3
Modelos de Volatilidade Variante no Tempo

3.1
Volatilidade Estocástica

Nos modelos de precificação de opções pós Black & Scholes, o preço do ativo P_t e a volatilidade σ_t seguem um processo de difusão. Autores como Chesney e Scott[8] supõem que o log da volatilidade segue um processo Ornstein-Uhlenbeck (O-U):

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma_t dW_1,$$

$$d(\ln \sigma_t) = \lambda(\zeta - \ln \sigma_t)dt + \gamma dW_2,$$

com α, ζ, λ e γ são parâmetros constantes e (W_{1t}, W_{2t}) é um processo de Wiener padrão bi-dimensional descorrelatado.
Para estimar os parâmetros, a maneira mais difundida é particularizar o processo para uma aproximação em tempo discreto. Desta forma, temos:

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + \mu + \sigma_t U_t, \quad U_t \sim \mathrm{N}(0,1),$$

$$\ln \sigma_t = \phi(\ln \sigma_{t-1} - \alpha) + \varsigma_t, \quad \varsigma_t \sim \mathrm{N}(0,1),$$

com t restrito a valores inteiros. Aqui, μ, α e ϕ são constantes. O log da volatilidade segue um processo estacionário quando $-1 < \phi < 1$. Se definirmos $\alpha = 0$ e o retorno como $R_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$. Rescrevemos o processo como:

$$R_t = \mu + \sigma_t U_t, \quad U_t \sim \mathrm{N}(0,1),$$

$$\ln \sigma_t = \phi \ln \sigma_{t-1} + \varsigma_t, \quad \varsigma_t \sim \mathrm{N}(0,1). \tag{3.1}$$

Da equação (3.1) vem o embasamento teórico da utilização do modelo SV para estimação da volatilidade dos retornos financeiros.

Ao contrário dos modelos da família ARCH, nos modelos de volatilidade estocástica (SV) a volatilidade é uma variável não observável, seguindo um processo estocástico. Os modelos SV podem ser definidos a partir dos dois primeiros momentos, pela equação de média e variância. A equação de modelos de volatilidade estocástica a ser considerada nesta dissertação, é dada por:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \sigma_t \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \begin{cases} \sim \mathrm{N}(0,1) \\ \sim t(v) \end{cases}, t = 1, ..., T, \\ \sigma_t &= e^{h_t/2}, \\ h_t &= \phi h_{t-1} + \eta_t, \qquad |\phi| < 1, \quad \eta_t \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_\eta^2), \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde y_t é o retorno do ativo e μ_t é a sua esperança condicional. Nos modelos SV geralmente assumimos que essa média seja igual a zero[1]. O distúrbio ϵ_t é normal identicamente distribuído com média zero e variância um. Daqui, podemos extrair média e variância de y_t:

$$E[y_t] = E[\sigma_t \epsilon_t] = E[\sigma_t]E[\epsilon_t] = 0, \text{ dado que } \sigma_t \text{ e } \epsilon_t \text{ são independentes, por hipótese.} \tag{3.3}$$

Portanto,

$$Var[y_t] = E[y_t^2] = E[\sigma_t^2 \epsilon_t^2] = E[\sigma_t^2]E[\epsilon_t^2] = E[\sigma_t^2]. \tag{3.4}$$

Como h_t é normal, σ_t^2 é log-normal, e assim temos que:

$$E[y_t^2] = E[\sigma_t^2] = e^{\mu_h + \sigma_h^2/2}. \tag{3.5}$$

É trivial mostrar que

$$E[y_t^4] = 3e^{2\mu_h + 2\sigma_h^2}, \tag{3.6}$$

[1] É possível assumir um processo autoregressivo para μ_t que seja capaz de caracterizar efeitos calendário, efeito alavancagem, etc.

resultando na curtose igual a

$$K = \frac{3e^{2\mu_h + 2\sigma_h^2}}{e^{2\mu_h + \sigma_h^2}} = 3e^{\sigma_h^2} > 3. \tag{3.7}$$

Como esperado, os modelos SV apresentam caudas longas, capturando parte do excesso de curtose.

A equação da variância para os modelos SV pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \sigma^{*2} \exp(h_t). \tag{3.8}$$

Desta maneira, a variância é definida como o produto do fator de escala positivo σ^{*2} e o exponencial do processo estocático h_t. Para o modelo SV mais simples h_t é definido como sendo um processo autoregressivo de primeira ordem. Assim, conseguindo capturar aglomerados de volatilidade, um dos fatos estilizados de séries financeiras. Indicamos agora h_t como:

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, \quad \eta_t \sim \mathrm{NID}(0, 1), \tag{3.9}$$

onde o grau de persistência da volatilidade é mensurado pelo coeficiente autoregressivo ϕ, com intervalo $0 < \phi < 1$, para garantir a estacionariedade do log da volatilidade do processo. A condição inicial do log da volatilidade do processo é dada por $h_1 \sim \mathrm{N}[0, \sigma_\eta^2/(1-\phi^2)]$.

Então, o modelo SV estimado via MCL é dado por:

$$y_t = \sigma^* e^{h_t/2} \epsilon_t, \quad \epsilon_t \begin{cases} \sim \mathrm{N}(0,1) \\ \sim t(v) \end{cases}, t = 1, .., T.$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, \quad \eta_t \sim \mathrm{N}(0, 1). \tag{3.10}$$

Além de capturar aglomerados de volatilidade, um outro atrativo desta formulação é a possibilidade de linearização do modelo. Tomando o logarítmo do quadrado dos retornos obtemos a seguinte formulação:

$$\ln y_t^2 = \ln \sigma^2 + h_t + \xi_t, \quad \xi_t = \ln \epsilon_t^2$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, \qquad \eta_t \sim \mathrm{N}(0,1),$$
$$E[\xi_t, \eta_t] = 0. \tag{3.11}$$

Se o distúrbio na equação das medidas original ϵ_t segue uma distribuição normal padrão, então ξ_t segue uma distribuição $\ln(\chi_1^2)$ com média -1,27 e variância $\pi^2/2$.

No procedimento estimação via QML a estrutura (3.11) é utilizada, aproximando ϵ_t a uma distribuição Gaussiana.

3.1.1 Estimação

Nesta seção particuralizaremos a estimação explicitada em §2.3.3 através do passos do algoritmo Durbin e Koopman[13] para o caso dos modelos SV estimados via MCL, com ϵ_t regido por uma distribuição Gaussiana e para o caso de ϵ_t regido por uma distribuição *t-Student*.

A estimação do modelo SV via QML é feita através do filtro de Kalman, apresentado em §2.2.1.

No caso Gaussiano, a densidade de Amostragem por Importância $p_G(\epsilon/y, \psi)$, poderia ser baseada na aproximação do modelo SV dado em (3.10) com $\xi_t \sim \mathrm{N}(0, H_t)$, onde $H_t = \pi^2/2$, para $t = 1, .., T$. Porém, uma melhor densidade de importância[13] pode ser obtida de (3.9) com $\xi \sim \mathrm{N}(0, \widetilde{H}_t)$, onde as variâncias escalares de $\widetilde{H}_t'$s são escolhidas para fazer com que a diferença entre as log densidades $\ln p_{\ln \chi_1^2}(\xi/\psi)$ e $\ln p_G(\xi/\psi)$ estejam na vizinhança de $\hat{\xi} = E[\xi/y, \psi]$. A escolha das variâncias $\widetilde{H}_t'$s do modelo aproximado é feita igualando a derivada das log densidades em $\hat{\xi}$,

$$\frac{\partial \ln p_{\ln \chi_1^2}(\xi/\psi)}{\partial \xi} \mid_{\xi=\hat{\xi}} = \frac{\partial \ln p_G(\xi/\psi)}{\partial \xi} \mid_{\xi=\hat{\xi}},$$

obtendo-se a seguinte relação:

$$\widetilde{H}_t = \frac{2\sigma^{*2} e^{\xi_t}}{y_t^2}, \quad t = 1, ..., T. \tag{3.11}$$

O vetor do distúrbio suavizado $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_T)'$ é calculado pelo suavizador por simulação[12].

Como apresentamos no início do capítulo, os modelos SV com distúrbios Gaussianos na equação das medidas ϵ_t conseguem capturar parte do excesso de curtose presente em séries financeiras. Neste caminho, a mudança da distribuição de ϵ_t de Gaussiana para uma distribuição de caudas pesadas, tipo *t-Student*, pode aumentar a robustez dos modelos SV em relação ao excesso de curtose.

Em (3.10) com ϵ_t seguindo uma distribuição *t-Student* com v graus de liberdade, a densidade transformada do distúrbio, $\xi_t = \ln(\epsilon_t^2)$, é dada por:

$$p_{\ln t^2 v}(z) = C_v \left(1 + \frac{e^z}{v}\right)^{(v+1/2)} e^{(z/2)}, \quad C_v = \frac{\Gamma(v+1/2)}{\sqrt{v\pi}\Gamma(v/2)}. \tag{3.12}$$

Como
$$\frac{\partial p_{\ln t^2 v}(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left\{1 - (v+1)\left[\frac{e^z}{v+e^z}\right]\right\}, \tag{3.13}$$

então a equação de atualização de $\widetilde{H}_t$ é dada por:

$$\widetilde{H}_t = \left(\frac{2}{v+1}\right)\left(\frac{\delta_t + 1}{\delta_t}\right)^2,$$

onde
$$\delta_t = (v-2)\frac{\sigma^{*2} e^{\xi_t}}{y_t^2}, \quad t = 1, ..., T. \tag{3.14}$$

O grau de liberdade v entra no vetor de hiperparâmetros ψ, sobre a qual a função de verossimilhança é maximizada.

3.1.2 Previsão

A previsão de volatilidade um passo à frente para modelo SV, como em (3.1) e (3.8), pode ser calculada como

$$\sigma_t = \sigma^* e^{h_t/2},$$

$$\sigma_t^2 = \sigma^{*2} e^{h_t},$$

$$E[\sigma^2_{T+1/T}] = \hat{\sigma}^{*2} E[e^{h_{T+1}}],$$

$$E[\sigma^2_{T+1/T}] = \hat{\sigma}^{*2} e^{\hat{h}_{T+1/T}+0.5p_{T+1/T}}. \tag{3.15}$$

Na expressão anterior, $\hat{\sigma}^{*2}$ é o estimador de máxima verossimilhança de σ^{*2}, $\hat{h}_{T+1/T}$ é o estimador de h_{T+1} dada todas as T observações e $p_{T+1/T}$ é seu erro quadrático médio. Quando o horizonte de previsão for de N passos à frente, onde $N > 1$ temos que:

$$E[\sigma^2_{T+1,T+N/T}] = \hat{\sigma}^{*2} \sum_{j=1}^{N} e^{\hat{h}_{T+1/T}+0.5p_{T+1/T}}. \tag{3.16}$$

O estimador de $h_{T+1/T}$ e $p_{T+1/T}$ dada todas as T observações são calculados a partir de métodos de simulação apresentados anteriormente; para $j \geq 2$ os valores de $h_{T+j/T}$ e de $p_{T+j/T}$ são calculados através das equações

$$\hat{\sigma}_{T+j/T} = \hat{\phi}^{j-1}\hat{\sigma}_{T+1/T},$$

$$p_{T+j/T} = \hat{\phi}^{2(j-1)} p_{T+1/T} + \sum_{i=0}^{N-2} \hat{\phi}^{2i}\sigma_\eta^2.$$

Nestas expressões $\hat{\phi}$ e $\hat{\sigma}^2_\eta$ são estimadores de máxima verossimilhança de ϕ e σ^2_η, respectivamente. É possível observar que quando N aumenta $E[\sigma^2_{T+1,T+N/T}]$ convergirá para a variância incondicional dada por

$$\hat{\sigma}^{*2}\exp(0.5\frac{\sigma^2_\eta}{1-\hat{\phi}^2}).$$

A taxa de convergência vai depender do valor da estimativa do parâmetro de persistência, $\hat{\phi}$, cujo valor é perto de 1 para dados financeiros.

No caso de N ser pequeno, $E[\sigma^2_{T+1,T+N/T}]$ ainda não terá convergido para a variância incondicional. Então a previsão multi passos à frente pode ser apresentada como em (3.16).

3.2 Modelo GARCH(1,1)

Uma outra classe de modelos de volatilidade variante no tempo, utilizada para comparação com os modelos SV, é dado pelo modelo GARCH(1,1) expresso pela seguinte estrutura:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \begin{cases} \mathrm{NID}(0,1) \\ t(v) \end{cases}, \quad t = 1, ..., T,$$

$$\sigma^2_t = \omega + \alpha y^2_{t-1} + \beta \sigma^2_{t-1}.$$

y_t é o retorno do ativo estudado; v é número de graus de liberdade; e as restrições dos hiperparâmetros são $\omega > 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta < 1$.

3.2.1 Estimação

Os métodos de estimação para os modelos GARCH estão bem estabelecidos na literatura. Portanto, não será apresentado procedimentos da estimação do modelo GARCH(1,1), detalhes podem ser encontrados em trabalhos como Bollerslev, Chou e Kroner[6], Bera e Higgins[5] e Bollerslev, Engle e Nelson[7]. A estimação do modelo GARCH (1,1) nesta dissertação foi feita utilizando o pacote econométrico *EVIEWS 4*[17].

3.2.2 Previsão

A função de previsão do modelo GARCH(1,1) um passo à frente pode ser calculada como

$$E[\sigma^2_{T+1/T}] = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\sigma^2_T \varepsilon^2_T + \hat{\beta}\sigma^2_T.$$

$\hat{\omega},\ \hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ indicam os estimadores de máxima verossimilhança de $\omega,\ \alpha$ e β, respectivamente. Os N períodos à frente da previsão podem ser calculados pela equação

$$E[\sigma^2_{T+1,T+N/T}] = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}} + (\hat{\alpha}+\hat{\beta})^{j-1}\left(E[\sigma^2_{T+1/T}] - \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}\right).$$

Da equação acima, pode-se deduzir que $E[\sigma^2_{T+N/T}]$ converge para o valor incondicional da variância

$$\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}.$$

A taxa de convergência dependerá do grau de persistência da volatilidade, que é a soma de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.