| <b>8ª</b>                           | 34,35            | 44,967           |
| <b>9ª</b>                           | 39,712           | 45,664           |
| <b>10ª</b>                          | 39,712           | 49,416           |

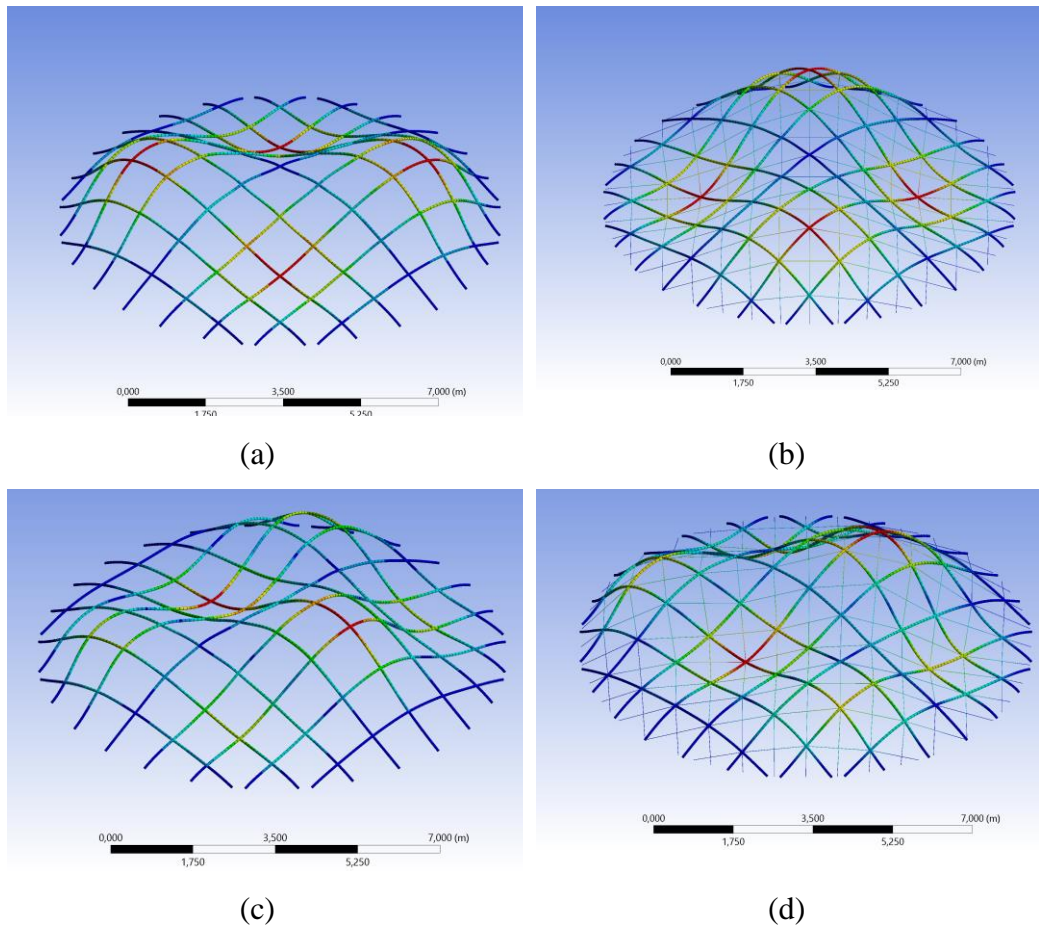


Figura 57 - Modos de vibração - (a) 1<sup>o</sup> modo de vibração sem cabos (b) 1<sup>o</sup> modo de vibração com cabos (c) 2<sup>o</sup> modo de vibração sem cabos (d) 2<sup>o</sup> modo de vibração com cabos

A influência da presença dos cabos pode ser observada na Figura 58.

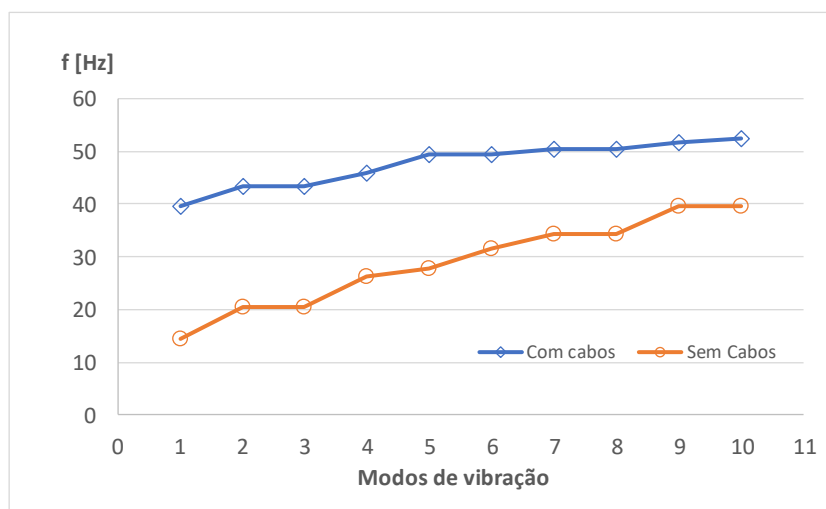


Figura 58 - Frequências naturais - sistemas com e sem cabos

Observa-se que há um aumento nas frequências naturais com a presença dos cabos. Isso se dá naturalmente devido ao aumento da rigidez do sistema com a presença dos cabos. Contudo, no modelo com cabos as frequências de vibração são próximas entre si, enquanto no modelo sem cabos existe um intervalo maior entre as frequências do sistema.

### 5.5.1. Influência do nível de protensão dos cabos

Com a determinação das frequências naturais para o sistema com cabos, foi investigado, então, o efeito do nível de protensão. Foram realizadas análises modais para diferentes níveis de tensão. O diagrama a seguir mostram o comportamento das frequências naturais da estrutura.

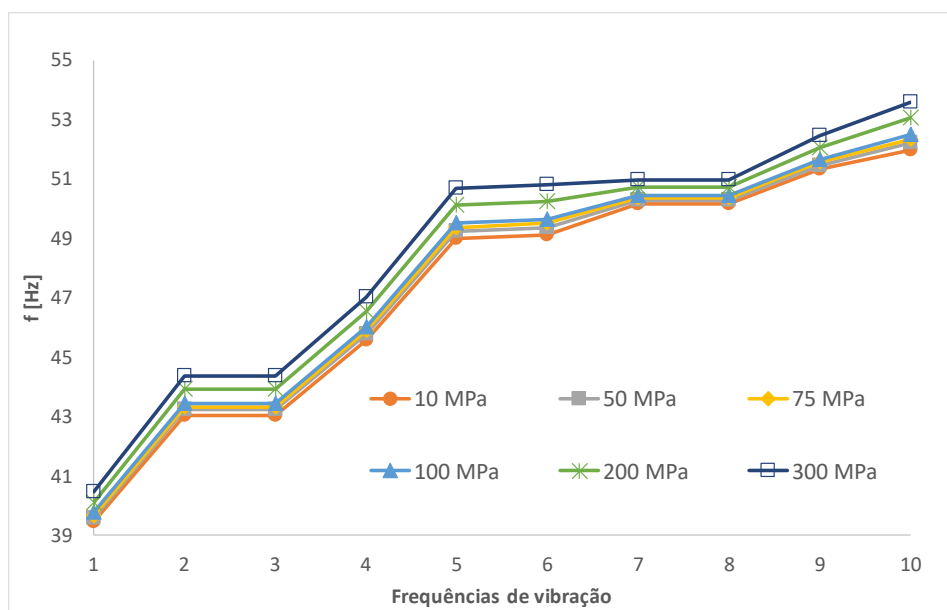


Figura 59 - Frequências de vibração para vários níveis de protensão

É possível perceber um pequeno aumento nas frequências naturais da estrutura com o aumento do nível de protensão. Foi investigado em seguida como se comporta a estrutura sob um carregamento a partir da variação dos níveis de protensão. Foi aplicada uma carga de 1 kN em todos os nós da estrutura.



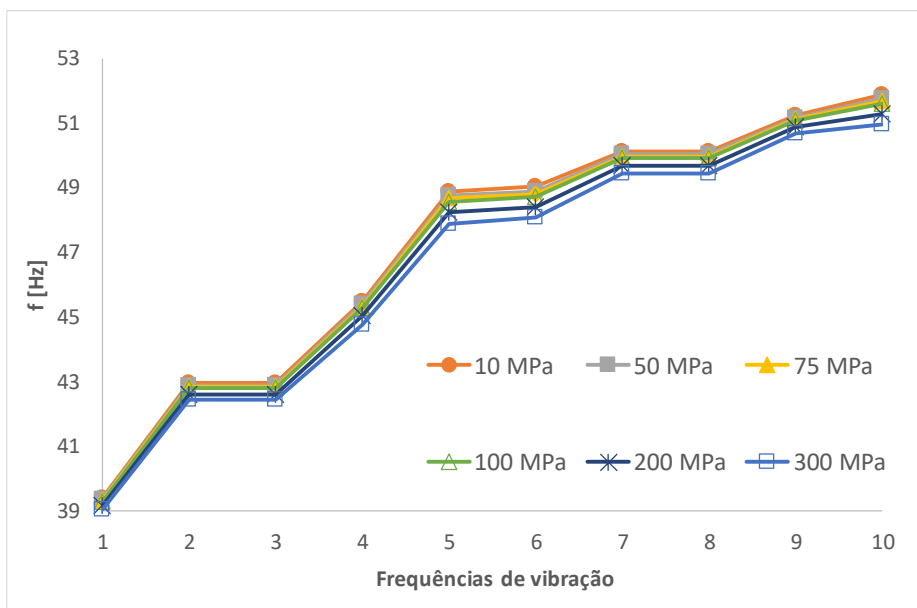


Figura 60 - Frequências de vibração para vários níveis de protensão – com carregamento

Percebe-se que sob um carregamento prévio da estrutura, o aumento do nível de protensão passa a diminuir levemente o valor das frequências de vibração da estrutura. A Figura 61 traz o detalhe do comportamento das cinco primeiras frequências de vibração para diferentes níveis de protensão.

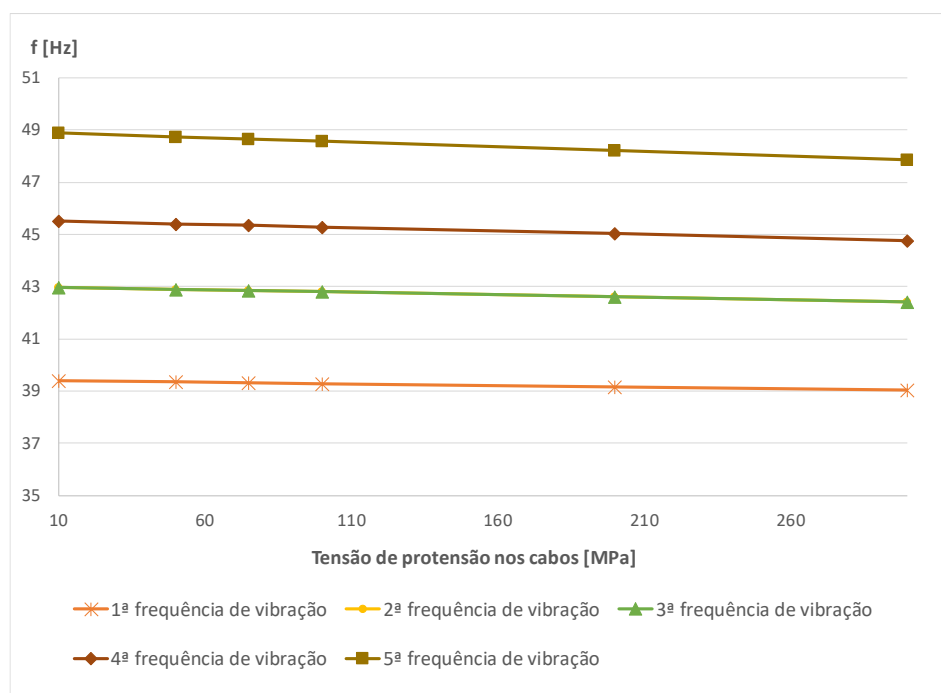


Figura 61 - Detalhe frequências de vibração

Desse modo é possível concluir que, embora haja uma mudança de comportamento para quando o sistema está carregado ou não, não há uma grande influência do nível de protensão nas frequências da estrutura.

### 5.5.2. Influência de imperfeições

A análise seguinte estudou a influência de imperfeições iniciais nas frequências de vibração da estrutura. Foram escolhidas diferentes formas de imperfeições iniciais e diferentes magnitudes máximas, avaliando seus efeitos nas frequências do sistema.

Inicialmente foi adotado como forma de imperfeição inicial o 1º modo de vibração. Para as magnitudes máximas dos deslocamentos foram adotados 20 mm, 25 mm, 33 mm, 50 mm, 75 mm e 100 mm.

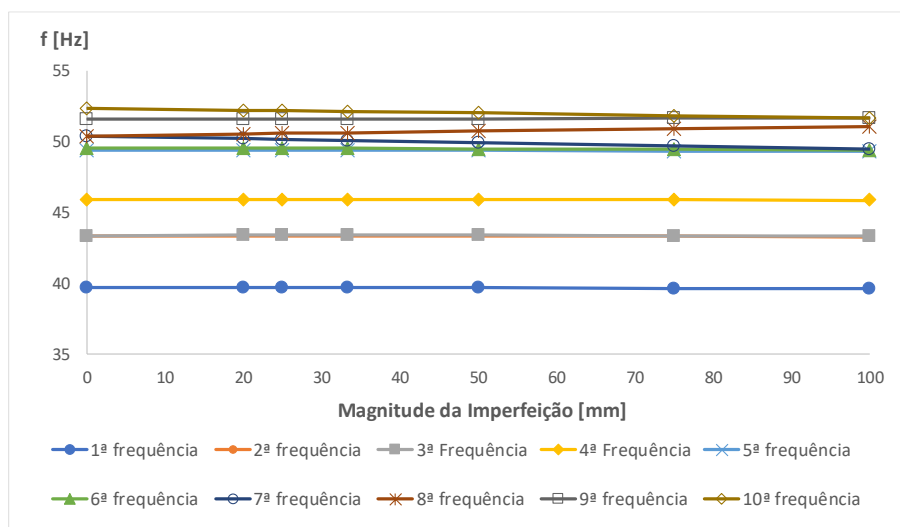


Figura 62 - Influência da magnitude da imperfeição nas frequências de vibração – deformada do carregamento estático como imperfeição inicial

Nota-se que a presença de imperfeições, bem como sua magnitude, praticamente não teve efeito nas frequências de vibração da estrutura para essa forma de imperfeição inicial.

Em seguida foi adotado a deformada causada pelo mesmo carregamento simétrico nodal utilizado em análises anteriores como forma da imperfeição inicial, com de 1kN por nó principal da estrutura.

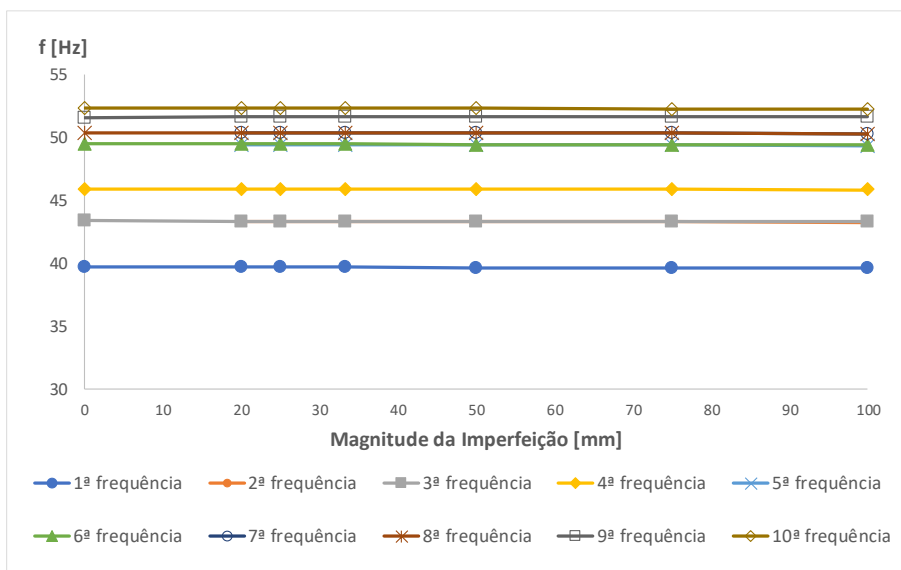


Figura 63 - Influência da magnitude da imperfeição nas frequências de vibração –1º modo de vibração como imperfeição inicial

Novamente percebe-se que a presença e magnitude das imperfeições não tiveram grande influência nas frequências de vibração.

Por fim foi adotado o 2º modo de flambagem como imperfeição inicial.

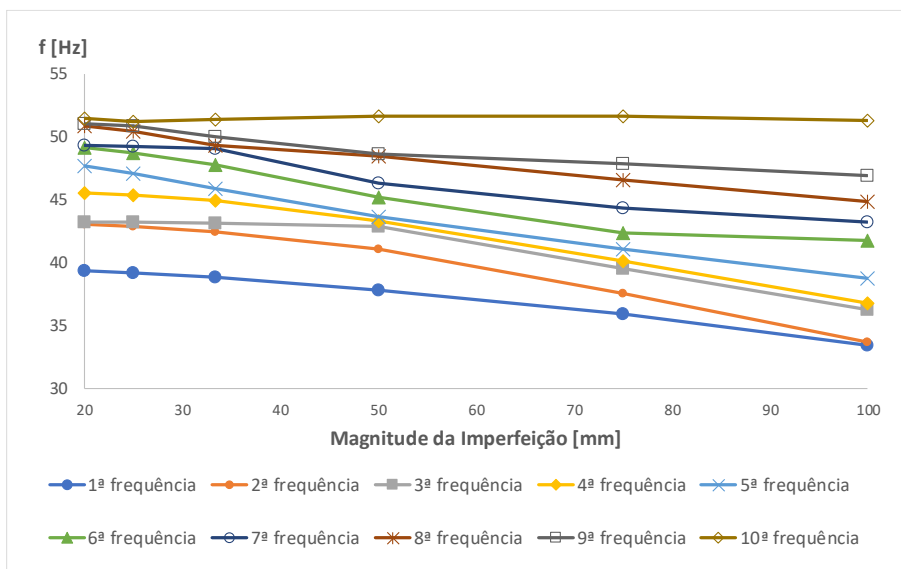


Figura 64 - Influência da magnitude da imperfeição nas frequências de vibração –2º modo de flambagem como imperfeição inicial

No caso do modo de flambagem como imperfeição inicial, houve alteração no comportamento da estrutura. Com o aumento da magnitude das imperfeições há uma redução nas frequências de vibração. É interessante ressaltar que esse efeito foi maior das primeiras frequências de vibração. O que chama a atenção nessa análise é justamente o fato da simples mudança da forma imperfeição apresentar efeitos distintos na estrutura.

### 5.5.3. Resposta Harmônica

A próxima etapa foi estudar o comportamento do *gridshell* quando sujeito a uma carga harmônica. De modo a aproximar o estudo da realidade, o carregamento harmônico considerado foi obtido a partir do método quase-estático recomendado pela NBR 6123:1988 [31], no qual o efeito do vento é aproximado por forças estáticas. A norma apresenta valores limite para os coeficientes de pressão externa para cúpulas sob ação de vento para diversos fatores vão-altura  $r/d$ . A Figura 65 ilustra a determinação dos coeficientes de pressão, enquanto a Figura 66 traz os valores desses coeficientes para diferentes relações de altura/vão.

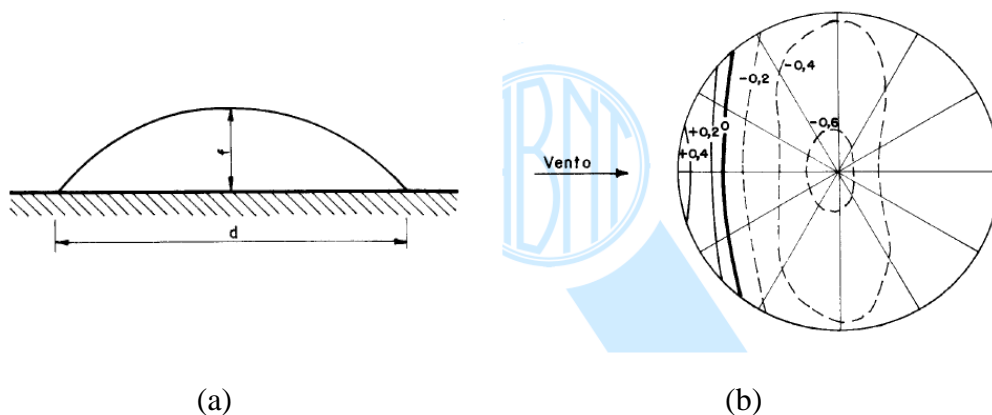


Figura 65 - linhas isobáricas de coeficientes de pressão (a) elevação da cúpula (b) Vista superior;

linhas isobáricas dos coeficientes de pressão para  $r/d= 1/4$ . [31]

| f/d  | C <sub>pe</sub> |        |
|------|-----------------|--------|
|      | Sobreposição    | Sucção |
| 1/15 | +0,1            | -0,3   |
| 1/10 | +0,2            | -0,3   |
| 1/8  | +0,2            | -0,4   |
| 1/6  | +0,3            | -0,5   |
| 1/4  | +0,4            | -0,6   |
| 1/2  | +0,6            | -1,0   |

Figura 66 - Valores limite dos coeficientes de pressão externa [31]

O modelo estudado tem relação  $r/d = 0,15$  e, portanto, foi realizada uma interpolação linear para definição dos coeficientes. As forças foram aplicadas perpendicularmente à superfície que envolveria o *gridshell*. Após o processamento, foram traçadas as curvas de amplificação dinâmica para alguns pontos de interesse, como mostra a figura a seguir.

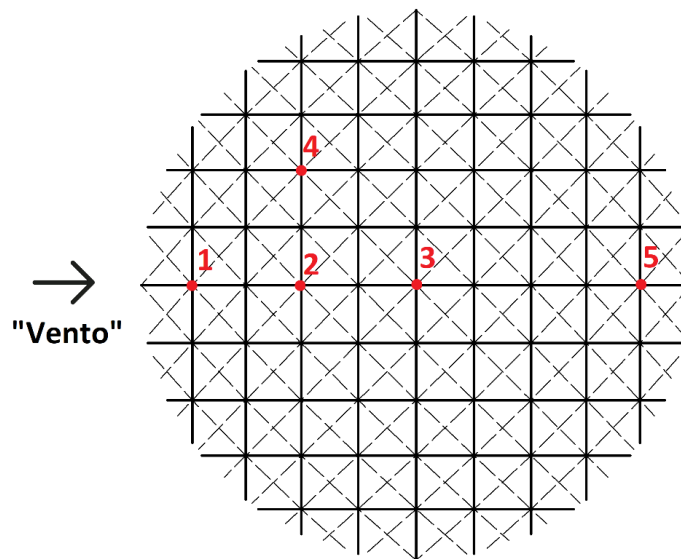


Figura 67 - Pontos de interesse curva de amplificação dinâmica

As curvas de amplificação dinâmica foram traçadas para quatro coeficientes de amortecimento  $\xi$ : 0,25%, 0,5%, 0,75% e 1%. O eixo vertical foi normalizado pelo deslocamento estático do ponto em questão. Esses deslocamentos são

referentes ao deslocamento vertical de cada ponto. A Tabela 9 traz as 24 primeiras frequências naturais da estrutura.

Tabela 9 - Frequências naturais

| Modo | f [Hz] | Modo | f [Hz] |
|------|--------|------|--------|
| 1    | 39,671 | 13   | 57,221 |
| 2    | 43,336 | 14   | 57,221 |
| 3    | 43,336 | 15   | 58,375 |
| 4    | 45,906 | 16   | 59,289 |
| 5    | 49,374 | 17   | 59,289 |
| 6    | 49,506 | 18   | 59,633 |
| 7    | 50,354 | 19   | 61,517 |
| 8    | 50,354 | 20   | 64,736 |
| 9    | 51,571 | 21   | 64,916 |
| 10   | 52,34  | 22   | 65,235 |
| 11   | 52,34  | 23   | 65,235 |
| 12   | 54,781 | 24   | 65,661 |

As figuras a seguir trazem as curvas de amplificação dinâmica para os pontos mostrados na Figura 67.

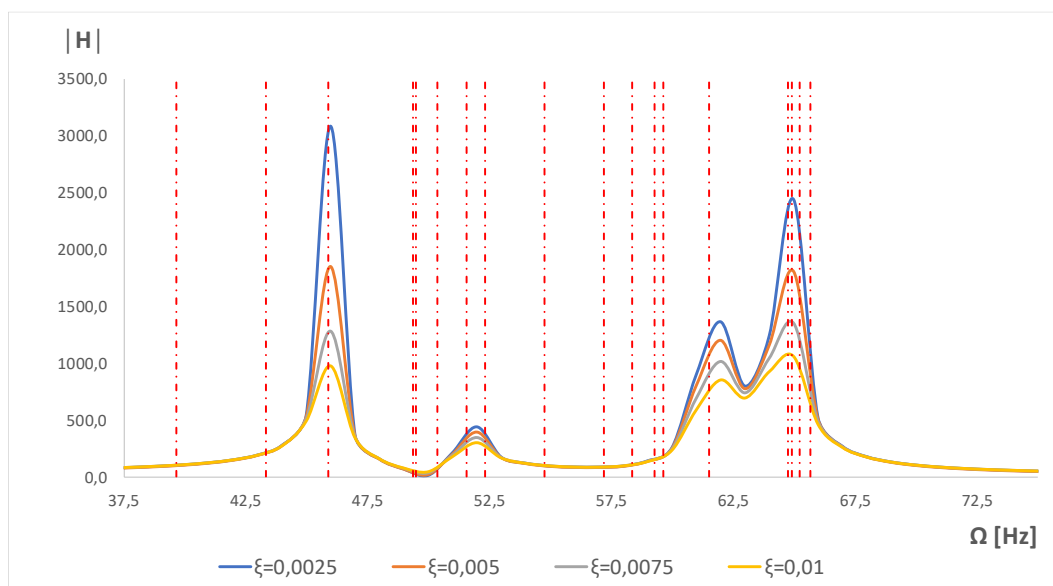


Figura 68 - Curvas de amplificação dinâmica - ponto 1

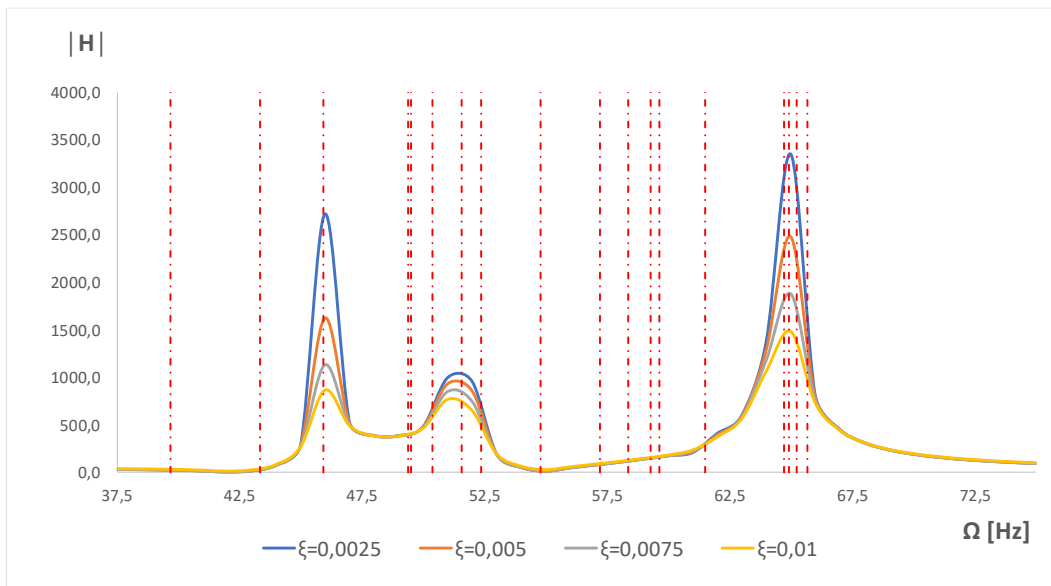


Figura 69 - Curvas de amplificação dinâmica - ponto 2

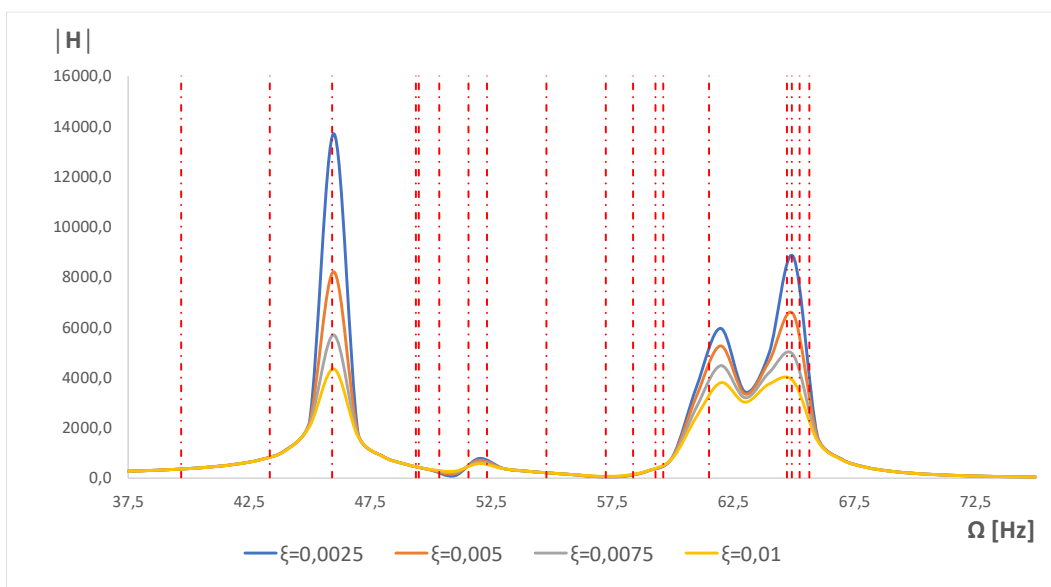


Figura 70 - Curvas de amplificação dinâmica - ponto 3

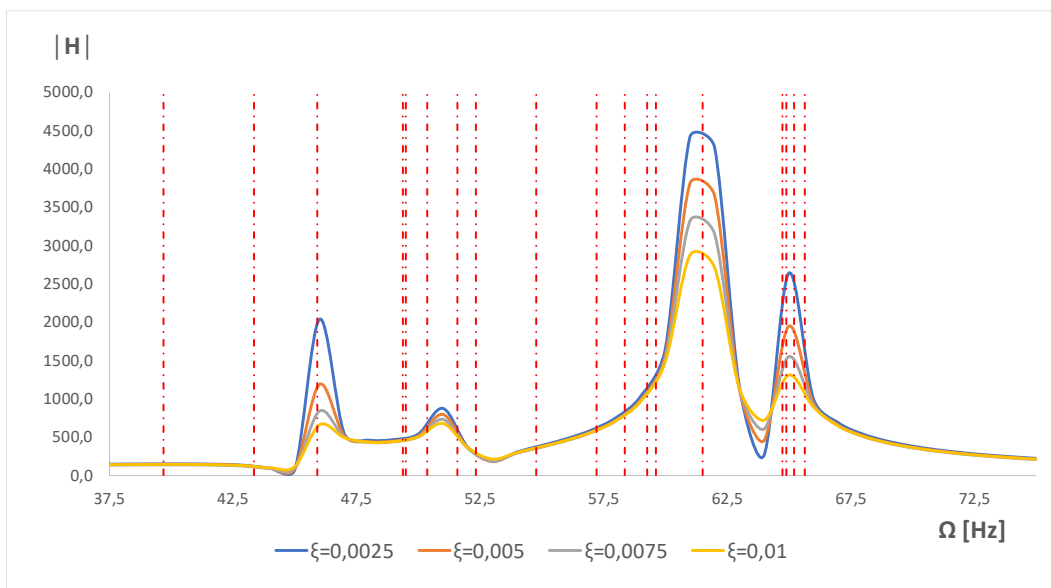


Figura 71 - Curvas de amplificação dinâmica - ponto 4

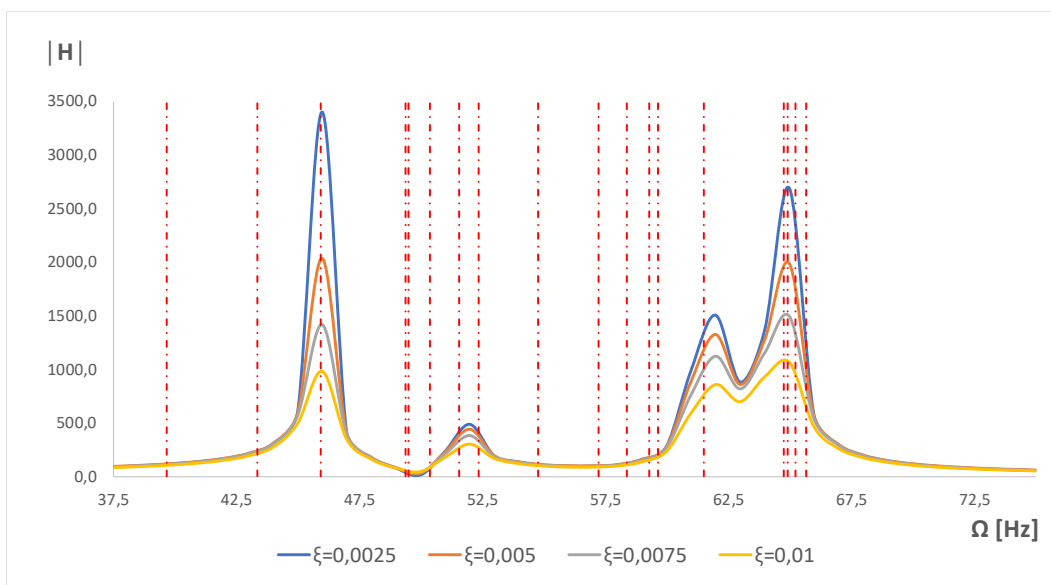


Figura 72 - Curvas de amplificação dinâmica - ponto 5



A análise das curvas de amplificação dinâmica leva a algumas conclusões. A primeira é quanto ao efeito do amortecimento. Nota-se como o deslocamento se reduz com o aumento do  $\xi$ . Percebe-se também como o amortecimento tem um efeito menor para as maiores frequências de excitação do sistema.

Tendo em vista que, muitas vezes o deslocamento máximo é um parâmetro de controle para projetos, a análise dinâmica torna-se importante no dimensionamento desse tipo de estrutura, uma vez que os deslocamentos dinâmicos se mostraram superiores aos deslocamentos estáticos, mesmo fora da situação de ressonância.

## 6 Considerações finais

### 6.1. Conclusões

*Gridshells* são estruturas leves que combinam eficiência e beleza. Com a possibilidade do uso de diversos materiais, aliada a imensa possibilidade de formas e arquiteturas, esse tipo de estrutura vem ganhando cada vez mais espaço entre arquitetos e engenheiros. Tendo em vista sua complexidade estrutural e o seu uso cada vez mais frequente, essa dissertação teve como objetivos gerais estudar a instabilidade dessas estruturas, bem como apontar aspectos chave de seu comportamento, de modo a estabelecer pontos de referência na elaboração de projetos desse tipo de estrutura.

O desenvolvimento desse estudo possibilitou uma análise de como determinados parâmetros influenciam no comportamento dinâmico e na instabilidade de *gridshells* a partir de simulações numéricas.

O estudo teve início com a adoção de uma rede de cabos protendidos para o reforço da grelha estrutural. Foi possível concluir que a adoção desse reforço aumenta substancialmente a carga crítica limite do sistema e reduz de maneira considerável seus deslocamentos. Sendo assim, a utilização de cabos traz um efeito bastante positivo na estabilidade de *gridshells*.

Nesse contexto, analisando o comportamento de sistemas reforçados com cabos foi possível concluir que existem dois pontos notáveis no seu caminho de equilíbrio. O primeiro ponto foi identificado como o ponto de afrouxamento dos cabos, em que há uma considerável perda de rigidez do sistema devido à perda majoritária ou total de tensão dos cabos causada pelo carregamento externo. O segundo ponto é o ponto limite, no qual a estrutura deixa de ser estável e a flambagem do sistema ocorre de fato. Esses dois pontos são referências no dimensionamento desse tipo de *gridshell*. Fazendo a analogia do Método dos Estados Limites, o ponto de afrouxamento representaria um dos estados limites de serviço, enquanto o ponto crítico limite representaria um estado limite último.

No caso do estudo da influência do nível de protensão dos cabos, foi observado que inicialmente o aumento da tensão de protensão gera um ganho proporcional na carga crítica limite da estrutura, todavia, após um determinado nível não há ganho significativo na resistência a flambagem. Dessa forma, foi possível concluir que existe um nível máximo de contribuição da protensão para a estabilidade do sistema. Qualquer nível de protensão superior tem influência apenas na carga de afrouxamento dos cabos.

A análise do efeito de imperfeições iniciais possibilitou uma série de conclusões. Notou-se que a consideração de imperfeições iniciais no sistema gerou uma diminuição na carga crítica limite da estrutura, com reduções superiores a 30%. Desse modo, foi demonstrado que esse tipo de estrutura é sensível a imperfeições. Quanto à influência da forma da imperfeição inicial, foi observado que para carregamentos simétricos, sua forma não alterou significativamente as cargas notáveis. Já para o carregamento assimétrico, a forma da imperfeição inicial teve um efeito um pouco maior na carga crítica limite, contudo, esse efeito ainda foi muito pequeno. Outra conclusão interessante surge quando observado o efeito da natureza do carregamento, ou seja, quando o carregamento é simétrico ou assimétrico. Foi observado que o efeito da assimetria de carga não é só muito prejudicial à estabilidade, como pode representar um efeito pior do que a existência de imperfeições iniciais. Enquanto a existência de imperfeições iniciais representou uma redução máxima de cerca de 40% da carga crítica limite para o caso simétrico e 43% para o caso assimétrico, a mudança de natureza de carregamento levou a uma redução de aproximadamente 50% quando comparadas as cargas críticas limites de sistemas perfeitos sujeitos a carregamentos assimétricos.

No caso do efeito da magnitude da imperfeição, foi observado que existe uma considerável redução na carga crítica limite para a presença de imperfeições e com o aumento de sua magnitude esse efeito tende a diminuir e quase estabilizar. Esse comportamento foi observado para os dois tipos de carregamento. De modo geral, tanto a existência de imperfeições iniciais, quanto a natureza do carregamento têm grande influência na estabilidade de *gridshells* e, portanto, esses parâmetros devem ser considerados na elaboração de projetos desse tipo de estrutura.

A análise das tensões nos pontos limite revelou que, para os diferentes casos estudados, havia pontos de plastificação de elementos no momento da flambagem e que essas plastificações ocorreram de maneira mais frequente nos nós dos

*gridshells*. Entretanto, não foram constatados indícios de grande influência dessas plastificações na flambagem dos sistemas. Porém, devido a possibilidade de flambagem em presença de plastificação de parte da estrutura, a não linearidade física do material não deve ser negligenciada de imediato para *gridshells* de camada única, cabendo considerações adicionais sobre a esbeltez da estrutura em determinados casos.

Em relação ao comportamento dinâmico da estrutura, observou-se que o nível de protensão, a partir do valor que evita o afrouxamento, tem pouca influência nas frequências de vibração do sistema, independentemente se ele está sendo carregado ou não. No caso da influência de imperfeições iniciais nas frequências de vibração, para formas de imperfeição correspondentes aos modos de vibração e à deformada devido ao carregamento externo, não houve efeito significativo nas frequências, mesmo para diferentes magnitudes. Todavia, quando a forma da imperfeição inicial correspondeu a algum modo de flambagem, as frequências de vibração se reduziram à medida em que a magnitude das imperfeições iniciais aumentou. Sendo assim, concluiu-se que existe, embora pequena, uma influência da forma da imperfeição inicial nas frequências de vibração, desde que essa forma corresponda a algum modo de flambagem.

De modo geral, esse trabalho demonstrou que *gridshells* são estruturas complexas de comportamento altamente não linear. Devido a essa complexidade, cada projeto desse tipo de estrutura é, na prática, único. Isso dificulta a criação de normas e de uma abordagem única para diferentes casos. Todavia, estudos como o presente trabalho são pontos de referência na elaboração de projetos, sendo necessários ainda estudos posteriores para o completo entendimento do comportamento dos diferentes tipos de *gridshells*.

## 6.2.

### **Sugestões para trabalhos futuros:**

- i. Estudo de otimização de materiais, bem como da malha estrutural e forma de *gridshells*.
- ii. Aprofundar estudos relacionados à dinâmica para esse tipo de estrutura, como avaliação de cargas de terremoto, estudo completo de vento, análise dinâmica na flambagem, etc.

- iii. Considerar o efeito de forças não conservativas e avaliar a possibilidade de *flutter*.
- iv. Estudos experimentais do comportamento mecânico de modelos em escala reduzida.

## 7. Referências Bibliográficas

- 1 DOUTHE, Cyril; BAVEREL, Olivier; CARON, J.-F. Form-finding of a grid shell in composite materials. **Journal of the International Association for Shell and Spatial structures**, v. 47, n. 1, p. 53-62, 2006.
- 2 HUFTON. **Daxing International Airport**, 2019. Disponível em: <https://archinect.com/news/article/150161496/zaha-hadid-architects-starfish-shaped-beijing-daxing-international-airport-is-inaugurated>. Acesso em: 28 de out. 2019.
- 3 CHEVALLIER, H. **Inside the Weald and Downland Gridshell**, 2006. Disponível em: <https://www.geograph.org.uk/photo/258909>. Acesso em: 28 de out. 2019.
- 4 GERFEN, K. **Japan Pavilion, Hannover Expo 2000**, Hannover, 2000. Disponível em: <https://www.architectmagazine.com/project-gallery/japan-pavilion-hannover-expo-2000>. Acesso em: 28 de out. 2019.
- 5 SCHLAICH, J.; SCHOBER, H. Glass-covered grid-shells. **Structural engineering international**, v. 6, n. 2, p. 88-90, 1996.
- 6 SCHOBER, H. **Transparent shells: Form, topology, structure**. John Wiley & Sons, 2015.
- 7 MONHERJAHN, K., **MyZeil Mall**. Frankfurt. Disponível em: [https://www.architectural.com/massimiliano-and-doriana-fuksas-myzeil/mab\\_0093/](https://www.architectural.com/massimiliano-and-doriana-fuksas-myzeil/mab_0093/). Acesso em: 28 de out. 2019.
- 8 MESNIL, R. **Stability of elastic grid shells**. 2013. Tese de Doutorado. Massachusetts Institute of Technology.
- 9 NAICU, D.; WILLIAMS, C.; HARRIS, R. **Geometry and performance of timber gridshells**. 2012. Tese de Doutorado. University of Bath.
- 10 KNIPPERS, J.; HELBIG, T. The Frankfurt ZEIL grid shell. In: Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures (50th. 2009. Valencia). Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures: Proceedings. Editorial Universitat Politècnica de València, 2010.
- 11 KUIKEN, J.; MENTEGAZZI, E. **Behind gridshells: morphogenetic and parametric design strategies**. Amsterdam: Bna Research Fund., 2014. 112 p.

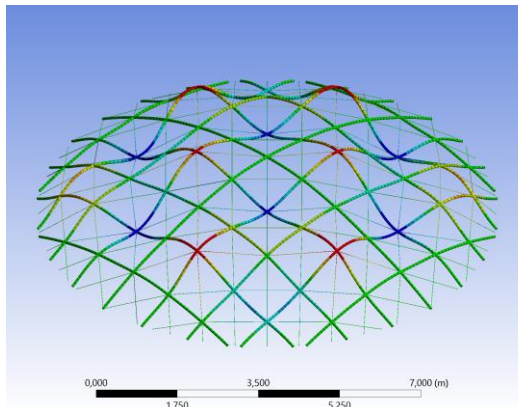
- 12 DRAGICEVIC, P. **Gaudís's hanging chain models**. Barcelona, 2015. Disponível em: <http://dataphys.org/list/gaudis-hanging-chain-models/>. Acesso em: 28 de out. 2019.
- 13 LIDDELL, I. Frei Otto and the development of gridshells. **Case Studies in Structural Engineering**, v. 4, p. 39-49, 2015.
- 14 RHINOCEROS, Inc. **RHINOCEROS** ©, / Design Software, version 6, 2019.
- 15 PIKER D. Kangaroo: form finding with computational physics. *Archit Des* 2013; 83(2): 136-7.
- 16 CAFFARELLO, F. et al. Análise estrutural de cobertura em gridshell de madeira. 2016.
- 17 BULENDA, Th; KNIPPERS, J. Stability of grid shells. **Computers & Structures**, v. 79, n. 12, p. 1161-1174, 2001.
- 18 BULENDA, Th; WINZINGER, Thomas. Verfeinerte Berechnung von Gitterschalen. **Stahlbau**, v. 74, n. 1, p. 33-38, 2005.
- 19 LÓPEZ, A.; PUENTE, I.; SERNA, M.A. Numerical model and experimental tests on single-layer latticed domes with semi-rigid joints. **Computers & structures**, v. 85, n. 7-8, p. 360-374, 2007.
- 20 CAI, J. et al. Nonlinear stability of a single-layer hybrid grid shell. **Journal of civil engineering and Management**, v. 18, n. 5, p. 752-760, 2012.
- 21 LI, P.; WU, M.; XING, P. Novel cable-stiffened single-layer latticed shells and their stabilities. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 92, p. 114-121, 2014.
- 22 GIONCU, V. Buckling of reticulated shells: state-of-the-art. **International Journal of Space Structures**, v. 10, n. 1, p. 1-46, 1995.
- 23 TEZCAN, S. S.; OVUNC, B. An iteration method for the nonlinear buckling of framed structures. In: **Space Structures**. Blackwell Oxford, 1967. p. 45.
- 24 BAZANT, Zdenek P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. **ASCE J Eng Mech Div**, v. 102, n. 2, p. 331-344, 1976.
- 25 LEIPHOLZ, H. H. E. On some developments in direct methods of the calculus of variations. 1987.
- 26 KOITER, W.T., **The stability of elastic equilibrium**. Stanford Univ Ca Dept of Aeronautics and Astronautics, 1970.
- 27 POPPEL, C. Equilibrium path. Disponível em: [https://www.researchgate.net/post/Arc\\_length\\_method\\_for\\_non\\_linear\\_buckling\\_NonlinFEM\\_in\\_ANSYS\\_Is\\_there\\_any\\_way\\_I\\_can\\_continue\\_the\\_Simulation\\_beyond\\_the\\_critical\\_point](https://www.researchgate.net/post/Arc_length_method_for_non_linear_buckling_NonlinFEM_in_ANSYS_Is_there_any_way_I_can_continue_the_Simulation_beyond_the_critical_point). Acesso em: 28 de out. 2019.

- 28 KIM, Nam-Ho. **Introduction to nonlinear finite element analysis**. Springer Science & Business Media, 2014.
- 29 ANSYS – versão 19.2 – Documentation. ANSYS, Inc.
- 30 MALEK, S. **The effect of geometry and topology on the mechanics of grid shells**. 2012. Tese de Doutorado. Massachusetts Institute of Technology.
- 31 ASSOCIAÇÃO BRASIELIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6123: **Forças devidas ao vento em edificações**. Rio de Janeiro, 1988.

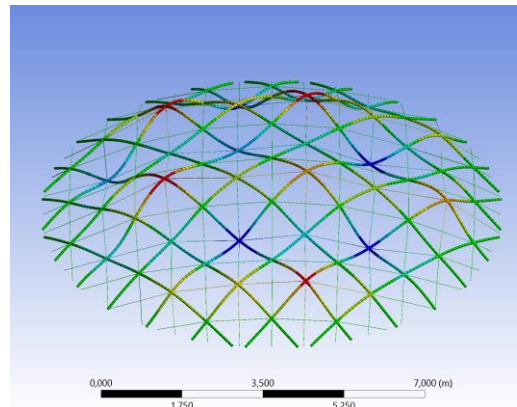


## Apêndice

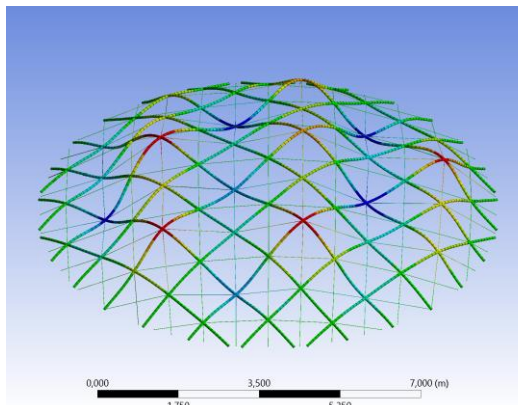
### Modos de flambagem



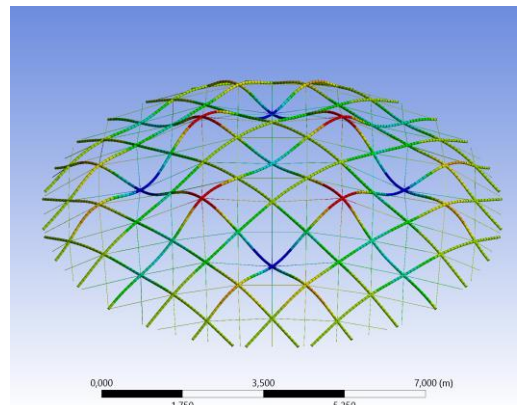
1º modo de flambagem



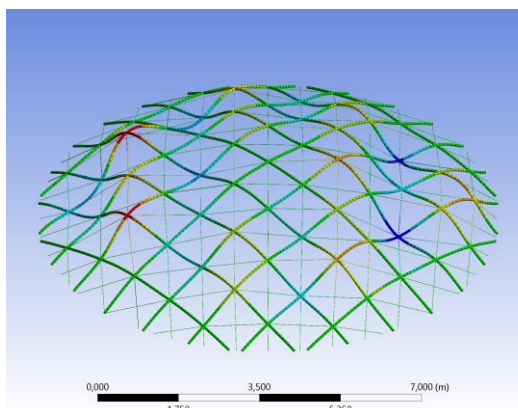
2º modo de flambagem



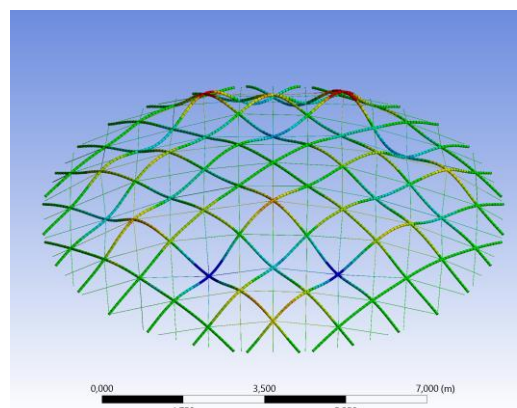
3º modo de flambagem



4º modo de flambagem



5º modo de flambagem



6º modo de flambagem

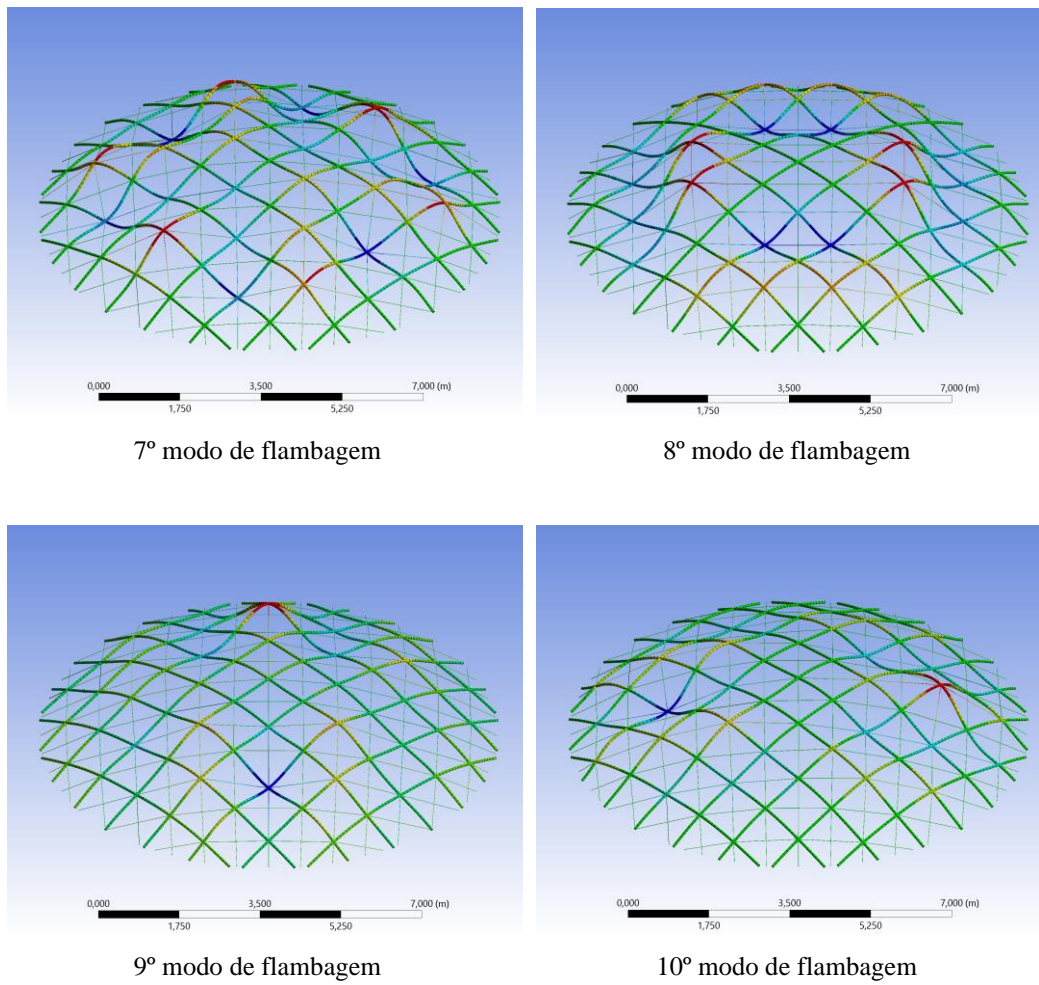
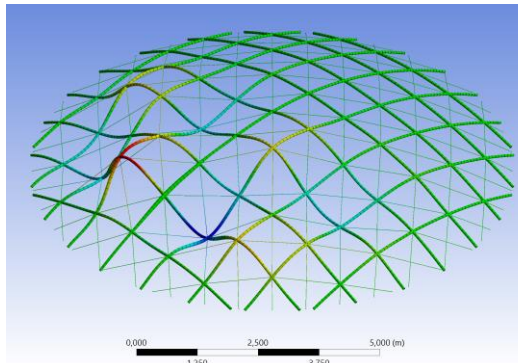
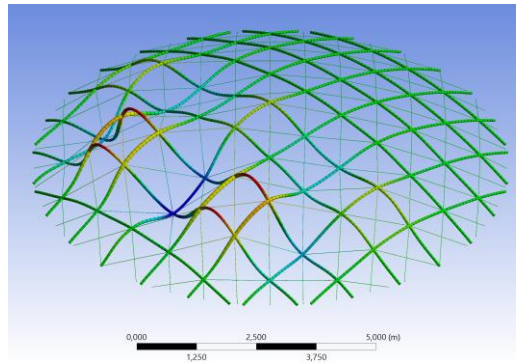


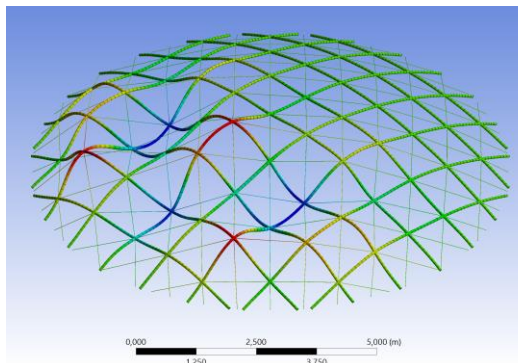
Figura 73 - Modos de flambagem - carregamento simétrico



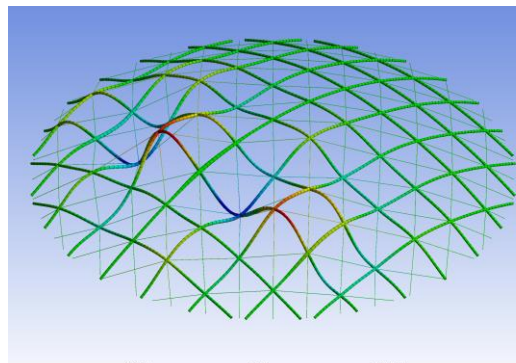
1º modo de flambagem



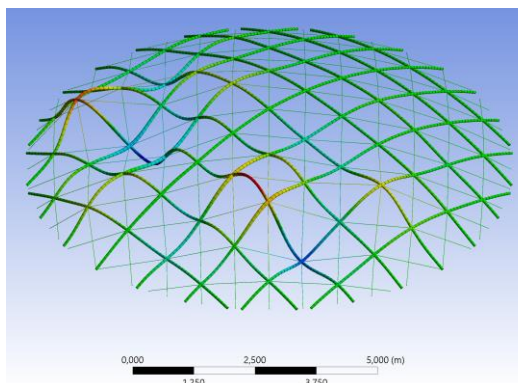
2º modo de flambagem



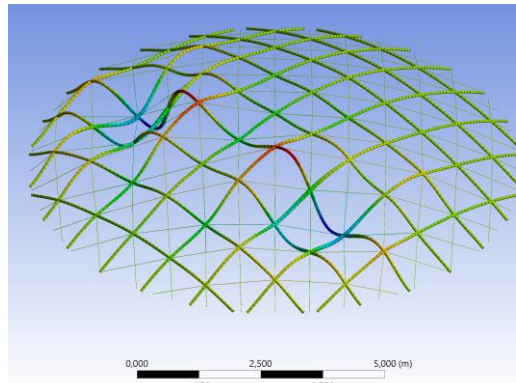
3º modo de flambagem



4º modo de flambagem

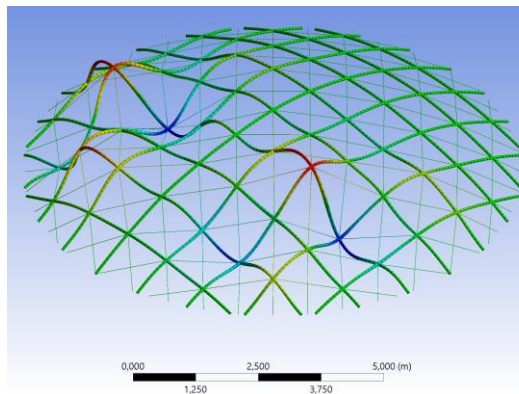


5º modo de flambagem

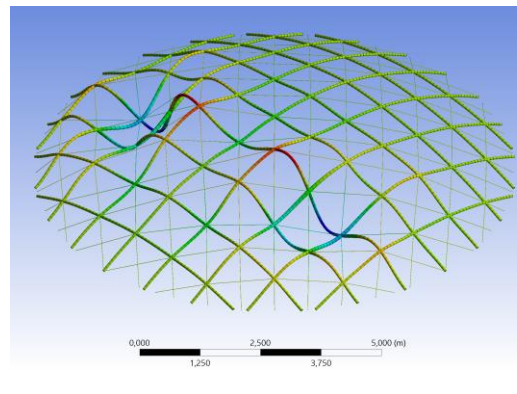


6º modo de flambagem

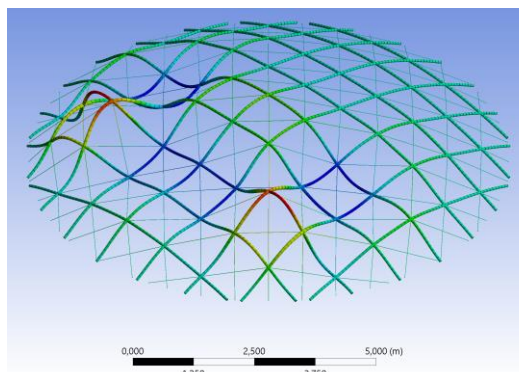




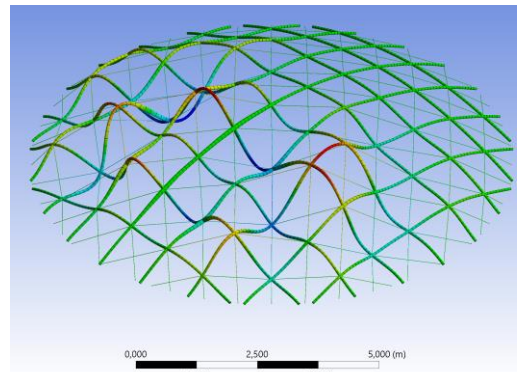
7º modo de flambagem



8º modo de flambagem



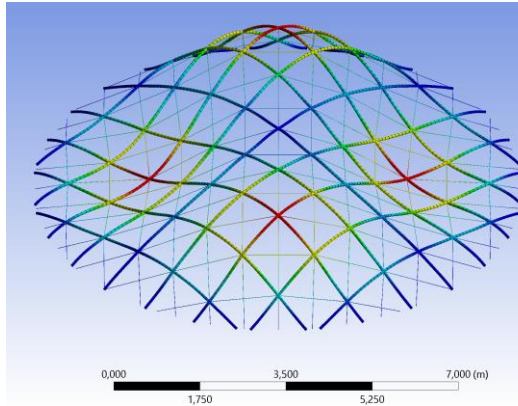
9º modo de flambagem



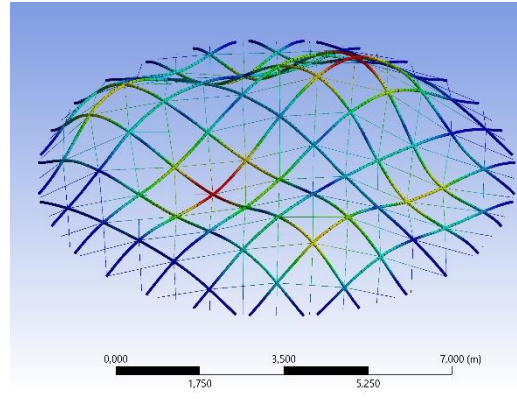
10º modo de flambagem

Figura 74 - Modos de flambagem - carregamento assimétrico

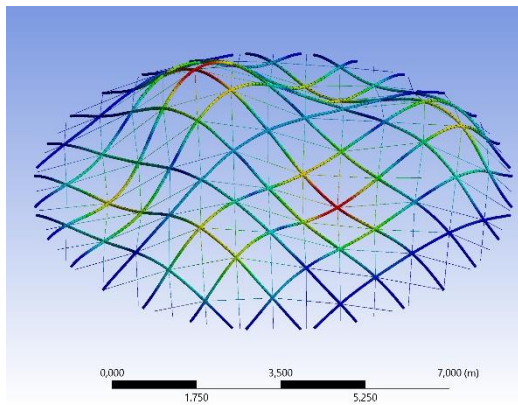
## Modos de vibração



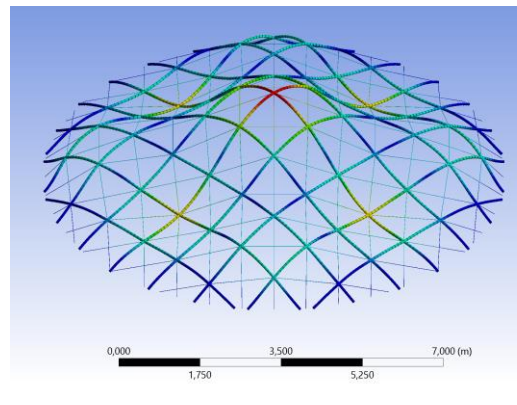
1º modo de vibração



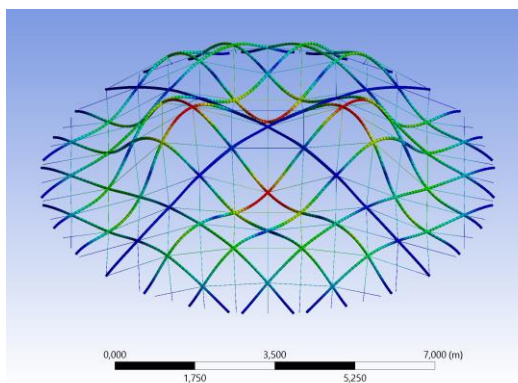
2ª modo de vibração



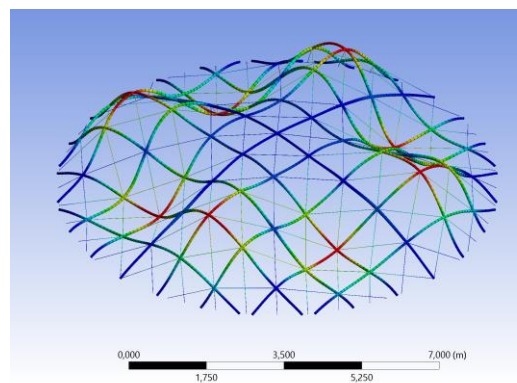
3º modo de vibração



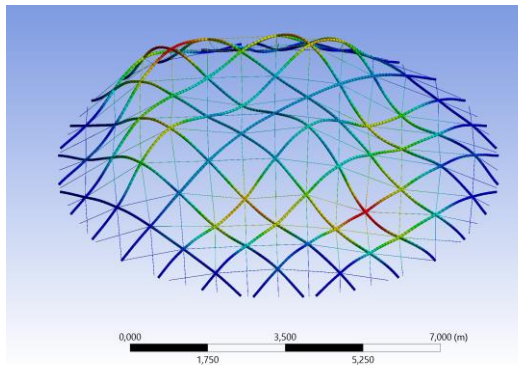
4º modo de vibração



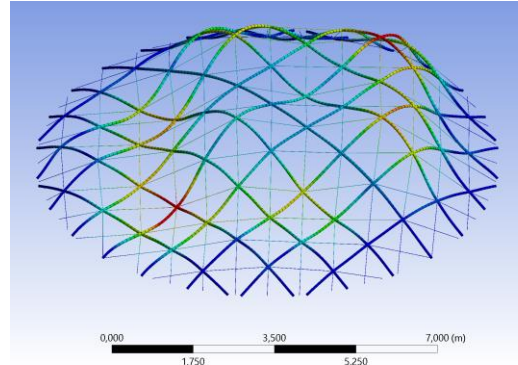
5º modo de vibração



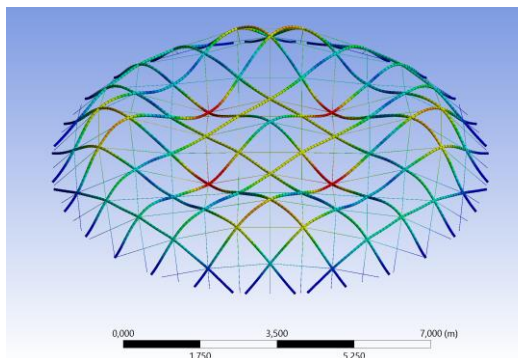
6º modo de vibração



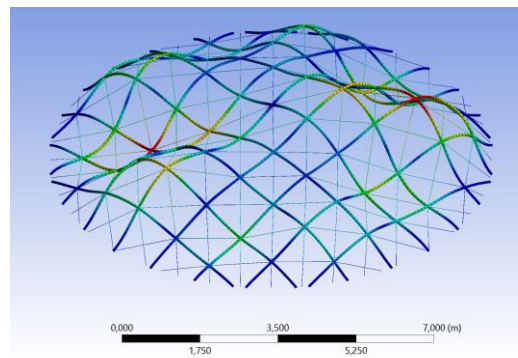
7º modo de vibração



8º modo de vibração



9º modo de vibração



10º de vibração

Figura 75 - Modos de vibração