# 1
# Introdução

Qualquer medida numérica que tente mensurar a incerteza de um investimento pode ser definida como uma medida de risco. O risco está presente em todas as operações do mercado financeiro e pode ser dividido em quatros grupos: risco operacional, risco de crédito, risco de mercado e risco legal. Nos concentraremos em mensurar o risco de mercado estimando a volatilidade.

A volatilidade do mercado é um fator crucial na tomada de decisão em finanças, assim como para precificação de opções, estratégias de *hedge*, alocação de ativos [26] e para o cálculo do valor em risco[28], VaR. Evidências empíricas indicam que a volatilidade de retorno de séries financeiras não é constante no tempo, apresentando prolongados períodos de baixa e alta volatilidade, comportamento este chamado de aglomerados de volatilidade. Estas características empíricas indicam que o comportamento dos retornos financeiros pode ser capturado por um modelo que reconheça a natureza variante no tempo da volatilidade do retorno.

Dois tipos de modelos foram desenvolvidos no intuito de capturar o processo de volatilidade autocorrelacionado variante no tempo: *Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*[16, 6], GARCH, e *Stochastic Volatility*, SV. Os modelos GARCH definem a variância variante no tempo como uma função determinística do quadrado do passado das inovações e variância condicional defasada. Nos modelos SV a variância é modelada como um componente não observável que segue um determinado processo estocástico. A versão mais difundida do modelo SV define volatilidade como o logarítmo de um processo autoregressivo de primeira ordem, sendo uma *proxy* em tempo discreto do processo de difusão Orstein-Uhlenbeck [26, 8] usado na literatura de precificação de opções. Apesar de serem uma alternativa competitiva aos modelos da família GARCH, amplamente utilizados pela comunidade acadêmica, a aplicação empírica dos modelos SV ainda é muito restrita. Este fato é decorrente da grande dificuldade de avaliação da função de verossimilhança. A partir de Sandmann e Koopman[39] abriu-se a possibilidade de estimação exata dos modelos SV. Podemos destacar trabalhos ainda não publicados de Koopman e Uspensky[45] e Hol e Koopman[24, 25] que estão focados na investigação dos resultados empíricos deste tipo de modelagem, principalmente com dados intradiários (de alta frequência). Ao contrário dos modelos GARCH, estas explorações, em particular com dados de alta frequência, ainda são novas em função da dificuldade de estimação já citadas.

Ao longo dos anos, vários tipos de soluções foram propostas para a avaliação da verossimilhança para modelos não lineares e/ou não Gaussianos. As mais relevantes na literaturas são: Quasi Máxima Verossimilhança (QML), Método dos Momentos (MM), Cadeia de Markov via Monte Carlo (MCMC) e por fim Verossimilhança de Monte Carlo (MCL). A seguir será exposto uma breve apresentação de cada solução, bem como a indicação da metodologia utilizada nesta dissertação.

Harvey *et al.*[23] propõem o método QML baseado no filtro de Kalman, assumindo normalidade no distúrbio das medidas. Uma das vantagens deste método é a simples generalização para o caso multivariado, fácil introdução de variáveis explicativas, dentre outras. A principal desvantagem do método é justamente a suposição de normalidade no distúrbio das medidas, uma aproximação deficiente como mostrado na literatura [39].

No contexto dos estimadores MM vários métodos foram sugeridos. Entre eles, podemos citar Taylor[44], Melino e Turnbull[33] e Andersen e Sorensen[2]. Os estimadores MM evitam os problemas associados com a linearização, bem como a avaliação da verossimilhança. Outras vantagens são a pouca dificuldade de implementação e de generalização. A desvantagem é que este tipo de método gera estimadores não eficientes quando comparados a outros métodos de estimação[2, 27].

Uma abordagem Bayesiana para a estimação de modelos SV usando a técnica MCMC foi desenvolvida por Jacquier *et al.*[27]. Neste trabalho, produziu-se evidências empíricas de que o método MCMC é superior as técnicas de estimação QML e MM no sentido de minimizar do erro quadrático médio. Entretanto, o procedimento demanda um alto custo computacional para as simulações. Além disso, as modificações necessárias para as extensões, como a introdução de variáveis explicativas, não são feitas de forma simples.

A partir dos trabalhos de Shephard e Pitt[40], Durbin e Koopman[13] e mais recentemente em Motta e Hotta[34], estudos de simulação indicaram que MCL é uma alternativa tão eficiente quanto a técnica MCMC. Suas vantagens são; entre outras: demanda computacional menor se comparado ao MCMC; as modificações são fáceis de serem implementadas no que tange à expansão do modelo como introdução de variáveis explicativas e o método oferece uma solução exata para a estimação da verossimilhança.

A grande contribuição do método MCL é possibilitar o aprofundamento do estudo dos modelos SV com diferentes extensões, como foi feito com a família GARCH. Tornando possível estudos comparativos mais amplos entre modelos SV e GARCH, o que ainda não foi possível dentro da literatura de modelos de variância variante no tempo.

Na literatura de modelos de volatilidade variante no tempo existem trabalhos que avaliam estes modelos em termos da capacidade preditiva. Podemos citar o trabalho de Pereira *et al.*[35], no qual investiga-se a ocorrência de rompimento do intervalo de confiança construído a partir da previsão um passo à frente da volatilidade. Porém, nesta dissertação o objetivo é avaliar os modelos de volatilidade estocástica em termos da cobertura condicional do VaR, para diferentes quantis desejados, através do da previsão da volatilidade um passo à frente.

Os modelos SV, estimados via MCL, apresentados nesta dissertação foram estimados usando método de máxima verossimilhança exata baseada em técnicas de simulação de Monte Carlo, no caso Amostragem por Importância, utililizando variáveis antitéticas.

Os modelos contemplados nesta dissertação são SV estimado via MCL e GARCH(1,1), ambos com distribuição do distúrbio da equação das observações Gaussiano e *t-Student*. Também consideramos o SV estimado via QML com distribuição do distúrbio da equação das observações Gaussiano, o qual serve como método comparativo (*benchmark*) para o modelo SV. Os métodos de estimação do modelo SV foram implementados na linguagem

*Ox*[15].

Os cinco modelos foram aplicados as séries de retornos diários (cotação de fechamento) do Ibovespa, S&P500, Nasdaq e Dow Jones no período de 02/07/1994 a 04/11/2003. As séries citadas foram previamente filtradas no sentido de retirar dependência linear. Detalhes do procedimento serão expostos em §4.1.

O critério de avaliação destes modelos, nas séries citadas acima, é um teste de razão de verossimilhança aplicado ao VaR, construído com a previsão de volatilidade um passo à frente, ou seja, o teste é aplicado no intervalo de previsão gerado pelos modelos. Em função da variância ser condicionada, utilizou-se o teste de cobertura condicional de Christoffersen[9]. A partir deste teste, é possível avaliar a eficácia dos modelos estimados via MCL frente à família GARCH e ao modelo SV estimado via QML, bem como a comparação dos resultados em relação a suposição de distúrbio Gaussiano e de cauda pesada.

Além desta introdução, esta dissertação possui quatro capítulos assim estruturados:

O capítulo 2 é dividido em duas partes: modelos Gaussianos/lineares e não Gaussianos ou não lineares. Apresenta-se na primeira parte, de forma suscinta, a abordagem clássica dos modelos em espaço de estado no caso Gaussiano e o filtro de Kalman, com extensões. Na segunda parte, apresenta-se os Modelos em Espaço de Estado (MEE) não Gaussianos, não lineares e o método de estimação dos hiperparâmetros destes modelos via MCL.

No capítulo 3, apresenta-se a definição dos modelos de Volatilidade Estocástica e uma particularização da estimação dos modelos não Gaussianos via metodologia Durbin & Koopman[13] no caso dos modelos SV. Esta particularização é feita para o caso do distúrbio da equação das observações ser Gaussiano ou *t-Student*.

O capítulo 4 é dividido em duas partes: descrição do método de avaliação dos modelos em avaliação e apresentacão dos resultados. Na primeira parte, apresenta-se uma breve definição de *Value at Risk*,VaR, e do teste de razão de verossimilhança para cobertura condicional, conhecido como teste de Chistoffersen[9]. Na segunda parte, apresenta-se resultados empíricos, para cada modelo, AR(1)-SV, AR(1)-SV-T, AR(1)-SV-Harvey, AR(1)-GARCH(1,1) e AR(1)-GARCH(1,1)-T, aplicados as séries de retornos do Ibovespa, S&P500, Nasdaq e Dow Jones.

O capítulo 5 trata das considerações finais com relação ao comparativo entre os métodos de estimação do modelo SV e entre o modelo SV e GARCH(1,1). Por fim, apresenta-se sugestões para trabalhos futuros.