

### 3

## Modelagem acústica por Transformada wavelet

Neste capítulo estão as explicações pertinentes à realização do algoritmo de modelagem utilizando a transformada wavelet. Através da seção 3.1 é apresentada a teoria matemática por trás do cálculo da transformada wavelet. Na seção 3.1.1 é desenvolvida a transformada wavelet discreta, na seção 3.1.2 é desenvolvida sua implementação via banco de filtros e na seção 3.1.3 é feita a extensão a sinais bidimensionais. A seção 3.2 contém a forma como operar a diferenciação no domínio wavelet. Na seção 3.3, a solução para meios com velocidade constante (homogêneos) é encontrada. Na seção 3.4 é obtida a solução para meios com velocidade variante (heterogêneos). Esta solução necessita de um modo especial de distribuir os valores do modelo pelos subespaços da transformada wavelet apresentado na seção 3.4.1. Na seção 3.5 estão as considerações sobre o tratamento de borda. A seção 3.6 contém contribuições pessoais ao processo de modelagem wavelet. Na seção 3.6.1 é mostrada a inclusão do termo forçante (fonte explosiva) na equação da onda, em uma forma de aplicação direta, sem a necessidade usual da aplicação de uma transformada wavelet. Em 3.6.2 é desenvolvida outra novidade, que envolve a reconstrução parcial do campo para a extração da linha de aquisição. Esta reconstrução parcial é um atalho ao processo usual, que envolve reconstrução total. Na seção 3.6.3 é descrito o algoritmo conforme foi implementado, com as descrições das sub-rotinas utilizadas.

### 3.1. Transformada wavelet

A série de Fourier é a expansão de um sinal em uma série de senos e cossenos. Os coeficientes resultantes desta operação revelam quais frequências compõem o sinal, porém são ineficazes em fornecer uma informação concisa sobre a ordenação na qual ocorrem diferentes eventos oscilatórios. Isto decorre da utilização de uma base de duração e energia infinitas.

Como forma de tentar corrigir esta deficiência pode-se calcular os coeficientes da série de Fourier em partes do sinal, selecionadas sistematicamente

por uma seqüência de janelamentos neste. Assim, a perda da variável original não é total, mesmo que ao sacrificio da informação em frequência. A esta técnica é dado o nome de transformada de Fourier em tempo restrito (*Short Time Fourier Transform*, ou *STFT*).

A transformada wavelet é a expansão de um sinal em uma série de pequenas ondas (*wavelets*), e visa ser o próximo passo lógico neste raciocínio. O termo *wavelet* é usado para descrever uma função localizada no espaço. Por ‘localizada’ entende-se que a wavelet tem suporte compacto (ou quase compacto, o importante sendo que sua energia esteja concentrada em uma pequena região). Estas características resumem a capacidade de tal expansão em representar aspectos oscilatórios de curta duração presentes em um sinal.

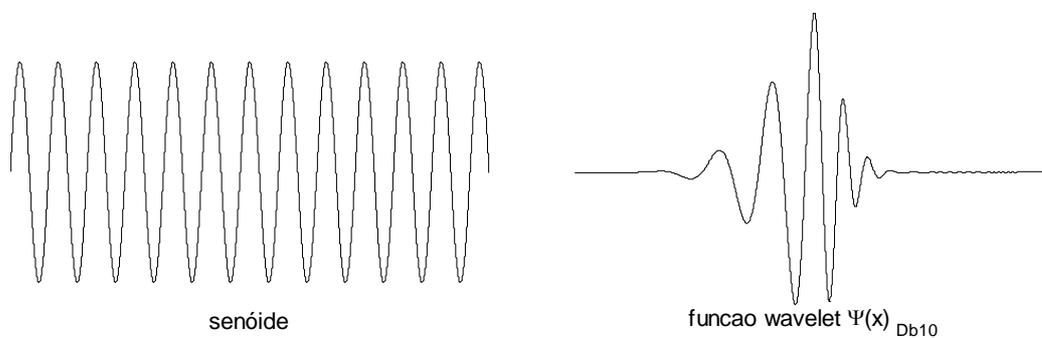


Figura 1: A função periódica senoidal e a função transiente wavelet Daubechies com 10 momentos nulos

A expansão wavelet de um sinal é formulada por

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle \psi_{j,k}(x); \tag{3.1}$$

$$\langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

cuja base é formada pela família de funções wavelet  $\psi_{j,k}$ , responsável pelo particionamento do espaço de interesse  $L^2(\mathbb{R})$  em subespaços  $W_j$  ortogonais entre si.

$$L^2 = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \tag{3.2}$$

A ortogonalidade não existe somente entre os subespaços  $W_j$ , mas também entre componentes de um mesmo subespaço.

$$\langle \psi_{j,k}(x), \psi_{i,l}(x) \rangle = \delta(j-i)\delta(k-l)$$

Em contraste com a análise Fourier, a base utilizada para a transformada wavelet pode assumir diversas formas, cada uma com características próprias, tornando-a mais adequada a um determinado número de situações. Entre essas características, uma de grande importância é o número de momentos nulos apresentados pelas funções da base (Strang & Nguyen, 1996; Burrus, Gopinath & Guo, 1997).

Os momentos de uma função  $f(x)$  são definidos por

$$M(n) = \int x^n f(x) dx \quad (3.3)$$

Como exemplos de bases criadas especificamente para atingir um determinado número de momentos nulos, podemos citar as wavelets de Daubechies (Daubechies, 1992). Estas possuem suporte compacto, e são apelidadas de  $dbN$ , onde  $N$  é o número de momentos nulos na função wavelet. Outro exemplo são as *coiflets* (Strang & Nguyen, 1996), dotadas de momentos nulos não só na função wavelet, mas também na função escala.

Momentos nulos na função wavelet estão relacionados à sua suavidade, garantindo a continuidade de suas derivadas. Conseqüentemente, uma função polinomial de ordem  $N-1$  pode ser perfeitamente representada em bases wavelet com  $N$  momentos nulos.

### 3.1.1. Transformada wavelet discreta

Apesar de sua definição formal incluir o uso de somatórios infinitos sobre domínios contínuos, para servir como ferramenta de processamento de sinais, esses devem sofrer limitações.

O limite inferior na escala  $j$  pode tornar-se finito com a inclusão da função escala  $\varphi_{I,k}(x)$  na base de decomposição wavelet (Burrus, Gopinath & Guo, 1997). Esta função é responsável pela formação de um subespaço  $V_J$  em  $L^2(\mathcal{R})$ , que

compreende todos os subespaços  $W_j$  para  $j < J$ . Desta forma, a expansão em (3.1) torna-se

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \langle f(x), \varphi_{J,k}(x) \rangle \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=J}^{+\infty} \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle \psi_{j,k}(x) \right\} \quad (3.4)$$

A escolha do nível  $J$  para a função escala é arbitrária, porém não existe muito sentido na operação sobre escalas maiores que a do próprio sinal, sendo este considerado o nível máximo de projeção. Este limite, no entanto, geralmente não é atingido, pois, ao serem respeitadas outras condições, o processo de decomposição pode ser interrompido. Um exemplo de critério de interrupção é a razão na partição da energia entre as projeções em  $V_j$  e  $W_j$  (estabelecendo um limite para a energia encontrada em  $W_j$ ). Outro critério possível é a análise do espectro em frequência destas projeções, gerando uma interrupção quando a reconstrução de  $W_j$  se confunde com a reconstrução de  $V_j$ . Independente do critério, procura-se identificar numericamente o detalhe mais grosseiro de que se tenha interesse.

A amostragem do sinal impõe os limites ao domínio (de contínuo para discreto), e conseqüentemente determina o limite superior na escala  $j$ , além do qual não é possível obter mais informações sobre o sinal.

A última providência é estreitar os limites dos deslocamentos  $k$ . Para isso utilizam-se bases wavelet de suporte finito, tornando possível a descrição de qualquer ponto da função a partir de um conjunto finito de projeções (coeficientes).

Com isso chegamos a uma relação entre a função amostrada e sua transformada wavelet discreta, composta pelos chamados coeficientes wavelet, divididos em coeficientes de aproximação  $a[k]$  e coeficientes de detalhes  $d[j,k]$ .

$$f(x) = \sum_k \left\{ a[k] \varphi_{J,k}(x) + \sum_j d[j,k] \psi_{j,k}(x) \right\} \quad (3.5)$$

Conforme visto na eq. 3.2, o conjunto  $L^2(R)$  pode ser particionado em subespaços  $W_j$  ortogonais entre si.

$$L^2 = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$$

Um determinado subespaço  $V_j$  é formado pela união dos subespaços  $W_j$  de maior escala.

$$V_j = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots$$

Isto incorre nas relações

$$V_{j-1} \subset V_j \quad \text{e} \quad V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

Como condição para a complementaridade entre os subespaços  $V_j$  em diferentes escalas (para que um subespaço esteja contido no outro), uma projeção no subespaço  $V_{j-1}$  (ou uma função que pertença à  $V_{j-1}$ ) deve também pertencer a  $V_j$ . Ou seja,  $\varphi(x)$  pode ser expresso por uma soma ponderada de versões deslocadas de  $\varphi(2x)$ , de acordo com a eq. 3.6

$$\varphi(x) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (3.6)$$

onde os coeficientes  $h_0(n)$  são uma seqüência de valores reais (ou complexos) denominados coeficientes da função escala ou filtro de decomposição escala. O fator  $\sqrt{2}$  serve para manter constante a norma da função, que, por construção e conveniência, é normalizada (unitária).

Diferentes autores atribuem diferentes nomes a eq. 3.6. Ela é chamada de equação de refinamento, equação de análise multi-resolução, ou equação de dilatação.

Da mesma forma, a função wavelet, que se encontra no subespaço  $W_{j-1} \subset V_j$ , pode ser representada por uma soma ponderada de  $\varphi(2x)$  deslocados de acordo com

$$\psi(x) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (3.7)$$

sendo os coeficientes  $h_1(n)$  chamados de filtro de decomposição wavelet.

Como fruto do requerimento às condições impostas (espaços  $V$  e  $W$  em complemento ortogonal, assim como ortogonalidade entre deslocamentos no mesmo espaço), existe uma relação entre os coeficientes dos filtros de decomposição escala e wavelet. Esta relação, para o caso de filtros de tamanho par (conforme estudado nesta dissertação), assume a forma

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(L-1-n),$$

onde  $L$  é o comprimento dos filtros. Para o caso das wavelets de Daubechies, o comprimento  $L$  é o dobro do número de momentos nulos encontrados na função wavelet, ou seja,  $L = 2N$ .

### 3.1.2. Transformada wavelet discreta por banco de filtros

Em geral, o cálculo da transformada wavelet discreta é feito sem utilizar qualquer das funções escala ou wavelet. O processo é desenvolvido em torno de seus filtros descritores (de decomposição) correspondentes. Para isso, é preciso encontrar a relação entre coeficientes de expansão de diferentes escalas.

Considerando a existência de solução única da equação de recursão da função escala

$$\varphi(x) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

a aplicação de escalonamento e translação resulta em

$$\begin{aligned} \varphi(2^{-j}x - k) &= \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2^{-(j-1)}x - 2k - n); \\ \varphi(2^{-j}x - k) &= \sum_m h_0(m - 2k) \sqrt{2} \varphi(2^{-(j-1)}x - m); m = 2k + n \end{aligned} \quad (3.8)$$

Os coeficientes de escala (projeção) em  $V_j$  de uma função são encontrados pelo produto interno

$$\begin{aligned} a_j(k) &= \langle f(x), \varphi_{j,k}(x) \rangle \\ &= \int f(x) 2^{-j/2} (2^{-j}x - k) dt, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que, quando combinado à eq. (3.7), pode ser escrito como

$$a_j(k) = \sum_m h_0(m - 2k) \int f(x) 2^{-(j-1)/2} (2^{-(j-1)}x - m) dt. \quad (3.10)$$

Identificando a integral como o produto interno com a função escala em um nível  $j-1$ , fica estabelecida a relação entre coeficientes de diferentes níveis através do filtro escala

$$a_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)a_{j-1}(m). \tag{3.11}$$

A relação para os coeficientes wavelet é semelhante.

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)a_{j-1}(m) \tag{3.12}$$

Estas relações revelam o motivo dos coeficientes da função escala (ou wavelet) serem chamados também de filtro escala (ou wavelet). A sutil diferença entre este processo de decomposição e um processo de filtragem simples está no fator 2 associado à variável de deslocamento  $k$  da convolução, significando o descarte alternado de metade das amostras resultantes.

O processo de decomposição pode ser diagramado conforme a figura 2, que descreve um típico processo de análise por um banco de duas bandas. A estrutura recursiva de decomposição dos coeficientes de aproximação recebe o nome de árvore ou expansão diádica (Mallat, 1989).

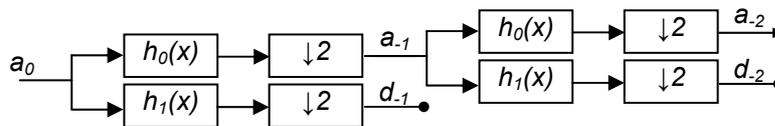


Figura 2: Decomposição wavelet 1D por banco de filtros

A partir de um conjunto de amostras, outros dois são obtidos, resultantes de uma filtragem seguida de decimação ou sub-amostragem. A quantidade de amostras gerada é praticamente a mesma (dobra-se o número de amostras com a aplicação de dois filtros, e depois corta-se metade com a decimação), só não o sendo devido à característica do processo de convolução de adicionar uma quantidade de amostras de acordo com o tamanho do filtro utilizado.

A perda de informação (amostras) causada pela decimação propicia o falseamento (*aliasing*) no espectro de frequência do sinal filtrado. Mas, uma vez satisfeitas as condições impostas aos filtros, a informação aparentemente perdida em uma banda está armazenada na outra. Esta é a idéia por trás da reconstrução perfeita na teoria de bancos de filtros.

Para eliminar certos incômodos gerados pela quantidade residual de amostras provocada pela convolução, principalmente na representação desses dados para o caso bidimensional (conforme será apresentado adiante), a

consideração de periodicidade do sinal é tomada. Sob esta perspectiva, a convolução toma a forma circular, e com isso não gera a quantidade residual de amostras.

Cada estágio (ou escala ou nível) divide o anterior em uma banda baixa e uma banda alta, resultando em um conjunto logarítmico de larguras de banda, conforme ilustrado na figura 3.

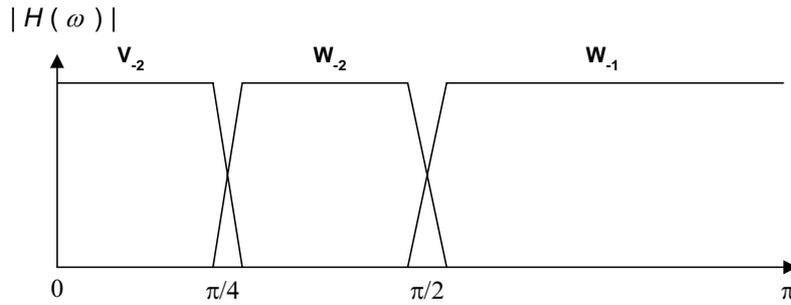


Figura 3: Bandas de frequência na árvore de decomposição

A recuperação do sinal a partir de seus coeficientes é feita pelo processo reverso, ilustrado na figura 4, fazendo uso de interpolação (*up-sampling*) antecedendo a filtragem. Os filtros  $g_0(n)$  e  $g_1(n)$ , chamados de filtros de reconstrução, são obtidos (para o caso ortogonal) da inversão na ordem das amostras do par de decomposição:

$$g_0(n) = h_0(L-1-n); \quad g_1(n) = h_1(L-1-n).$$

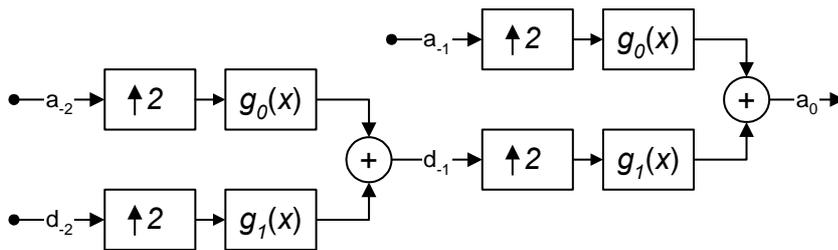


Figura 4: Árvore de reconstrução (síntese) por banco de duas bandas

### 3.1.3. Transformada wavelet discreta em duas dimensões

Sendo a transformada wavelet encarada como uma aplicação de filtros, esta pode se dar em forma matricial

$$\tilde{f} = Wf \Leftrightarrow f = W^{-1}\tilde{f}, \tag{3.13}$$

onde

$$\tilde{f} \equiv \{a_j, d_j\} |_{j=-1, -2, \dots, J} \tag{3.14}$$

é o vetor de coeficientes wavelet, uma forma de representar a transformada wavelet de uma função  $f$ .

Da mesma forma que o vetor (um sinal 1D) foi particionado em vetores menores (figura 5), é intuitivo que uma matriz (um sinal 2D) também seja particionada em submatrizes. Porém alguns cuidados devem ser tomados.

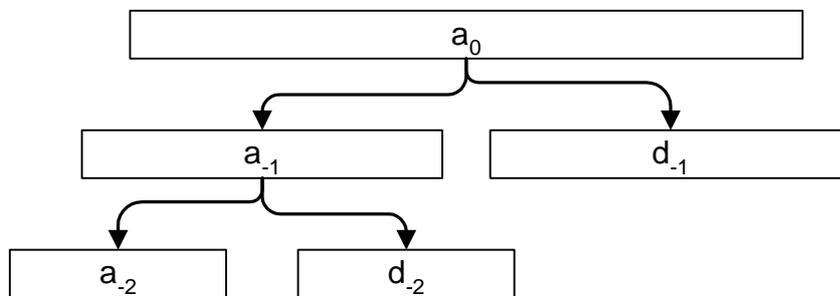


Figura 5: Partição de coeficientes wavelet 1D. Note o aumento do número (proporcional ao tamanho desenhado) de coeficientes resultantes devido aos resíduos da convolução.

A decomposição de um sinal bidimensional  $S(x,z)$  em seus coeficientes wavelet, quando efetuada a mais de uma escala (nível), pode ser obtida de duas formas diferentes.

A primeira forma de decomposição, chamada de convencional (*standard*), consiste na tomada da transformada wavelet em uma dimensão seguida pela transformada deste resultado na dimensão restante. O resultado desta divisão em subespaços é mostrado na figura 6. A maior desvantagem desta forma é a mistura entre as diferentes escalas. Neste formato, decomposições em diferentes níveis só são alcançadas diretamente do sinal original (ou de sua projeção no subespaço  $V_0V_0$  em  $L_2(R^2)$ ).

$V_{-2}V_{-2}$	$V_{-2}W_{-2}$	$V_{-2}W_{-1}$
$W_{-2}V_{-2}$	$W_{-2}W_{-2}$	$W_{-2}W_{-1}$
$W_{-1}V_{-2}$	$W_{-1}W_{-2}$	$W_{-1}W_{-1}$

Figura 6: Subespaços wavelet na forma de decomposição padrão.

A outra forma é obtida pela decomposição alternada de linhas e colunas a cada nível, conforme mostrado em (Matos & Osório, 2002). Este segundo formato, comumente chamado de não-convencional ou alternado, é o mais utilizado, e permite a obtenção de representações em diferentes níveis a partir de qualquer outra, sem necessariamente envolver a projeção no subespaço  $A_0$  (equivalente ao  $V_0V_0$ ). A figura 7 mostra o banco de filtros e os coeficientes da transformada wavelet.

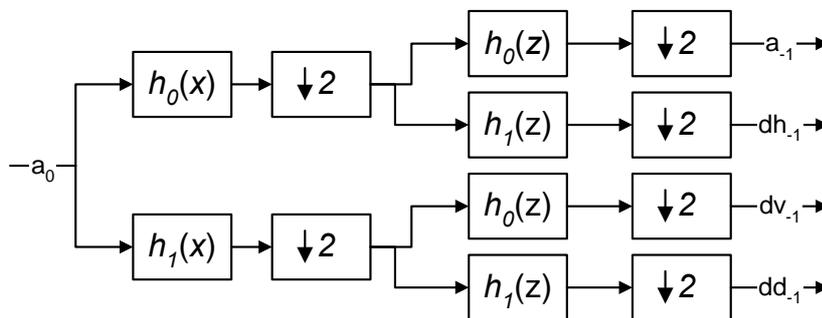


Figura 7: Análise wavelet 2D em um nível. O modo alternado é derivado das sucessivas análises dos subespaços  $A_j$ .

O resultado de cada nível de decomposição  $j$  é um novo grupo de quatro subespaços denominados aproximação, detalhe horizontal, detalhe vertical e detalhe diagonal, ou simplesmente,  $A_j$ ,  $H_j$ ,  $V_j$  e  $D_j$ , respectivamente. A cada subespaço é atribuído um conjunto de coeficientes, respectivamente,  $a_j$ ,  $dh_j$ ,  $dv_j$  e  $dd_j$ .

A representação matricial da transformada wavelet 2D toma a forma da eq. 3.15

$$\tilde{S} = WSW^T \Leftrightarrow S = W^{-1}\tilde{S}W^{-T}, \tag{3.15}$$

onde

$$\tilde{S} \equiv \left\{ \begin{matrix} a_j & 0 \\ 0 & d_j \end{matrix} \right\}_{j=-1,-2,\dots,J}, \text{ com } d_j \equiv \left\{ \begin{matrix} 0 & dh_j \\ dv_j & dd_j \end{matrix} \right\}_{j=-1,-2,\dots,J}, \tag{3.16}$$

é a matriz de coeficientes wavelet. Esta forma visa contornar a diferença entre tamanhos causada pelas amostras residuais da convolução, que impedem o encaixe perfeito dos subespaços  $j-1$  nas mesmas dimensões ocupadas por  $A_j$ . Isto torna esta forma bastante esparsa, como pode ser visto na figura 8.

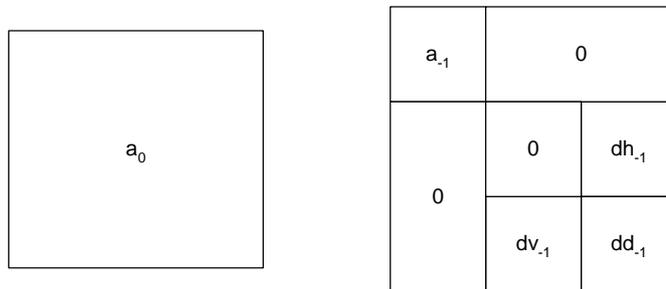


Figura 8: Partição dos coeficientes 2D, modo alternado e esparsos.

Uma outra forma de agrupar os subespaços (submatrizes) é dada pela eq. 3.17,

$$\tilde{S} \equiv \left\{ \begin{matrix} a_j & dh_j \\ dv_j & dd_j \end{matrix} \right\}_{j=-1,-2,\dots,J}, \tag{3.17}$$

uma forma compactada pela consideração de periodicidade do sinal. Conseqüentemente, a matriz  $W$  correspondente, responsável pela transformada wavelet direta, tem sua construção alterada para efetuar as convoluções circulares. Sob esta consideração periódica, as dimensões da matriz  $\tilde{S}$ , que concatena todos os coeficientes, não mudam. A quantidade de operações irrelevantes sobre esta também diminui em comparação com a forma esparsa, onde o preenchimento dos espaços vazios por zeros é meramente ocupacional, não contribuindo com seu valor em qualquer cálculo efetuado sobre a matriz. Um cuidado a ser tomado fica

por conta do fator de decimação. O encaixe só pode ser garantido perfeito caso as dimensões sejam múltiplas de  $2^{|J|}$ , onde  $|J|$  é o número de níveis de decomposição.

Devido à utilização de bases wavelet ortonormais, a transformação  $W^{-1}$  equivale à  $W^T$ , fato que será levado em consideração deste ponto em diante (Strang & Nguyen, 1996).

### 3.2. Diferenciação no domínio Wavelet

Estudos de Beylkin (1992) e Jameson (1993) demonstram a estreita relação entre operadores diferenciais wavelet<sup>2</sup> e operadores de diferenças finitas<sup>3</sup>. Através de fórmulas por eles desenvolvidas, são obtidos os coeficientes do operador no subespaço  $A_0$ . Os coeficientes dos filtros diferenciadores para os demais níveis de decomposição são obtidos destes através da própria transformada wavelet. A forma dos operadores obtidos é semelhante, chegando à equivalência em casos mais simples, como no caso das wavelets de Daubechies com 2 momentos, onde os coeficientes do operador  $\partial/\partial x$  em  $A_0$  são os mesmos do operador central de quarta ordem para diferenças finitas.

Porém, na abordagem de Wu & McMechan (1998), o passo para obtenção dos coeficientes em  $A_0$  é suprimido sem maiores constrangimentos, sendo os operadores de diferenças finitas diretamente responsáveis por desempenhar tal papel.

Uma forma matricial de representar a diferenciação de um vetor  $f$  com as amostras de uma função  $f(x)$ , é

$$f' = Df \quad (3.18)$$

onde  $D$  é uma matriz multi-diagonal, cada diagonal contendo um dos coeficientes do operador de diferenças finitas. Por exemplo, a partir do operador causal de primeira ordem para a primeira derivada  $f'(x) = f(x) - f(x-1)$ , temos

---

<sup>2</sup> Operadores de diferenciação em domínio wavelet

<sup>3</sup> Operadores de diferenciação sobre o sinal original

$$\begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

como operador à esquerda de um sinal com 4 linhas.

Originalmente, conforme Beylkin ou Jameson, o próximo passo seria a obtenção do operador equivalente no subespaço da aproximação de maior resolução, para então, conforme desejado, obter os operadores nos demais subespaços pela decomposição wavelet. Porém, McMechan propõe mais diretamente dispensar a primeira aproximação e considerar o operador original.

Tomando a transformada wavelet periódica do operador diferencial em um nível de decomposição

$$\begin{aligned} \tilde{D} = WDW^T &\Leftrightarrow D = W^T \tilde{D}W; \\ \text{onde } \tilde{D} &= \begin{bmatrix} a_D & dh_D \\ dv_D & dd_D \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$a_D, dh_D, dv_D, dd_D =$  aproximação e detalhes de  $D$ ,

segue que

$$f' = W^T \tilde{D} W W^T \tilde{f} \therefore f' = W^T \tilde{D} \tilde{f} \therefore W f' = \tilde{D} \tilde{f} \therefore \tilde{f}' = \tilde{D} \tilde{f} \quad (3.21)$$

onde o operador  $\tilde{D}$  mapeia os coeficientes originais  $\tilde{f}$  aos coeficientes da derivada no domínio wavelet  $\tilde{f}'$ . Este resultado é indicado na literatura (Beylkin, 1993) como uma estratégia eficiente no cálculo rápido de multiplicações de matrizes por vetores.

De maneira análoga, a derivação parcial de um sinal bidimensional  $S(x,z)$  com relação à variável  $z$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_z &= D_z S \\
 S_z &= W^T \tilde{D}_z W W^T \tilde{S} W \\
 S_z &= W^T \tilde{D}_z \tilde{S} W \\
 W^T S_z W &= \tilde{D}_z \tilde{S} \\
 \tilde{S}_z &= \tilde{D}_z \tilde{S}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

### 3.3. Solução para meios homogêneos

O conceito fundamental por trás de processos de modelagem ou migração sísmica é a propagação da onda. O escopo deste trabalho limita-se à propagação acústica, regida pela equação da onda escalar, que em 2D assume a forma

$$\frac{\partial^2 U(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U(x,z,t)}{\partial t^2} \tag{3.23}$$

onde estão representados  $x$  (deslocamento horizontal),  $z$  (profundidade),  $t$  (tempo),  $U$  (pressão) e  $C$  (velocidade da onda de pressão no meio). As transformadas wavelet 2D direta e inversa do campo discretizado  $U$  são

$$\begin{aligned}
 \tilde{U} &= W_z U W_x^T \Leftrightarrow U = W_z^T \tilde{U} W_x; \\
 W_x &= \text{Transformada discreta wavelet com respeito a } x, \\
 W_z &= \text{Transformada discreta wavelet com respeito a } z.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo as derivadas pelos operadores, aplicando a transformada wavelet e considerando  $C$  constante, temos

$$\tilde{U} \tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2 \tilde{U} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} \tag{3.25}$$

Explicitando a estrutura da operação matricial do primeiro membro para o caso da decomposição em um nível

$$\tilde{U} \tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2 \tilde{U} = \begin{bmatrix} a_U & dh_U \\ dv_U & dd_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{DX} & dh_{DX} \\ dv_{DX} & dd_{DX} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{DZ} & dh_{DZ} \\ dv_{DZ} & dd_{DZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_U & dh_U \\ dv_U & dd_U \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

e considerando uma variante do processo de descarte dos coeficientes relativos aos subespaços  $H_{DX}$ ,  $H_{DZ}$ ,  $V_{DX}$  e  $V_{DZ}$  dos operadores, conforme visto em (Dessing & Wapenaar, 1995), chega-se à aproximação

$$\tilde{U}\tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2\tilde{U} \cong \begin{bmatrix} a_U a_{DX} + a_{DZ} a_U & dh_U dd_{DX} + a_{DZ} dh_U \\ dv_U a_{DX} + dd_{DZ} dv_U & dd_U dd_{DX} + dd_{DZ} dd_U \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

o que mostra uma menor dependência entre os subespaços. Pode-se notar, particularmente, que a operação em cada subespaço independe de outros subespaços do campo  $U$  que não aquele onde a operação está sendo feita. Do ponto de vista computacional, isto causa um impacto significativo. Não só reduz-se sensivelmente o número de operações, mas também, numa abordagem de processamento paralelo, maior independência significa menor necessidade de comunicação entre os processos.

### 3.4. Solução para meios heterogêneos

Para se efetuar precisamente a propagação da onda acústica em meios heterogêneos, esta deveria ser feita a partir da solução da equação geral da onda escalar. Porém é de interesse que se analise como a equação geral se comporta em relação à solução homogênea.

Wu & McMechan (1998) demonstram o resultado aproximado

$$\begin{aligned} \tilde{U}\tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2\tilde{U} &\approx \tilde{S} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}; \\ \tilde{S} &= \{\tilde{S}_{k,l}^{j,j}, \tilde{S}_{k,l}^{j,i}, \tilde{S}_{k,l}^{i,j}, \tilde{S}_{k,l}^{i,i}\}; \\ S(x, z) &= \frac{1}{C^2(x, z)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

cujas soluções numéricas são idênticas às soluções para meios homogêneos. A validade deste resultado depende da suavidade da variação das velocidades no modelo.

#### 3.4.1. Construção dos campos de velocidades

A substituição da multiplicação ponto a ponto por uma multiplicação por um escalar, conforme foi implementado de modo a simplificar a operação, é obviamente impossível no caso heterogêneo. Não fica muito claro, porém, como

foram obtidos os resultados encontrados no trabalho de Wu & McMechan. As figuras naquele trabalho apresentam, no papel dos campos de velocidades para cada subespaço, o que parecem ser versões redimensionadas do campo original, não deixando claro qual o método utilizado, o que provou ser um obstáculo a mais na correta implementação de um algoritmo com o funcionamento esperado. O simples redimensionamento não reflete de maneira correta o posicionamento das interfaces, pois a ferramenta utilizada para efetuar a transformada wavelet 2D provoca um deslocamento devido às etapas de decimação e convolução empregados no seu processo de filtragem. Deste ponto surgiram algumas hipóteses. Como primeira tentativa de compensar tal deslocamento, a ampliação do tamanho do sinal em função do número de amostras dos filtros de Daubechies utilizados não apresentou melhoria significativa. O efeito surtido não foi suficiente. Para melhor tratar o problema, as causas foram abordadas separadamente.

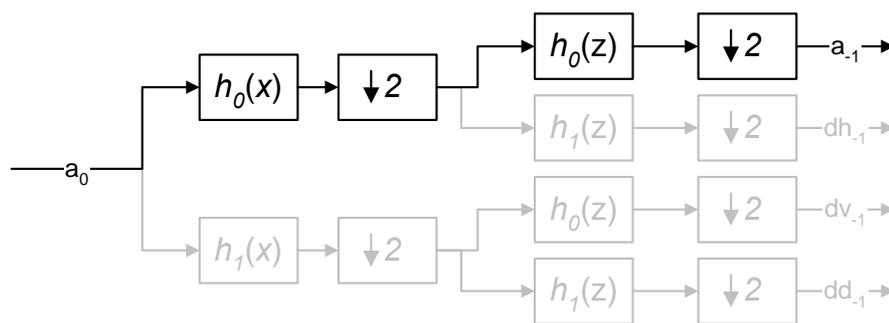


Figura 9: Construção dos modelos de velocidades para cada subespaço. Semelhante ao processo de transformada wavelet, porém somente o resultado da aproximação é considerado.

Uma particularidade do passo de decimação é sua capacidade de ignorar deslocamentos unitários das interfaces presentes em um modelo. Por exemplo, dois modelos heterogêneos semelhantes, diferindo somente na localização de uma de suas interfaces por uma amostra de profundidade (digamos, um modelo tem uma interface na amostra  $2k$  e o outro na amostra  $2k+1$ , sendo  $k$  um inteiro), apresentam o mesmo resultado após serem submetidos ao processo de decimação. Esta falha pode ser tratada com a aplicação de filtros passa-baixa antes de se fazer a decimação. Entretanto, a aplicação de filtros com o mesmo comprimento que os empregados na decomposição resolvem por completo o deslocamento devido à convolução. A partir deste resultado, nada mais conveniente que aplicar os

próprios filtros passa-baixa usados na decomposição, conforme ilustrado na figura 9. Desta forma, as versões redimensionadas do campo original passam a ser os diversos subespaços de aproximação de sua transformada wavelet 2D (figura 10), sofrendo assim o mesmo deslocamento que o campo de ondas.

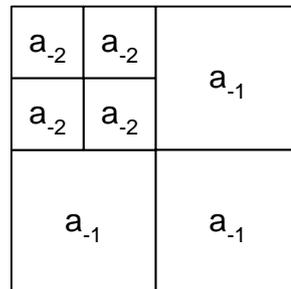


Figura 10: Construção dos modelos de velocidades para cada subespaço. Resultado da partição em dois níveis de decomposição.

### 3.5. Tratamento de borda

Como forma de reduzir o efeito de transmissão (causado pela consideração de periodicidade na transformada wavelet) e os efeitos de reflexão (conseqüentes da tomada de um campo de extensão finita) uma borda de absorção é aplicada conforme (Cerjan et al, 1985). A borda pode ser implementada pela multiplicação  $P_z U P_x$  por matrizes  $P_z$  e  $P_x$  diagonais correspondentes à aplicação do processo em cada uma das direções. Cada matriz de absorção é uma diagonal composta por coeficientes calculados a partir de uma atenuação, que pode ser determinada por uma função exponencial, senoidal ou polinomial. A implementação desta atenuação no domínio wavelet torna-se

$$\tilde{P}_z \tilde{U} \tilde{P}_x, \quad (3.29)$$

onde a acentuação indica a transformada wavelet dos componentes.

Com a aplicação da transformada wavelet, porém, o número de coeficientes nas matrizes resultantes aumenta, tornando-as compostas por mais de uma diagonal, conforme ilustrado na figura 11 com o resultado para a composição dos coeficientes por função exponencial. Note que o mapeamento de cores não é o mesmo para as duas matrizes expostas. Na matriz para diferenças finitas, a escala de cinza associa o branco ao valor zero e o preto ao valor um, enquanto na matriz para transformada wavelet, a mesma escala associa o branco para o valor mínimo

encontrado (não mais zero), preto para o valor máximo e um tom de cinza claro, dominante na figura, para o valor zero. Uma análise do comportamento dos coeficientes conforme estes se afastam da diagonal principal revela que os valores mais significativos continuam sobre esta. Desta forma, alguma carga computacional pode ser aliviada ao se considerar somente estes valores na aplicação da atenuação, mesmo que algo se perca com a aproximação. Uma sugestão não investigada para se alcançar maior esparsidade seria a definição da borda de absorção por polinômios com momentos nulos na base wavelet.

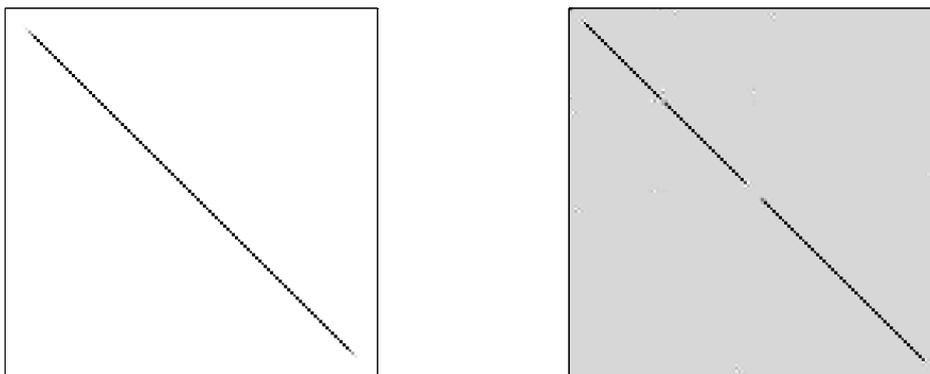


Figura 11: Bordas de absorção. (a) matriz para diferenças finitas; (b) subespaços da matriz para transformada wavelet.

### 3.6. Processos, otimizações e fluxograma

A construção do algoritmo seguiu diversas etapas, gerando versões diferentes entre seguidas otimizações ou aplicações de passos sugeridos em nova bibliografia. Diferentes possibilidades para a solução sob o método proposto foram exploradas. O ponto de partida foi o trabalho de Wu & McMechan (1998), que tem como característica a forma de decomposição padrão para a transformada wavelet bidimensional. Porém esta forma aplica uma divisão entre os subespaços capaz de distorcer as proporções entre os tamanhos das dimensões (*aspect ratio*) do sinal bidimensional original. Desta forma, os operadores diferenciais, matrizes quadradas por concepção, ao sofrerem decomposição a mais de um nível, resultam em submatrizes de coeficientes com formas retangulares. O aspecto prático vai além, pois, no decorrer dos cálculos, apareceriam multiplicações entre matrizes com dimensões incompatíveis. O desenvolvimento de uma variante ao processo

usando a forma de decomposição não-convencional foi motivado por esta dificuldade.

Uma das dificuldades no tratamento da propagação em meios heterogêneos é o deslocamento provocado pela convolução com os filtros de decomposição. Desta forma, faz-se necessário um ajuste na determinação dos campos de velocidade aplicados a cada subespaço, conforme visto na seção 3.4.1.

### 3.6.1. Inclusão do termo forçante

A equação da onda é solucionada numericamente parte por parte. Após a obtenção das derivações temporais e espaciais, a inclusão do termo forçante (fonte de excitação) é feita através de uma das seguintes operações:

$$U(x_f, z_f) := s(t); \quad (3.30)$$

$$U(x_f, z_f) := U(x_f, z_f) + s(t); \quad (3.31)$$

onde  $(x_f, z_f)$  é o par de coordenadas da fonte pontual  $s(t)$ .

A eq. 3.30 é o resultado direto da forma não-homogênea da equação da onda. Porém, uma modificação, exposta na eq. 3.31, não invalida a solução. A diferença fica por conta da forma efetiva da onda resultante, que no caso da eq. 3.31, modifica o aspecto originalmente aplicado pelo termo  $s(t)$ . A forma optada neste trabalho foi a descrita pela eq. 3.31, pois neste formato, a inclusão da fonte pode ser feita naturalmente em domínio wavelet através do seguinte raciocínio.

A adição de um valor pontual a um campo (eq. 3.31) pode ser reescrita como

$$U(x, z) := U(x, z) + s_{xz}(x, z)s(t), \text{ onde} \quad (3.32)$$

$$s_{xz}(x, z) = \delta(x - x_f)\delta(z - z_f)$$

Desta forma, a aplicação da transformada wavelet em duas dimensões

$$W_z U(x, z) W_x^T := W_z (U(x, z) + s_{xz}(x, z)s(t)) W_x^T, \quad (3.33)$$

permite a estrutura

$$\tilde{U} := \tilde{U} + \tilde{s}_{xz} s(t); \text{ onde}$$

$$\tilde{U} \equiv \text{Transformada wavelet 2D do campo de pressão} \quad (3.34)$$

$$\tilde{s}_{xz} \equiv \text{Transformada wavelet 2D da distribuição espacial da fonte}$$

que evita a necessidade de retorno ao domínio espacial somente para a aplicação da fonte.

### 3.6.2. Reconstrução parcial

Conforme previsto em (Wu & McMechan, 1998), onde se afirmou a propagação com o operador wavelet ser eficiente para a transmissão e deficiente para reflexão, o sismograma apresenta resultado diferente do obtido por diferenças finitas. Esta construção do sismograma, porém, despence muito esforço computacional por exigir uma transformada wavelet inversa a cada passo de tempo para que do resultado seja extraída a linha que corresponde à superfície.

Foi então desenvolvida uma sub-rotina capaz de reconstruir a linha designada pela profundidade dos receptores no modelo somente com a informação que a cerca, de acordo com o tamanho do filtro de decomposição.

O primeiro passo foi identificar quais linhas em cada subespaço formariam o subconjunto mínimo necessário para a reconstrução da linha em questão. Uma vez identificadas, foi construído um método para comprimir essa informação, com base nos índices das linhas identificadas, capaz de mapear as necessidades de reconstrução nível a nível.

Um sismograma é formado pelo acúmulo seqüencial dos eventos registrados em uma determinada linha de aquisição sísmica ao longo do tempo. O procedimento para a obtenção da informação contida em tal linha, sugerido neste texto até o presente momento, é formado por três passos: reconstrução de todo o campo de pressão  $U(x,z,t)$  no instante da aquisição a partir de seus coeficientes wavelet  $\tilde{U}$ , identificação da linha escolhida  $U(x_g, z_g, t)$  e descarte do restante, desperdiçando as demais linhas. O processo discutido a seguir estabelece um meio de identificar automaticamente quais coeficientes são relevantes à reconstrução da parte de interesse, evitando assim o desperdício de cálculo gerado com a reconstrução da parte do campo que acaba sendo descartada.

O processo do cômputo da transformada wavelet discreta, como já é sabido, envolve passos de filtragem e de sub-amostagem. Os valores individuais de cada amostra do conjunto original são combinados de acordo com a informação do filtro. A seqüência de valores no conjunto filtrado se relaciona diretamente com a seqüência original, inclusive mantendo sua ordenação. Toda a informação necessária para a obtenção de um determinado subconjunto de amostras do conjunto original, num processo reverso, é extraída única e exclusivamente da sua região correspondente no conjunto filtrado.

Ao exibir essas características, o processo de seleção (ou identificação) do subconjunto estritamente necessário à reconstrução de um subconjunto original pode ser traduzido em uma “receita numérica”, aplicável não só à transformada wavelet, mas a outros processos de natureza reversível conhecida.

A forma proposta consiste em:

- Gerar um conjunto de dados nas mesmas dimensões que o conjunto de dados a ser tratado, porém somente com amostras nulas;
- Marcar a região de interesse com um valor;
- Aplicar o dito processo de característica reversível (no caso, a transformada wavelet) a este campo marcado;
- Registrar o conjunto demarcado resultante;
- A partir deste registro, no momento da reconstrução, aplicar o processo reverso somente na área assim demarcada. Cuidados são necessários na adaptação deste processo reverso. Por exemplo, determinar qual pedaço do conjunto original foi reconstruído.

Com isso é possível gerar um mapeamento do conjunto necessário à reconstrução do conjunto original.

Esta proposta, por ter sido desenvolvida a partir da necessidade de otimização do processo estudado e não extraída de bibliografia existente, merece maior investigação ao ser aplicada a outros processos de natureza semelhante ao da transformada wavelet discreta.

### 3.6.3. Descrição do algoritmo

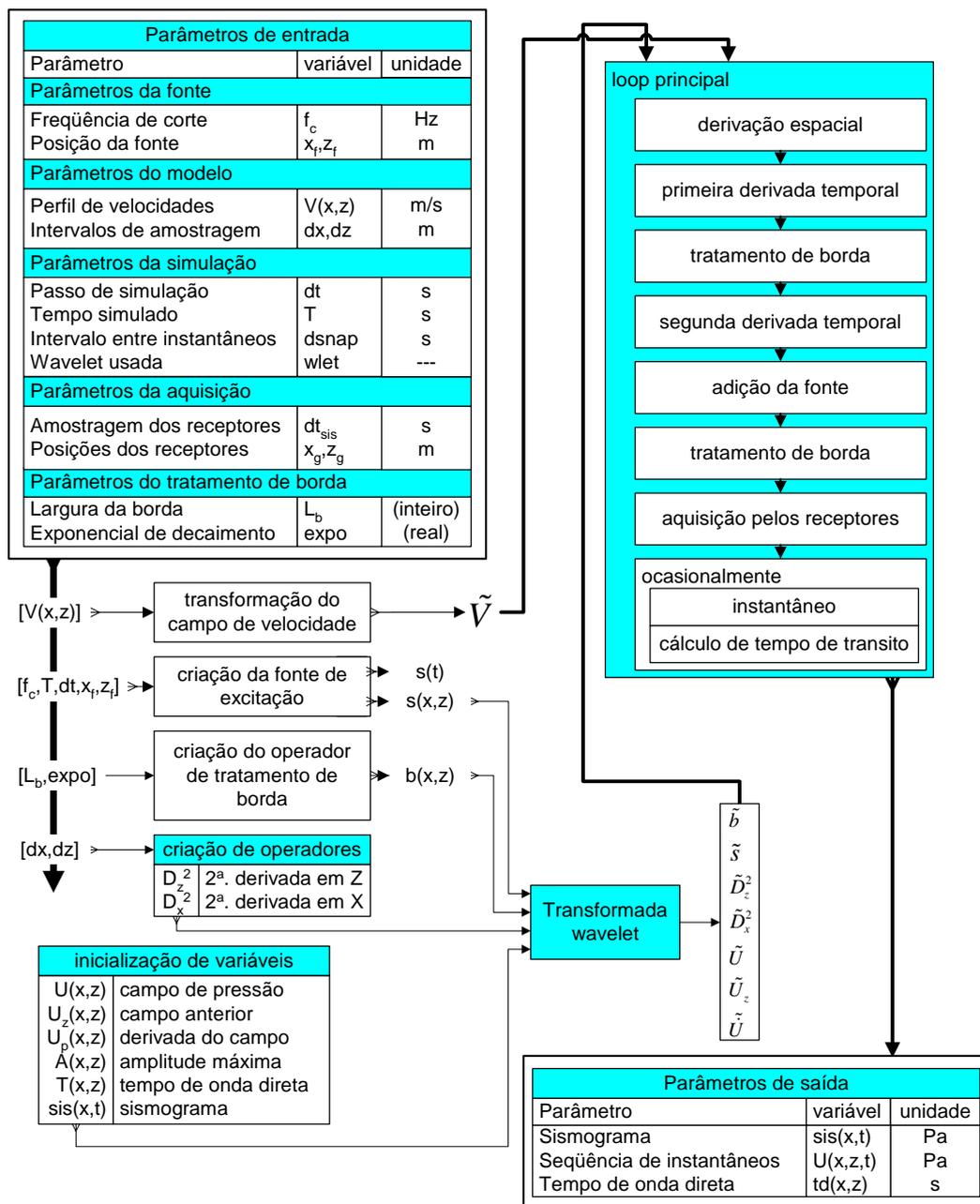


Figura 12: Fluxograma do algoritmo de modelagem via transformada wavelet

Feitas todas as considerações, o algoritmo pode ser exposto na sua forma final. A estrutura do algoritmo desenvolvido é mostrada nas figuras 12 e 13. A figura 12 mostra o fluxo de informação no nível mais externo do programa, desde a definição das variáveis de entrada, passando pelos tratamentos de inicialização, seguido do núcleo do processamento, até as variáveis de saída. A figura 13

mostra uma breve descrição dos passos internos ao núcleo do processamento, listados na extremidade superior direita da figura 12.

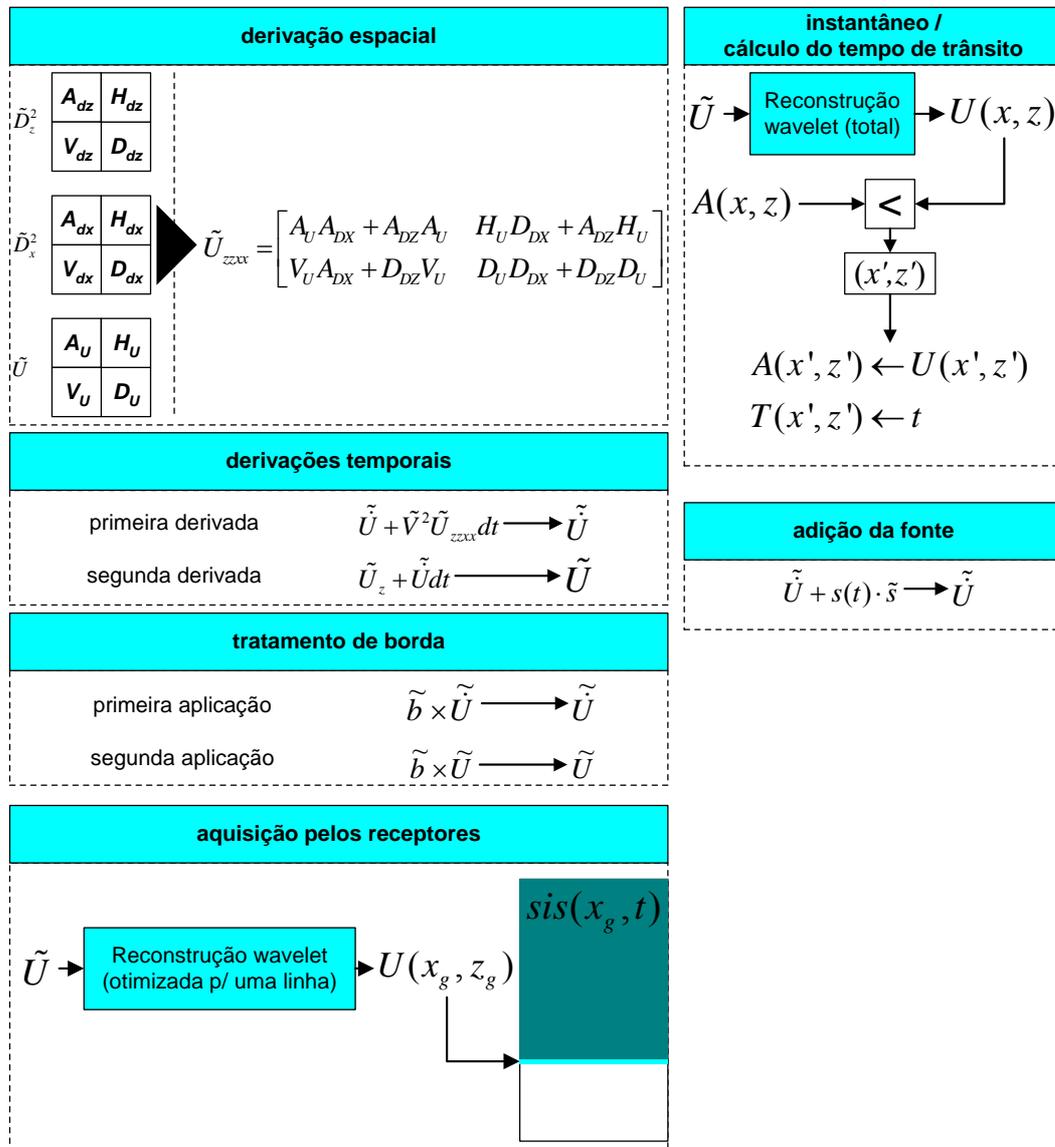


Figura 13: Sub-rotinas utilizadas no algoritmo de modelagem por transformada wavelet, mostradas na Figura 12

Os parâmetros de entrada são divididos em cinco categorias: Fonte de excitação, modelo de velocidades, simulação, aquisição e tratamento de borda.

A fonte de excitação utilizada é definida como pontual (impulsional no espaço) e limitada em frequência (no tempo). Seus parâmetros específicos são o par de coordenadas  $(x_f, z_f)$  que define sua posição no espaço e a frequência de corte  $f_c$  que define o fim da banda de seu espectro em frequência.

O modelo é definido por uma matriz de velocidades  $V$  que armazena os valores do perfil<sup>4</sup> segundo os intervalos  $dx$  e  $dz$  utilizados na amostragem.

A simulação transcorre segundo os parâmetros de passo de simulação  $dt$ , que define o intervalo temporal na solução da equação da onda, e de tempo simulado  $T$ , valor a ser atingido pelo acúmulo (soma) de  $nt$  passos de simulação. Outros parâmetros regem a simulação, como a wavelet  $wlet$  usada nas decomposições e reconstruções e o intervalo  $dsnap$  entre instantâneos.

A aquisição é feita nos pontos definidos pelos vetores  $x_g$  e  $z_g$ , cada um com uma coordenada dos diversos receptores espalhados na geometria do modelo, e a cada  $dt_{sis}$  segundos, o que representa uma aquisição a cada  $dt_{sis}/dt$  passos de simulação.

O tratamento de borda é feito nas  $L_b$  amostras das fronteiras do modelo. Os valores usados na atenuação descrevem uma curva exponencial definida pelo vetor  $expo$ .

A partir dos parâmetros de entrada, as demais variáveis de execução são computadas. Com a matriz de velocidades  $V$ , é feita a transformação explicada na seção 3.4.1, resultando na matriz  $\tilde{V}$ . Com os parâmetros específicos da fonte, aliados aos parâmetros de simulação  $T$  e  $dt$ , são criadas duas novas variáveis. A partir de  $f_c$ ,  $T$  e  $dt$ , extrai-se a distribuição  $s(t)$  dos valores da fonte ao longo do tempo, e a partir de  $x_f$  e  $z_f$ , compõe-se a distribuição  $s(x,z)$  da fonte no espaço. Com as variáveis  $dx$  e  $dz$  são construídos os operadores de segunda derivada ao longo das dimensões  $x$  e  $z$ , respectivamente  $D_x^2$  e  $D_z^2$ .

Outras variáveis pertinentes são definidas nas dimensões cabíveis, porém com valores nulos. São elas o estado atual do campo de pressão  $U(x,z)$ , o estado anterior do campo de pressão  $U_z(x,z)$ , a derivada temporal do campo de pressão  $U_p(x,z)$ , o registro de máxima amplitude do campo de pressão  $A(x,z)$ , o mapa de tempo de onda direta  $T_d(x,z)$  e o histórico de registro dos receptores (sismograma)  $S(x,t)$ . Antes de iniciar o núcleo do processamento, as variáveis definidas em duas dimensões espaciais, com exceção de  $A$  e  $T_d$ , e os operadores de segunda derivada espacial são submetidos à transformada wavelet direta.

O núcleo é composto por sete passos obrigatórios e dois passos condicionais. Os passos obrigatórios são: derivação espacial, primeira derivada

---

<sup>4</sup> Perfil geológico de velocidades

temporal, tratamento de borda (sobre a derivada do campo), segunda derivada temporal, adição da fonte, tratamento de borda (sobre o estado do campo) e aquisição pelos receptores. Os passos condicionais são: tomada do instantâneo e cálculo do tempo trânsito. Estes são assim classificados por acarretarem um gasto computacional grande (devido a necessidade de uma reconstrução completa do campo de pressão), sendo então deixados de lado a maior parte da simulação. Estes são os passos mostrados na figura 13.

O passo de derivação espacial segue o disposto na seção 3.3 e exemplificado na eq. 3.27. As derivações temporais e os tratamentos de borda são resolvidos de acordo com as equações expostas na figura 13, numa forma análoga ao feito em (Cerjan et al., 1985). A adição da fonte é realizada de acordo com a eq. 3.34. A aquisição pelos receptores segue o algoritmo de reconstrução parcial desenvolvido na seção 3.6.2.

Os passos condicionais são interligados, já que o cálculo do tempo de trânsito está vinculado ao instantâneo<sup>5</sup>. Quando a condição à execução destes passos é satisfeita, o instantâneo é tomado a partir da reconstrução total dos coeficientes wavelet do campo. É feita então uma comparação entre este instantâneo e o registro de máximas amplitudes  $A(x,z)$ . Os pontos  $(x',z')$  onde as amplitudes do instantâneo são maiores que o registrado em  $A(x,z)$ . Nestes pontos, o registro de máximas amplitudes é atualizado com os valores do instantâneo, e o mapa do tempo de trânsito armazena o índice de tempo atual.

Os parâmetros de saída do algoritmo são o sismograma, a seqüência de instantâneos e o mapa de tempo de trânsito da onda direta.

---

<sup>5</sup> Estado do campo de pressão. O acúmulo de cada instantâneo como quadro de animação gera um filme capaz de proporcionar comprovação visual do funcionamento do algoritmo.