

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Jéssica Correia de Souza

**A matemática dos mapas conformes:
Funções complexas aplicadas a
cartografia.**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Matemática
pelo Programa de Pós-graduação em Matemática,
do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro
Julho de 2020



Jéssica Correia de Souza

**A matemática dos mapas conformes:
Funções complexas aplicadas a cartografia.**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Marco Craizer

Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Humberto Bortolossi

Departamento de Matemática - UFF

Prof. Miguel Schnoor

Departamento de Matemática - UFF

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Jéssica Correia de Souza

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Atualmente trabalha como professora em rede privada de ensino.

Ficha Catalográfica

Souza, Jéssica Correia de

A matemática dos mapas conformes : funções complexas aplicadas a cartografia / Jéssica Correia de Souza ; orientador: Nicolau Corção Saldanha. – 2020.

75 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Mapas conformes. 3. Funções complexas. 4. Projeção estereográfica. 5. Projeção de Mercator. 6. Projeção Peirce Quincuncial. I. Saldanha, Nicolau Corção. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

A Deus, por me conceder vida e saúde para concluir este projeto.

A minha mãe, Maria Elizabeth, pela compreensão e apoio durante todo o curso.

Ao meu orientador Nicolau Saldanha, pela presteza, gentileza, disponibilidade e compartilhamento de conhecimento.

Aos professores: Cristiane Guedes, Christine Sertã, Luana de Azevedo, Marcos Craizer, Renata Rosa e Sinésio Pesco, por lecionarem o curso sempre visando a excelência em seus trabalhos.

Aos meus colegas de turma, por sempre darem a força necessária nos momentos difíceis.

A todos que contribuíram para a preparação do Exame de Qualificação, que me auxiliaram quando me faltou mobilidade por causa da lesão no pé sofrida pouco tempo antes do exame.

Aos meus alunos, por serem a força que me motiva a alcançar novos vãos.

Ao amigo Geraldo Bassani que tanto contribuiu no início da minha carreira como professora e pela presteza em me auxiliar em materiais para consulta.

Aos meus colegas de trabalho, por me ouvirem, incentivarem e ajudarem em todos os momentos.

A todos os familiares e amigos que com palavras, gestos e ações não me deixaram desistir.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Souza, Jéssica Correia; Saldanha, Nicolau Corção (Orientador). **A matemática dos mapas conformes: Funções complexas aplicadas a cartografia**. Rio de Janeiro, 2020, 65p. Dissertação de mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Janeiro.

Esta dissertação visa mostrar que a construção de alguns mapas, chamados mapas conformes, pode ser expressa por funções complexas e essa relação será mostrada ao longo do texto. Inicialmente são apresentadas as coordenadas esféricas utilizadas por geógrafos e matemáticos e a construção de um mapeamento da esfera terrestre no plano, projeção estereográfica. Nas seções seguintes, são apresentadas: definições e propriedades das funções complexas com ênfase em suas interpretações geométricas; alguns mapas gerados pelas funções exponencial, logarítmica e trigonométricas complexas; a relação entre função exponencial e o Mapa de Mercator; algumas características de uma função elíptica; a relação entre uma função elíptica e o Mapa Pierce Quincuncial.

Palavras-chave

Mapas Conformes; Funções Complexas; Projeção Estereográfica; Projeção de Mercator; Projeção Peirce Quincuncial, Funções Elípticas.

Abstract

Souza, Jéssica Correia; Saldanha, Nicolau Corção (Advisor). **The mathematics of the maps are in accordance: Complex functions applied to cartography.** Rio de Janeiro, 2020, 65p. Master Thesis - Department of Mathematics, Pontifical Catholic University of Rio Janeiro.

This master thesis aims to show that the construction of some maps, called conformal maps, can be expressed by complex functions and this relation will be shown through the text. First it will be presented the spherical coordinates used for geographers and mathematicians, and the construction of a mapping of the terrestrial sphere in the plane, stereographic projection. In the following sections, they are presented: Definitions and properties of complex functions with emphasis on their geometric interpretations; Some maps generated by the exponential, logarithmic and complex trigonometric functions; The relationship between exponential function and the Mercator Map; Some characteristics of an elliptical function; The relationship between an elliptical function and the Quincuncial Pierce Map.

Keywords

Conformal maps; Complex functions; Stereographic projection; Mercator projection; Peirce Quincuncial Projection; Elliptical functions.

Sumário

1. Introdução	13
2. Conceitos iniciais	18
2.1. O formato da Terra	18
2.2. Localização	20
2.3. Coordenadas esféricas	22
2.4. Projeção Estereográfica	23
3. Elementos da análise complexa	27
3.1. O Conjunto dos números complexos	27
3.2 Teoremas e Definições	32
3.3 O Princípio da Reflexão	39
4. Função Exponencial complexa e sua inversa	44
5. Zeros Pontos Críticos e Singularidades	50
6. Função Trigonométrica Complexa	54
7. Função Elíptica	65
8. Considerações finais	64
9. Referências bibliográficas	65

Lista de figuras

Figura 1 - Mapa de Mercator	13
Figura 2 - Representação Esférica, latitudes mantidas latitudes crescidas	14
Figura 3 - Projeção Estereográfica	14
Figura 4 - Formato Quincuncial	15
Figura 5 - Indicatriz de Tissot na esfera terrestre e mapa Adams World in a Square I	16
Figura 6 - Indicatriz de Tissot no mapa de Peirce Quincuncial e mapa de Mercator.	16
Figura 7 - Indicatriz de Tissot nos mapas Equidistant Conic e Balthasart.	17
Figura 8 - A Terra segundo os indianos	18
Figura 9 - Esferóide prolato e esferóide oblato	19
Figura 10 - Paralelos sobre a superfície terrestre Paralelo de latitude φ .	20
Figura 11: Meridianos sobre a superfície terrestre; Meridiano de longitude λ .	20
Figura 12: Meridianos e Paralelos sobre a superfície terrestre	21
Figura 13: Coordenadas esféricas utilizadas na matemática.	22
Figura 14: Projeção estereográfica(P') do ponto P.	23
Figura 15: Projeção Estereográfica dos hemisférios	25
Figura 16: Representação do número complexo z no plano de Argand-Gauss	29
Figura 17: Representação de z e seu conjugado no plano complexo	30

Figura 18: Representação polar de um número complexo.	31
Figura 19: Transformação por uma função complexa.	33
Figura 20: Transformação de B dada pela função $f(z)=z^2$.	33
Figura 21: Abertos: Conexo, mas não simplesmente conexo; Não conexo e Conexo e simplesmente conexo	37
Figura 22: Exemplo do Mapeamento de Riemann.	37
Figura 23: Reflexão da reta passando pela origem.	39
Figura 24: Reflexão na reta fora da origem	40
Figura 25: Reflexão na circunferência (Inversão).	41
Figura 26: Domínio e Imagem do exemplo 5.	41
Figura 27: Aplicação do Princípio da Reflexão	42
Figura 28: Domínio estendido pelo Princípio da Reflexão	42
Figura 29: Domínio estendido pelo Princípio da Reflexão	42
Figura 30: Definição geométrica da função exponencial complexa.	47
Figura 31: Transformação dada pela função $f(z)=z^2$	50
Figura 32: Exemplo de Ponto Crítico	51
Figura 33: Transformação pela função seno;	58
Figura 34: Função seno estendida pelo Princípio da Reflexão	59
Figura 35: Função seno.	59
Figura 36: função cosseno como translação da função seno	59
Figura 37: Função Cosseno	60
Figura 38: Função tangente no intervalo $0 < x < \pi$, $-\infty < y < \infty$	62
Figura 39: Função tangente na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$	62
Figura 40: Função cotangente na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$	63
Figura 41: Função cotangente na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$	63

Figura 42: Função secante na região na região $0 < x < \pi, -\infty < y < \infty$	64
Figura 43: Função cossecante na região $-\pi/2 < x < \pi/2, -\infty < y < \infty$	64
Figura 44: Domínio principal e imagem da função Elíptica.	65
Figura 45: Reflexão em relação a aresta do quadrado.	66
Figura 46: Reflexão em relação a circunferência na origem	66
Figura 47: Interpretação geométrica: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.	67
Figura 48: Interpretação geométrica: $f(iz) = if(z)$.	68
Figura 49: Interpretação geométrica: $f(-z) = -f(z)$.	68
Figura 50: Ilustração da dupla periodicidade da função.	69
Figura 51: Ilustração dos zeros da função	70
Figura 52: Ilustração dos polos da função	70
Figura 53: Ilustração dos pontos críticos da função	71
Figura 54: Função Elíptica estendida no plano.	72
Figura 55: Domínio e imagem da função elíptica estendida no plano.	72
Figura 56: Periodicidade do Mapa Quincuncial	73
Figura 57: Relação do Mapa de Pierce quincuncial e Projeção estereográfica.	73

Não é digno de saborear o mel aquele que se afasta da colméia por medo das picadelas das abelhas.

William Shakespeare.

1. Introdução

O desenvolvimento de alguns mapas e a teoria dos números complexos foram estudadas em diferentes épocas mas estão fortemente relacionadas. Este enlace será mostrado ao longo deste trabalho tendo como foco principal a interpretação geométrica das funções complexas, ou seja, a visualização das funções complexas como uma transformação do plano no plano.

As transformações dadas por funções complexas possuem a propriedade de serem conformes, isto é, os ângulos são preservados em regiões suficientemente pequenas (a definição formal será mostrada mais adiante). Esta propriedade no entanto antes mesmo de sua definição formal já era utilizada por cartógrafos de modo intuitivo.

Gerardus Mercator (1512 – 1594) desenvolveu em 1569 uma projeção conhecida como Projeção de Mercator. Esta projeção é conforme e mapeia parte da esfera terrestre em uma região retangular como na figura abaixo.

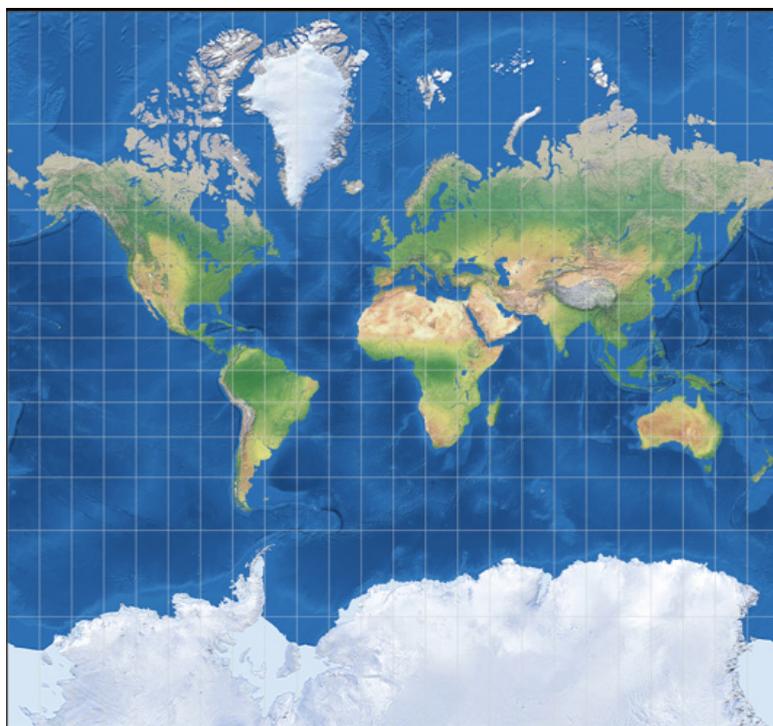


Figura 1: Mapa de Mercator.

Por Tobias Jung [CC BY-SA 4.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>)], via map-projections.net

Mercator utilizou em sua construção a ideia de Latitudes crescidas, ou seja, a distância entre meridianos é constante enquanto a distância entre os paralelos aumenta à medida que nos afastamos do Equador. Este procedimento permite que haja conformidade da projeção sob o prejuízo de escalas exageradas nas proximidades dos polos. Vale lembrar que a idéia de Mercator não envolvia o conhecimento sobre transformações conformes e tampouco funções complexas e que ele utilizava apenas uma noção geométrica intuitiva. Seu raciocínio para garantir que formatos fossem mantidos é ilustrado abaixo.

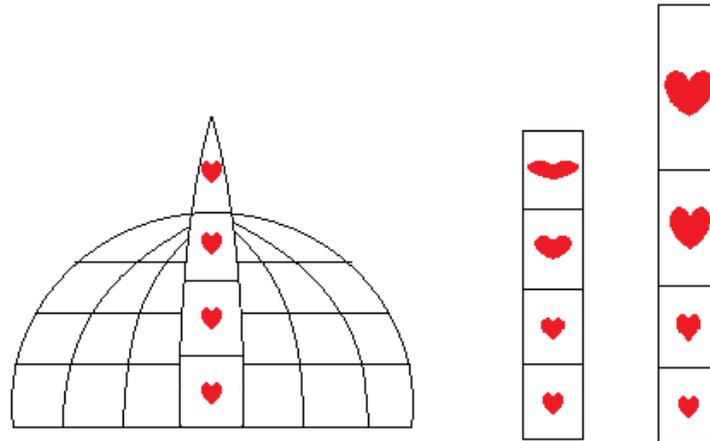


Figura 2: Representação Esférica, latitudes mantidas, latitudes crescidas.

A Projeção Estereográfica foi proposta por Hiparco no século II a.C no entanto tem seu registro mais antigo no Planisphaerium de Ptolomeu (século II d.C), é também uma projeção conforme e mapeia cada hemisfério em uma região circular. Sua construção consiste em projetar os pontos da esfera terrestre em um plano secante à esfera no Equador sob o ponto de vista de um observador localizado em um dos polos.

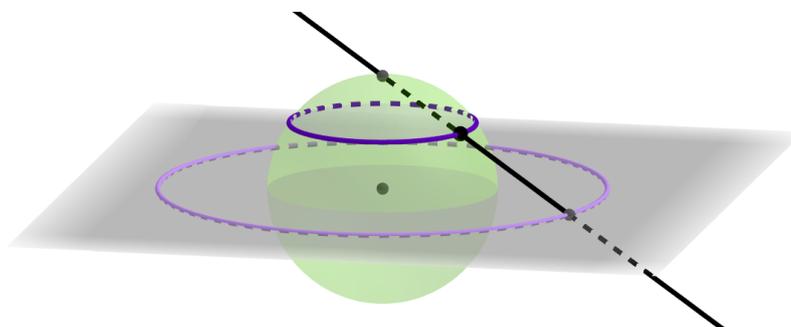


Figura 3: Projeção Estereográfica

A lei que define esta projeção bem como algumas propriedades serão mostradas no capítulo 2.

A Projeção de Mercator se relaciona com a Projeção estereográfica por meio da função exponencial complexa, em outras palavras, dado um mapa em projeção de Mercator e aplicando nele a função exponencial complexa obtemos o mapa na Projeção Estereográfica.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) introduziu as Funções Elípticas, estas funções possuem propriedades geométricas notórias, como veremos no capítulo 7. Utilizando esse conhecimento, Charles Sanders Peirce (1839-1914) desenvolveu uma projeção chamada Peirce Quincuncial que mapeia a esfera terrestre em um quadrado.

A Projeção Pierce Quincuncial é uma projeção conforme onde um dos hemisférios (geralmente o hemisfério Norte) é mapeado em um quadrado e o outro hemisfério é dividido em 4 triângulos retângulos dispostos como na figura a seguir

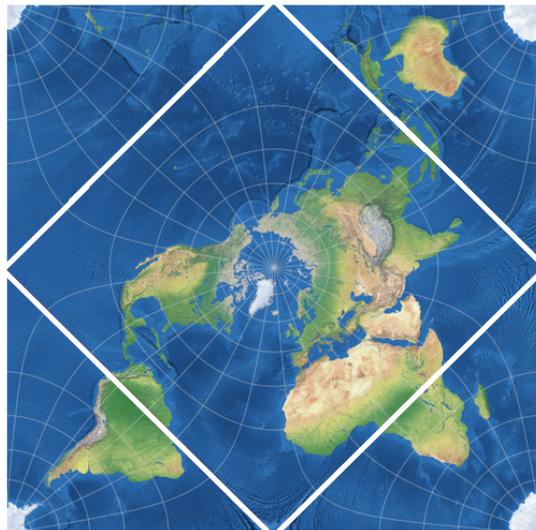


Figura 4: Formato Quincuncial

Por Strebe CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (Adaptado).

É exatamente da imagem acima que se origina o nome Quincuncial, por ser uma composição de 5 “peças”.

Uma das propriedades importantes a ser observada é o fato de que a imagem acima pode ser estendida por todo o plano, como um mosaico, ou seja, é periódica.

A Projeção Estereográfica pode ser levada em Projeção Pierce Quincuncial por meio de uma função complexa do tipo elíptica.

Uma ferramenta chamada Indicatriz de Tissot que foi desenvolvida pelo cartógrafo e matemático francês Nicolas Auguste Tissot pode auxiliar nesta análise de deformações. A ferramenta consiste na observação de círculos sobre a esfera terrestre e suas representações no mapa, como mostra a figura a seguir.

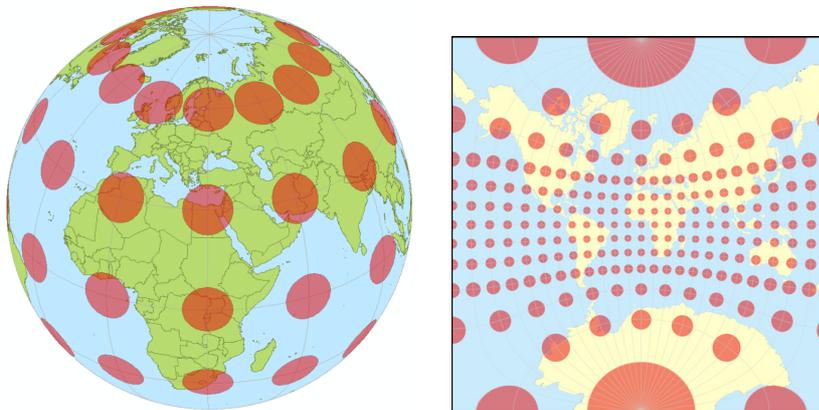


Figura 5: Indicatriz de Tissot na esfera terrestre e mapa Adams World in a Square I
Por Tobias Jung [CC BY-SA 4.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>)], via
map-projections.net

O mapa Adams World in a Square I (figura acima) é um mapa conforme e, assim como os demais mapas mostrados neste texto, a área de regiões nas proximidades dos polos são bastante afetadas. Observe os mapas de Mercator e Peirce Quincuncial:

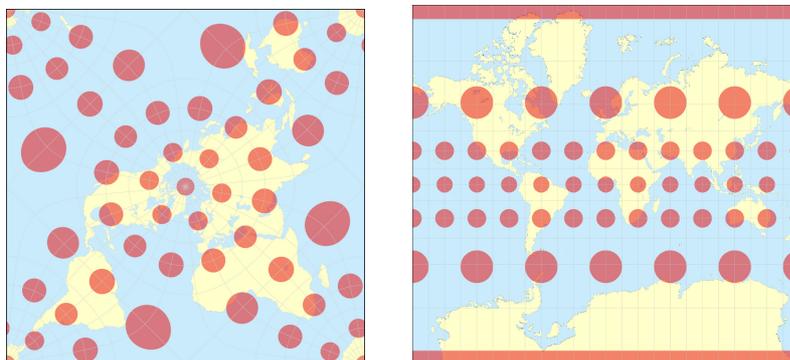


Figura 6: Indicatriz de Tissot no mapa de Peirce Quincuncial e mapa de Mercator.
Por Tobias Jung [CC BY-SA 4.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>)], via
map-projections.net

Vejamos alguns exemplos deste indicador em mapas não conformes:

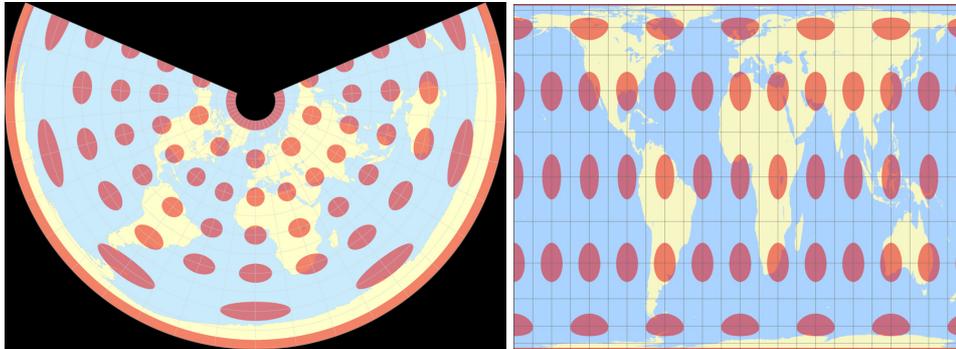


Figura 7: Indicatriz de Tissot nos mapas Equidistant Conic e Balthasart.

Por Tobias Jung [CC BY-SA 4.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>)], via map-projections.net

No primeiro exemplo, temos um projeção equidistante, isso é, onde a distância entre paralelos se mantém constante. No segundo exemplo, temos uma projeção que preserva áreas em ambas as imagens é evidente a não conformidade.

Ao longo do texto será apresentada a base teórica necessária, com elementos da análise complexa. Serão exibidos alguns exemplos de transformações por funções complexas e um estudo de algumas funções elementares.

O seguinte roteiro será seguido:

No segundo capítulo são apresentados um breve histórico sobre o formato da Terra, conceitos geográfico elementares como latitude e longitude e a lei da projeção estereográfica juntamente com algumas propriedades desta projeção.

No terceiro e quinto, toda a base matemática necessária para a compreensão das funções complexas, a conformidade e como ponto chave, o Mapeamento de Riemann.

No quarto, sexto e sétimo, os conceitos são aplicados, sendo finalmente mostrada a relação entre funções complexas e os mapas cartográficos conformes.

2. Conceitos Iniciais

2.1 O formato da Terra

O formato da Terra é uma discussão antiga e que se desenvolveu de modos diferentes ao redor do mundo, ou seja, não existe uma cronologia mundial acerca do conhecimento sobre o formato da Terra. Muitas civilizações acreditaram na ideia que a Terra seria uma superfície plana. Na China, por exemplo, essa crença foi aceita até o século XVII. No Egito antigo, em 2500 a.C. acreditava-se que a Terra era um disco na superfície de um grande oceano, sustentado por pilares e coberto por um firmamento. Na Índia, de acordo com a antiga religião védica, a Terra estaria apoiada sobre 12 pilares (figura 8). Na Grécia, o geógrafo e matemático Anaximandro sugeria a Terra como um disco plano que simplesmente flutuava no ar.

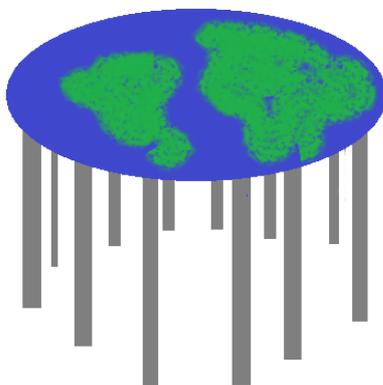


Figura 8: A Terra segundo os indianos.

Na filosofia grega e na escola Pitagórica, aproximadamente seis séculos antes de Cristo, surgem estudos que sugerem que a Terra é esférica. Considerando este fato, Eratóstenes, três séculos antes de Cristo, calculou o comprimento da circunferência terrestre, obtendo como resultado 40.000 km, uma aproximação muito boa, considerando a época e o procedimento bastante rudimentar utilizado por ele. (Detalhes do método utilizado por Eratóstenes podem ser consultados em [13]).

A discussão sobre o formato da Terra novamente ganhou forças no século XVII, enquanto o Holandês Christiaan Huygens calculou um formato elipsoidal e Newton concluiu que haveria um certo achatamento polar, modelo conhecido como esferóide oblato. Os cartesianos acreditavam haver um alongamento polar, modelo este denominado esferóide prolato.

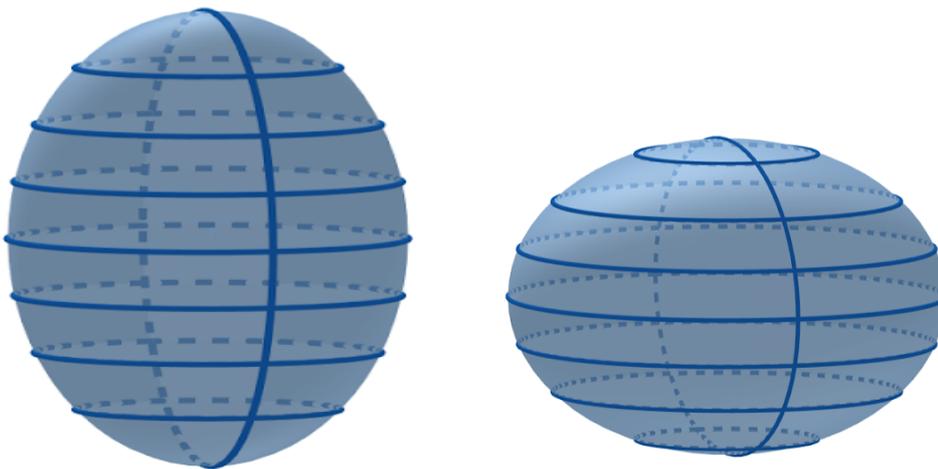


Figura 9: Esferóide prolato e esferóide oblato, respectivamente.

No século seguinte, constatou-se que Newton tinha razão a respeito do achatamento polar e este modelo foi vastamente difundido.

No período das grandes navegações, século XV, já era sabido aos intelectuais a esfericidade da Terra, no entanto, havia uma crença que a partir de certa latitude os navios poderiam “despencar” da superfície terrestre, isso porque somente no século seguinte Isaac Newton desenvolveu a famosa Lei da Gravitação Universal que explica esse fato.

O modelo da Terra considerado o mais próximo da realidade nos dias atuais foi proposto por Gauss em 1828 e denomina-se Geóide, que é uma forma bastante irregular e não possui definição matemática, sua construção tem por base o potencial do campo de gravidade. Por esse motivo é chamado modelo físico da Terra. Neste trabalho será utilizado o modelo esférico.

2.2 Localização

Considerando o modelo esférico, a Linha do Equador é um círculo que divide horizontalmente a Terra em dois hemisférios. Os círculos paralelos a este denominam-se Paralelos. Dado um ponto P sobre a esfera, a latitude é um ângulo φ , com $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, que indica sobre qual paralelo o ponto se encontra. Em outras palavras, para determinar a latitude de um ponto P na esfera unitária basta ligar P ao centro da esfera e medir o ângulo entre esta reta e o plano contendo o Equador.

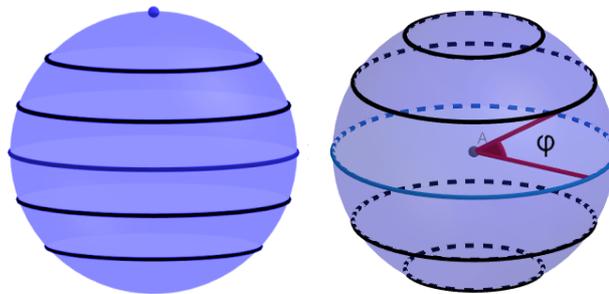


Figura 10: Paralelos sobre a superfície terrestre;
Paralelo de latitude φ .

Analogamente, sobre a superfície terrestre são traçados semi-círculos limitados pelos pólos, denominados Meridianos, sendo o Meridiano de Greenwich o marco zero. Dado um ponto P sobre a esfera, a longitude é uma ângulo λ , com $-\pi < \lambda < \pi$, que indica sobre qual paralelo o ponto se encontra. Em outras palavras, para determinar a longitude de um ponto P na esfera basta ligar P a origem e medir o ângulo entre esta reta e o plano contendo o Meridiano de Greenwich.

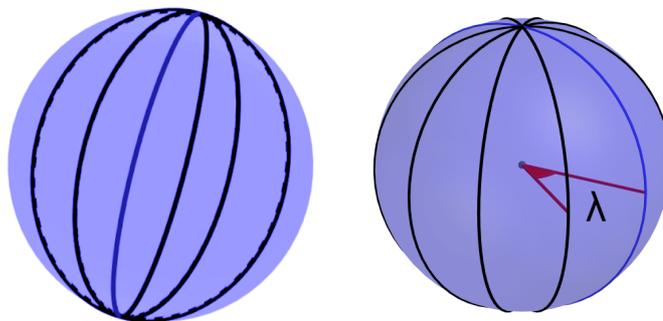


Figura 11: Meridianos sobre a superfície terrestre;
Meridiano de longitude λ .

Traçados sobre a mesma esfera os meridianos e os paralelos formam uma rede de localização (figura 12) sobre a superfície terrestre. Deste modo a localização de um ponto sobre a superfície está associado ao par (φ, λ) , coordenadas cartográficas de P.

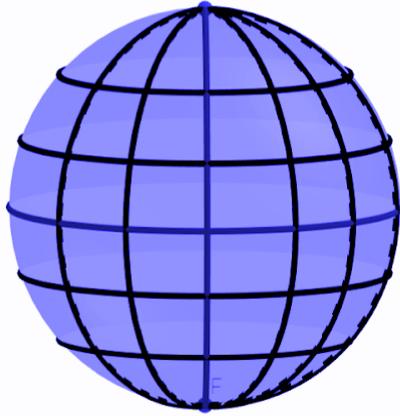


Figura 12: Meridianos e Paralelos sobre a superfície terrestre.

2.3 Coordenadas esféricas

As coordenadas descritas em 2.2 são utilizadas na geografia. Ao longo do texto será adotado o modelo matemático de coordenadas esféricas, isso é, dada uma esfera S^2 centrada na origem (O), um ponto P sobre esta esfera é escrito como $P = (r, \theta, \varphi)$ onde r é o raio da esfera, θ é o ângulo entre o eixo x e a projeção de OP no plano XY e φ é o ângulo entre OP e o eixo z . (Figura 13). Há ainda um terceiro modelo, utilizado pelos físicos, que não será apresentado aqui.

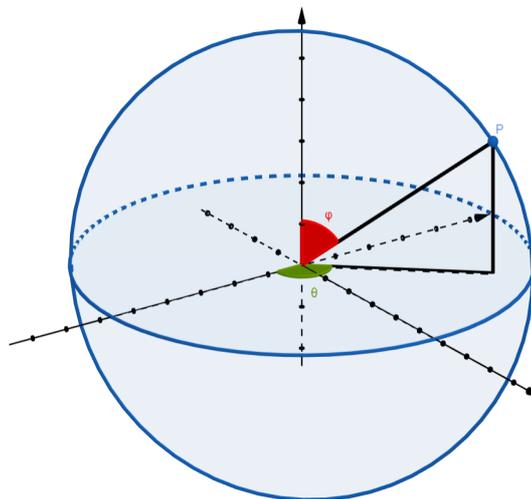


Figura 13: Coordenadas esféricas utilizadas na matemática.

Observando a figura 13, é possível concluir que as coordenadas retangulares de um ponto P da esfera são dadas por:

$$x = r \cdot \text{sen}(\varphi) \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot \text{sen}(\varphi) \text{sen}(\theta)$$

$$z = r \cdot \text{cos}(\varphi)$$

A fim de simplificar as construções, será utilizada uma representação da superfície terrestre, em escala reduzida, através de uma superfície esférica S^2 de raio 1 unidade de comprimento de centro $O = (0, 0, 0)$ e polos $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$, norte e sul, respectivamente. Ao longo do texto sempre que mencionada esfera S^2 , trata-se da esfera com essas propriedades.

2.4 Projeção estereográfica

As projeções cartográficas são métodos através dos quais a superfície terrestre é mapeada em um plano (chamado mapa ou carta). As projeções preservam algumas propriedades sob o “prejuízo” de apresentar algumas distorções, e justamente as propriedades preservadas são objeto de estudo deste trabalho, especialmente a conformidade, que trata-se da preservação de ângulos em regiões suficientemente pequenas (A definição formal matemática será apresentada mais adiante).

Consiste na projeção dos pontos da esfera S^2 sobre o plano π secante à esfera no Equador, sob a perspectiva de um observador localizado em um dos Polos. Na figura 14, está ilustrada a projeção P' de um ponto P da esfera com perspectiva do pólo norte (N).

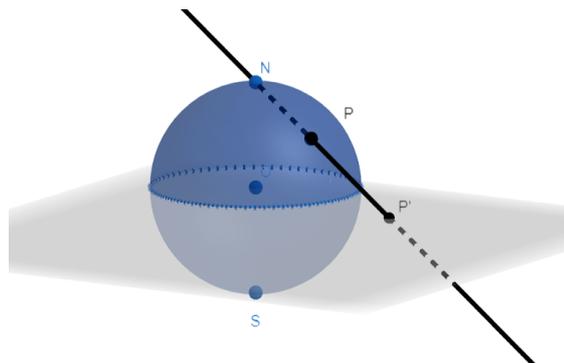


Figura 14: Projeção estereográfica (P') do ponto P .

Com uso de geometria básica é possível determinar uma lei que leva os pontos da esfera S^2 em sua respectiva projeção estereográfica:

Seja $P \in S^2 \setminus \{N\}$ e r a reta que passa por N e P , então $P' = r \cap \pi$.

Como $P \in S^2$, P é da forma:

$$P = (\text{sen}(\varphi)\cos(\theta), \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta), \cos(\varphi)), \quad -\pi < \theta < \pi \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\pi : z = 0 \text{ e } r : (0, 0, 1) + t(\text{sen}(\varphi)\cos(\theta), \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta), \cos(\varphi) - 1)$$

O cálculo da interseção conduz ao resultado $t = \frac{1}{1-\cos(\varphi)}$, donde:

$$P' = \left(\frac{\text{sen}(\varphi)\cos(\theta)}{1-\cos(\varphi)}, \frac{\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta)}{1-\cos(\varphi)}, 0 \right)$$

Que pode ser escrito, equivalentemente, como:

$$P' = \left(\frac{\text{sen}(\varphi)\cos(\theta)}{1-\cos(\varphi)}, \frac{\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta)}{1-\cos(\varphi)} \right), \text{ no plano } XY.$$

Para $\varphi = 0$, a aplicação não está definida, pois $1 - \cos(\varphi) = 0$.

A aplicação que leva os pontos da esfera S^2 , com exceção do polo Norte N , em sua projeção cartográfica pode ser escrita como:

$$\Gamma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow R^2$$

$$P \mapsto \left(\frac{\text{sen}(\varphi)\cos(\theta)}{1-\cos(\varphi)}, \frac{\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta)}{1-\cos(\varphi)} \right)$$

Trata-se portanto, dos pontos que distam $\frac{\text{sen}(\varphi)}{1-\cos(\varphi)}$ da origem do plano π e formam ângulo θ com o eixo dos x .

Vale observar que:

- Se $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$
Os pontos são projetados na parte interior a linha do Equador;
- Se $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
Os pontos são projetados na parte exterior a linha do Equador.

Deste modo, um dos hemisférios é representado por um disco e o outro por seu complemento.



Figura 15: Mapa em Projeção Estereográfica. [extraído de <https://en.wikipedia.org/>]

Considerando a esfera S^2 e um ponto $P' = (a, b, 0) \in \pi$ e a reta r passando por N e P' :

$$r : (0, 0, 1) + t(a, b, -1)$$

Como $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $P = r \cap S^2$:

$$t^2 a^2 + t^2 b^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$$

$$\Rightarrow t^2 a^2 + t^2 b^2 - 2t + t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$$

Assim:

$$P = (0, 0, 1) + \frac{2}{a^2 + b^2 + 1} (a, b, -1)$$

$$P = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$

A função inversa é dada por:

$$\Gamma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1} \right)$$

Portanto a aplicação é uma bijeção. ■

As três propriedades que seguem serão enunciadas sem serem provadas. As demonstrações podem ser encontradas em [12].

Proposição 1: Círculos em S^2 que passam por N , são representados por retas na projeção estereográfica.

Proposição 2: Círculos em S^2 que não passam por N , são representados por círculos na projeção estereográfica.

Definição 1: Dadas C_1 e C_2 , duas curvas em S^2 que se intersectam em um ponto P , denomina-se ângulo entre as curvas o ângulo entre as retas tangentes a estas curvas no ponto P .

Proposição 3: Sejam C_1 e C_2 , curvas em S^2 que se intersectam em um ponto P e C'_1 e C'_2 sua respectivas representações na projeção estereográfica, então o ângulo entre C'_1 e C'_2 é igual ao ângulo entre C_1 e C_2 .

Esta última propriedade é denominada conformidade, a partir do mapa em projeção estereográfica é possível construir outros mapas conformes por transformações dadas por funções complexas.

3. Elementos da análise complexa

Neste capítulo será definido o conjunto dos complexos com suas principais propriedades, definições importantes da análise complexa e alguns teoremas que não serão demonstrados por serem conhecidos na literatura, as provas podem ser encontradas em [3] nas referências bibliográficas.

3.1 O Conjunto dos números complexos

Definição 2: Denomina-se unidade imaginária, o número i tal que $i^2 = -1$

Proposição 4: As potências da unidade imaginária possuem 4 resultados $(1, i, -1, -i)$ que se repetem nesta sequência.

1. $i^{4k} = 1$
2. $i^{4k+1} = i$
3. $i^{4k+2} = -1$
4. $i^{4k+3} = -i$

Definição 3: Definimos \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, o conjunto dos números z da forma $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Os coeficientes a e b denominam-se parte real e parte imaginária respectivamente, e o número complexo denomina-se:

- Real puro, se $b = 0$;
- Imaginário puro, se $a = 0$.

Observação: A forma $z = a + bi$ denomina-se Forma algébrica do número complexo.

Operações: Dados $z = a + bi$ e $w = x + yi$, as seguintes operações são definidas:

- Soma:

$$z + w = a + x + (b + y)i$$

- Produto:

$$z \cdot w = (a + bi)(x + yi) = ax - by + (ay + bx)i$$

Seja z_1, z_2 e z_3 números complexos, as operações acima são munidas das seguintes propriedades:

- Associatividade da soma:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

- Comutatividade da soma:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- Elemento neutro da soma:

Existe $z_a \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + z_a = z_1$.

- Associatividade do produto:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

- Comutatividade do produto:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- Elemento neutro do produto:

Existe z_b tal que $z_1 \cdot z_b = z_1$.

- Distributividade

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Definição 4: O plano de Argand-Gauss (ou plano complexo) é um plano cartesiano onde os eixos x e y representam as parte real e imaginária respectivamente.

Desta definição, segue que o número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto (chamado afixo) de coordenadas (a, b) , no plano (figura 16).

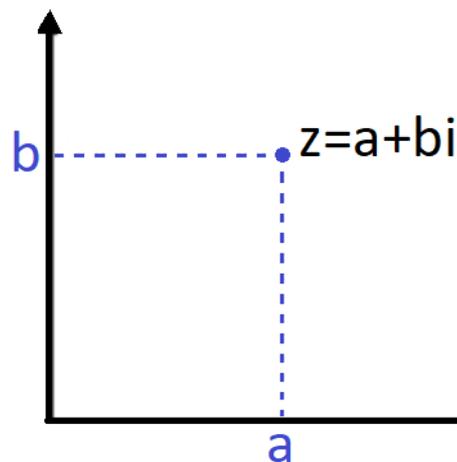


Figura 16: Representação do número complexo z no plano de Argand-Gauss.

Definição 5: O módulo do número complexo z , denotado por $|z|$ ou ρ , é a distância do afixo à origem dos eixos coordenados.

Da definição anterior, aplicando o Teorema de Pitágoras para o complexo $z = a + bi$ segue que $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Definição 6: Dado $z = a + bi$, denomina-se conjugado de z , denotado por \bar{z} , o número $\bar{z} = a - bi$.

Geometricamente, o conjugado de z trata-se de uma reflexão em relação ao eixo real:

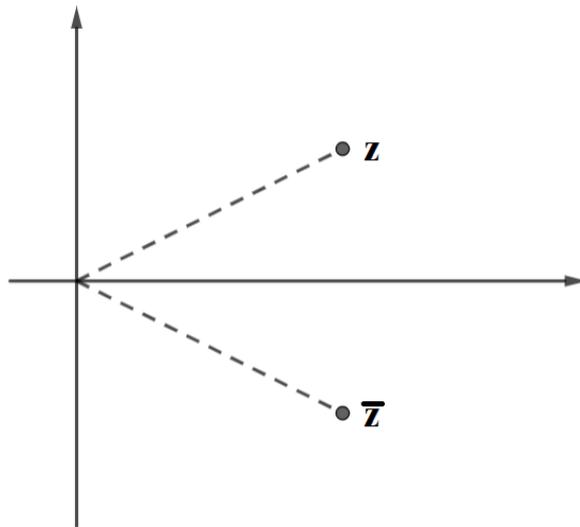


Figura 17: Representação de z e seu conjugado no plano complexo.

Proposição 5: Seja z um número complexo, então $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Proposição 6: Sejam z_1 e z_2 números complexos. Em relação ao módulo, são válidas as seguintes propriedades:

- 1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- 2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Proposição 7: Sejam z_1 e z_2 números complexos. Em relação ao conjugado, são válidas as seguintes propriedades:

- 1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Considerando a representação de um complexo no plano, é possível descrevê-lo em coordenadas polares, basta considerar o módulo ρ e o ângulo θ entre o segmento que liga o afixo a origem e o eixo real.

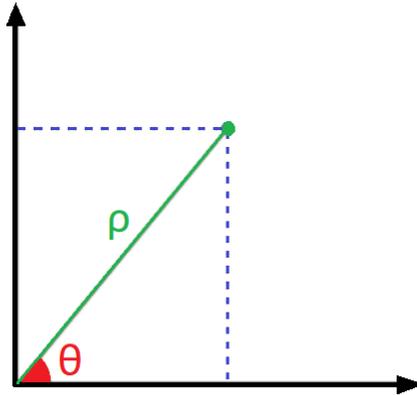


Figura 18: Representação polar de um número complexo.

Deste modo, temos:

$$a = \rho \cdot \cos(\theta) \text{ e } b = \rho \cdot \sin(\theta)$$

O que conduz a notação do número complexo na forma

$$z = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

Chamada forma trigonométrica do número complexo.

3.2 Definições e Teoremas

Alguns conhecimentos do curso de Cálculo 1 serão necessários: A derivada de ordem n de uma função $f(x)$ é denotada por $f^{(n)}(x)$. Uma função é de classe C^∞ quando $f^{(n)}(x)$ existe e é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 7: Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, uma função de classe C^∞ . Para $x_0 \in A$, a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

denomina-se Série de Taylor em torno de x_0 . Em particular, se $x_0 = 0$, a série é chamada Série de Maclaurin.

Definição 8: Uma função real $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ de classe C^∞ é dita analítica se, para cada $x_0 \in A$, existir uma vizinhança $U \subset A$ tal que para todo $x_0 \in U$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Exemplo 1: As funções seno, cosseno e exponencial são analíticas

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

□

Definição 9: Denomina-se bola aberta B de raio r centrada em z_0 , os pontos do conjunto $B = \{z, |z - z_0| < r\} \subset \mathbb{C}$

Definição 10: Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e somente se, para todo $z_0 \in A$, existe uma bola aberta $B \subset A$ centrada em z_0 .

Definição 11: Uma função complexa, em um conjunto aberto, é uma aplicação $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto.

Observação: Funções definidas em outros domínios (por exemplo, em fechados de interior vazio) têm um comportamento muito diferente e não serão consideradas aqui.

Para $A = \mathbb{C}$, uma função complexa $f(z) = w$ é uma função do plano no plano, portanto é equivalente a uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, seu gráfico é uma superfície de dimensão 2 contida em \mathbb{R}^4 , o que não é fácil de visualizar. No entanto pode-se adotar como uma estratégia representar o domínio da função em um plano e sua imagem em outro plano, deste modo a função complexa é interpretada como uma transformação (também chamada mapa) do plano z no plano w .

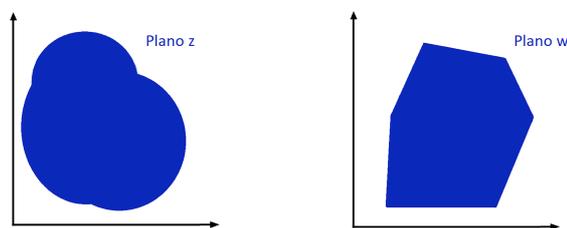


Figura 19: Transformação por uma função complexa.

Exemplo 2: A função $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$, $B = \{a + bi / 1 \leq a \leq \sqrt{2}\}$ leva a região entre retas verticais na região entre parábolas.

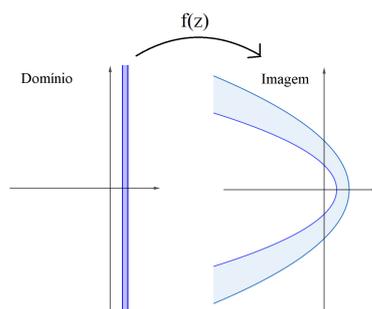


Figura 20: Transformação de B dada pela função $f(z)=z^2$.

□

Uma função $f(z) = w$, com $z = x + yi$, pode ser escrita como soma de funções de duas variáveis reais $w = u(x, y) + v(x, y)i$ onde as funções u e v representam a parte real e a parte imaginária da função $f(z)$.

Exemplo 3: Dada a função $f(z) = z^2$, com $z = x + yi$. Então:

$$f(z) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Bastando tomar: $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$

□

Definição 12: Sejam D um subconjunto de \mathbb{C} , z_0 ponto de acumulação de D e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que um número complexo w_0 é o limite de f em z_0 quando, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Para todo } z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Denota-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

Definição 13: Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é dita função contínua no ponto z_0 , se o limite da definição acima existe e é igual a $f(z_0)$. Se for contínua em todo $z_0 \in D$, então é dita função contínua.

Definição 14: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ um função contínua, f é holomorfa se, e somente se, para todo $z_0 \in A$ existe o limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Este limite é denotado por $f'(z)$.

Teorema 1: Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Suponha que exista uma função contínua $f_1 : A \rightarrow \mathbb{C}$ com a seguinte propriedade: Para todo $z \in A$ os limites abaixo existem e são iguais a $f_1(z)$. Então f é holomorfa com $f' = f_1$.

$$f_1(z) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ e } f_1(z) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

Definição 15: Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e seja $z_0 \in A$. Se para todo n a derivada de ordem n $f^{(n)}(z_0)$ está bem definida então a série de Taylor de f ao redor de z_0 é definida como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$$

Se a série convergir para f em uma bola aberta centrada em z_0 dizemos que f é analítica em z_0 . A função f é analítica se for analítica em todo ponto do domínio.

No caso real, uma função pode ser derivável, mas não ser infinitamente derivável ou ainda pode ser de classe C^∞ e não ser analítica isso não ocorre nas funções complexas como veremos nos teoremas que seguem.

Teorema 2: Se $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa então f é analítica.

Teorema 3: Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ holomorfa, então $f^{(n)}(z_0)$ está bem definida para todo $z_0 \in A$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou em outras palavras, se f é holomorfa, então $f^{(n)}$ também é holomorfa em A .

Teorema 4: Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}_*^+$ o raio da maior bola aberta B centrada em z_0 e contida em A . Então, a Série de Taylor converge para $f(z)$ se $z \in B \subseteq A$.

A famosa regra de L'Hospital estudada nos cursos de Cálculo também tem sua versão para funções complexas, como segue:

Teorema 5: (L'Hospital): Seja z_0 um número complexo, seja A_0 uma vizinhança de z_0 , seja $A_1 = A_0 - \{z_0\}$. Sejam f, g funções holomorfas definidas em A_1 . Se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$$

Então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

A fim de relacionar as funções complexas aos mapas, principal objetivo desta dissertação, precisaremos de alguns conceitos geométricos.

Definição 16: Sejam C, D duas curvas suaves que se cruzam em um ponto P formando ângulo β entre si. Dada uma transformação $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ aberto, se as curvas $C' = f(C)$ e $D' = f(D)$ no ponto $f(P)$ formam também ângulo β entre si, então a aplicação é dita conforme.

Em outras palavras, uma aplicação conforme preserva ângulos.

Teorema 6: Seja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, analítica e $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in A$, então f é aplicação conforme.

Alguns conceitos topológicos também serão necessários.

Definição 17: O aberto $A \subset \mathbb{C}$ é dito conexo se para quaisquer abertos não vazios $X, Y \subset \mathbb{C}$ tais que $A = X \cup Y$ existe $x_0 \in X \cap Y$. (figura 21.1)

Definição 18: Um aberto não vazio A é dito simplesmente conexo quando a região limitada por qualquer caminho fechado contido em A também está contida em A .

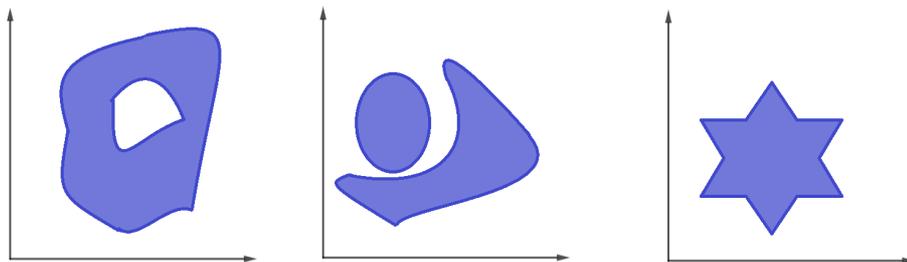


Figura 21: Respectivamente: 1-Conexo, mas não simplesmente conexo; 2-Não conexo; 3-Conexo e simplesmente conexo

A seguir temos o Teorema do Mapeamento de Riemann que é o mais importante desta dissertação e também o mais difícil de ser demonstrado.

Teorema 7: (Mapeamento de Riemann) Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$, $A, B \neq \mathbb{C}$ conjuntos não vazios, abertos, conexos e simplesmente conexos e sejam $z_0 \in A$, $w_0 \in B$, $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta| = 1$. Então, existe uma única função analítica, bijetora com inversa analítica $f: A \rightarrow B$ satisfazendo $f(z_0) = w_0$, $\frac{f'(z_0)}{\theta} > 0$

Exemplo 4: Sejam $A, B, z_0 \in A$ e $w_0 \in B$ como na figura abaixo:

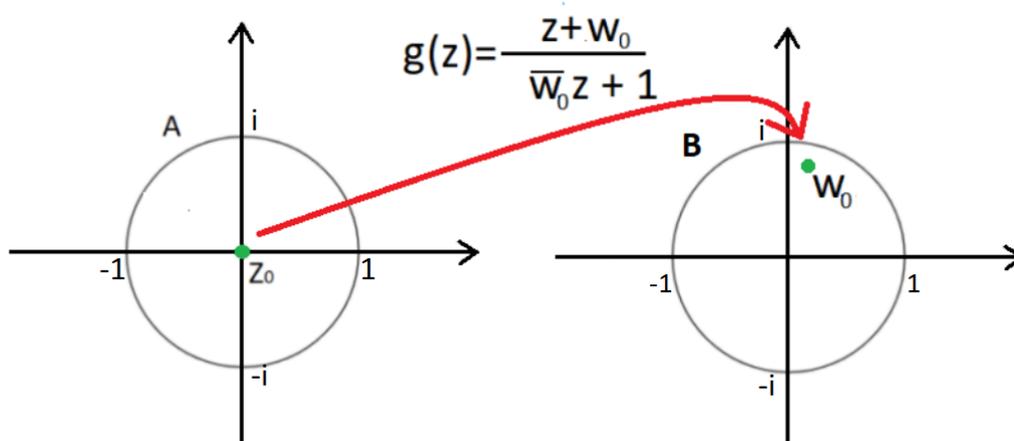


Figura 22: Exemplo do Mapeamento de Riemann.

Note que $g(z)$ satisfaz $g(0) = w_0$ e $|z| < 1 \Leftrightarrow |g(z)| < 1$.

Utilizando a “regra do quociente” para derivar a função $g(z)$, temos:

$$g'(z) = \frac{\overline{w_0}z + 1 - \overline{w_0}(z + w_0)}{(\overline{w_0}z + 1)^2}$$

Portanto:

$$g'(0) = \frac{1 - \overline{w_0}w_0}{1^2}$$

$$g'(0) = 1 - |w_0|^2 > 0$$

□

Mais exemplos de aplicação do Teorema do Mapeamento de Riemann serão mostrados mais adiante.

3.3 O princípio da reflexão

Dado um ponto z_0 no plano e um segmento de reta ou arco de círculo é possível determinar a reflexão do ponto em relação a tal curva. Na verdade o conceito de reflexão em relação a uma curva pode ser definido para qualquer curva analítica, mas aqui só trataremos dos casos especiais acima. Alguns exemplos elementares serão exibidos a seguir bem como a função $R(z)$ que leva o ponto $z = a + bi$ em sua reflexão.

- Reflexão em relação a uma reta passando pela origem:

Seja $r : k.z_0$, $k \in \mathbb{R}$, onde $z_0 = e^{i.\theta_0}$, então a reflexão de z , denotada por z' é dada pela composição da reflexão em relação ao eixo real (conjugado) e a rotação $2\theta_0$:

$$z' = \overline{z}.z_0^2$$

A figura a seguir ilustra esse processo.

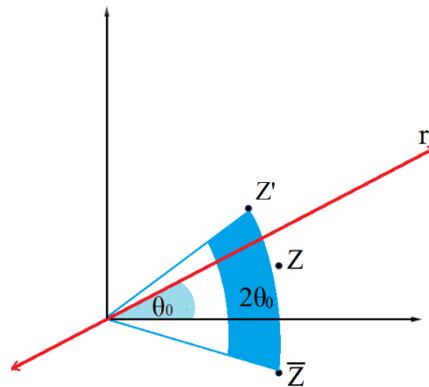


figura 23: Reflexão da reta passando pela origem.

- Reflexão em relação a uma reta não passando pela origem:

Basta observar tal reta como uma translação da reta passando pela origem, isto é, $r : k.z_0 + z_1$, $k \in \mathbb{R}$. Portanto para refletir em relação à esta reta basta incluir a translação no resultado acima:

$$f(z) = \overline{z - z_1}.z_0^2 + z_1$$

A figura a seguir ilustra a fórmula anterior

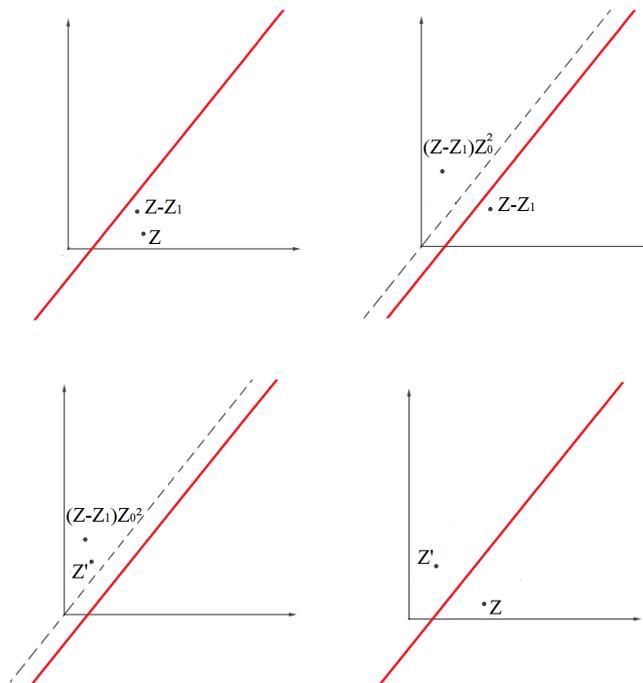


Figura 24: Reflexão na reta fora da origem.

- Em relação a circunferência :

Seja z_0 o centro da circunferência e r o seu raio, a reflexão de z denotada por z' satisfaz:

$$(\overline{z - z_0})(z' - z_0) = r^2$$

$$(\overline{z} - \overline{z_0})(z' - z_0) = r^2$$

$$(\overline{z} - \overline{z_0})z' - (\overline{z} - \overline{z_0})z_0 = r^2$$

$$(\overline{z} - \overline{z_0})z' = r^2 + (\overline{z} - \overline{z_0})z_0$$

$$z' = \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0$$

$$z' = z_0 + \frac{r^2(z - z_0)}{|z - z_0|^2}$$

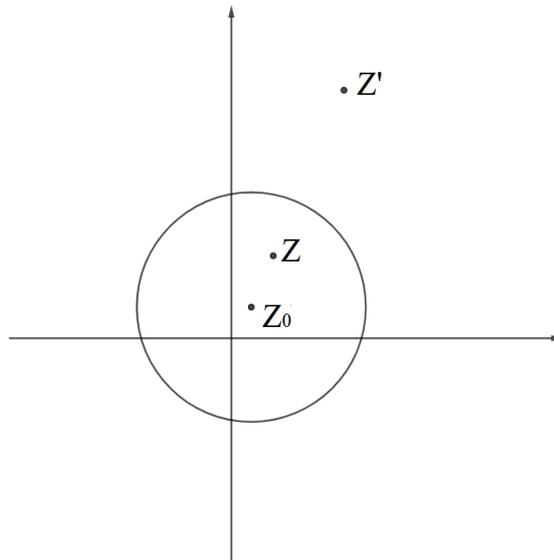


Figura 25: Reflexão na circunferência (Inversão).

Dada uma função f que leva uma curva no bordo do domínio em uma curva no bordo da imagem e um ponto z_0 , com o auxílio de funções de reflexão como as acima apresentadas, é possível estender o domínio de uma função complexa. Refletindo o ponto para o interior da região a imagem é determinada e por sua vez pode ser novamente refletida gerando a imagem de z_0 . Este procedimento é denominado Princípio da Reflexão, em outras palavras, seja $R_0(z)$ a reflexão em relação à fronteira do domínio e $R_1(z)$ a reflexão em relação à fronteira da imagem, então:

$$R_1(f(R_0(z_0))) = f(z_0)$$

Exemplo 5: Considere a função $f(z) = z \cdot e^{i\pi/4}$ na região definida por $z = a + bi$, $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$. Tem-se o domínio e imagem representados abaixo:

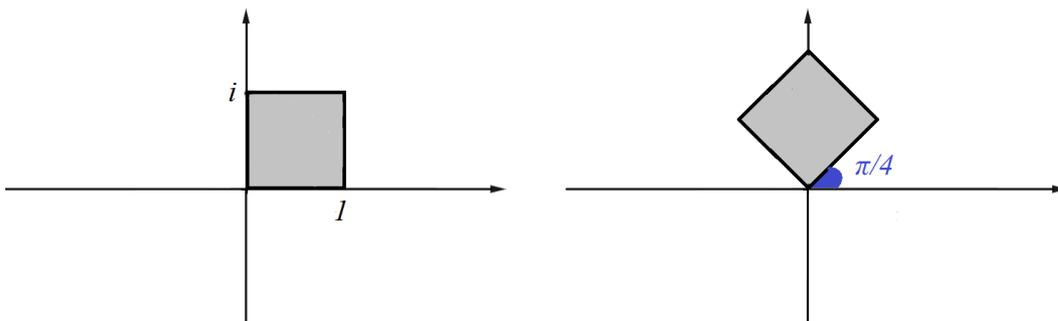


Figura 26: Domínio e Imagem do exemplo 5.

Tomando um ponto z_0 fora do domínio, aplicando o princípio da reflexão, tem-se:

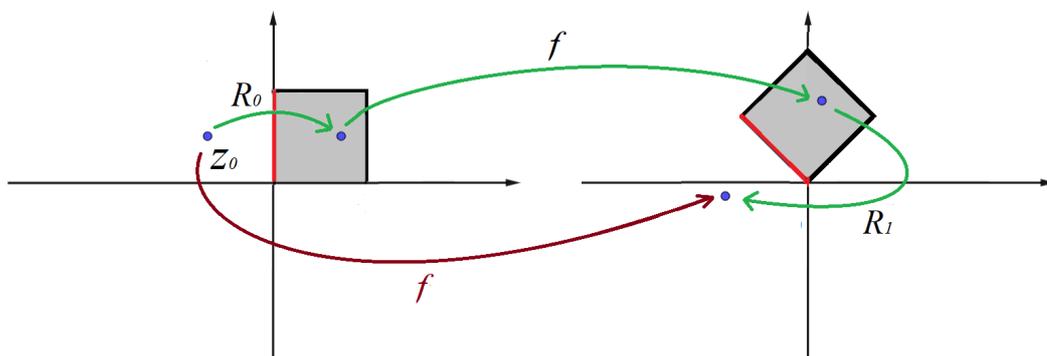


Figura 27: Aplicação do Princípio da Reflexão

Observação: Ao refletir na imagem, deve-se ter a cautela de refletir em relação a fronteira correspondente a fronteira utilizada na reflexão do domínio, no exemplo acima, as reflexões foram feitas com respeito ao segmento assinalado em vermelho.

Com o procedimento citado acima a função pode ser estendida para a região $-1 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$.

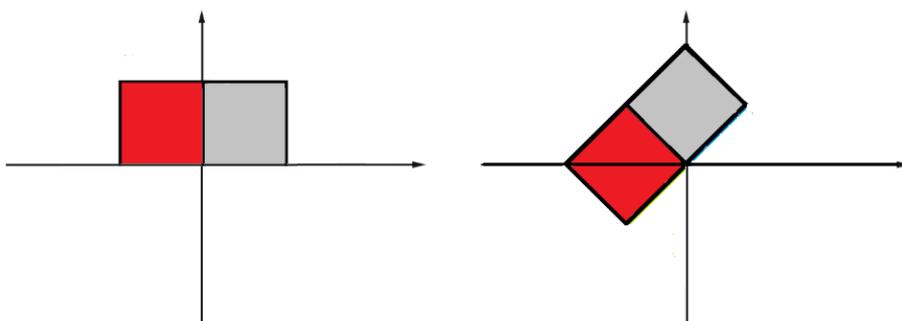


Figura 28: Domínio estendido pelo Princípio da Reflexão

Aplicando novamente o princípio da reflexão no retângulo $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq b \leq 0$, obtém-se a função estendida para o quadrado de lado 2 centrado na origem.

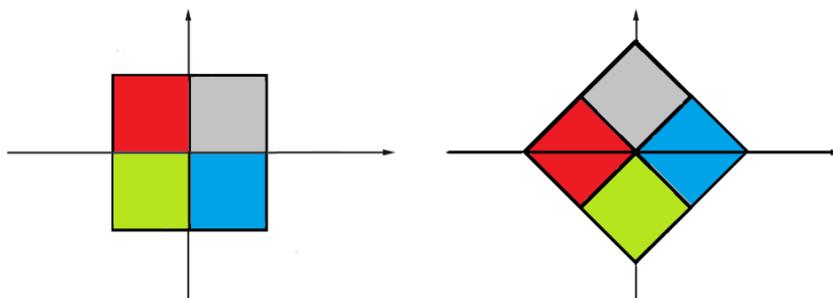


Figura 29: Domínio estendido pelo Princípio da Reflexão

Considerando o domínio estendido é possível fazer novas reflexões para os pontos exteriores a este novo quadrado, como feito no quadrado unitário, e fazendo esse processo repetidas vezes pode-se obter uma extensão para todo o plano.

Vale ressaltar que essas observações são válidas para este exemplo pois o domínio é um quadrado e com esta forma é possível “cobrir” todo o plano.

□

Outros exemplos da aplicação mais interessantes do Princípio da Reflexão serão mostrados mais adiantes.

4. Função exponencial complexa e sua inversa

Definição 19: A Exponencial Complexa de um número $z = a + bi$, denotada por $f(z) = e^z$ é definida pela série:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

A função $f(z) = e^z$ pode ser expressa por meio das funções seno e cosseno.

$$\begin{aligned} e^{a+bi} &= e^a \left(1 + \frac{bi}{1!} + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \dots + \frac{(bi)^n}{n!} + \dots \right) \\ &= e^a \left(1 + \frac{bi}{1!} + \frac{-b^2}{2!} + \frac{-b^3i}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \dots + \frac{(bi)^n}{n!} + \dots \right) \\ &= e^a \left[\left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \right) + \left(\frac{b}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} + \dots \right) i \right] \\ &= e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)) \end{aligned}$$

Portanto a função exponencial pode ser escrita como:

$$f(z) = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b))$$

Observação: Podemos relacionar o número complexo w à uma equação exponencial. Da conclusão acima, tomando $z = i\theta$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \\ \Rightarrow \rho e^{i\theta} &= \rho (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \\ \Rightarrow \rho e^{i\theta} &= w \end{aligned}$$

A função e^z é periódica com período imaginário $2\pi i$, por causa de sua periodicidade, todos os valores possíveis são assumidos na faixa $-\pi < y \leq \pi$. Esta faixa infinita é denominada região fundamental da função.

Proposição 8: As seguintes propriedades são válidas:

1. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, então $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$
2. Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então $(e^z)^n = e^{nz}$
3. $e^z \neq 0$
4. $|e^{x+yi}| = e^x$
5. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Proposição 9: (Fórmula de Moivre) Dado $z = \rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, um número complexo não nulo em sua forma trigonométrica, então, para cada número inteiro n , tem-se:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Para compreender a demonstração a seguir é conveniente relembrar os limites abaixo, estudados no curso de cálculo 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$$

Proposição 10: A função exponencial complexa é analítica

Prova:

Vamos mostrar que a função é holomorfa utilizando o Teorema 1:

Considere $h \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^z e^h - e^z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^z (e^h - 1)}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z$$

E o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+ih} - e^z}{ih} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^z e^{ih} - e^z}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^z (e^{ih} - 1)}{ih} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih} - 1}{ih} \\ &= e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1 + i \operatorname{sen}(h)}{ih} = e^z \left(-i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right) \\ &= e^z \end{aligned}$$

Portanto, é holomorfa e pelo Teorema 2 é analítica. ■

Proposição 11: A derivada de $f(z) = e^z$ é $f'(z) = e^z$. E de modo mais geral, tem-se $f^{(n)}(z) = e^z$.

Definição 20: Uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que para todo $z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ tem-se $f(z+c) = f(z)$ é chamada periódica de período c .

Exemplo 6: A função $f(x) = e^z$ é periódica de período $2\pi i$. Basta observar que $e^{-2\pi i + z} = e^{2\pi i} e^z = (e^{i\pi})^2 e^z = e^z$.

A função exponencial é analítica e $f'(z) = e^a(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b))$ e, portanto, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Destas observações, juntamente com o Teorema 6, é possível concluir que a função exponencial complexa é uma aplicação conforme. □

Proposição 12: A função exponencial complexa leva retas verticais em circunferências e retas horizontais em semirretas partindo da origem.

Prova:

Seja a reta vertical formada pelos pontos da forma $z = a + yi$, com a constante e $y \in \mathbb{R}$, então:

$$f(z) = e^{a+yi} = e^a(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$$

que trata-se de uma circunferência de raio e^a .

Seja a reta horizontal formada pelos pontos da forma $z = x + bi$, com b constante e $x \in \mathbb{R}$, então:

$$f(z) = e^{x+bi} = e^x(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b))$$

que trata-se de uma radial partindo da origem.

■

Como vimos anteriormente os Mapas de Mercator e Projeção Estereográfica foram ambos desenvolvidos antes do conhecimento sobre funções complexas, no entanto a relação existente entre eles pode ser expressa pela Função Exponencial complexa. Sabe-se que, por definição, o Mapa de Mercator é um mapa conforme em uma região retangular, considerando esta região e aplicando a função exponencial complexa obtêm-se um mapa conforme em uma região determinada por uma circunferência, ou seja, o mapa na projeção estereográfica.

A inversa da exponencial complexa é também o inverso da relação entre os mapas, leva o Mapa em Projeção estereográfica em Mapa de Mercator, como veremos mais adiante.

No rumo tomado acima, partindo-se da definição algébrica da função é construída a interpretação geométrica da exponencial complexa, no entanto, o oposto disso também pode ser feito, isto é, a partir da região do domínio e da imagem pode-se construir a função complexa, única, pelo Teorema do Mapeamento de Riemann.

Isto é, pode-se definir a função exponencial complexa partindo de sua definição geométrica:

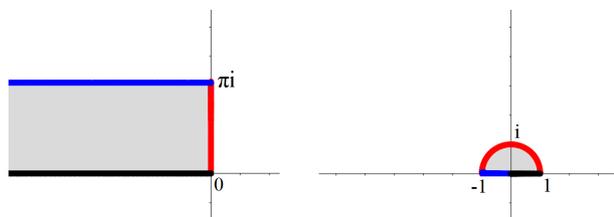


Figura 30: Definição geométrica da função exponencial complexa.

A Definição da função exponencial complexa, também fornece uma belíssima equação, conhecida como Fórmula de Euler.

$$e^z = e^a(\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)), \text{ tomando } z = i.\pi :$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi)$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Assim como nas funções reais, porém com algumas sutilezas, definimos a função logaritmo neperiano complexo, função inversa da exponencial complexa.

Para construir a função $\ln(z)$, inversa da exponencial complexa, considere $\ln(z) = w$, com o complexo z na região fundamental e escrito na forma exponencial $z = \rho e^{i\theta}$ e w na forma algébrica $w = a + bi$, então:

$$\begin{aligned} e^w &= z \\ e^{a+bi} &= \rho e^{i\theta} \\ e^a e^{bi} &= \rho e^{i\theta} \end{aligned}$$

Por comparação dos membros da igualdade:

$$\begin{aligned} e^a &= \rho \text{ e } e^{bi} = e^{i\theta} \\ \Rightarrow a &= \ln(\rho) \text{ e como } \theta \in [-\pi, \pi[\text{ então } b = \theta \end{aligned}$$

E finalmente:

$$\ln(z) = \ln(\rho) + i\theta$$

Definição 21: Um ramo da função logaritmo complexo de um número $z = \rho e^{i\theta}$, denotada por $\ln(z)$, é definida por:

$$\ln(z) = \ln(\rho) + i\theta, \text{ com } \theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[.$$

Tomando $\theta_0 = 0$, a função, trata-se da inversa da Exponencial Complexa na região fundamental $\{x + yi / -\pi < y < \pi\}$.

Tomando um número $z = a + bi$, real puro, ou seja com $b = 0$, podemos observar que a função logaritmo complexo coincide com o valor da função logaritmo real.

Por outro lado, alguns valores que não pertencem ao domínio da função logaritmo real, estão bem definidos no logaritmo complexo, por exemplo, tomando o número real negativo $z = -1$:

$$\ln(-1) = \ln(1) + i\pi$$

Proposição 13: Sejam z, w complexos na região fundamental e não nulos, então são válidas as propriedades:

1. $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$
2. $\ln(z/w) = \ln(z) - \ln(w)$
3. $\ln(z)$ é analítica nos complexos, exceto no eixo real negativo e sua derivada é dada por $\ln'(z) = 1/z$

Proposição 14: A função logaritmo leva circunferências com centro na origem em retas verticais e semirretas partindo da origem em retas horizontais.

Evidente, pois é inversa da exponencial complexa.

Assim, um mapa na Projeção Estereográfica pode ser levado no mapa correspondente na Projeção de Mercator através da função logaritmo complexo.

5. Zeros, Pontos Críticos e Singularidades

Nesta seção serão apresentadas definições de pontos importantes na construção de transformações por funções complexas, além da apresentação do tema serão expostos alguns exemplos simples. Exemplos envolvendo funções trigonométricas serão expostos na seção seguinte.

Definição 22: Dada uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se $f(z_0) = 0$, z_0 é chamado zero de f .

Definição 23: Se z_0 é um zero de f e $f'(z_0) \neq 0$ então z_0 é chamado zero simples de f .

Exemplo 7: A função $f(z) = z^3 + i$ possui zero em $z_0 = i$, como $f'(z) = 3z^2$ então $f'(z_0) = -3 \neq 0$, z_0 é zero simples. Na figura a seguir, a função foi tomada no intervalo $-1/2 \leq x \leq 1/2$, $1/2 \leq y \leq 3/2$.

A função possui ainda 2 zeros simples fora do domínio tomado acima.

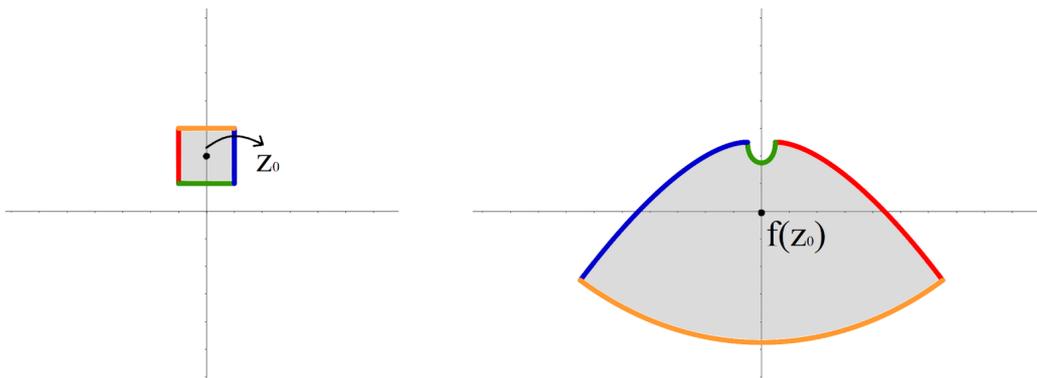


Figura 31: Transformação dada pela função $f(z) = z^2$ na região definida.

□

Definição 24: Dada uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se $f'(z_0) = 0$, z_0 é chamado ponto crítico de f .

Definição 25: Se z_0 é um ponto crítico de f e $f''(z_0) \neq 0$ então z_0 é chamado ponto crítico simples de f .

Proposição 15: O ângulo entre duas curvas concorrentes em z_0 , com z_0 ponto crítico simples de f , é duplicado pela transformação $f(z)$.

Observação: O ângulo entre duas curvas conforme estabelecido na definição 1.

Exemplo 8: Na função $f: B \rightarrow \mathbb{C}, B = \{a + bi / 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\}$ com $f(z) = z^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z, \\ f''(z) &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Então

$z_0 = 0$ é ponto crítico simples.

Na imagem da transformação os eixos coordenados formam ângulo raso.

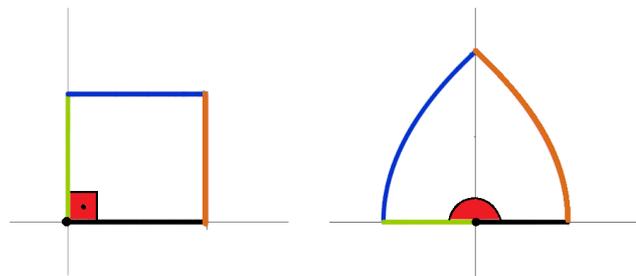


Figura 32: Exemplo de Ponto Crítico.

□

Definição 26: Dado $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, com A aberto, se f é analítica no disco perfurado $0 < |z - z_0| < r, r > 0$. Então $z_0 \in A$ é chamado singularidade isolada.

Definição 27: Dado $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, com A aberto, e z_0 uma singularidade isolada:

- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a, a \in \mathbb{C}$, em outras palavras, a função na vizinhança de z_0 é limitada, então z_0 é chamado singularidade removível.
- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, então z_0 é chamado polo.
- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ não existe, é chamado singularidade essencial.

Definição 28: Se z_0 é um polo de f e existe o limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Então z_0 é chamado polo simples de f .

Exemplo 9: Dada a função $f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z}$, o ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada de f . Como $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(z)}{1} = \text{cos}(0) = 1$, z_0 é singularidade removível.

Esta nomenclatura se dá devido o fato de que sabendo o limite no ponto basta definir este limite como sendo o valor da função no ponto, isto é, remove-se a tal singularidade.

□

Exemplo 10: Dada a função $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$, os pontos $z_1 = 2i$ e $z_2 = -2i$ são singularidades isoladas de f . Como $\lim_{z \rightarrow 2i} \left| \frac{z}{z^2+4} \right| = \infty$ e $\lim_{z \rightarrow -2i} \left| \frac{z}{z^2+4} \right| = \infty$, z_1 e z_2 são polos.

Para verificar que z_1 é um polo simples:

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z}{z^2+4}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z}{(z-2i)(z+2i)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{z+2i} = \frac{1}{2}$$

Como o limite existe, z_1 é polo simples, um resultado similar é obtido para z_2 que é portanto outro polo simples de f .

□

/

Exemplo 11: Dada a função $f(z) = e^{1/z}$ o ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada de f , pois

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} e^{1/h} = \infty \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0_-} e^{1/h} = 0$$

Portanto não existe o limite $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$, então z_0 é uma singularidade essencial.

□

Definição 29: Uma função f diz-se meromorfa em A , com A um aberto conexo e não vazio de \mathbb{C} se f é holomorfa à exceção de polos.

Como visto no exemplo 10, a função $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$ possui polos em $2i$ e $-2i$, esta função é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$ e portanto é meromorfa em qualquer aberto em \mathbb{C} .

6. Funções trigonométricas complexas

Para a construção das funções trigonométricas complexas, é conveniente relembrar uma definição das funções hiperbólicas, como segue:

$$\cosh(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

Partindo da definição da função exponencial complexa:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

Somando e subtraindo as equações acima, obtém-se, respectivamente, o cosseno e seno reais:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Substituindo x por um número complexo $z = a + bi$:

$$\cos(z) = \frac{e^{i(a+bi)} + e^{-i(a+bi)}}{2}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{-b} \cdot e^{ai} + e^b \cdot e^{-ai}}{2}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{-b}(\cos(a) + i\sin(a)) + e^b(\cos(a) - i\sin(a))}{2}$$

$$\cos(z) = \cos(a) \frac{(e^b + e^{-b})}{2} - \sin(a) \frac{(e^b - e^{-b})}{2}$$

$$\cos(z) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$$

De modo análogo, pode-se concluir que:

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(a) \operatorname{cosh}(b) + i \operatorname{cos}(a) \operatorname{senh}(b)$$

Proposição 16: As seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(iz) &= \operatorname{cosh}(z) \\ -i \operatorname{sen}(iz) &= \operatorname{senh}(z) \end{aligned}$$

Prova:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(iz) &= \operatorname{cos}(i(x + yi)) = \operatorname{cos}(-y + xi) = \operatorname{cos}(-y) \operatorname{cosh}(x) - i \operatorname{sen}(-y) \operatorname{senh}(x) \\ &= \frac{e^{-iy} + e^{iy}}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} - i \frac{e^{-iy} - e^{iy}}{2i} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{x-yi} + e^{-x-yi} + e^{x+yi} + e^{-x+yi} - e^{-x-yi} + e^{-x-yi} + e^{x+yi} - e^{-x+yi}}{4} \\ &= \frac{2e^{-x-yi} + 2e^{x+yi}}{4} \\ &= \frac{e^{-x-yi} + e^{x+yi}}{2} \\ &= \operatorname{cosh}(z) \end{aligned}$$

O segundo caso pode ser demonstrado de maneira análoga. ■

Proposição 17: As funções seno e cosseno complexos são periódicas de período 2π .

Em outras palavras, a proposição acima afirma que são sempre válidas as seguintes igualdades:

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen}(z)$$

$$\operatorname{cos}(z + 2\pi) = \operatorname{cos}(z)$$

Prova:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z + 2\pi) &= \operatorname{sen}(x + 2\pi)\cosh(y) + i\cos(x + 2\pi)\operatorname{senh}(y) \\ &= \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y) \\ &= \operatorname{sen}(z) \end{aligned}$$

Para o cosseno a demonstração é análoga. ■

Essa propriedade coincide com a periodicidade da versão real destas funções, há ainda outras propriedades reais que se estendem para as funções complexas.

Proposição 18: São válidas as propriedades:

- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$
- $\cos(-z) = \cos(z)$
- $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$
- $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) \pm \cos(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$

Prova:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-z) &= \operatorname{sen}(-a)\cosh(-b) + i\cos(-a)\operatorname{senh}(-b) \\ &= -\operatorname{sen}(a)\cosh(b) - i\cos(a)\operatorname{senh}(b) \\ &= -\operatorname{sen}(z) \end{aligned}$$

Os demais itens podem ser demonstrados com uso de álgebra trivial, por esse motivo serão omitidas. ■

Proposição 19: Seja $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ e $g(z) = \cos(z)$, então $f'(z) = \cos(z)$ e $g'(z) = -\operatorname{sen}(z)$.

Outra coincidência com o caso real são os zeros dessas funções.
Zeros da função cosseno:

$$\cos(z) = \frac{e^{ai-b} + e^{-ai+b}}{2} = 0$$

$$e^{ai-b} = -e^{-ai+b}$$

$$e^{ai-b+ai-b} = -e^{-ai+b+ai-b}$$

$$e^{2ai-2b} = -e^0$$

$$e^{2ai-2b} = -1$$

$$\Rightarrow 2(ai - b) = i\pi + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b = 0; a = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

■

Com um raciocínio bastante similar, para a função seno, os zero são da forma:

$$z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Da proposição 15 juntamente com os resultados anteriores, pode-se concluir que:

- A função cosseno possui pontos críticos em, exatamente,

$$z = k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

- A função seno possui pontos críticos em, exatamente,

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

As funções cosseno e seno estão definidas para todo $z \in \mathbb{C}$, portanto não possui singularidades a serem estudadas.

Da periodicidade da função seno, juntamente com a proposição 18, a faixa vertical $x_0 \leq x < x_0 + \pi$, $-\infty < y < \infty$ assume todos os valores de f . Por simplicidade, tomando $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ tem-se o ramo $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < \infty$. Para analisar a transformação serão utilizados os pontos desta faixa no 1º quadrante e em seguida o princípio da reflexão para os outros quadrantes. A transformação é mostrada na figura seguinte

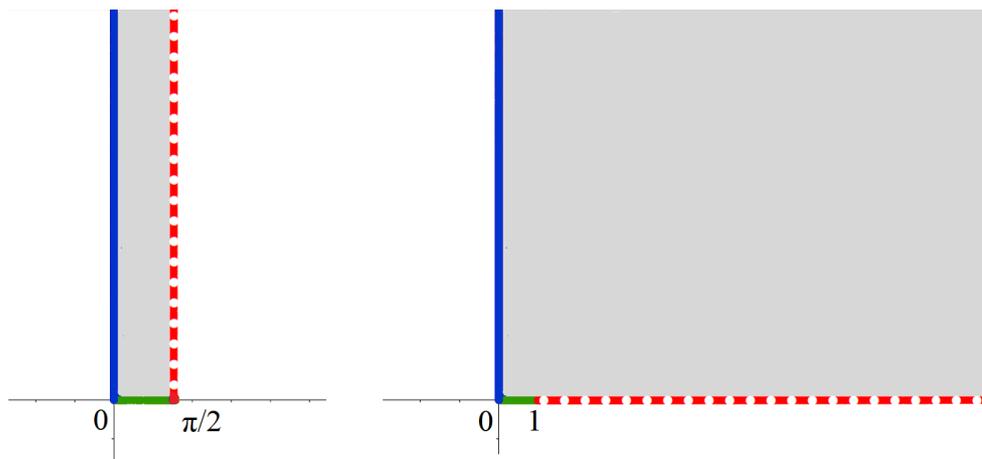


Figura 33: Transformação pela função seno.

Pelo princípio da reflexão, é possível estender a faixa do domínio, dado um ponto z_0 , com $0 < |a| < \frac{\pi}{2}$ no 2º quadrante, por exemplo, tem-se:

$$z_0 = -a + bi \text{ e } R_0(z_0) = -\bar{z}_0$$

$$R(\text{sen}(R_0(-a + bi))) = R_0(\text{sen}(a + bi))$$

$$= R_0(\text{sen}(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b))$$

$$= -\text{sen}(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$$

$$= \text{sen}(-a) \cosh(b) + i \cos(-a) \sinh(b)$$

$$= \text{sen}(z_0)$$

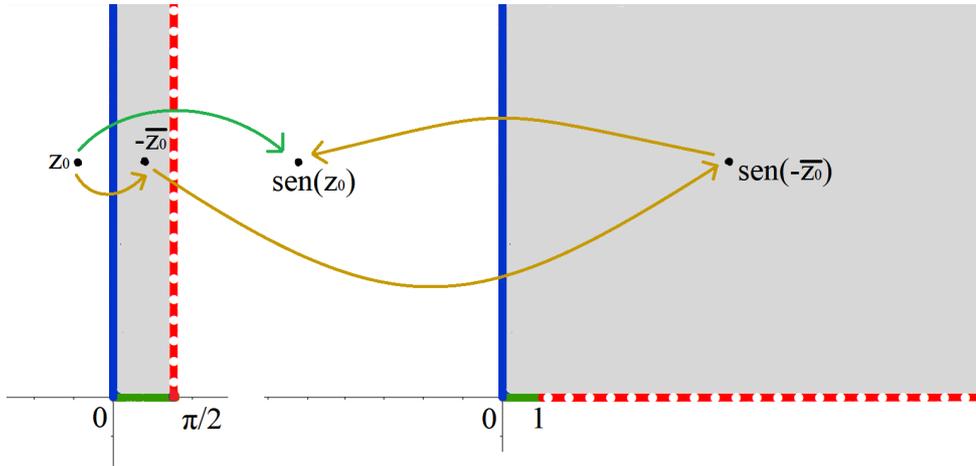


Figura 34: Função seno estendida pelo Princípio da Reflexão no 4º quadrante.

Um procedimento análogo pode ser feito para os demais quadrantes, assim, o domínio e a imagem da função seno são estendidos, conforme figura a seguir.

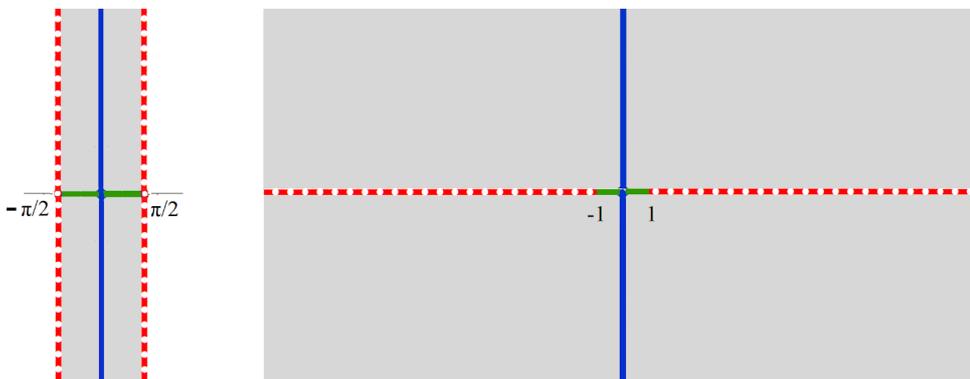


Figura 35: Função seno.

A transformação dada pela função cosseno pode ser entendida como uma translação aplicada na função seno, uma vez que $\cos(z - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(z)$:

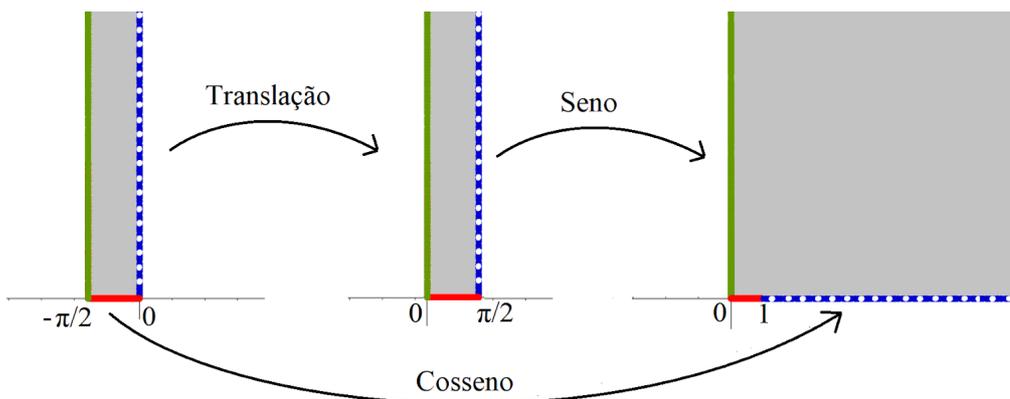


Figura 36: função cosseno como translação da função seno

Do princípio da reflexão para a função seno, juntamente com o resultado acima, pode-se concluir que extensão da função cosseno na faixa $-\pi < x < 0$, $-\infty < y < \infty$. é conforme figura abaixo:

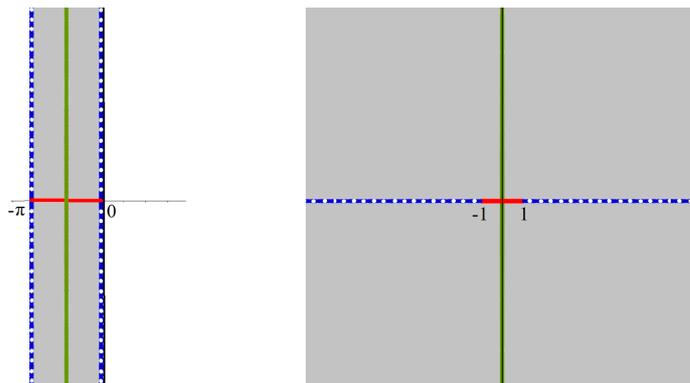


Figura 37: Função Cosseno

Assim como no caso real, podem ser definidas funções auxiliares a partir das funções seno e cosseno.

Definição 30: As funções tangente, cotangente, secante e cossecante complexas são definidas respectivamente por:

- $\tan(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\text{cos}(z)}$
- $\cot(z) = \frac{\text{cos}(z)}{\text{sen}(z)}$
- $\sec(z) = \frac{1}{\text{cos}(z)}$
- $\csc(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)}$

Considerando os zeros das funções seno e cosseno, tem-se:

- A função tangente possui infinitos zeros: $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e infinitos polos: $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mas não possui pontos críticos, pois:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \tan'(z) = \sec^2(z) \neq 0$$

- A função cotangente possui infinitos zeros: $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e infinitos polos: $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mas não possui pontos críticos, pois:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cot'(z) = -\csc^2(z) \neq 0$$

- A função secante não possui zeros, mas possui infinitos polos:
 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e infinitos pontos críticos: $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pois:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sec'(z) = \tan(z)\sec(z)$$

Portanto, os zeros da função tangente são pontos críticos da função secante;

- A função cossecante não possui zeros, mas possui infinitos polos:
 $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e infinitos pontos críticos: $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

As funções acima são exemplos de funções meromorfas, com infinitos polos no plano complexo.

Outra propriedade importante é a periodicidade destas funções, essa propriedade se deve a periodicidade das funções seno e cosseno. Tem-se:

- I. $\tan(z + \pi) = \tan(z)$
- II. $\cot(z + \pi) = \cot(z)$
- III. $\sec(z + 2\pi) = \sec(z)$
- IV. $\csc(z + 2\pi) = \csc(z)$

Prova:

$$\begin{aligned} \tan(z + \pi) &= \frac{\operatorname{sen}(z+\pi)}{\operatorname{cos}(z+\pi)} = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)\operatorname{cosh}(y)+i\operatorname{cos}(x+\pi)\operatorname{senh}(y)}{\operatorname{cos}(x+\pi)\operatorname{cosh}(y)+i\operatorname{sen}(x+\pi)\operatorname{senh}(y)} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}(x)\operatorname{cosh}(y)-i\operatorname{cos}(x)\operatorname{senh}(y)}{-\operatorname{cos}(x)\operatorname{cosh}(y)-i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{cosh}(y)+i\operatorname{cos}(x)\operatorname{senh}(y)}{\operatorname{cos}(x)\operatorname{cosh}(y)+i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)} \\ &= \tan(z) \end{aligned}$$

■

Os gráficos dessas transformações são ilustrados a seguir.

- Tangente

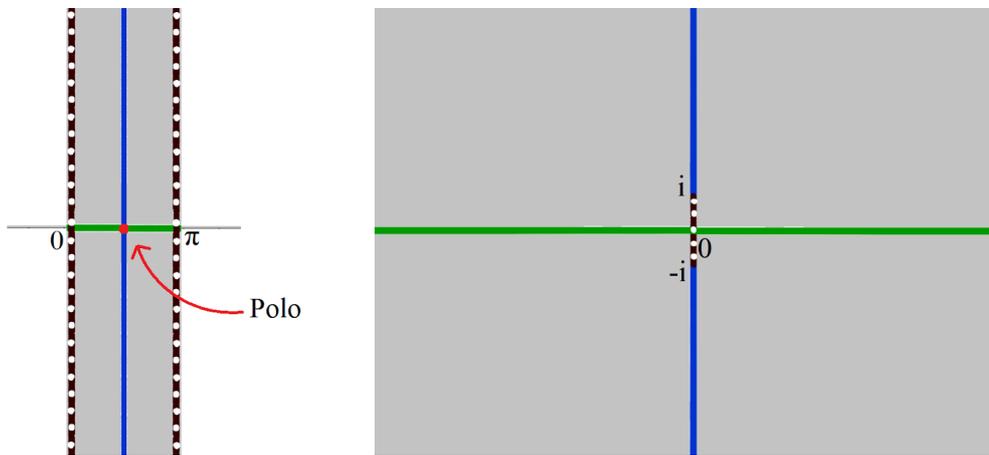


Figura 38: Função tangente no intervalo $0 < x < \pi$, $-\infty < y < \infty$

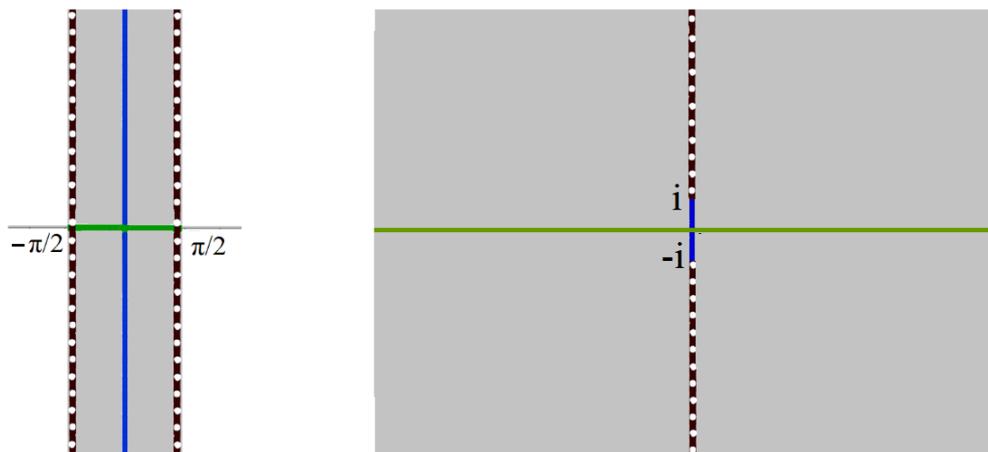


Figura 39: Função tangente na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$

- Cotangente

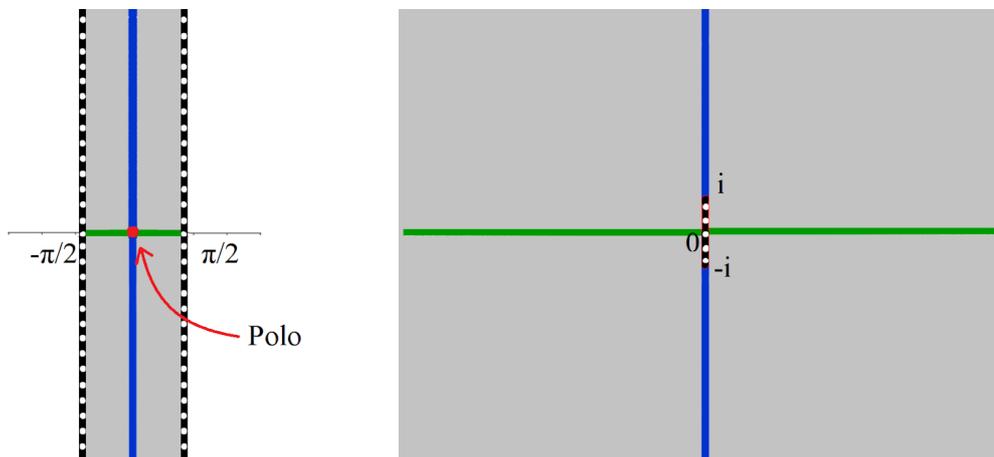


Figura 40: Função cotangente na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$

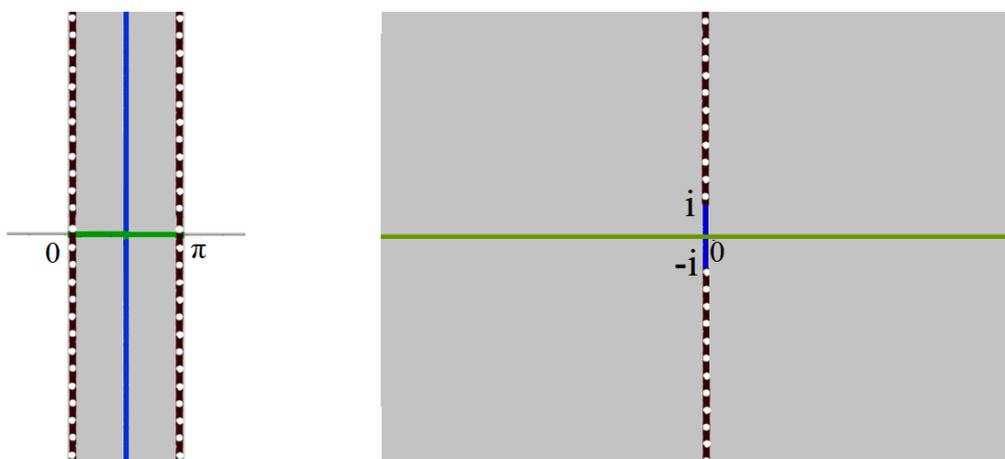


Figura 41: Função cotangente na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$

- Secante

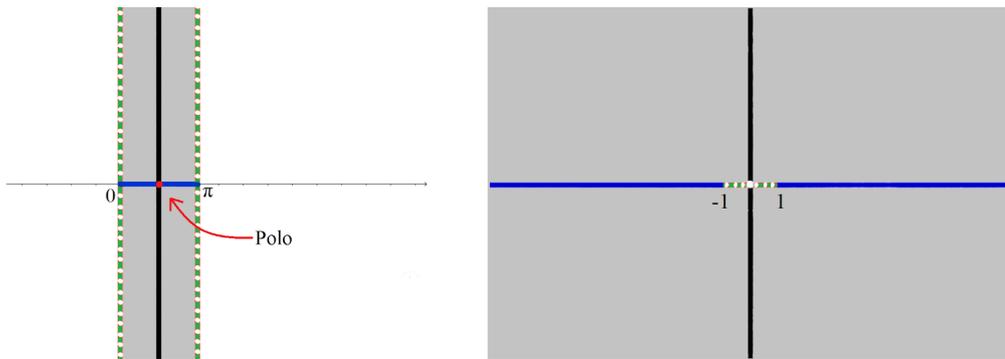


Figura 42: função secante na região na região $0 < x < \pi$, $-\infty < y < \infty$

- Cossecante

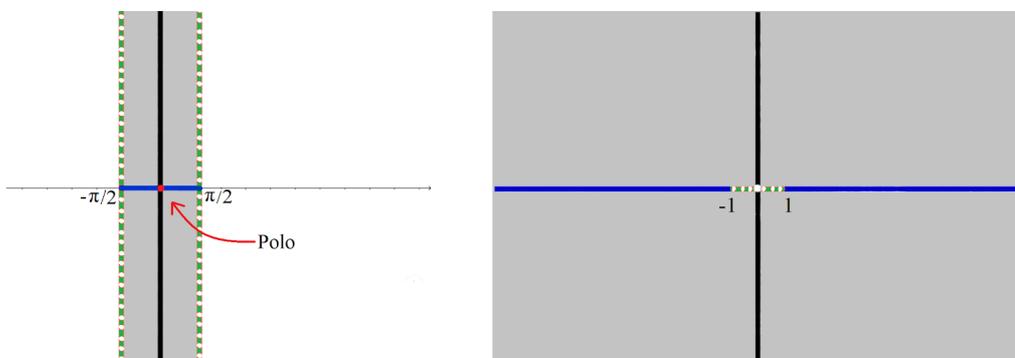


Figura 43: função cossecante na região $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$

7. Um exemplo de função elíptica

Dadas as regiões: A quadrado aberto de vértices $1, -1, i, -i$ e B bola aberta de centro na origem e raio 1 , como na ilustração abaixo:

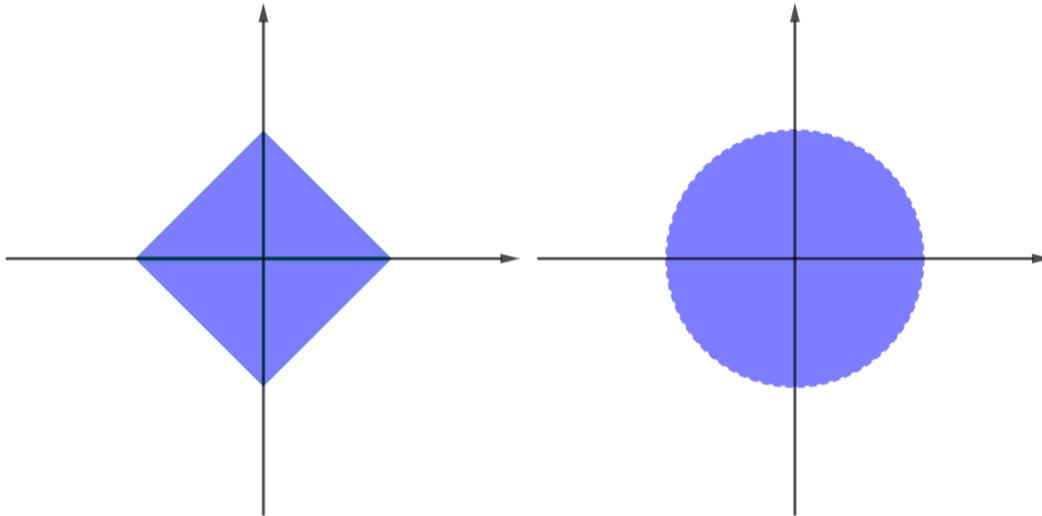


Figura 44: Domínio principal e imagem da função Elíptica.

Pelo Teorema do Mapeamento de Riemann existe uma única função $f : A \rightarrow B$, inversível, com inversa holomorfa e $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Sendo esta uma função elíptica.

Nota: As funções elípticas assim como as funções trigonométricas, são um conjunto de funções, a função acima definida é apenas um exemplo de função deste tipo.

Na seção 3.3 demos um exemplo de uma função com domínio quadrado que pode ser estendida para todo o plano. Do mesmo modo a função elíptica construída acima tem domínio quadrado e pode ser estendida meromorficamente. Onde podemos concluir algumas propriedades desta função.

A reflexão $r_0(z)$ em relação à aresta que passa por 1 e i é dada por:

$$r_0(z) = 1 + i - i\bar{z}$$

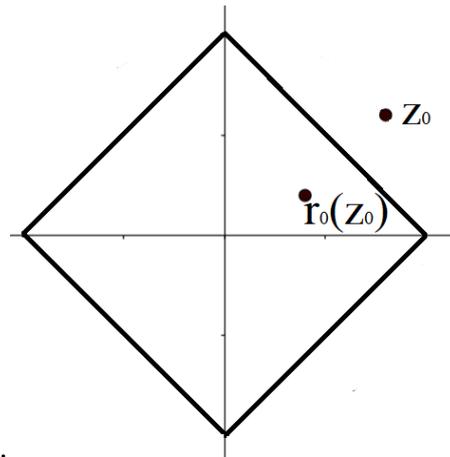


Figura 45: Reflexão em relação a aresta do quadrado.

A reflexão $r_1(z)$ em relação ao arco de circunferência unitária centrada na origem é dada por:

$$r_1(z) = 1/\bar{z}$$

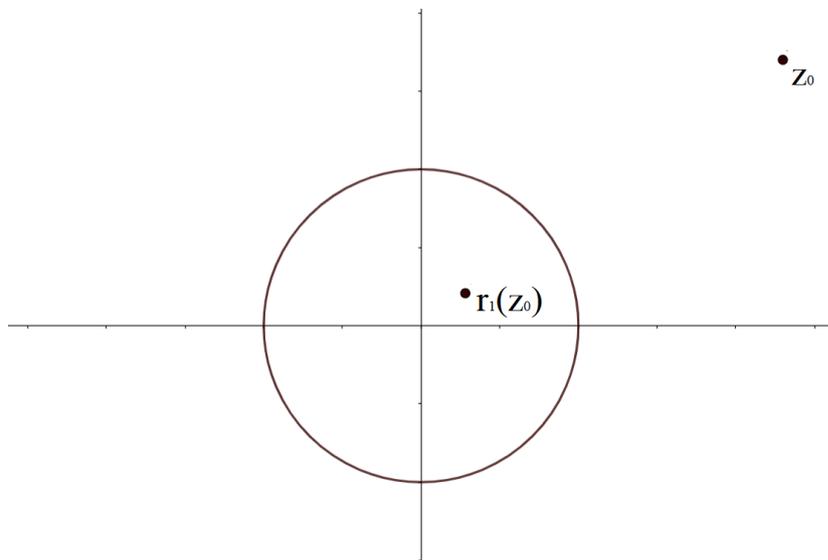


Figura 46: Reflexão em relação a circunferência centrada na origem.

Tem-se pelo princípio da reflexão:

$$f(z) = r_1(f(r_0(z)))$$

Proposição 20: (Princípio da reflexão) Se f é a função elíptica acima definida, então:

$$f(1 + i - i\bar{z}) = 1/\overline{f(z)}$$

Prova:

Tomando $z = a + bi$, com $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$. Tem-se:

$$f(z) = r_1(f(1 + i - i\bar{z}))$$

$$f(z) = 1/\overline{f(1 + i - i\bar{z})}$$

$$\overline{f(z)} = \overline{1/\overline{f(1 + i - i\bar{z})}}$$

$$f(1 + i - i\bar{z}) = 1/\overline{f(z)}$$

Assim a identidade vale no quadrado e por prolongamento analítico vale em todo o plano complexo

Proposição 21: As seguintes identidades são válidas.

- 1) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$
- 2) $f(iz) = if(z)$
- 3) $f(-z) = -f(z)$
- 4) $f(z + 1 + i) = -i/f(z)$
- 5) $f(z + 1 - i) = i/f(z)$

Prova:

1)

$$f(\bar{z}) = f(1 + i - i\overline{(1 + i - i\bar{z})}) = 1/\overline{f(1 + i - i\bar{z})} = 1/(\overline{1/f(z)}) = \overline{f(z)}$$

Interpretação geométrica:

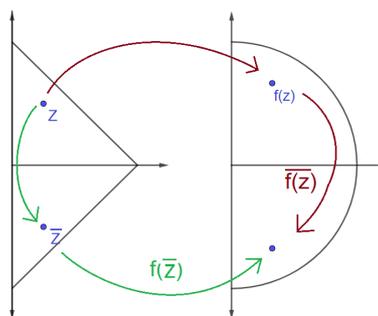


Figura 47: Interpretação geométrica: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

2)

Seja $f_2 : A \rightarrow B$ definida por $f_2(z) = -if(iz)$. Temos que f_2 é bijeção holomorfa de A para B e que $f_2'(0) = f'(0) > 0$. Pelo Teorema de Riemann $f_2 = f$.

Interpretação geométrica:

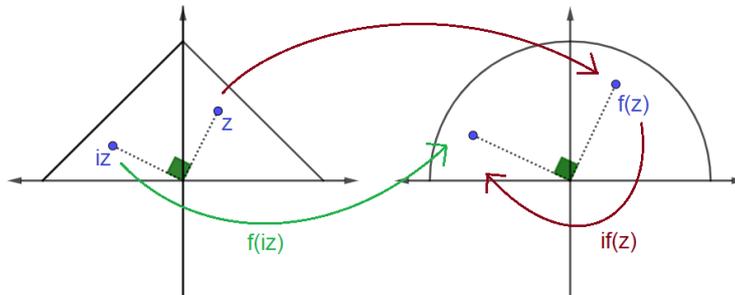


Figura 48: Interpretação geométrica: $f(iz) = if(z)$.

3)

$$f(-z) = f(i^2z) = if(iz) = i^2f(z) = -f(z)$$

Interpretação geométrica:

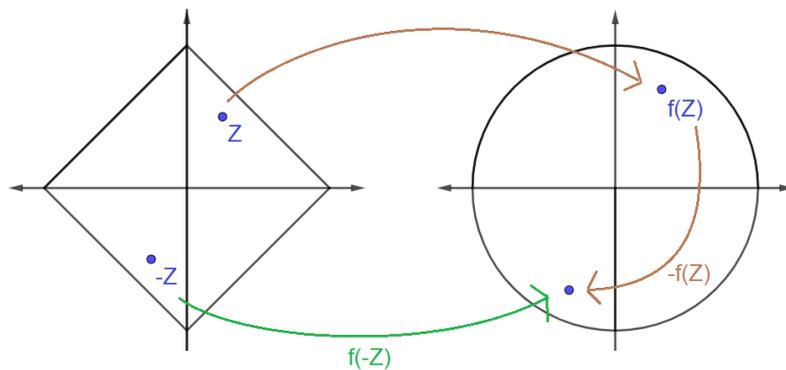


Figura 49: Interpretação geométrica: $f(-z) = -f(z)$.

4)

$$\begin{aligned} f(z+1+i) &= f(1+i - i(-\bar{z})) = 1/\overline{f(-\bar{z})} = 1/\overline{-if(\bar{z})} = 1/\overline{-i \cdot \overline{f(z)}} \\ &= 1/if(z) = -i/f(z) \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} f(z+1-i) &= f(\overline{\bar{z}+1+i}) = \overline{f(\bar{z}+1+i)} = \overline{-i/f(\bar{z})} = \overline{-i \cdot \overline{1/f(z)}} \\ &= \overline{i/f(z)} = i/f(z) \end{aligned}$$

Proposição 22: (Semi período) A função possui semi períodos 2 e $2i$.
Em outras palavras, $f(z + 2) = f(z + 2i) = -f(z)$.

Prova:

$$1) f(z + 2) = f((z + 1 + i) + 1 - i) = i/f(z + 1 + i) = i/(-i/f(z)) = -f(z)$$

$$\begin{aligned} 2) f(z + 2i) &= f(z + 2i) = \overline{1/f(1 + i - i\bar{z} - 2i)} = \overline{1/f(1 + i - i\bar{z} - 2)} \\ &= \overline{1/f(1 + i - i\bar{z} - 2)} = 1/f(-1 - i + iz) = i/f(1 - i - z) = i/(i/f(-z)) \\ &= f(-z) = -f(z) \end{aligned}$$

Proposição 23: (Periodicidade) A função é duplamente periódica de períodos 4, $4i$ e $2+2i$. Em outras palavras $f(z + k(2 + 2i)) = f(z + 4k) = f(z + 4ki) = f(z)$, $k \in \mathbb{Z}$

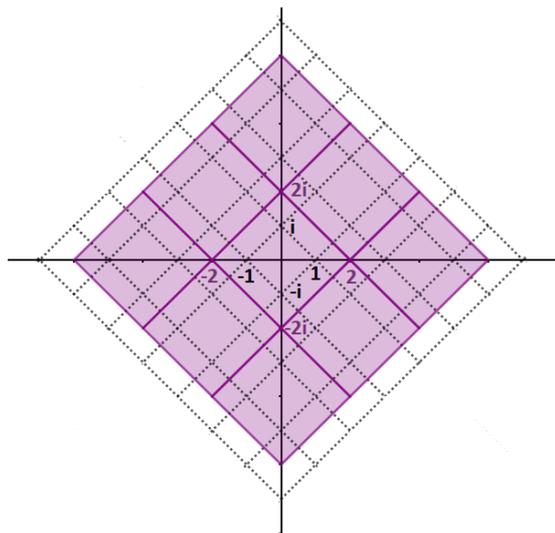


Figura 50: Ilustração da dupla periodicidade da função.

Prova:

$$1) f(z + 2 + 2i) = f((z + 1 + i) + 1 + i) = -i/f(z + 1 + i) = -i/(-i/f(z)) = f(z)$$

$$2) f(z + 4) = f((z + 2) + 2) = -f(z + 2) = f(z)$$

$$3) f(z + 4i) = f((z + 2i) + 2i) = -f(z + 2i) = f(z)$$

Proposição 24: (Zeros) Possui zeros em $z = a + bi$, com a, b inteiros pares;

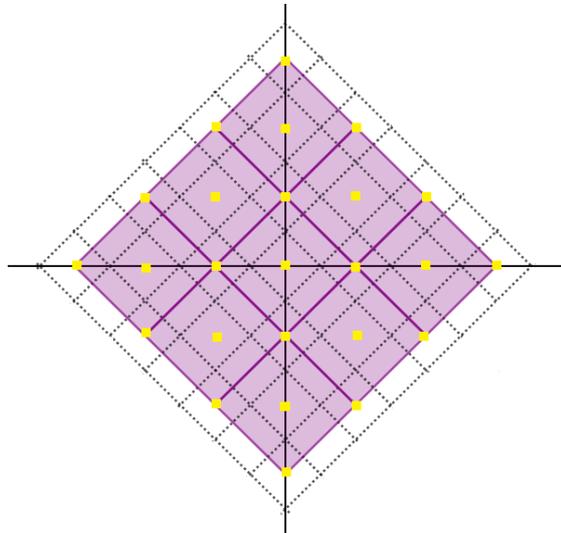


Figura 51: Ilustração dos zeros da função.

Prova:

Por definição $f(0) = 0$.

Utilizando o fato da função ser duplamente periódica, temos :

$$f(0 + 2k) = f(0 + 2ki) = f(0) = 0$$

■

Proposição 25: (Polos) Possui polos em $z = a + bi$, com a, b inteiros ímpares.

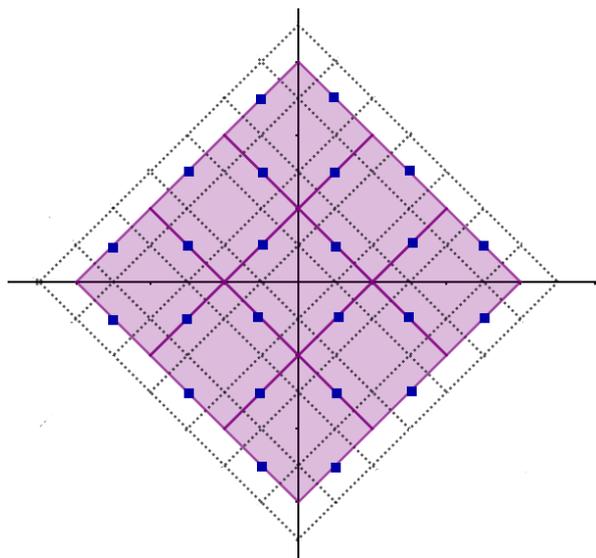


Figura 52: Ilustração dos polos da função.

Prova:

Considerando o Princípio da Reflexão:

$$f(z) = 1/\overline{f(1+i-i\bar{z})}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1+i} 1/\overline{f(1+i-i\bar{z})}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = \infty$$

Isto é, $z = 1 + i$ é um polo de f e utilizando o semi-período de f , temos: $f(1+i+2k)$ e $f(1+i+2ki)$ também são polos. ■

Proposição 26: (Pontos críticos) Possui pontos críticos em $z = a + bi$, com a, b inteiros tais que $a + b$ é ímpar.

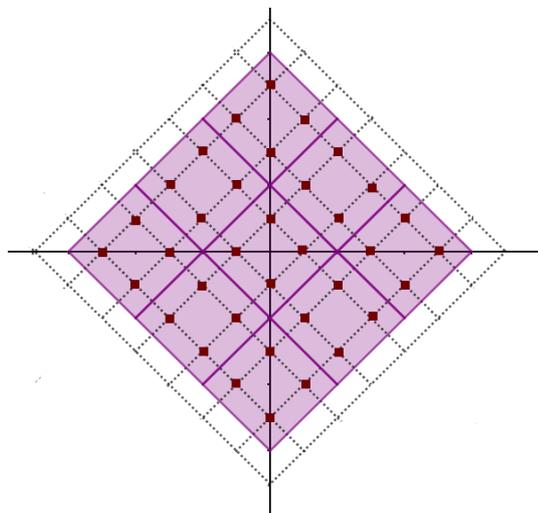


Figura 53: Ilustração dos pontos críticos da função.

Prova:

Observando o domínio e a imagem da função e a Proposição 15, pode-se observar que ângulos retos do quadrado são transformados em ângulos rasos, portanto os pontos $-1, 1, -i, i$ são pontos críticos simples de f .

Pela periodicidade de f , temos:

$$f(\pm 1) = f(\pm 1 + k(2 + 2i)) = f(\pm 1 + 4k) = f(\pm 1 + 4ki)$$

$$f(\pm i) = f(\pm i + k(2 + 2i)) = f(\pm i + 4k) = f(\pm i + 4ki)$$

■

Finalmente, dos resultados anteriores, segue:

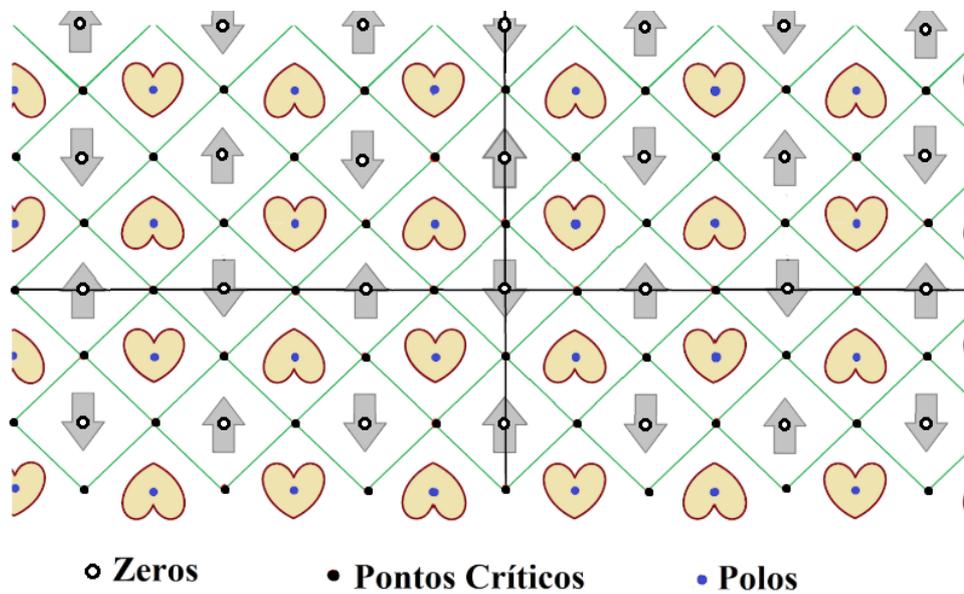


Figura 54: Função Elíptica estendida no plano.

Nas imagens anteriores foi exibido apenas o domínio da função (plano quadriculado), na imagem que segue é apresentado o domínio como um plano triangulado e a imagem como um disco e seu complemento.

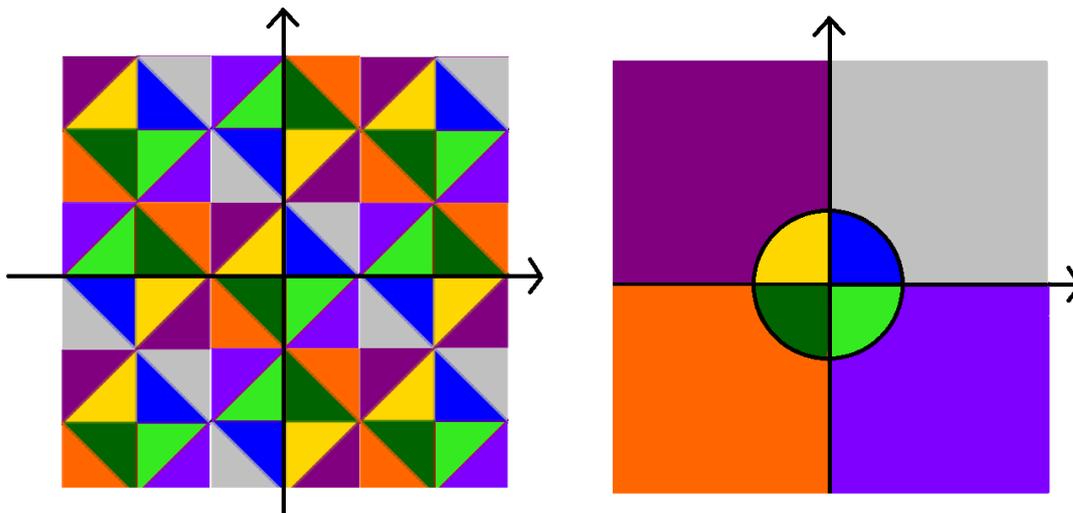


Figura 55: Domínio e imagem da função elíptica estendida no plano.

Concluimos assim que este domínio é exatamente o mapa de Pierce Quincuncial:

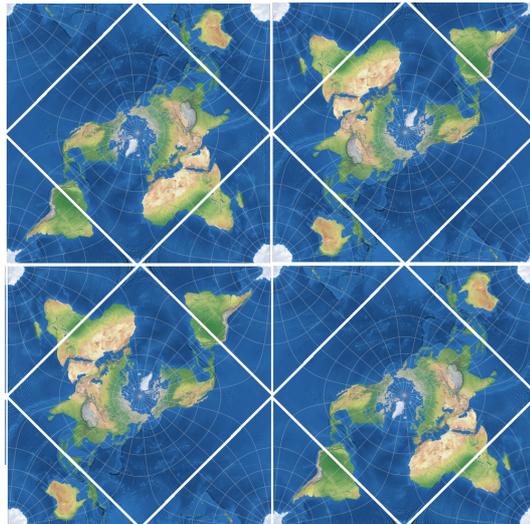


Figura 56: Periodicidade do Mapa Quincuncial

Por Strebe CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (Adaptado).

Por outro lado a imagem é exatamente a Projeção estereográfica, concluimos que esta função elíptica leva a Projeção de Pierce Quincuncial em Projeção Estereográfica.

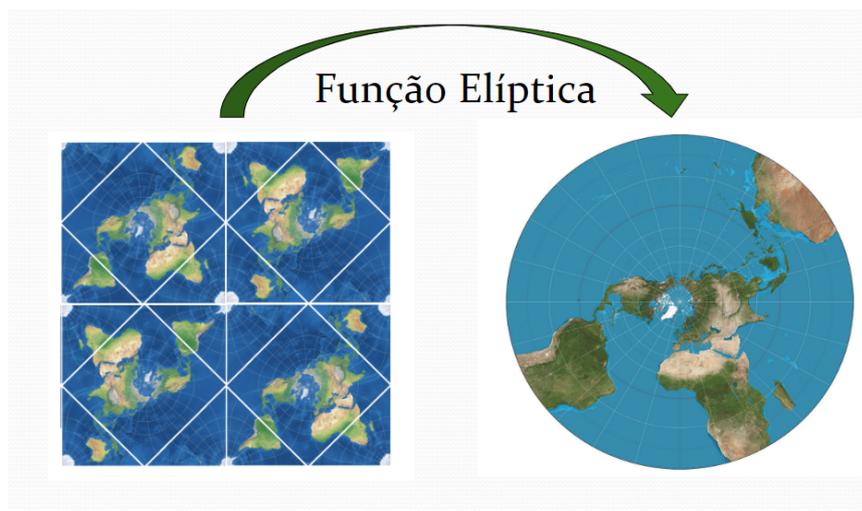


Figura 57: Relação do Mapa de Pierce quincuncial e Projeção estereográfica

Por Strebe CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (Adaptado)

8. Considerações Finais

O estudo da matemática pura nos curso de licenciatura por vezes gera desconforto aos discentes que questionam a importância deste conhecimento para um profissional que exercerá a função de professor na educação básica. Um exemplo é o curso de análise real que é visto de maneira extremamente abstrata e desconexa dos conteúdos da educação básica.

Do mesmo modo o cursos de análise complexa, que em muitos cursos é ofertado como disciplina eletiva, também pode parecer desconexo com a realidade de um futuro professor de matemática uma vez que o estudo de números complexos foi recentemente retirado do currículo da educação básica. No entanto, o estudo das deformações em mapas é uma competência apontada na BNCC para o Ensino Médio (*EM13MAT509*) *Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica*). Dentro deste contexto, uma proposta de atividade que pode ser aplicada ao Ensino Médio é analisar os mapas conformes com a Indicatriz de Tissot mostrando que os círculos são representados por círculos (conformidade).

O foco principal deste trabalho foi abordar alguns elementos da análise complexa sob o ponto de vista geométrico, dando significado visual a conceitos que a primeira vista parecem abstratos. Sendo portanto um texto que pode ser compreendido por interessados no assunto sem o pré-requisito de grandes conhecimentos da matemática pura.

Espera-se que este texto seja útil tanto a alunos da licenciatura na compreensão da análise complexa como para professores de matemática que desejem abordar o tema com seus alunos do Ensino Médio principalmente com uso de figuras e de uma compreensão mais intuitiva.

9. Referências Bibliográficas

- [1] AFONSO, Suzete Maria Silva; SILVA, Marcos A. da. **Teoria básica de análise complexa**. São Paulo: Editora Unesp, 2011.
- [2] ZENI, Sérgio L. **Funções de uma variável complexa**. São Carlos: ICMC, USP. 2014
- [3] AHLFORS, **Lars. Complex Analysis**. 2. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1996
- [4] ZILL, Dennis G; SHANARAM, Patrick D. Curso de Introdução à Análise Complexa com Aplicações. 2a ed. Rio de Janeiro, LTC, 2004.
- [5] BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1974.
- [6] CAPELAS DE OLIVEIRA, E.; RODRIGUES JÚNIOR, W. A.. **Funções Analíticas com Aplicações**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. v. 1, p. 240.
- [7] AGUIRRE, Argentino J.F. Introdução à Cartografia. 2a ed. Santa Maria: UFSM/Departamento de Engenharia Rural, 2009.
- [8] WHITROW, G. J. O tempo na história: concepções do tempo da pré-história aos nossos dias. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1993.
- [9] SILVA, Alexandre. Projeção Estereográfica, Propriedades e Aplicações. Dissertação de Mestrado. Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2011.
- [10] SEEMANN, Jörn. MERCATOR E OS GEÓGRAFOS: em busca de uma "projeção" do mundo. Mercator, v. 2, n. 3, 2003.
- [11] SIMÃO, Cleonice Salateski. **Uma Introdução ao Estudo das Funções Elípticas de Jacobi**. 2013. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, UEM, Maringá-PR, 2013.

[12] NUNES, Euderley de Castro. **A Esfera de Riemann: Projeções estereográficas e aplicações, uma abordagem para o Ensino Médio.** 2015. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, UFA, Manaus- AM.

[13] PEREIRA, Paulo Cesar R; **Revivendo Erastóstenes.** Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia, v.3 p.19-38, 2006.