2
Modelo da economia

Utilizaram-se como base os modelos de Campos e Nakane (2003) e Galí e Monacelli (2002) que estendem o modelo dinâmico de equilíbrio geral de Woodford (2001) para uma economia aberta Existem dois países: o país doméstico, que produz os bens indexados pela letra H, e o resto do mundo, denotado por asterisco e que produz os bens indexados por F. Cada economia é povoada por indivíduos representativos idênticos com vida infinita. Existe um contínuo de bens diferenciados, sendo que todos estes bens são produzidos por firmas em competição monopolística.

Utiliza-se a hipótese que as firmas domésticas produzem apenas na economia doméstica e utilizam apenas trabalhadores domésticos, sendo que as firmas do resto do mundo têm comportamento análogo. Assume-se também que cada tipo de bem é produzido com apenas um tipo de trabalho.

2.1
Famílias

2.1.1
Preferências

Considere uma economia habitada por um agente representativo que busca maximizar:

$$E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u\left(C_t; \xi_t\right) - v\left(H_t\left(i\right); \xi_t\right)\right] \right\}, \tag{2-1}$$

onde C_t é um índice de consumo agregado que considera cada um dos bens fornecidos, enquanto $H_t\left(i\right)$ é a quantidade de trabalho do tipo i fornecida. Por hipótese, cada um dos bens diferenciados (indexados por $i \in [0,1]$) utiliza um tipo de trabalho especializado em sua produção; trabalho do tipo i é utilizado para produzir o bem diferenciado i. Estamos assumindo que cada agente se especializa no fornecimento de um único tipo de trabalho, agindo competitivamente neste mercado específico. Além disso, ξ_t é um choque exógeno, β é o fator de desconto $(0 < \beta < 1)$ e E_0 é o operador esperança condicional ao período 0.

A função $u(C_t; \xi_t)$ representa a utilidade instantânea do agente em consumir o índice de consumo agregado C_t, sendo por hipótese uma função côncava crescente para todo valor possível de ξ_t. Por sua vez, $v(H_t(i); \xi_t)$ representa a desutilidade de fornecer a quantidade H_t de trabalho do tipo z; por hipótese, $v(\cdot; \xi_t)$ é uma função convexa crescente para todo valor possível de ξ_t.

2.1.2
Índices de consumo

O índice C_t é um índice de consumo composto, definido por:

$$C_t = \left[(1-\delta)^{\frac{1}{\eta}} \left(C_{H,t}\right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \delta^{\frac{1}{\eta}} \left(C_{F,t}\right)^{\frac{\eta-1}{\eta}}\right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}, \tag{2-2}$$

onde δ é uma constante que nos ajudará a medir a abertura da economia, enquanto $C_{H,t}$ e $C_{F,t}$ são índices de consumo de bens domésticos e importados definidos como índices de elasticidade de substituição constante (CES) conforme apresentado em Dixit e Stiglitz (1977):

$$C_{H,t} = \left[\int_0^1 C_{H,t}(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{2-3a}$$

$$C_{F,t} = \left[\int_0^1 C_{F,t}(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{2-3b}$$

Sob esta especificação, η mede a elasticidade de substituição entre bens domésticos e importados. A elasticidade de substituição entre bens dentro de cada categoria é dada por θ. Por hipótese, $\eta > 1$ e $\theta > 1$.

De forma análoga, no resto do mundo temos:

$$C_t^* = \left[(\delta^*)^{\frac{1}{\eta}} \left(C_{H,t}^* \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} + (1-\delta^*)^{\frac{1}{\eta}} \left(C_{F,t}^* \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (2\text{-}4a)$$

$$C_{H,t}^* = \left[\int_0^1 C_{H,t}^* (i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \quad (2\text{-}4b)$$

$$C_{F,t}^* = \left[\int_0^1 C_{F,t}^* (i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}, \quad (2\text{-}4c)$$

onde, por exemplo, $C_{H,t}^*$ é o consumo de produtos domésticos no exterior e δ^* identificará o grau de abertura econômica do resto do mundo.

2.1.3
Índices de preços

O índice de preços P_t, calculado no anexo 1, é definido como aquele que minimiza o gasto necessário para a obtenção de uma unidade do índice de consumo:

$$P_t \equiv \left[(1-\delta) \left(P_{H,t} \right)^{1-\eta} + \delta \left(P_{F,t} \right)^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}}, \quad (2\text{-}5)$$

onde:

$$P_{H,t} \equiv \left[\int_0^1 P_{H,t} (i)^{1-\theta} di \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (2\text{-}6a)$$

$$P_{F,t} \equiv \left[\int_0^1 P_{F,t} (i)^{1-\theta} di \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (2\text{-}6b)$$

são os índices de preços para os bens domésticos e importados, respectivamente.

Os preços no resto do mundo, denominados em moeda estrangeira, são definidos de maneira análoga:

$$P_t^* \equiv \left[\delta^* \left(P_{H,t}^*\right)^{1-\eta} + (1-\delta^*)\left(P_{F,t}^*\right)^{1-\eta}\right]^{\frac{1}{1-\eta}} \tag{2-7a}$$

$$P_{H,t}^* \equiv \left[\int_0^1 P_{H,t}^*(i)^{1-\theta}\, di\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{2-7b}$$

$$P_{F,t}^* \equiv \left[\int_0^1 P_{F,t}^*(i)^{1-\theta}\, di\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{2-7c}$$

2.1.4
Demanda mundial

A alocação ótima de um dado gasto dentro de cada categoria de bens fornece as funções de demanda:

$$C_{H,t}(i) = \left(\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}}\right)^{-\theta} C_{H,t} \tag{2-8a}$$

$$C_{F,t}(i) = \left(\frac{P_{F,t}(i)}{P_{F,t}}\right)^{-\theta} C_{F,t} \tag{2-8b}$$

para todo $i \in [0,1]$.

A alocação ótima dos gastos entre bens domésticos e importados implica que:

$$C_{H,t} = (1-\delta)\left(\frac{P_{H,t}}{P_t}\right)^{-\eta} C_t \tag{2-9a}$$

$$C_{F,t} = \delta\left(\frac{P_{F,t}}{P_t}\right)^{-\eta} C_t \tag{2-9b}$$

Quando os índices de preços para os bens domésticos e importados são iguais (como no estado de equilíbrio em torno do qual o modelo será aproximado) o parâmetro δ corresponde a parcela do consumo doméstico alocada em bens importados. Este representa, então, um parâmetro natural de abertura da economia.

Analogamente, para o resto do mundo:

$$C_{H,t}^* = \delta^*\left(\frac{P_{H,t}^*}{P_t^*}\right)^{-\eta} C_t^* \tag{2-10a}$$

$$C_{F,t}^* = (1-\delta^*)\left(\frac{P_{F,t}^*}{P_t^*}\right)^{-\eta} C_t^* \tag{2-10b}$$

onde δ^* representa (em estado de equilíbrio) a parcela de consumo do resto do mundo alocada em bens domésticos.

Defina o produto agregado por:

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{2-11}$$

$$Y_t^* = \left[\int_0^1 Y_t^*(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \tag{2-12}$$

Seja $C_{H,t}^*(i)$ a demanda do resto do mundo pelo bem doméstico i. Para que os mercados domésticos se equilibrem é preciso que:

$$\begin{aligned} Y_t(i) &= C_{H,t}(i) + C_{H,t}^*(i) \\ &= \left(\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}}\right)^{-\theta} \left(\frac{P_{H,t}}{P_t}\right)^{-\eta} \left[(1-\delta) C_t + \delta^* (q_t)^\eta C_t^*\right] \end{aligned} \tag{2-13}$$

onde $q_t = \frac{e_t P_t^*}{P_t}$ denota a taxa de câmbio real, isto é, a razão entre os índices de preços ao consumidor expressos em uma mesma moeda.

De forma análoga temos, no resto do mundo:

$$\begin{aligned} Y_t^*(i) &= C_{F,t}(i) + C_{F,t}^*(i) \\ &= \left(\frac{P_{F,t}(i)}{P_{F,t}}\right)^{-\theta} \left(\frac{P_{F,t}}{P_t}\right)^{-\eta} \left[\delta C_t + (1-\delta^*) (q_t)^\eta C_t^*\right] \end{aligned} \tag{2-14}$$

Utilizando-se (2-13) e (2-14) para calcular os agregados (2-11) e (2-12) temos que:

$$Y_t = \left(\frac{P_{H,t}}{P_t}\right)^{-\eta} \left[(1-\delta) C_t + \delta^* (q_t)^\eta C_t^*\right] \tag{2-15a}$$

$$Y_t^* = \left(\frac{P_{F,t}}{P_t}\right)^{-\eta} \left[\delta C_t + (1-\delta^*) (q_t)^\eta C_t^*\right] \tag{2-15b}$$

Logo:

$$Y_t(i) = Y_t \left[\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}}\right]^{-\theta} \tag{2-16a}$$

$$Y_t^*(i) = Y_t^* \left[\frac{P_{F,t}(i)}{P_{F,t}}\right]^{-\theta} \tag{2-16b}$$

2.1.5 Restrição orçamentária do consumidor

A maximização de (2-1) é sujeita a uma seqüência de restrições orçamentárias da forma:

$$\int_0^1 \left[P_{H,t}(i)\, C_{H,t}(i) + P_{F,t}(i)\, C_{F,t}(i)\right] di + E_t\left\{Q_{t,t+1} D_{t+1}\right\} \leq D_t + W_t(i)\, H_t(i) + T_t, \tag{2-17}$$

para $t = 0, 1, 2, ...$, onde $P_{H,t}(i)$ e $P_{F,t}(i)$ denotam os preços do bem doméstico e estrangeiro i respectivamente, D_{t+1} é o *payoff* nominal no período $t+1$ do portfólio possuído no final do período t (e que inclui participações em firmas), W_t é o salário nominal e T_t denota transferências / taxas *lump-sum*. Todas estas variáveis estão expressas em unidades de moeda doméstica. $Q_{t,t+1}$ é o fator de desconto estocástico para *payoffs* nominais. Por hipótese, as famílias têm acesso a um conjunto completo de ativos contingentes, negociados internacionalmente. Observe que a moeda não aparece na restrição orçamentária e nem na função utilidade; está estratégia de modelagem tem sido adotada em grande parte da pesquisa recente sobre política monetária onde a mesma é especificada em termos de uma regra de juros, não havendo necessidade da introdução explícita de moeda no modelo.

Uma vez considerados os índices de consumo e preços agregados, a restrição orçamentária pode ser reescrita como:

$$P_t C_t + E_t\left\{Q_{t,t+1} D_{t+1}\right\} \leq D_t + W_t(i)\, H_t(i) + T_t \tag{2-18}$$

Desta forma, as condições de primeira ordem resultantes do problema das famílias representado por (2-1) sujeito a (2-18) são:

$$\frac{v_h\left(H_t(i); \xi_t\right)}{u_c\left(C_t; \xi_t\right)} = \frac{W_t}{P_t} \tag{2-19}$$

que representa a oferta de trabalho, e:

$$\beta\left(\frac{u_c\left(C_{t+1}; \xi_{t+1}\right)}{u_c\left(C_t; \xi_t\right)}\right)\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) = Q_{t,t+1} \tag{2-20}$$

identificando a alocação de consumo.

Aplicando-se o operador esperança condicional a ambos os lados de (2-

20) e rearranjando-se os termos obtém-se uma equação de Euler estocástica convencional:

$$\beta R_t E_t \left\{ \left(\frac{u_c\left(C_{t+1};\xi_{t+1}\right)}{u_c\left(C_t;\xi_t\right)} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right\} = 1, \tag{2-21}$$

onde $R_t^{-1} = E_t\left\{Q_{t,t+1}\right\}$ é o preço de um título livre de risco de um período (denominado em moeda doméstica) e, portanto, R_t é seu retorno bruto.

Sob a hipótese de mercados financeiros completos, uma condição de primeira ordem análoga a (2-21) também deve ser válida para os consumidores estrangeiros:

$$\beta \left(\frac{u_c\left(C^*_{t+1};\xi^*_{t+1}\right)}{u_c\left(C^*_t;\xi^*_t\right)} \right) \left(\frac{P^*_t}{P^*_{t+1}} \right) \left(\frac{e_t}{e_{t+1}} \right) = Q_{t,t+1}, \tag{2-22}$$

onde e_t é a taxa de câmbio nominal (preço da moeda estrangeira em termos da moeda doméstica).

Combinado-se (2-21) e (2-22), conjuntamente com a definição da taxa de câmbio real e assumindo-se uma solução estacionária, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_c\left(C_t;\xi_t\right)}{u_c\left(C^*_t;\xi^*_t\right)} \right) q_t &= E_t \left\{ \left(\frac{u_c\left(C_{t+1};\xi_{t+1}\right)}{u_c\left(C^*_{t+1};\xi^*_{t+1}\right)} \right) q_{t+1} \right\} \\ &= E_t \left\{ \left(\frac{u_c\left(C_{t+j};\xi_{t+j}\right)}{u_c\left(C^*_{t+j};\xi^*_{t+j}\right)} \right) q_{t+j} \right\} = \vartheta \end{aligned} \tag{2-23}$$

onde:

$$\vartheta \equiv \left(\frac{u_c\left(\bar{C}\right)}{u_c\left(\bar{C}^*\right)} \right) \bar{q} \tag{2-24}$$

Logo:

$$u_c\left(C_t;\xi_t\right) = \vartheta \frac{u_c\left(C^*_t;\xi^*_t\right)}{q_t}, \tag{2-25}$$

para todo t.

2.2 Firmas

Existe um contínuo de bens diferenciados com cada bem sendo produzido por apenas uma firma sob competição monopolística. O ambiente de competição imperfeita gera duas implicações: (i) firmas são fixadoras de preços; e (ii) produto de equilíbrio é inferior ao socialmente ótimo.

O objetivo de cada um dos produtores é a maximização dos lucros através do estabelecimento de um preço para o bem produzido:

$$\begin{cases} \underset{P_{H,t}(i)}{Máx} \Pi_t(i) = Y_t(i) P_{H,t}(i) - P_{H,t} CV_t(i) \\ s.a. \quad Y_t(i) = Y_t \left[\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}}\right]^{-\theta} \end{cases} \tag{2-26}$$

onde o $Y_t(i)$ é a demanda pelo bem i dada por (2-16a) e $CV_t(i)$ é o custo variável real (em termos dos bens consumidos domesticamente) de produzir $Y_t(i)$ unidades de i, o qual será detalhado a seguir.

A tecnologia de produção do bem i é dada por:

$$Y_t(i) = A_t f(H_t(i)) \tag{2-27}$$

onde $A_t > 0$ é um fator exógeno variante no tempo e $f(\cdot)$ é uma função côncava crescente.

O custo variável nominal de produção da quantidade $Y_t(i)$ do bem i é dado por:

$$\begin{aligned} CV_t^n(i) &= W_t(i) H_t(i) \\ &= W_t(i) f^{-1}(Y_t(i)/A_t) \end{aligned} \tag{2-28}$$

Diferenciando-se (2-28) obtem-se o custo marginal nominal de fornecer o bem i:

$$CM_t^n(i) = \frac{W_t(i)}{A_t} \Psi(Y_t(i)/A_t) \tag{2-29}$$

onde

$$\Psi(Y_t(i)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(Y_t(i)))} \tag{2-30}$$

é uma função positiva crescente.

Substituindo-se a função oferta de trabalho (2-19) em (2-29) obtem-se:

$$CM_t^n(i) \equiv P_t \frac{v_h(Y_t(i)/A_t; \xi_t)}{A_t u_c(C_t; \xi_t)} \Psi(Y_t(i)/A_t) \tag{2-31}$$

Desta forma, o custo variável real em termos dos bens consumidos domesticamente do bem i pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} CV_t(i) &= \frac{W_t(i)}{P_{H,t}} H_t(i) \\ &= \left(\frac{P_t}{P_{H,t}}\right) \frac{W_t(i)}{P_t} f^{-1}(Y_t(i)/A_t) \\ &= \left(\frac{P_t}{P_{H,t}}\right) \frac{v_h(Y_t(i)/A_t;\xi_t)}{u_c(C_t;\xi_t)} f^{-1}(Y_t(i)/A_t) \\ &= \left(\frac{P_t}{P_{H,t}}\right) CV\left(Y_t(i), C_t; \tilde{\xi}_t\right) \end{aligned} \quad (2\text{-}32)$$

onde a terceira igualdade faz uso de (2-19) e $\tilde{\xi}_t$ representa o efeito resultante dos choques $\{\xi_t, A_t\}$. Note que $CV\left(Y_t(i), C_t; \tilde{\xi}_t\right)$ é a função custo variável real de produção em termos da cesta de consumo C_t.

Já o custo marginal real em termos dos bens consumidos domesticamente é dado por:

$$CM_t(i) = \frac{P_t}{P_{H,t}} \frac{v_h(Y_t(i)/A_t;\xi_t)}{A_t u_c(C_t;\xi_t)} \Psi(Y_t(i)/A_t) = \frac{P_t}{P_{H,t}} s_t\left(Y_t(i), C_t; \tilde{\xi}_t\right) \quad (2\text{-}33)$$

onde $s_t\left(Y_t(i), C_t; \tilde{\xi}_t\right)$ é a função custo marginal real de produção em termos da cesta de consumo C_t.

Com o auxílio da expressão (2-32) pode-se reescrever o problema da firma:

$$\underset{P_{H,t}(i)}{Máx} \Pi_t(i) = Y_t \left[\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}}\right]^{-\theta} P_{H,t}(i) - P_t CV\left(Y_t \left[\frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}}\right]^{-\theta}, C_t, ; \tilde{\xi}_t\right) \quad (2\text{-}34)$$

cuja condição de primeira ordem nos fornece:

$$P^*_{H,t}(i) = \mu CM^n_t(i) \quad (2\text{-}35)$$

Ou seja, o preço ótimo é obtido através da aplicação de um *mark-up* $\mu \equiv \frac{\theta}{\theta-1} > 1$ sobre o custo marginal nominal de produção $CM^n_t(i) \equiv P_{H,t} CM_t(i)$. Observe que quanto menor o grau de substitutibilidade entre os produtos domésticos (ou seja, quanto menor θ) maior o *mark-up* cobrado.