Referências Bibliográficas

[1] AIUBE, F. A. L. **Avaliação Econômica de Projetos Petrolíferos sob Condições de Incertezas de Preços e Reservas.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 1995.

[2] BAIDYA, T. K. N.; CASTRO, A. L. **Convergência dos Modelos de Árvores Binomiais para Avaliação de Opções.** Pesquisa Operacional, vol 21, 2001, pp. 17-30.

[3] BATISTA, F. R. S. **Avaliação de Opções de Investimento em Projetos de Exploração e Produção de Petróleo por Meio da Fronteira de Exercício Ótimo da Opção.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2002.

[4] BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities.** Journal of political economy, LXXXI (1973), 637-654

[5] BOYLE, P.P.; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. **Monte Carlo Methods for Security Pricing.** Monte Carlo methodologies and applications for pricing and risk management, 1998, Risk Books.

[6] BRENNAN, M.J.; SCHWARTZ, E.S. **Evaluating Natural Resource Investment.** Journal of Business, vol.58, no 2, 1985, pp.135-157.

[7] CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E.S.; CASASSUS, J. **Optimal Exploration Investments under Price and Geological-Technical Uncertainty: A Real Options Model.** R&D Management, vol.31, no 2, 2001, pp. 181-189.

[8] COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M. **Option Pricing: a Simplified Approach.** Journal of Financial Economics, no 7, 1979, pp.229-263.

[9] DAMODARAN, A. **The Promise and Peril of Real Options.** Stern School of Business.

[10] DIAS, M. A. G. **Investimento sob Incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 1996.

[11] DIAS, M. A. G. **Investment in Information in Petroleum, Real Options and Revelation.** Working Paper, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2002.

[12] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment Under Uncertainty.** Princeton University Press, 1994.

[13] FROTA, A. E. F. **Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2003.

[14] GAMBA, A. **Real Options Valuation: a Monte Carlo Approach.** Working Paper Series 2002/03, Faculty of Management, University of Calgary.

[15] GESKE, R. **The Valuation of Compound Options.** Journal of Financial Economics, no 7, 1979, pp.63-81.

[16] HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives.** Prentice Hall, third edition, 1997.

[17] HULL, J.C.; WHITE, A. **The Use of the Control Variable Technique in Option Pricing.** Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.23, no 3, September, pp.237-251.

[18] LONGSTAFF, F.A.; SCHWARTZ, E.S. **Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Square Approach.** Review of Financial Studies, vol.14, no 1, Spring 2001, pp.113-147.

[19] MCDONALD, R.; SIEGEL, D. **Option Valuation When the Underlying Asset Earns a Below-equilibrium Return: a Note.** Journal of Finance 39 (1984), 261-266.

[20] MYERS, S. **Using Simulation for Risk Analysis.** Modern Developments in Financial Management, New York, 1976.

[21] PADDOCK, J.; SIEGEL, D.; SMITH, J. **Option Valuation of Claims on Real Assets: the Case of Offshore Petroleum Leases.** Quarterly Journal of Economics 103 (August 1988), pp479-508.

[22] Site de opções reais **http://sphere.rdc.puc-rio.br/marco.ind,** último acesso em 10/01/2004.

[23] TRIGEORGIS, L. **Valuing Real Investment Opportunities: an Options Approach to Strategic Capital Budgeting.** Tese de Doutorado, Harvard University, 1986.

Apêndice A: Técnicas de Redução de Variância

Variáveis Antitéticas

Esta é uma das técnicas mais usadas em finanças devido à sua simplicidade. Para explicar melhor a técnica, vamos considerar que desejamos fazer simulações de preços S_t para posteriormente avaliar uma opção sobre este ativo. Sendo a opção do tipo européia, as simulações de preço final S_T do ativo podem ser feitas da seguinte forma:

- Geração de N números aleatórios a partir de uma distribuição normal padronizada (Z_i);
- Cálculos dos N preços finais simulados, a partir da fórmula:

$$S_T^i = S_0 \exp\left[\left(r - \sigma^2/2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right], \qquad \text{i = 1, 2, ..., N}$$

O método das variáveis antitéticas se baseia na constatação de que, se Z_i tem uma distribuição normal padronizada, então $-Z_i$ também terá. Assim, o preço S_T^i calculado com $-Z_i$ no lugar de Z_i também é válido para determinar o preço da opção.

Portanto, a vantagem deste método é que, para gerar N simulações de preços S_T, será necessário gerar apenas N / 2 números aleatórios a partir de uma distribuição normal padronizada.

Variáveis de Controle

Esta técnica pode ser aplicada quando há dois ativos semelhantes, A e B: o ativo B tem solução analítica e deseja-se determinar o valor do ativo A. São realizadas em paralelo duas simulações usando a mesma raiz de números aleatórios e o mesmo Δt. A primeira é usada para obter uma estimativa $\hat{f}_A$ do ativo A, enquanto a segunda é usada para obter uma estimativa $\hat{f}_B$ do ativo B.

Feito isso, uma melhor estimativa f_A do valor de A é obtido a partir da seguinte fórmula:

$$f_A = \hat{f}_A - \hat{f}_B + f_B\,, \qquad \text{onde } f_B \text{ é o verdadeiro valor de B.}$$

<u>*Método Moment Matching*</u>

Esta técnica consiste em ajustar as simulações tomadas para uma distribuição normal padronizada de forma que o primeiro, segundo e possivelmente outros momentos sejam atingidos. Para fazer isso, tomamos N simulações ε_i, realizadas a partir de uma distribuição normal qualquer, calculamos sua média m e seu desvio padrão s, e então as ajustamos com a seguinte fórmula:

$$y_i = \frac{\varepsilon_i - m}{s} \qquad i = 1, 2, ..., N$$

As simulações ajustadas terão agora média zero e desvio padrão igual a um. Esta transformação reduz o custo computacional, mas pode levar a problemas de memória, uma vez que cada amostra original precisa ser armazenada até o final da simulação. Esta técnica também é conhecida como *quadratic resampling*.

Além de transformar a amostra de simulações para obter momentos específicos, também se pode atingir este objetivo através da inclusão de pontos adicionais à amostra.

<u>*Importance Sampling*</u>

Este método é mais facilmente entendido com um exemplo. Suponha que queremos calcular o preço de uma call *que está deep-out-of-the-money,* com preço de exercício X. Se realizarmos as simulações da maneira usual, em muitas trajetórias de preços o *payoff* da opção será nulo. Isso representa um custo computacional desnecessário, pois estas trajetórias pouco contribuem para a determinação do valor da call. O método consiste em escolher somente trajetórias que sejam consideradas importantes, ou seja, trajetórias que levem a um preço da ação maior que X.

Seja F a função de distribuição de probabilidades para o preço da ação (P_T) e k a probabilidade deste preço ser maior que X na data de vencimento (T) da opção. Admitindo que k pode ser obtido analiticamente, podemos encontrar a distribuição de probabilidades de P_T, condicionada ao fato de que P_T seja maior que X, se tomarmos G = F / k. Feito isso, geramos os números aleatórios a partir da distribuição condicionada G, e estimamos o valor da opção a partir do *payoff* médio descontado a valor presente e multiplicado por k.

Amostragem Estratificada

Esta técnica força certas probabilidades empíricas a atingir probabilidades teóricas, da mesma forma que *moment matching* conduz momentos empíricos a atingir momentos teóricos. Isto é obtido dividindo-se a distribuição de probabilidades em intervalos e realizando as simulações dentro de cada intervalo, de acordo com a sua probabilidade.

Considere, por exemplo, que se deseja gerar 100 números aleatórios a partir de uma determinada distribuição normal Z. A distribuição empírica de uma amostra independente Z_1, Z_2, ... , Z_{100} provavelmente não será muito parecida com a densidade normal. As caudas desta distribuição certamente serão subestimadas. A amostragem estratificada pode ser usada para garantir que, em cada percentil da distribuição de probabilidades, haja uma observação. A distribuição desta nova amostra será mais próxima de uma densidade normal. Se for usado um número de intervalos bastante elevado, pode-se trabalhar apenas com a média ou mediana de cada intervalo.

Hipercubo Latino

A técnica da amostragem estratificada, vista anteriormente, pode ser aplicada em casos envolvendo várias dimensões. Porém, a dificuldade quando lidamos com muitas dimensões é que gerar uma amostra estratificada de tamanho n^d, onde d é o número de dimensões e n é o número de estratos em cada dimensão, será proibitivo a não ser que n seja pequeno. A amostragem por hipercubos latinos pode ser vista como uma maneira de selecionar aleatoriamente n pontos de uma amostra estratificada, preservando em parte a regularidade da estratificação. O método aloca um valor para cada dimensão ao menos uma vez em cada estrato.

Apêndice B: Formulação Matemática do Modelo de Paddock, Siegel & Smith

No equilíbrio, o retorno esperado da posse de uma reserva não-desenvolvida deve compensar o proprietário da reserva pelo seu custo de oportunidade. Sendo B_t o volume de petróleo numa reserva desenvolvida, V_t o valor unitário do petróleo e R_t o retorno instantâneo do proprietário da reserva (todas as variáveis no instante t), podemos assumir que a taxa de retorno para o proprietário segue um MGB:

$$R_t dt / B_t V_t = \alpha_v^* dt + \sigma_v dz_v$$

onde α_v^* é o retorno esperado pelo proprietário, σ_v é o desvio padrão da taxa de retorno e dz_v o incremento do processo de Wiener. O retorno R_t provém dos lucros com a produção e do ganho de capital devido às variações no preço de petróleo. Suponha que a produção de uma reserva desenvolvida apresente um declínio exponencial (suposição largamente usada pela indústria petrolífera como primeira estimativa para a curva de produção de novos campos):

$$dB_t = -\gamma B_b dt$$

O retorno do proprietário desta reserva é formado por dois componentes: os benefícios provenientes da produção (dividendos) e os benefícios devidos à valorização da reserva (ganho de capital). Para um intervalo dt, o retorno (R_t) será dado pela seguinte equação:

$$R_t dt = \{\gamma B_t P_t dt\} + \{(1-\gamma dt) B_t (V_t + dV_t) - B_t V_t\} = \gamma B_t P_t dt + B_t dV_t - \gamma B_t V_t dt$$

onde P_t é o lucro operacional por unidade de barril vendido. Substituindo na equação anterior, obtemos o processo para o valor de uma reserva desenvolvida em produção:

$$dV/V = (\alpha_v^* - \delta_t) dt + \sigma_v dz_v \qquad \textit{(Equação A)}$$

onde $\delta_t = \gamma[P_t - V_t]/V_t$ é a taxa de distribuição dos fluxos de caixa (*dividend yield*).

Fica claro que, no equilíbrio, nenhum agente irá manter uma reserva desenvolvida sem produzir, pois a taxa esperada de retorno de uma reserva desenvolvida sem produção (α_v) é menor do que a taxa de retorno exigida (α_v^*) para um ativo com risco $\sigma_v dz_v$.

Para determinar o valor de uma reserva não-desenvolvida (X(V,t)), vamos assumir que α_v^*, σ_v e δ_t são constantes ao longo do período de arredamento. Pelo Lema de Ito, sabemos que:

$$dX = X_v\, dV + ½\, X_{v\,v}\, (dV)^2 + X_t\, dt \qquad \textit{(Equação B)}$$

Elevando ao quadrado a equação A e desprezando os termos dt de ordem maior que 1, temos:

$$(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$$

Substituindo este resultado na equação A, obtém-se:

$$dX = X_v\, dV + ½\, \sigma^2\, V^2 X_{vv}\, dt + X_t\, dt$$

Utilizando-se o método dos ativos contingentes, podemos montar uma carteira sem risco (Φ) comprando (posição longa) uma opção (X) e vendendo (posição curta) ***n*** unidades do ativo *V*. O valor de *n* varia ao longo do tempo de forma a tornar a carteira livre de risco. Pode-se provar facilmente que o valor de *n* é igual à derivada da opção em relação a *V*. No mercado financeiro, *n* é chamado de *delta*. Assim, a carteira vale: $\Phi = X - n\, V = X - X_V\, V$. Dessa forma, o retorno total da carteira será dado por:

$$r\, \Phi\, dt = r\, (X - X_V\, V)\, dt \qquad \textit{(Equação C)}$$

Mas o retorno total é formado por duas parcelas:

- Posição longa: dX
- Posição curta: $X_V\, (\gamma P\, dt + dV - \gamma V\, dt)$
- Retorno da carteira = $dX - X_V\, (\gamma P\, dt + dV - \gamma V\, dt)$ *(Equação D)*

Igualando as equações C e D, e substituindo o valor de dX, teremos:

$$r\,(X - X_V\,V)\,dt = \cancel{X_V\,dV} + ½\,\sigma^2\,V^2\,X_{VV}dt + X_t dt - X_V\,\gamma P\,dt - \cancel{X_V\,dV} + X_V\,\gamma V\,dt$$

Eliminando dt da equação acima, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$½\,\sigma^2\,\boldsymbol{V^2\,X_{VV} + (r - \delta)\,V\,X_V - r\,X + X_t = 0} \qquad \textit{(Equação E)}$$

Esta equação é válida tanto para opções de compra (*call*) como de venda (*put*), tanto para opções do tipo européia, como do tipo americana. As condições de contorno é que determinarão o tipo de opção, sendo que a condição de suavidade só existe para a opção americana, que pode ser exercida antes da data de vencimento. Também deve ser ressaltado que, na ausência de dividendos (δ = 0), a equação E se reduz a clássica equação de Black & Scholes. As condições de contorno desta equação diferencial parcial (EDP) são:

- X (0 , t) = 0;
- X (V , 0) = Max [0, V – D];
- X (V*, t) = V* - D, onde V* representa a curva de gatilho do investimento.

A equação E não tem solução analítica e pode ser resolvida através de métodos numéricos, como o método das diferenças finitas. Entretanto, por ela ser usada no mercado financeiro e conseqüentemente ser muito estudada, existem diversas aproximações analíticas para a solução da equação, que são bem menos custosas em termos computacionais, além de não apresentar problemas típicos de métodos numéricos.

Para o caso de uma opção perpétua de investimento (não há tempo de vencimento dos direitos, ou ele é muito grande), como no caso de um monopólio estatal do petróleo, existe solução analítica. A EDP vira uma equação diferencial ordinária(EDO), pois F_t é nulo, e tem uma solução analítica, conforme mostrada no capítulo 5 do livro do Dixit & Pindyck. Essa solução é:

$$F = A V^{\beta_1}$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} D$$

Onde a constante A e a raiz positiva da equação característica β_1 são dados por:

$$A = (V^* - D) / (V^*)^{\beta 1}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Apêndice C: Descrição Matemática do Modelo de Cortazar, Schwartz & Casassus

Para formalizar o modelo, definimos um fator de risco técnico-geológico G que segue um MGB com drift zero:

$$\frac{dG}{G} = \sigma_G dw_G$$

onde G é independente de S (preço da *commodity*). O valor da reserva H (S,G) pode então ser modelado como função de S e G. Agora, definimos uma nova variável de estado Z, e uma função de S e G, tal que

- H (Z) = H (S,G)
- Z = F (S,G)

Aplicando o lema de Ito, obtemos:

$$\frac{dZ}{Z} = \left(F_S S(r-c) + \frac{1}{2} F_{SS} S^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{2} F_{GG} G^2 \sigma_G^2 \right) dt + F_S S \sigma_S dw_S + F_G G \sigma_G dw_G$$

O modelo pode ser simplificado se assumirmos que Z = SG. Isso equivale a assumir que uma variação em qualquer um dos fatores (S ou G) provoca o mesmo efeito no valor da reserva (Z). O processo desta nova variável de estado torna-se:

$$dZ = (r-c)dt + \sigma_S dw_S + \sigma_G dw_G$$

Assim, Z pode ser visto como o preço modificado da *commodity*, com o mesmo drift (r-c) e com volatilidade $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_G^2}$.

Valor de uma reserva desenvolvida

Antes do início dos investimentos em exploração, há uma lista M de possíveis tipos de reserva que pode ocorrer. Cada um dos tipos de reserva é avaliado usando o modelo de Brennan & Schwartz (1985):

$$\max_{q_P^i}\left[\frac{1}{2}V_{SS}^i S^2\sigma_S^2 + (r-c)SV_S^i - q_P^i V_Q^i + q_P^i\left(S-a^i\right) - (r+\lambda)V^i\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}W_{SS}^i S^2\sigma_S^2 + (r-c)SW_S^i - m^i - (r+\lambda)W^i = 0$$

sujeito às condições de contorno:

- $W^i\left(S_0^{*i}, Q\right) = 0$
- $V^i\left(S_1^{*i}, Q\right) = \max\left[W^i\left(S_1^{*i}, Q\right) - K_1^i, 0\right]$
- $W^i\left(S_2^{*i}, Q\right) = V^i\left(S_2^{*i}, Q\right) - K_2^i$
- $W_S^i\left(S_0^{*i}, Q\right) = 0$
- $V_S^i\left(S_1^{*i}, Q\right) = \begin{cases} W_S^i\left(S_1^{*i}, Q\right) & \text{se} \quad S \le S_d^{*i} \\ 0 & \text{se} \quad S \ge S_d^{*i} \end{cases}$
- $W_S^i\left(S_2^{*i}, Q\right) = V_S^i\left(S_2^{*i}, Q\right)$
- $V^i(S,0) = 0$
- $W^i(S,0) = 0$
- $V^i(0,Q) = 0$
- $W^i(0,Q) = 0$
- $\lim_{S\to\infty} V_{SS}(S,Q) = 0$
- $\lim_{S\to\infty} W_{ss}^i(S,Q) = 0$

onde:

V^i = valor da reserva quando a decisão ótima é abrir

W^i = valor da reserva quando a decisão ótima é fechar

Q = volume da reserva

q_p^i = taxa de produção da reserva i

S_0^{*i} = preço crítico abaixo do qual é ótimo abandonar a reserva

S_1^{*i} = preço crítico abaixo do qual é ótimo fechar a reserva

S_2^{*i} = preço crítico abaixo do qual é ótimo abrir a reserva

K_1^i = custo de fechar a reserva i

K_2^i = custo de abrir a reserva i

m^i = custo anual de manter a reserva fechada

λ = risco-país (ou probabilidade de expropriação)

<u>Valor de uma reserva não-desenvolvida</u>

Assumindo que a decisão de realizar os investimentos em desenvolvimento já tenha sido tomada, e que tais investimentos estão em andamento, o valor da reserva deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{1}{2}U_{SS}^i S^2 \sigma_S^2 + (r-c)SU_S^i - U_T^i - (r+\lambda)U^i = 0$$

sujeito às condições de contorno:

- $U^i(0,T) = 0$
- $\lim_{S\to\infty} U_{SS}^i(S,T) = 0$
- $U^i(S,0) = V^i(S,Q)$

Sendo H o valor da reserva antes dos investimentos em desenvolvimento, temos:

$$\frac{1}{2}H_{SS}^i S^2 \sigma_S^2 + (r-c)SH_S^i - (r+\lambda)H^i = 0$$

sujeito as seguintes condições de contorno:

- $H^i(0) = 0$

- $H^i(S) = \begin{cases} H^i(S) \\ U^i(S, T_d^i) \end{cases}$

onde:

I_d^i = investimento em desenvolvimento

T_d^i = tempo do estágio de desenvolvimento (após o investimento ser realizado)

S_d^{*i} = preço crítico abaixo do qual é ótimo investir

Uma vez que todas as reservas são avaliadas, pode-se obter o valor esperado da reserva através da multiplicação dos valores por suas probabilidades α^i:

$$H(S) = \sum_{i=1}^{M} \alpha^i H^i(S)$$

<u>Valor de um projeto de exploração</u>

Finalmente, vamos obter o valor de um projeto de exploração. Assumiremos que, enquanto o projeto está em andamento e os investimentos em exploração estão sendo realizados, o valor do projeto é X e, enquanto a decisão ótima é parar o projeto, seu valor é Y.

A solução é obtida para cada estágio j de exploração, através de um processo *backward*. As equações para um estágio intermediário qualquer são:

$$\max_{q_j^i}\left[\frac{1}{2}X_{ZZ}^j Z^2 \sigma_Z^2 + (r-c)ZX_Z^j + q_i^j X_i^j - q_i^j - (r+\lambda+\gamma^j)X^j\right] = 0 \,,$$

$$\frac{1}{2}Y_{ZZ}^j Z^2 \sigma_S^2 + (r-c)ZY_Z^j - (r+\lambda)Y^j = 0$$

sujeito à:

- $X^j(0, I) = 0$
- $Y^j(0, I) = 0$

- $\lim_{Z \to \infty} X_{ZZ}^{j}(Z, I) = 0$
- $X^{j}(Z, I^{j}) = X^{j+1}(Z, 0)$ se $Z \geq Z^{*j}$
- $Y^{j}(Z, I^{j}) = Y^{j+1}(Z, 0)$ se $Z \leq Z^{*j}$

Para o último estágio, as duas últimas condições de contorno são trocadas por:

- $X^{n}(Z, I^{n}) = H(Z)$ se $Z \geq Z^{*n}$
- $Y^{n}(Z, I^{n}) = H(Z)$ se $Z \geq Z^{*n}$

onde:

I = investimento acumulado em exploração em cada estágio
q_i^j = taxa de investimento no estágio j
I^j = valor presente do investimento durante o estágio j
T^j = tempo de exploração no estágio j
p^j = probabilidade de sucesso no estágio j
Z^{*j} = preço crítico de investimento no estágio j
γ^j = probabilidade de Poisson de sucesso no estágio j

Apêndice D: Algoritmos Para Avaliação de Opções

D.1. Avaliação de Call Americana Através do Método Binomial

```
% Dados de Entrada
r = 0.10; % taxa de juros livre de risco
P0 = 720; % preço inicial do ativo base
sigma = 0.2; % volatilidade
E = 800; % preço de exercício da opção
q = 0.05; % taxa de dividendos
alfa = r - q; % drift do MGB para o preço do petróleo
T = 10; % data de vencimento da opçao
n = 1000; % numero de passos da arvore binomial

V1 = [];

% Calculos Intermediarios
dt = T/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% Valor da Opcao de Expandir
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
   V1(i,j) = max(P0 * u^(j-i) * d^(i-1) - E, 0);
end

j = n;
while j > 0
   for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
      V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,P0 * u^(j-i) * d^(i-1) - E);
   end
   j = j-1;
end

% Valor do Projeto
```

```
v_opcao = V1(1,1)
```

D.2. Avaliação de Call Americana Através do Método LSM

```
% 1 -  DADOS DE ENTRADA:
r = 0.10; % r = taxa de juro livre de risco
P0 = 720; % P0 = valor inicial do ativo base
sigma = 0.2; % sigma = volatilidade do valor do ativo
E = 800; % E = preço de exercício da opçao
q = 0.05; % q = dividendos
alfa = r - q; % alfa = drift (tendencia) do valor do ativo
T = 6; % T = data de vencimento da opçao
m = 5000; % m = numero de simulacoes
n = T; % n = numero de intervalos de tempo


m1 = m / 2;
VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 1 % Definir o numero de iteracoes do processo

% 2 - SIMULACOES DE PRECOS
   LSM = zeros(m,n);
            dt = T / n;
   VA1 = randn(m1,n);
   VA = [VA1; -VA1];

   clear VA1

   k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
   k2 = sigma * realsqrt(dt);
   LSM(:,1) = P0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
            for j = 2:n
         LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
   end

   clear VA

% 3 - AVALIACAO DA OPCAO
            D2 = [];
            Dnovo = zeros(m,1);
% 3.1 - Definicao da matriz de fluxo de caixa
```

```
  FC = max(LSM - E,0);
        D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;

  c = n;
        while c > 1
% 3.2 - Calculo do No. de simulacoes em que a opcao esta in-the-money em (c-1)
    b = 0;
    for d = 1:m
      if FC(d,c-1) > 0
        b = b+1;
      end
    end
    P = zeros(b,1);
    M = zeros(b,1);
    N = zeros(b,1);
    b = 0;

% 3.3 - Determinacao de N e M
% N = valor de exercicio imediato das simulacoes in-the-money em (c-1)
% M = valor de continuacao das simulacoes in-the-money em (c-1)
    for x = 1:m
      if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:n
          h = h + 1;
          if D2(x,g) == 1
            M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
          end
        end
      end
    end

% 3.5 - Regressao linear de M com relacao a potencias de P
% Yhat = valor esperado de continuacao, dado pela regressao
%       [p,s]=polyfit(P,M,8);
%       Yhat=polyval(p,P);
    [p,s,mu]=polyfit(P,M,8);
    Yhat=polyval(p,P,[],mu);

% 3.6 - Atualizacao da matriz de decisoes (D2)
% Correcao do valor da opcao (V2)
    b = 0;
```

```
        for x = 1:m
            if FC(x,c-1) > 0
                b = b + 1;
                if N(b,1) >= Yhat (b,1)
                    D2(x,c-1) = 1;
                    for g = c:n
                    D2(x,g) = 0;
                    end
                end
            end
        end
        c = c - 1;
              end

% 3.7 - Calculo do valor da opçao
              for x = 1:m
        for y = 1:n
            if D2(x,y) == 0
                FC(x,y) = 0;
            end
        end
              end

              V = zeros(m,1);
              for y = 1:n
        V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
              end
              v_opcao(sim,1) = sum(V) / m;
    sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao
```

D.3. Avaliação de Put Americana Através do Método Binomial

```
% Dados de Entrada
r = 0.10; % taxa de juro livre de risco
P0 = 720; % preço inicial do ativo base
sigma = 0.2; % volatilidade do preço do ativo
E = 800; % preço de exercício da opção
q = 0.05; % taxa de dividendos
alfa = r - q; % drift (tendencia) do preço do ativo
T = 10; % data de vencimento da opçao
n = 1000; % numero de passos da arvore binomial
```

```
V1 = [];


% Calculos Intermediarios
dt = T/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% Valor da Opção
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
   V1(i,j) = max(E - P0 * u^(j-i) * d^(i-1), 0);
end

j = n;
while j > 0
   for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
      V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,E - P0 * u^(j-i) * d^(i-1));
   end
   j = j-1;
end

% Valor do Projeto

v_opcao = V1(1,1)
```

D.4. Avaliação de Put Americana Através do Método LSM

```
% 1 -  DADOS DE ENTRADA:
r = 0.10; % r = taxa de juro livre de risco
P0 = 720; % P0 = valor inicial do ativo
sigma = 0.15; % sigma = volatilidade do valor do ativo (desvio padrao)
E = 800; % preço de exercício da opção
q = 0.05; % q = dividendos
alfa = r - q; % alfa = drift (tendencia) do valor do ativo
T = 6; % T = data de vencimento da opção
m = 20000; % m = numero de simulacoes
n = T; % n = numero de intervalos de tempo


m1 = m / 2;
```

```
VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 20 % Definir o numero de iteracoes do processo

% 2 - SIMULACOES DE PRECOS
   LSM = zeros(m,n);
           dt = T / n;
   VA1 = randn(m1,n);
   VA = [VA1; -VA1];

   clear VA1

   k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
   k2 = sigma * realsqrt(dt);
   LSM(:,1) = P0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
           for j = 2:n
         LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
   end

   clear VA

% 3 - AVALIACAO DA OPCAO DE EXPANDIR
           D2 = [];
           Dnovo = zeros(m,1);
% 3.1 - Definicao da matriz de fluxo de caixa
   FC = max(E - LSM,0);
           D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;

   c = n;
           while c > 1
% 3.2 - Calculo do No. de simulacoes em que a opcao esta in-the-money em (c-1)
      b = 0;
      for d = 1:m
         if FC(d,c-1) > 0
            b = b+1;
         end
      end
      P = zeros(b,1);
      M = zeros(b,1);
      N = zeros(b,1);
      b = 0;

% 3.3 - Determinacao de N e M
```

```
% N = valor de exercicio imediato das simulacoes in-the-money em (c-1)
% M = valor de continuacao das simulacoes in-the-money em (c-1)
    for x = 1:m
        if FC(x,c-1) > 0
            b = b + 1;
            P(b,1) = LSM(x,c-1);
            N(b,1) = FC(x,c-1);
            h = 0;
            for g = c:n
                h = h + 1;
                if D2(x,g) == 1
                    M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
                end
            end
        end
    end

% 3.5 - Regressao linear de M com relacao a potencias de P
% Yhat = valor esperado de continuacao, dado pela regressao
%       [p,s]=polyfit(P,M,8);
%       Yhat=polyval(p,P);
    [p,s,mu]=polyfit(P,M,4);
    Yhat=polyval(p,P,[],mu);

% 3.6 - Atualizacao da matriz de decisoes (D2)
% Correcao do valor da opcao (V2)
    b = 0;
    for x = 1:m
        if FC(x,c-1) > 0
            b = b + 1;
            if N(b,1) >= Yhat (b,1)
                D2(x,c-1) = 1;
                for g = c:n
                D2(x,g) = 0;
                end
            end
        end
    end
    c = c - 1;
       end

% 3.7 - Calculo do valor do projeto
       for x = 1:m
    for y = 1:n
        if D2(x,y) == 0
```

```
            FC(x,y) = 0;
          end
        end
            end

            V = zeros(m,1);
            for y = 1:n
        V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
            end
            v_opcao(sim,1) = sum(V) / m;
    sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao
```

D.5. Avaliação do Projeto A Através do Método Binomial

```
% Dados de Entrada
r = 0.10; % taxa de juros livre de risco
P0 = 18; % preço inicial do petroleo
sigma = 0.2; % volatilidade
c_unit = 5;  % c_unit = custo unitario de extracao de petroleo
q = 0.05; % taxa de dividendos
alfa = r - q; % drift (tendencia)
Q = 0.20; % Q = qualidade economica da reserva (VÁLIDO PARA O CENÁRIO 1)
B = 100; % B = volume da reserva (VÁLIDO PARA O CENÁRIO 1)
t2 = 10; % data de vencimento da opção americana de expansão
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção européia de expansão
n = 500; % numero de passos
V1 = [];

Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VÁLIDO PARA O CENÁRIO 3
B = random('Uniform',150,250,1,1); % VÁLIDO PARA OS CENÁRIOS 2 E 3
V0 = P0 * Q * B; % V0 = valor inicial do projeto
inv = c_unit * B; % inv = investimento para expandir o projeto

% Calculos Intermediarios
dt = t2/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% Valor da Opcao de Expandir
```

```
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
   V1(i,j) = max(V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv, 0);
end

j = n;
while j >= t1/dt + 1
   for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
      V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv);
   end
   j = j-1;
end

% Valor do Projeto

j = t1 / dt;
while j > 0
   for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
      V1(i,j) = (p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc;
   end
   j = j-1
end

v_opcao = V1(1,1)
```

D.6. Avaliação do Projeto A Através do Método LSM

```
% 1 -  DADOS DE ENTRADA:
r = 0.10; % r = taxa de juro livre de risco
P0 = 18; % s0 = valor inicial do ativo
sigma = 0.2; % sigma = volatilidade do valor do ativo (desvio padrao)
c_unit = 5;  % c_unit = custo unitario de extracao de petroleo
q = 0.05; % q = dividendos
alfa = r - q; % alfa = drift (tendencia) do valor do ativo
Q = 0.2; % Q = qualidade economica da reserva (VÁLIDO PARA O CENARIO 1)
B = 200; % B = volume da reserva (VÁLIDO PARA O CENARIO 1)
t2 = 10; % data de vencimento da opção americana de expansão
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção européia de expansão
m = 50000; % m = numero de simulacoes
n = 6 * t2; % n = numero de intervalos de tempo
```

```
m1 = m / 2;
VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 40 % Definir o numero de iteracoes do processo

% 2 - SIMULACOES DE PRECOS

   LSM = zeros(m,n);

   Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VÁLIDO PARA O CENARIO 3
   B = random('Uniform',150,250,1,1); % VÁLIDO PARA OS CENARIOS 2 E 3
   V0 = P0 * Q * B;
   inv = c_unit * B;

         dt = t2 / n;
   VA1 = randn(m1,n);
   VA = [VA1; -VA1];

   clear VA1

   k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
   k2 = sigma * realsqrt(dt);
   LSM(:,1) = V0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
         for j = 2:n
       LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
   end

   clear VA

% 3 - AVALIACAO DA OPCAO DE EXPANDIR
         D2 = [];
         Dnovo = zeros(m,1);
% 3.1 - Definicao da matriz de fluxo de caixa
   FC = max(LSM - inv,0);
         D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;

   c = n;
   cc = t1/dt;
         while c > cc
% 3.2 - Calculo do No. de simulacoes em que a opcao esta in-the-money em (c-1)
     b = 0;
     for d = 1:m
       if FC(d,c-1) > 0
```

```
            b = b+1;
        end
    end
    P = zeros(b,1);
    M = zeros(b,1);
    N = zeros(b,1);
    b = 0;

% 3.3 - Determinacao de N e M
% N = valor de exercicio imediato das simulacoes in-the-money em (c-1)
% M = valor de continuacao das simulacoes in-the-money em (c-1)
    for x = 1:m
        if FC(x,c-1) > 0
            b = b + 1;
            P(b,1) = LSM(x,c-1);
            N(b,1) = FC(x,c-1);
            h = 0;
            for g = c:n
                h = h + 1;
                if D2(x,g) == 1
                    M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
                end
            end
        end
    end

% 3.5 - Regressao linear de M com relacao a potencias de P
% Yhat = valor esperado de continuacao, dado pela regressao
%       [p,s]=polyfit(P,M,8);
%       Yhat=polyval(p,P);
    [p,s,mu]=polyfit(P,M,8);
    Yhat=polyval(p,P,[],mu);

% 3.6 - Atualizacao da matriz de decisoes (D2)
% Correcao do valor da opcao (V2)
    b = 0;
    for x = 1:m
        if FC(x,c-1) > 0
            b = b + 1;
            if N(b,1) >= Yhat (b,1)
                D2(x,c-1) = 1;
                for g = c:n
                D2(x,g) = 0;
                end
            end
```

```
            end
        end
        c = c - 1;
            end

% 3.7 - Calculo do valor do projeto
            for x = 1:m
        for y = 1:n
            if D2(x,y) == 0
                FC(x,y) = 0;
            end
        end
            end

            V = zeros(m,1);
            for y = 1:n
        V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
            end
            v_opcao(sim,1) = sum(V) / m
    sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao
```

D.7. Avaliação do Projeto B Através do Método Binomial

```
% DADOS DE ENTRADA
r = 0.1; % taxa de juros livre de risco
P0 = 18; % preço inicial do petróleo
sigma = 0.2; % Volatilidade
c_unit = 5; % custo unitário de investimento inicial
v_resg = 4; % valor de resgate do investimento inicial
q = 0.05; % Dividendos
alfa = r - q; % drift (tendência)
Q = 0.2; % Q = qualidade economica da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
B = 200; % B = volume da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
k = 0.5; % fator de redução de escala do projeto
t2 = 10; % data de vencimento da opção de reduçao
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção de espera
n = 500; % numero de passos da arvore binomial
V1 = [];
V2 = [];

v_opcao = [];
```

```
sim = 1
while sim <= 40 % Definir o numero de iteracoes do processo

% Calculos Intermediarios

Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VALIDO PARA O CENARIO 3
B = random('Uniform',150,250,1,1); % VALIDO PARA OS CENARIOS 2 E 3
V0 = P0 * Q * B;
inv = c_unit * B;
X = k * v_resg * B;

dt = t2/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% VALOR DA 2a. OPCAO DE REDUZIR
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
   V2(i,j) = max(X - k * V0 * u^(j-i) * d^(i-1), 0);
end

j = n;
while j >= t1/dt + 1
   for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
      V2(i,j) = max ((p*V2(i,j+1)+(1-p)*V2(i+1,j+1))*fdesc,X - k * V0 * u^(j-i) * d^(i-1));
   end
   j = j-1;
end

while j > 0
   for i = 1:j
      V2(i,j) = max ((p*V2(i,j+1)+(1-p)*V2(i+1,j+1))*fdesc,0);
   end
   j = j-1;
end

% VALOR DO PROJETO

j = t1 / dt + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
```

```
   V1(i,j) = max(V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv + V2(i,j), 0);
end

j = j - 1;
while j > 0
   for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
%        V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,s0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv);
      V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv + V2(i,j));
   end
   j = j-1;
end

         v_opcao(sim,1) = V1(1,1);
   sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao
```


D.8. Avaliação do Projeto B Através do Método LSM

```
% DADOS DE ENTRADA
r = 0.1; % taxa de juros livre de risco
P0 = 18; % preço inicial do petróleo
sigma = 0.2; % volatilidade
c_unit = 5; % c_unit = custo unitario de produçao de petroleo
v_resg = 4; % valor de resgate do investimento inicial
q = 0.05; % dividendos
alfa = r - q; % drift (tendência)
Q = 0.2; % Q = qualidade economica da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
B = 200; % B = volume da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
k = 0.5; % fator de redução de escala do projeto
t2 = 10; % data de vencimento da opção de reduçao
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção de espera
m = 50000; % numero de trajetórias de preço
n = t2; % numero de intervalos de tempo

m1 = m / 2;
VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 40
```

```
LSM = zeros(m,n);

    Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VALIDO PARA O CENARIO 3
    B = random('Uniform',150,250,1,1); % VALIDO PARA O CENARIOS 2 E 3
    V0 = P0 * Q * B;
    inv = c_unit * B;
    X = k * v_resg * B;

    dt = t2 / n;
    VA1 = randn(m1,n);
    VA = [VA1; -VA1];

    clear VA1

    k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
    k2 = sigma * realsqrt(dt);
    LSM(:,1) = V0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
          for j = 2:n
        LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
    end

    clear VA

% AVALIACAO DA OPCAO DE CONTRAIR
          D2 = [];
          Dnovo = zeros(m,1);
          FC = max(X - k*LSM,0);


          V2 = zeros(m,n);
          V2(:,n) = FC(:,n);


          D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;
          c = n;
    cc = t1/dt;
          while c > cc
      b = 0;
      for d = 1:m
        if FC(d,c-1) > 0
          b = b+1;
        end
      end
      P = zeros(b,1);
      M = zeros(b,1);
```

```
N = zeros(b,1);
b = 0;


Imed = FC(:,c-1);
Cont = zeros(m,1);
for x = 1:m
    h = 0;
    for g = c:n
        h = h + 1;
        if D2(x,g) == 1
            Cont(x,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
        end
    end
end
V2(:,c-1) = max(Imed,Cont);

for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:n
            h = h + 1;
            if D2(x,g) == 1
                M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
            end
        end
    end
end

[p,s,mu]=polyfit(P,M,8);
Yhat=polyval(p,P,[],mu);

b = 0;
for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        if N(b,1) >= Yhat (b,1)
            D2(x,c-1) = 1;
            V2(x,c-1) = N(b,1);
            for g = c:n
            D2(x,g) = 0;
            end
```

```
        else
          V2(x,c-1) = Yhat(b,1);
        end
      end
    end
    c = c - 1;
       end

% AVALIACAO DO PROJETO
       cc = t1 / dt;
  D1 = [];
  FC = zeros(m, cc);
  for g = 1:cc
    FC(:,g) = max(LSM(:,g) - inv + V2(:,g),0);
  end

       D1(:,cc) = FC(:,cc) > Dnovo;
       c = t1 / dt;
       while c > 1
    b = 0;
    for d = 1:m
      if FC(d,c-1) > 0
        b = b+1;
      end
    end
    P = zeros(b,1);
    x1 = zeros(b,1);
    M = zeros(b,1);
    N = zeros(b,1);
    b = 0;

    for x = 1:m
      if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        x1(b,1) = V2(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:cc
          h = h + 1;
          if D1(x,g) == 1
            M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
          end
        end
      end
```

```
        end

        [p,s,mu]=polyfit(P+x1,M,8);
        Yhat=polyval(p,P+x1,[],mu);

        b = 0;
        for x = 1:m
            if FC(x,c-1) > 0
                b = b + 1;
                if N(b,1) >= Yhat (b,1)
                    D1(x,c-1) = 1;
                    for g = c:cc
                    D1(x,g) = 0;
                    end
                end
            end
        end
        c = c - 1;
              end

              for x = 1:m
        for y = 1:cc
            if D1(x,y) == 0
                FC(x,y) = 0;
            end
        end
              end

              V = zeros(m,1);
              for y = 1:cc
        V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
              end
              v_opcao(sim,1) = sum(V) / m;
    sim = sim + 1
end

v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao
```