# 4
# Modelo linearizado

## 4.1
## Equilíbrio estacionário

O próximo passo na derivação da CPNK consiste em log-linearizar as principais equações do nosso modelo. Ou seja, estaremos assumindo um ambiente onde qualquer distúrbio exógeno envolve apenas pequenas flutuações ao longo do tempo. Vamos log-linearizar este modelo em torno de um equilíbrio estacionário com as seguintes características:

$$\bar{P}_H^c = \bar{P}_H = \bar{P}_F = \bar{P} \tag{4-1a}$$

$$\overline{TT} = \bar{q} = 1 \tag{4-1b}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} \tag{4-1c}$$

$$\bar{C}^* = \bar{Y}^* \tag{4-1d}$$

onde uma variável $\hat{X}_t$ representa o desvio percentual da variável $X_t$ em relação a seu valor de equilíbrio $\bar{X}$;ou seja $\hat{X}_t \equiv \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$.

### 4.1.1
### Algumas identidades: inflação doméstica, inflação ao consumidor, taxa de câmbio real e termos de troca

Log-linearizando-se a equação do índice de preços ao consumidor em torno de nosso estado de equilíbrio com $P_{H,t} = P_{F,t}$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{P}_t &\equiv (1-\delta)\,\hat{P}_{H,t} + \delta \hat{P}_{F,t} \\ &= \hat{P}_{H,t} + \delta \widehat{TT}_t \end{aligned} \tag{4-2}$$

onde $\widehat{TT}_t \equiv \hat{P}_{F,t} - \hat{P}_{H,t}$ denota (em log) os termos de troca, isto é, o preço dos bens estrangeiros em termos dos bens domésticos.

Segue-se então que a inflação doméstica - definida como a taxa de mudança no índice de preços domésticos, isto é, $\hat{\pi}_{H,t} \equiv \hat{P}_{H,t} - \hat{P}_{H,t-1}$ - e a inflação ao consumidor relacionam-se de acordo com:

$$\hat{\pi}_t = \hat{\pi}_{H,t} + \delta \Delta \widehat{TT}_t \tag{4-3}$$

fazendo com que a diferença entre as duas medidas de inflação seja proporcional a variação percentual nos termos de troca, com o coeficiente de proporcionalidade dado pelo parâmetro de abertura comercial $\delta$.

Por hipótese, vale a lei do preço único (PPP), implicando que:

$$\begin{aligned} P_{H,t}(i) &= e_t P^*_{H,t}(i), \forall\ i \in [0,1] \Longrightarrow P_{H,t} = e_t P^*_{H,t} && \text{(4-4a)} \\ P_{F,t}(i) &= e_t P^*_{F,t}(i), \forall\ i \in [0,1] \Longrightarrow P_{F,t} = e_t P^*_{F,t} && \text{(4-4b)} \end{aligned}$$

lembrando-se que $e_t$ é a taxa de câmbio nominal (preço da moeda estrangeira em termos da moeda doméstica). Log-linearizando-se estas expressões, obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{H,t} &= \hat{e}_t + \hat{P}^*_{H,t} && \text{(4-5a)} \\ \hat{P}_{F,t} &= \hat{e}_t + \hat{P}^*_{F,t} && \text{(4-5b)} \end{aligned}$$

Combinando-se estes resultados pode-se reescrever os termos de troca da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widehat{TT}_t &\equiv \hat{P}_{F,t} - \hat{P}_{H,t} \\ &= \hat{e}_t + \hat{P}^*_{F,t} - \hat{P}_{H,t} && \text{(4-6)} \end{aligned}$$

De forma análoga, para o resto do mundo temos:

$$\begin{aligned} \hat{P}^*_t &\equiv \delta^* \hat{P}^*_{H,t} + (1 - \delta^*)\, \hat{P}^*_{F,t} \\ &= \hat{P}^*_{F,t} - \delta^* \widehat{TT}_t && \text{(4-7)} \end{aligned}$$

Combinando-se (4-6) e (4-7):

$$(1 - \delta^*)\, \widehat{TT}_t = \hat{e}_t + \hat{P}^*_t - \hat{P}_{H,t} \tag{4-8}$$

Log-linearizando-se a expressão da taxa de câmbio real e substituindo-se o resultado em (4-8) tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{q}_t &= (1-\delta^*)\,\widehat{TT}_t + \hat{P}_{H,t} - \hat{P}_t \\ &= (1-\delta-\delta^*)\,\widehat{TT}_t \end{aligned} \tag{4-9}$$

onde a última igualdade obtém-se com o auxílio de (4-2).

Ou seja, tem-se que a taxa de câmbio real (em log) é proporcional aos termos de troca (em log), com o coeficiente de proporcionalidade sendo uma função inversa do grau de abertura das economias doméstica e externa. Observe que embora a lei do preço único esteja sendo considerada para cada bem individualmente, a taxa de câmbio real pode ainda flutuar ao longo do tempo como resultado das variações nos preços relativos entre as cestas de consumo doméstica e externa, as quais vão normalmente diferir em suas composições.

## 4.2
## Decisão de preço da firma

Defina $p^c_{H,t} \equiv \frac{P^c_{H,t}}{P_{H,t}}$ . Log-linearzando-se a condição (3-2) em torno do nosso estado de equilíbrio temos:

$$\hat{p}^c_{H,t} = (1-\alpha\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\beta)^k\,E_t\left\{\widehat{CM}_{t+k} + \sum_{j=1}^{k}\hat{\pi}_{H,t+j}\right\} \tag{4-10}$$

onde $\widehat{CM}_{t+k}$ é a aproximação log-linear do custo marginal em relação a seu valor de equilíbrio $\mu^{-1}$.

Pode-se reescrever esta última expressão de forma mais compacta fazendo-se $\hat{p}^c_{H,t} - (\alpha\beta)\,E_t\left\{\hat{p}^c_{H,t+1}\right\}$, obtendo-se:

$$\hat{p}^c_{H,t} = (1-\alpha\beta)\,\widehat{CM}_t + (\alpha\beta)\,E_t\{\hat{\pi}_{H,t+1}\} + (\alpha\beta)\,E_t\left\{\hat{p}^c_{H,t+1}\right\} \tag{4-11}$$

## 4.3
## Dinâmica do nível de preços

Vimos que sob a estrutura de rigidez nominal de preços de Calvo, todos os preços escolhidos em uma dado período $t$ apresentam em equilíbrio um mesmo valor denotado por $P^c_{H,t}$. Já a fração remanescente $\alpha$ dos preços cobrados no período $t$ é simplesmente um subconjunto dos preços cobrados no período $t-1$, com cada preço aparecendo na distribuição de preços inalterados do período $t$ com a mesma freqüência relativa da distribuição de preços do período $t-1$ (para este argumento é crucial que cada preço possua uma probabilidade igual de ser ajustado em um dado período). Desta forma, a dinâmica do índice Dixit-Stiglitz de preços domésticos (2-6a) no período $t$ pode ser descrita pela equação:

$$P_{H,t} \equiv \left[\alpha \left(P_{H,t-1}\right)^{1-\theta} + (1-\alpha)\left(P_{H,t}^{c}\right)^{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{4-12}$$

Segue-se que para determinar a evolução deste índice de preços precisa-se apenas de seu valor inicial e do preço ótimo $P_{H,t}^{c}$ escolhido a cada período. A determinação de $P_{H,t}^{c}$, por sua vez, depende das condições de demanda corrente e futura do bem $i$, mas (2-16a) implica que os outros preços afetam a curva de demanda pelo bem $i$ apenas através do valor do índice de preços $P_t$. Assim, pode-se determinar o valor de equilíbrio do índice $P_t$ como uma função do seu valor no período anterior, da trajetória futura esperada deste mesmo índice e dos valores corrente e futuro das variáveis agregadas reais. Resumidamente, não há necessidade de informação adicional sobre os preços passados.

Pode-se log-linearizar (4-12) para obter-se:

$$\hat{p}_{H,t}^{c} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\hat{\pi}_{H,t} \tag{4-13}$$

## 4.4 Curva de Phillips Neo-Keynesiana em função do custo marginal

Substituindo-se esta última equação em (4-11) tem-se finalmente:

$$\hat{\pi}_{H,t} = \kappa^{n}\widehat{CM}_t + \beta E_t\left\{\hat{\pi}_{H,t+1}\right\} \tag{4-14}$$

onde o coeficiente

$$\kappa^{n} = \kappa^{n}(\alpha,\beta) \equiv \frac{(1-\alpha\beta)(1-\alpha)}{\alpha} \tag{4-15}$$

é função da freqüência do reajuste de preços $\alpha$ e do fator de desconto intertemporal $\beta$ e sinaliza o nível de **rigidez nominal** da economia.

Como uma curva de Phillips tradicional, a inflação depende positivamente de uma medida de atividade e de um termo que reflete a influência da inflação esperada. Uma diferença chave é que a esperança relevante é $E_t\left\{\hat{\pi}_{H,t+1}\right\}$ ao invés de $E_{t-1}\left\{\hat{\pi}_{H,t}\right\}$. Como conseqüência, a inflação depende exclusivamente da trajetória futura esperada do custo marginal, como pode ser mais facilmente visualizado iterando-se (4-14) para frente, obtendo-se:

$$\hat{\pi}_t = \kappa^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k E_t \left\{ \widehat{CM}_{t+k} \right\} \tag{4-16}$$

explicitando que a decisão de preços neste modelo (da mesma forma que em uma economia fechada) é *forward-looking*; a inflação depende não somente do produto corrente, mas também de todos os produtos futuros, embora esta dependência seja decrescente conforme mais distante no futuro considerarmos.

A razão, como já levantada em (3-2) é simples: firmas ajustando seus preços em um dado período reconhecem que o preço escolhido continuará fixado por um número aleatório de períodos. Como resultado, estas escolhem o preço como um *mark-up* sobre uma média ponderada de custos marginais futuros, ao invés de apenas considerarem o custo marginal corrente.



## 4.5 Consumo doméstico e produção mundial

Em economia fechada temos uma relação direta entre consumo e produção, com $C_t = Y_t, \forall t$ Em economia aberta, entretanto, temos que esta relação não é direta, como pode ser comprovado em (2-15a). Queremos obter uma relação (log-linear) entre o consumo doméstico e os níveis de produção doméstica e externa. Log-linearizando-se (2-25) tem-se:

$$\hat{C}_t = \hat{C}_t^* + \sigma \hat{q}_t \tag{4-17}$$

onde $\sigma^{-1}$ é a elasticidade de substituição no consumo, sendo, por hipótese, considerada igual nos dois países.

A aproximação log-linear de (2-15a) fornece:

$$\hat{Y}_t = (1-\delta)\,\hat{C}_t + \delta \hat{C}_t^* + \eta \left( \hat{P}_t - \hat{P}_{H,t} \right) + \eta \delta \hat{q}_t \tag{4-18}$$

que combinada com (4-17) resulta em:

$$\hat{Y}_t = \hat{C}_t + \delta\,(\eta - \sigma)\,\hat{q}_t + \eta \left( \hat{P}_t - \hat{P}_{H,t} \right) \tag{4-19}$$

De forma análoga, tem-se uma expressão para o produto externo:

$$\hat{Y}_t^* = \hat{C}_t + (1-\delta^*)\,(\eta - \sigma)\,\hat{q}_t + \eta \left( \hat{P}_t - \hat{P}_{F,t} \right) \tag{4-20}$$

Para obter-se uma relação entre $\hat{P}_t - \hat{P}_{H,t}$ e o produto doméstico primeiro combina-se (4-9) com (4-2):

$$\hat{q}_t = \left(\frac{1-\delta-\delta^*}{\delta}\right)\left(\hat{P}_t - \hat{P}_{H,t}\right) \tag{4-21a}$$

$$\hat{q}_t = \left(\frac{1-\delta-\delta^*}{\delta-1}\right)\left(\hat{P}_t - \hat{P}_{F,t}\right) \tag{4-21b}$$

Substituindo as expressões acima em (4-19) e (4-20):

$$\hat{Y}_t = \hat{C}_t + \left[\eta + (\eta-\sigma)(1-\delta-\delta^*)\right]\left(\hat{P}_t - \hat{P}_{H,t}\right) \tag{4-22}$$

$$\hat{Y}_t^* = \hat{C}_t + \left[\eta\left(\tfrac{\delta-1}{\delta}\right) + (1-\delta^*)(\eta-\sigma)\left(\tfrac{1-\delta-\delta^*}{\delta}\right)\right]\left(\hat{P}_t - \hat{P}_{H,t}\right) \tag{4-23}$$

Subtraindo-se a segunda equação da primeira tem-se:

$$\hat{P}_t - \hat{P}_{H,t} = \varsigma\left[\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^*\right] \tag{4-24}$$

onde:

$$\varsigma \equiv \frac{\delta}{\eta - (\eta-\sigma)(1-\delta-\delta^*)^2} \tag{4-25}$$

Por fim, substituindo-se esta última equação em (4-22) tem-se uma relação entre o consumo doméstico e a produção doméstica e externa:

$$\hat{C}_t = (1-\varsigma\chi)\,\hat{Y}_t + \varsigma\chi\hat{Y}_t^* \tag{4-26}$$

onde:

$$\chi \equiv \eta + (\eta-\sigma)(1-\delta-\delta^*) \tag{4-27}$$

## 4.6 Custo marginal

De (2-32), tem-se a seguinte expressão para o custo marginal real em termos dos bens consumidos domesticamente para as empresas sorteadas para reajustar em $t$:

$$\begin{aligned} CM_{t+k} &= \left(\frac{P_{t+k}}{P_{H,t+k}}\right) CV\left(Y_{t+k}^c, C_{t+k}; \tilde{\xi}_{t+k}\right) \\ &= \left(\frac{P_{t+k}}{P_{H,t+k}}\right) CV\left(\left(\frac{P_{H,t}^c}{P_{H,t+k}}\right)^{-\theta} Y_{t+k}, C_{t+k}; \tilde{\xi}_{t+k}\right) \end{aligned} \tag{4-28}$$

onde a segunda igualdade faz uso de (2-16a).

Log-linearizada, esta expressão transforma-se em:

$$\begin{aligned}\widehat{CM}_{t+k} &= \omega\hat{Y}_{t+k} + \sigma^{-1}\hat{C}_{t+k} - \omega\theta\left[\hat{p}^c_{H,t} - \sum_{i=1}^{k}\hat{\pi}_{H,t+k}\right] \\ &\quad + \lambda\tilde{\xi}_{t+k} + \hat{P}_{t+k} - \hat{P}_{H,t+k} \\ &= \omega\hat{Y}_{t+k} + \sigma^{-1}\hat{C}_{t+k} - \omega\theta\left[\hat{p}^c_{H,t} - \sum_{i=1}^{k}\hat{\pi}_{H,t+k}\right] \\ &\quad + \lambda\tilde{\xi}_{t+k} + \delta\widehat{TT}_{t+k}\end{aligned} \tag{4-29}$$

onde $\omega > 0$ é a elasticidade do custo marginal real em termos da cesta de consumo agregada em relação a produção da firma, $\sigma^{-1} > 0$ é a elasticidade do custo marginal real em termos da cesta de consumo agregada em relação ao nível de produção agregada da economia, e $\lambda > 0$ é a elasticidade do custo marginal em termos da cesta de consumo agregada em relação a $\tilde{\xi}_t$, todas consideradas no ponto de equilíbrio estacionário.

Substituindo-se (4-26) em (4-29) obtém-se uma relação entre a variação do custo marginal e as variações do produto doméstico, do produto externo e dos termos de troca:

$$\begin{aligned}\widehat{CM}_{t+k} &= \left(\omega + \sigma^{-1}\left[1 - \varsigma\chi\right]\right)\hat{Y}_{t+k} + \left(\sigma^{-1}\varsigma\chi\right)\hat{Y}^*_{t+k} + \delta\widehat{TT}_{t+k} \\ &\quad - \omega\theta\left[\hat{p}^c_{H,t} - \sum_{i=1}^{k}\hat{\pi}_{H,t+k}\right] + \lambda\tilde{\xi}_{t+k}\end{aligned} \tag{4-30}$$

Pode-se observar que o custo marginal é crescente nos termos de troca e na produção externa. Ambas as variáveis acabam por influenciar o salário real, através de seu efeito sobre a oferta de trabalho resultante de seu impacto no consumo doméstico. A influência da tecnologia (através de seu efeito direto na produtividade do trabalho) e da produção doméstica (através de seu efeito sobre o emprego e o salário real) são análogas ao observado em economia fechada, a menos do fator $\varsigma\chi$ (função dos parâmetros $\delta$, $\delta^*$, $\eta$ e $\sigma$) diretamente relacionado a abertura da economia Quanto maior este fator, menor / maior o impacto da variação da produção doméstica / externa na variação do custo marginal.

De (4-9), (4-21a) e (4-24) tem-se que:

$$\delta\widehat{TT}_{t+k} = \varsigma\left[\hat{Y}_{t+k} - \hat{Y}^*_{t+k}\right] \tag{4-31}$$

Substituindo-se (4-31) em (4-30) obtém-se uma relação entre o custo marginal real das empresas que foram sorteadas para reajustar seus preços em $t$ e a produção doméstica e externa:

$$\begin{aligned}\widehat{CM}_t = &\left(\omega + \sigma^{-1} - \varsigma\left[\sigma^{-1}\chi - 1\right]\right)\hat{Y}_t + \left(\varsigma\left[\sigma^{-1}\chi - 1\right]\right)\hat{Y}_t^* \\ &- \omega\theta\left[\hat{p}^c_{H,t} - \sum_{i=1}^{k}\hat{\pi}_{H,t+k}\right] + \lambda\tilde{\xi}_t\end{aligned} \tag{4-32}$$