

Lorena Drumond Loureiro Vieira

**Efeito da estimação dos parâmetros sobre o desempenho
conjunto dos gráficos de controle de X-barra e S**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Eugenio Kahn Epprecht

Rio de Janeiro
Junho de 2016

Lorena Drumond Loureiro Vieira

**Efeito da estimação dos parâmetros sobre o desempenho
conjunto dos gráficos de controle de X-barra e S**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção
do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada
pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Eugenio Kahn Epprecht

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. Fernando Luiz Cyrino Oliveira

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Maysa Sacramento de Magalhães

Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – ENCE/ IBGE

Prof. Mônica Barros

Escola Nacional de Ciências Estatísticas - ENCE

Professor Bruno Francisco Teixeira Simões

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Lorena Drumond Loureiro Vieira

Graduou-se em Engenharia de Produção pela Universidade do Estado do Pará em 2004. Obteve o Título de Especialista em Controle Estatístico da Qualidade pela Universidade Federal do Pará em 2006 e o Título de Mestre em Engenharia de Produção pela Pontifícia Universidade Católica em 2008.

Ficha Catalográfica

Vieira, Lorena Drumond Loureiro

Efeito da estimação dos parâmetros sobre o desempenho conjunto dos gráficos de controle de X-barra e S/ Lorena Drumond Loureiro; Orientador: Eugenio Kahn Epprecht. - 2016.

135 f. ; 30cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2016.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Gráfico da média. 3. Gráfico do desvio-padrão. 4. Probabilidade de Alarme Falso. 5. Fase I. 6. Fase II. I. Epprecht, Eugenio Kahn. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

Aos meus pais, Eduardo e Conceição, às minhas irmãs Kelly, Luciana e Karine, ao meu marido Hilbert e à minha filha Beatriz, pelo apoio e incentivo. A toda minha família.

Agradecimentos

A Deus que, com Sua infinita bondade, permitiu que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais, Eduardo e Conceição, e irmãs, Kelly, Luciana e Karine, pelo incentivo e por estarem sempre presentes em minha vida.

Ao meu marido Hilbert, meu parceiro de jornada, pelo carinho e apoio incondicional.

A minha filha Beatriz, razão de todas as coisas.

Ao meu Professor, Orientador e amigo Eugenio Kahn Epprecht, pelos ensinamentos, pela dedicação, apoio e parceria neste trabalho, em todos os momentos.

A toda minha família, em especial à minha tia Thereza, sempre entusiasta das minhas conquistas.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio, pelos ensinamentos e assistência prestada durante a realização do Doutorado.

A Capes, a PUC-Rio e a Fiocruz pelo apoio financeiro concedido a mim durante o curso.

Resumo

Vieira, Lorena Drumond Loureiro; Epprecht, Eugenio Kahn. **Efeito da estimação dos parâmetros sobre o desempenho conjunto dos gráficos de controle de \bar{X} -barra e S** . Rio de Janeiro, 2016. 135p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A probabilidade de alarme falso, α , dos gráficos de controle de processos depende dos seus limites de controle, que, por sua vez, dependem de estimativas dos parâmetros do processo. Esta tese apresenta inicialmente uma revisão dos principais trabalhos sobre o efeito dos erros de estimação dos parâmetros do processo sobre α quando se utiliza o gráfico de \bar{X} e S individualmente e em conjunto. O desempenho dos gráficos é medido através de medidas de desempenho (número médio de amostras até o sinal, taxa de alarme falso, distribuição do número de amostras até o sinal, que, em geral, são variáveis aleatórias, função dos erros de estimação. Pesquisas recentes têm focado nas propriedades da distribuição condicional do número de amostras até o sinal, ou ainda, nas propriedades da distribuição da taxa de alarme-falso condicional. Esta tese adota esta abordagem condicional e analisa o efeito da estimação dos parâmetros do processo no desempenho *conjunto* dos gráficos de \bar{X} e S em dois casos: Caso *KU* (“Média conhecida – Variância desconhecida”) e Caso *UU* (“Média desconhecida – Variância desconhecida”). A quase totalidade dos trabalhos anteriores considerou apenas um gráfico, isoladamente; sobre efeito da estimação dos parâmetros sobre o desempenho conjunto conhecemos apenas um trabalho, sobre gráficos de \bar{X} e R , mas nenhum sobre gráficos de \bar{X} e S . Os resultados da análise mostram que o desempenho dos gráficos pode ser muito afetado pela estimação de parâmetros e que o número de amostras iniciais requerido para garantir um desempenho desejado é muito maior que os números tradicionalmente recomendados na literatura normativa de controle estatístico de processo (livros texto e manuais). Esse número é, porém, menor que o máximo entre os números requeridos para os gráficos de \bar{X} e de S individualmente. Questões a serem investigadas como desdobramento dessa pesquisa são também indicadas nas Considerações Finais e Recomendações.

Palavras-chave

Gráfico da média; gráfico do desvio-padrão; probabilidade de alarme falso; Fase I; Fase II; estimação de parâmetros; *ARL*; número de amostras; tamanho de amostras; medidas de desempenho.

Abstract

Vieira, Lorena Drumond Loureiro; Epprecht, Eugenio Kahn (Advisor). **Effect of Parameter Estimation on the Joint Performance of the \bar{X} -bar and S Charts.** Rio de Janeiro, 2016. 135p. Doctoral Dissertation – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The false-alarm rate of control charts, α , depends on the control limits calculated, which depend, in turn, on the estimated process parameters. This dissertation initially presents a review of the main research articles about the effect of the estimation errors of the process parameters upon α when \bar{X} and S charts are used separately and together. The charts performance is evaluated through performance measures (average run-length, false-alarm rate, run-length distribution, etc), which are, in general, random variables, function of the estimation errors. Recent researches focused on the properties of the conditional run-length, or still (in the case of Shewhart charts) on the properties of the conditional false-alarm rate distribution. This dissertation adopts this conditional approach and investigates the effect of parameter estimation on the joint behavior of \bar{X} and S charts in two cases: KU Case (Known mean – Unknown variance) and UU Case (Unknown mean - Unknown variance). Almost all previous works considered just only one chart separately – just only one joint performance work is known by the author, one about the effect of the estimation errors of the process parameters upon \bar{X} e R joint performance. The results show that the charts performance can be severely affected by the parameter estimation and the number of initial samples required to ensure the desirable performance is greater than the numbers of initial samples recommended by traditional statistical process control reference texts (books and manuals). This number is, however, smaller than the maximum between the numbers of samples required by the \bar{X} and the S charts separately. Additional issues for follow-up research are recommended in the concluding section.

Keywords

Mean control chart; standard deviation control chart; false-alarm rate; Phase I; Phase II; parameter estimation; *ARL*; number of samples; sample size; performance measures.

Sumário

1 Introdução	21
2 Trabalhos Precedentes	28
2.1. Análise do Desempenho do Gráfico de \bar{X}	30
2.2. Análise do Desempenho do Gráfico de S (ou S^2)	42
2.3. Análise do Desempenho conjunto dos Gráficos de \bar{X} e S (ou S^2)	46
3 Modelo Matemático para análise do desempenho conjunto dos Gráficos de \bar{X} e S	48
3.1. Definições Iniciais	48
3.1.1. Probabilidade de alarme falso do Gráfico de \bar{X}	50
3.1.1.1. Caso do Gráfico de \bar{X} centrado no valor-alvo	51
3.1.1.2. Caso do Gráfico de \bar{X} centrado em $\bar{\bar{X}}$	52
3.1.2. Probabilidade de alarme falso do Gráfico de S	53
3.2. Probabilidade de alarme falso conjunta dos Gráficos de \bar{X} e S	59
4 Metodologia de Análise, Resultados e Discussão	52
4.1. Análise 1: Determinação da distribuição acumulada complementar da $CFAR_J$, $P(CFAR_J > b)$, parametrizada por n e m	64
4.1.1. Gráfico da Média centrado no valor alvo – Caso KU	64
4.1.2. Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ – Caso UU	70
4.2. Análise 2: Determinação dos Quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, parametrizada por n e m	75
4.2.1. Gráfico da Média centrado no valor alvo – Caso KU	75

4.2.2. Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ – Caso <i>UU</i>	79
4.3. Análise 3: Número mínimo de amostras <i>m</i> para cada tamanho de amostra <i>n</i> que garante com um percentual de probabilidade <i>p</i> que <i>CFAR_j</i> não é maior que $\varepsilon\%$ em relação à α_j .	84
4.3.1. Gráfico da Média centrado no valor alvo – Caso <i>KU</i>	86
4.3.2. Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ – Caso <i>UU</i>	88
5 Considerações Finais e Recomendações	90
6 Referências bibliográficas	94
Apêndice A – Tabelas e Gráficos da Análise 1 – Gráfico da Média centrado no valor alvo - Caso <i>KU</i>	98
Apêndice B – Tabelas e Gráficos da Análise 1 – Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ - Caso <i>UU</i>	111
Apêndice C – Tabelas e Gráficos da Análise 2 – Gráfico da Média centrado no valor alvo - Caso <i>KU</i>	124
Apêndice D – Tabelas e Gráficos da Análise 2 – Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ - Caso <i>UU</i>	128
Apêndice E – Tabela da Análise 3 – Gráfico da Média centrado no valor alvo - Caso <i>KU</i>	132
Apêndice F – Tabela da Análise 3 – Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ - Caso <i>UU</i>	134

Lista de tabelas

Tabela 1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador S_p , Caso KU	66
Tabela 2 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU	67
Tabela 3 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador S_p , Caso UU	73
Tabela 4 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder o valor $0,011$, para $n=10$ e $\alpha_J = 0,010$ (exemplos das Tabelas B.2 e B.4 – Caso UU)	74
Tabela 5 – Quantis de $0,95$ e $0,90$ da $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p (Caso KU).	77
Tabela 6 - Probabilidades de $CFAR_J$ exceder um valor b para $n = 5$ e 10 da Tabela B.1.	80

Tabelas do Apêndice A

Tabela A.1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU.	99
Tabela A.2 (Tabela 2 no texto) – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU.	102
Tabela A.3 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador S_p , Caso KU.	105
Tabela A.4 (Tabela 1 no texto) – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador S_p , Caso KU.	108

Tabelas do Apêndice B

Tabela B.1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU.	113
--	-----

Tabela B.2 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para n 116
 $= 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *UU*.

Tabela B.3 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para n 119
 $= 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador S_p , Caso *UU*.

Tabela B.4 (Tabela 3 no texto) – Probabilidade de $CFAR_J$ 122
exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e
estimador S_p , Caso *UU*.

Tabela do Apêndice C

Tabela C.1 (Tabela 5 no texto) – Quantis de 0,95 e 0,90 da 125
 $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p , Caso *KU*.

Tabela do Apêndice D

129

Tabela D.1 (Tabela 7 no texto) – Quantis de 0,95 e 0,90 da
 $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p , Caso *UU*.

Tabela do Apêndice E

Tabela E.1 (Tabela 8 no texto) – Número mínimo de amostras 133
iniciais m em função de n , com $p = 5, 10$ e 15% , $\varepsilon = 10, 20, 30, 40$
e 50% e estimador S_p , Caso *KU*.

Tabela do Apêndice F

Tabela F.1 (Tabela 9 no texto) – Número mínimo de amostras 135
iniciais m em função de n , com $p = 5, 10$ e 15% , $\varepsilon = 10, 20, 30, 40$
e 50% e estimador S_p , Caso *UU*.

Lista de figuras

Figuras do Apêndice A

Figura A.1 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *KU*. 100

Figura A.2 – Gráfico da distribuição acumulada complementar $P(CFAR_J > a)$, para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *KU*. 101

Figura A.3 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *KU*. 103

Figura A.4 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *KU*. 104

Figura A.5 – Figura A.5 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador S_p , Caso *KU*. 106

Figura A.6 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador S_p , Caso *KU*. 107

Figura A.7 (figura 1 no texto) – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso *KU*. 109

Figura A.8 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso *KU*. 110

Figuras do Apêndice B

Figura B.1 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *UU*. 113

Figura B.2 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *UU*. 114

Figura B.3 – Figura B.3 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *UU*. 116

Figura B.4 – Figura B.4 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU .	117
Figura B.5 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador S_p , Caso UU .	119
Figura B.6 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador S_p , Caso UU .	120
Figura B.7 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso UU .	122
Figura B.8 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso UU .	123

Figuras do apêndice C

Figura C.1 – Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m , $\alpha_J=0,0054$ e estimador S_p , Caso KU .	126
Figura C.2 – Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso KU .	127

Figuras do apêndice D

Figura D.1 (Figura 2 no texto) – Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m , $\alpha_J=0,0054$, estimador S_p , Caso UU .	130
Figura D.2 (Figura 3 no texto) – Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m , $\alpha_J=0,010$, estimador S_p , Caso UU .	131

Lista de abreviaturas e símbolos

α	probabilidade de alarme falso nominal especificada
α_j	probabilidade de alarme falso conjunta nominal especificada
A_2	Constante tabelada, utilizada no cálculo do gráfico da amplitude amostral
AARL	Média ou valor esperado do RL
AFAR	taxa de alarme falso obtida
ARL	average run lenght
ARL_0	in control average run length
ARL_1	out of control average run lenght
b	quantil de p da distribuição de probabilidade de $CFAR_J$ ou limite de previsão
B_i, B_j	Limites de controle calculados para diferentes subgrupos
c.d.f.	função densidade de probabilidade acumulada
c_4	constante tabelada
CARL	ARL condicional
CEP	controle estatístico do processo
CEQ	controle estatístico da qualidade
CFAR	taxa de alarme falso obtida
CFAR	taxa de alarme falso condicional
$CFAR_J$	taxa de alarme falsa conjunta obtida
$CFAR_S$	taxa de alarme falso obtida para o gráfico de S
$CFAR_{\bar{X}}$	taxa de alarme falso obtida para o gráfico de \bar{X}
CRL	RL obtido
CUSUM	cumulative sum chart

D_3	Constante tabelada, utilizada no cálculo do gráfico da amplitude amostral
D_4	Constante tabelada, utilizada no cálculo do gráfico da amplitude amostral
ε	Valor percentual maior que o risco α nominal
EWMA	exponentially weighted moving average chart
f	Função de densidade de probabilidade
F	função de distribuição acumulada
F^{-1}	função de distribuição acumulada inversa
Φ	função de distribuição normal padrão acumulada
FAR	false-alarm rate
FCF	fator de correção/ efeito da estimação da média por $\bar{\bar{X}}$
H_0	hipótese processo sob controle estatístico
H_1	hipótese processo fora de controle estatístico
IC	in control
KU	média conhecida e desvio-padrão desconhecido
LCL	lower control limit
$L\hat{C}L$	estimated lower control limit
$LCL_{\bar{X}}$	Limite inferior de controle do gráfico de \bar{X}
m	número de amostras
μ_0	média do processo em controle
$\hat{\mu}_0$	estimativa da média do processo em controle μ_0
$\mu_{\bar{X}}$	média da distribuição da variável aleatória \bar{X}
n	tamanho da amostra
n_i	i-ésima amostra da Fase I
NMA	número médio de amostras até o sinal

OOOC	out of control
p	Probabilidade especificada de ultrapassagem
Q	estatística de Quesenberry
q _p	p-ésimo quantil da distribuição da RFS
χ^2_{n-1}	Variável aleatória qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade
$\chi^2_{(n-1),\alpha}$	quantil de (1- α) da distribuição da variável qui-quadrado com m(n-1) graus de liberdade
$\chi^2_{n-1,\alpha}$	quantil de (1- α) da distribuição da variável qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade
$\chi^2_{m(n-1),\alpha}$	quantil de (1- α) da distribuição da variável qui-quadrado com m(n-1) graus de liberdade
R	amplitude amostral
r	subgrupos amostrais de quesenberry
RFS	taxa de alarme falso entre todos os gráficos
RL	run length
RLOA	valor esperado das médias do número de amostras entre alarmes falsos dos gráficos
S	desvio-padrão amostral
S _p	desvio-padrão combinado ou pooled standard deviation
\bar{S}	Média dos m desvios-padrão amostrais
S ²	variância amostral
S_i^2	variância do i-ésimo subgrupo
σ_0	desvio-padrão do processo quando está em controle
$\hat{\sigma}_0$	estimativa do desvio-padrão do processo em controle
σ_s	Desvio-padrão da distribuição da variável aleatória S

$\sigma_{\bar{X}}$	Desvio-padrão da distribuição da variável aleatória \bar{X}
SDRL	desvio-padrão do RL
U	Formato da curva
UCL	upper control limit
$U\hat{C}L$	estimated upper control limit
UCL_{S^2}	Limite superior de controle do gráfico de S^2
$UCL_{\bar{X}}$	Limite superior de controle do gráfico de \bar{X}
UU	média e desvio-padrão desconhecidos
v	quantil da distribuição de probabilidade de v
V	erro padronizado de estimação da média (variável aleatória normal padrão).
Var	Variância
w	quantil da distribuição de probabilidade de W
W	fator de erro de estimação do desvio-padrão (variável aleatória qui-quadrado, com mn graus de liberdade).
w_b	valor de W que resulta em um valor para $CFAR_J$ igual a b
w_v^*	valor de W que, quando $V=v$, resulta em $CFAR_J = b$
X	variável aleatória normal
\bar{X}	média amostral da variável X
\bar{X}_i	i-ésimo valor de \bar{X} na Fase II
\bar{X}_j	j-ésimo valor de \bar{X} na Fase II
\bar{X}_k	média do k-ésimo subgrupo
$\bar{\bar{X}}$	Estimativa da média do processo
y	quantil da distribuição de probabilidade de Y
Y	variável aleatória qui-quadrado com $m(n-1)$ graus de liberdade

z	quantil da distribuição de probabilidade de Z
$z_{\alpha/2}$	quantil de $(1 - \alpha/2)$ da distribuição normal padrão
z_1	quantil da distribuição de probabilidade de Z_1
Z	variável aleatória normal padrão
Z_1	Variável aleatória normal-padrão

1

Introdução

O controle estatístico do processo (CEP), que constitui uma área do controle estatístico da qualidade (CEQ), tem como objetivo a detecção de alterações no processo ao longo do tempo. Todo e qualquer processo estará sujeito a certa variabilidade, inevitável e difícil de ser eliminada, por melhor que seja o seu planejamento e controle. Trata-se da variabilidade natural do processo, que é fruto de uma série de pequenas perturbações que ocorrem aleatoriamente. Quando o processo apresenta apenas a variabilidade natural, devida às causas aleatórias, diz-se que ele está sob controle estatístico ou em controle (*in control*, em inglês – *IC*). Um processo pode apresentar, também, outros tipos de variabilidade, decorrentes de causas especiais (chamadas também de atribuíveis ou assinaláveis), que são maiores quando comparadas à variabilidade natural do processo e têm o efeito de modificar a distribuição da variável aleatória X , deslocando a média e/ou o desvio-padrão em relação a seus valores sob controle (valores-alvo). Quando, além das causas aleatórias de variabilidade, causas especiais estão presentes, diz-se que o processo está fora de controle estatístico (*out of control*, em inglês – *OOC*).

Para detectar a presença de causas especiais, na tentativa de se evitar o aumento da variabilidade nos processos, estes devem ser constantemente monitorados. A principal ferramenta utilizada no monitoramento e identificação de variações no processo são os gráficos de controle, pois permitem a distinção entre causas aleatórias e especiais. Estes baseiam-se na retirada regular (periódica) de amostras do processo e no cálculo de uma estatística amostral (por exemplo, média ou número de defeitos observados), que é comparada com limites de controle. Em muitos casos, os gráficos de controle contêm uma linha central, que representa o valor esperado da estatística monitorada quando o processo está sob controle, e duas linhas superior e inferior em relação à linha central, denominadas limites superior (*upper control limit*, em inglês – *UCL*) e inferior (*lower control limit*, em inglês – *LCL*) de controle. Os limites dos gráficos de controle são determinados com base na média e no desvio-padrão da estatística monitorada, quando o processo está isento de causas especiais. Estes, por sua vez, são função

dos parâmetros do processo. Em alguns casos, os gráficos possuem, apenas, um limite de controle. Isso ocorre quando, em geral, só há interesse em detectar aumentos na estatística de controle e a distribuição amostral da estatística de controle é assimétrica. Em muitos casos, ou mesmo na maior parte das vezes, os parâmetros do processo não são conhecidos a priori e necessitam ser estimados. A estimação dos parâmetros deve ser baseada em amostras do processo retiradas durante um período em que se supõe que o processo esteja sob controle estatístico. Quando isso não ocorre, os parâmetros são incorretamente estimados e, consequentemente, os gráficos de controle, cujos limites são obtidos a partir dessas estimativas, têm o seu desempenho comprometido. Mesmo quando o processo está sob controle, os estimadores possuem variabilidade e não coincidirão exatamente com os valores reais dos parâmetros do processo.

Quando os parâmetros necessitam ser estimados, os gráficos de controle são aplicados em um procedimento com duas fases. A primeira delas, chamada de Fase I, representa a fase inicial do uso dos gráficos de controle, quando são estimados os parâmetros, a partir de um conjunto de dados do processo (estudo retrospectivo do processo). Nesta fase, deseja-se colocar o processo sob controle estatístico, através da identificação e eliminação de causas especiais, podendo-se recalcular os limites de controle várias vezes. Na Fase II, parte-se do pressuposto de que já se possuem estimativas suficientemente precisas dos parâmetros do processo, isto é, que as amostras nas quais as estimativas se basearam foram provenientes de um processo sob controle e que as amostras foram em número e tamanho suficientes para adotar as estimativas obtidas como valores “conhecidos” dos parâmetros do processo. A partir daí, coletam-se amostras do processo em tempo real, para verificar eventuais alterações decorrentes de causas especiais.

Há toda uma linha de pesquisa em CEP sobre a análise de desempenho dos gráficos de controle, baseada na suposição de que os parâmetros do processo são conhecidos ou estimados com precisão absoluta. De fato, observando-se os artigos de CEP em qualquer periódico ou em um conjunto deles, pode-se constatar que a maior parte dos trabalhos se destina ao estudo da Fase II dos gráficos de controle, em que a distribuição sob controle é assumida como completamente conhecida.

Woodall e Montgomery (1999) reconhecem a importância de estudar a *Fase I*, especialmente ao longo das três linhas seguintes: análise do efeito das estimativas dos parâmetros do processo (isto é, da sua precisão ou imprecisão)

sobre o desempenho dos gráficos (especialmente na Fase II); determinação do número de amostras necessário para garantir um desempenho adequado (próximo ao “nominal” - o desempenho esperado no caso de parâmetros conhecidos com precisão); e métodos para determinar valores para os limites de controle (especialmente na Fase I, e possivelmente variáveis ao longo do tempo, de acordo com o acúmulo de informação das novas amostras) que compensem o efeito de estimação dos parâmetros e garantam o desempenho desejado para os gráficos.

A especificação dos limites de controle é uma das decisões críticas em CEP e está associada a dois tipos principais de riscos de decisão, similares aos dois riscos em um teste de hipóteses clássico:

- Risco α ou Probabilidade de Erro Tipo I (taxa de alarme-falso ou *false-alarm rate*, em inglês - *FAR*): é o risco de um ponto cair além dos limites de controle, indicando a situação de “falta de controle” quando nenhuma causa especial estiver presente. Neste caso, haverá uma intervenção no processo, com os custos e prejuízos correspondentes, desnecessariamente.

- Probabilidade de Erro Tipo II: é o risco de um ponto cair entre os limites de controle, indicando a situação de “sob controle” quando o processo estiver realmente fora de controle. Neste caso, não haverá uma intervenção no processo, apesar de necessário, causando prejuízos decorrentes da produção com um processo fora de controle.

Devido a esses riscos, é recomendável medir-se o desempenho dos gráficos de controle. A análise de desempenho dos gráficos consiste em medir a sensibilidade dos mesmos a perturbações, sensibilidade essa que pode ser medida pela sua probabilidade (ou por sua rapidez, ou ainda por sua eficiência – razão entre medidas de “rapidez” e de “custo”) de sinalizar um deslocamento dos parâmetros em relação ao valor sob controle (valor alvo). Outras medidas de desempenho além das probabilidades de Erro Tipo I e Tipo II, podem ser utilizadas para medir a eficiência dos gráficos de controle. Dentre as mais frequentemente utilizadas destaca-se a medida *NMA* - número médio de amostras até o sinal (*average run length*, em inglês - *ARL*) - que corresponde ao valor esperado do número de amostras até o sinal, *RL* (*run length*, em inglês).

A maioria dos estudos sobre o efeito da estimação dos parâmetros no desempenho dos gráficos de controle de *Shewhart* tem focado na distribuição

marginal (ou incondicional) do *RL* e algumas métricas associadas. Revisões de literatura sobre este tema podem ser encontradas em Jensen *et al.* (2006) e Psarakis *et al.* (2013). Vários autores incluindo Trietsch e Bischack (1998), Chakraborti (2006), Bischak e Trietsch (2007), Epprecht *et al.* (2015) e Saleh *et al.* (2015), têm sinalizado que um estudo sobre a distribuição do *RL* dada a amostra de referência (distribuição condicional) – isto é, a distribuição do *RL* baseada nos parâmetros estimados na *Fase I* – seria mais útil para o usuário do que a análise baseada na distribuição marginal (ou incondicional). Esses autores estudaram a distribuição condicional do *RL* e outros assuntos associados, para os gráficos de *Shewhart* para monitoramento da média. Mais recentemente, trabalhos relacionados aos gráficos de *Shewhart* para monitoramento da dispersão também foram apresentados. Entretanto, não foi identificado, a partir da revisão de literatura realizada para este trabalho, um estudo sobre o desempenho conjunto quando se utilizam gráficos para monitoramento da média e da dispersão simultaneamente.

Uma vez que uma amostra de referência é obtida de uma análise de Fase I e parâmetros estimados são calculados, os limites de controle da Fase II são calculados com base nessas estimativas e o processo é monitorado utilizando-se esses limites estimados. Portanto, se fossem calculados os limites de controle da Fase II baseados em duas amostras de referência distintas do mesmo processo em controle, seriam produzidas duas estimativas diferentes para os parâmetros utilizados no cálculo desses limites, que levariam, então, a uma diferença no desempenho (taxas de alarme falso, número médio de amostras até o primeiro sinal etc) dos gráficos de cada fase. Como resultado, ao contrário do caso em que os parâmetros são conhecidos, a distribuição marginal do *RL* em controle não é geométrica na Fase II; ela é condicionalmente geométrica, com parâmetro igual ao obtido e a taxa de alarme falsa obtida, *CFAR*, é função das estimativas e dos limites de controle calculados a partir da amostra de referência. Portanto, por exemplo, no caso dos gráficos do desvio-padrão, a probabilidade de alarme falso obtida (*CFAR*) é uma função da estimativa $\hat{\sigma}_0$ do desvio-padrão em controle σ_0 e, portanto, uma variável aleatória (mais precisamente, como tem sido visto na literatura, é uma função da razão $\hat{\sigma}_0/\sigma_0$). Então, o *RL* da Fase II de qualquer gráfico em qualquer aplicação não irá seguir a distribuição marginal do *RL* em

controle, mas sim, a distribuição condicional do RL obtido (CRL) dado os limites de controle, baseados no valor particular de $\hat{\sigma}_0$ obtido de determinada amostra de referência.

Tendo em vista as considerações anteriores e à luz da literatura específica sobre a análise de desempenho dos gráficos de controle e a utilização da distribuição condicional do RL , definiu-se como problema de pesquisa **a análise do efeito da estimação dos parâmetros na Fase I sobre o desempenho dos gráficos de \bar{X} e S quando utilizados em conjunto na Fase II**. Isso porque já existiam trabalhos referentes ao desempenho individual do gráfico de \bar{X} e S , inclusive, para este último, um artigo publicado pela doutoranda e seu orientador (Epprecht *et al.*, 2015), e não havia na literatura trabalhos sobre o desempenho conjunto de tais gráficos.

Dadas as recomendações de Mahmoud *et al.* (2010) contra a utilização do gráfico de R e a equivalência entre o gráfico de S e o gráfico de S^2 , quando se utiliza os limites de probabilidade (vide Epprecht *et al.*, 2015), a busca e o estudo desta tese se concentraram no uso conjunto dos gráficos de \bar{X} e S .

Alguns objetivos específicos deverão ser alcançados de modo a levar a pesquisa ao seu objetivo principal, quais sejam:

- Determinar a função densidade de probabilidade acumulada da $CFAR$ conjunta dos gráficos de \bar{X} e S .
- Determinar quantis superiores da $CFAR$, que consistem em limites de previsão - valores máximos que a $CFAR$ pode atingir, sendo ultrapassados apenas com probabilidade baixa.
- Determinar o menor número de amostras m que garante com alta probabilidade que a $CFAR$ não irá exceder um limite superior (quantil) especificado.

Isso será feito para diferentes estimadores do desvio-padrão do processo, nas seguintes situações:

- Quando o gráfico de controle da média está centrado no valor alvo (parâmetro “conhecido”); e
- Quando o gráfico de controle da média está centrado no valor estimado $\bar{\bar{X}}$.

Os resultados, em cada situação, serão obtidos analiticamente (sem utilizar simulação) e serão apresentados através de tabelas e gráficos.

Para o alcance do objetivo da pesquisa e o entendimento dos mecanismos necessários para o desenvolvimento da tese, o trabalho foi estruturado da seguinte forma:

- Revisão de Literatura: além deste primeiro capítulo onde foram apresentados o problema de pesquisa, os objetivos do trabalho e suas motivações, a pesquisa teve início a partir de um levantamento dos principais trabalhos (artigos, monografias, livros etc) já desenvolvidos principalmente nos seguintes temas: análise de desempenho (individual e conjunto) dos gráficos de controle, desempenho condicional e incondicional, estimação dos parâmetros e cálculo dos limites de controle, taxa de alarme-falso, número médio de amostras até um sinal, gráficos de *Shewhart*. Esta revisão bibliográfica para apresentação dos trabalhos precedentes é apresentada no **Capítulo 2**, estruturada em três seções, cada uma se dedicando ao entendimento da análise de desempenho de cada gráfico - média, desvio-padrão, média e desvio-padrão em conjunto.
- Bases Teóricas e Formulação do Modelo Matemático: além dos fundamentos conceituais que são fornecidos a partir da leitura dos trabalhos precedentes, também são apresentadas algumas definições teóricas necessárias para o entendimento da formulação do Modelo Matemático no **Capítulo 3**. Especificamente, o modelo é o da distribuição acumulada da *CFAR*, em função da estimação dos parâmetros, parametrizada por m e n .
- Metodologias de Análise, Resultados e Discussão: nesta tese o desempenho conjunto dos gráficos de controle da média e do desvio-padrão pode ser visualizado através de três análises distintas de acordo com os *inputs* definidos previamente pelo usuário para obtenção dos *outputs* correspondentes. As diferentes análises correspondem a diferentes “vistas” ou “ângulos de visão” da distribuição da *FAR*. A metodologia e a discussão sobre os resultados de cada análise são apresentados no **Capítulo 4**. Os resultados são apresentados através de tabelas e gráficos,

que são apresentados na íntegra na seção de **Apêndices**. Ao longo do texto do Capítulo 4, algumas tabelas e gráficos do Apêndice são apresentados para melhor entendimento dos resultados obtidos.

- Considerações Finais e Recomendações para Trabalhos Futuros são apresentados no **Capítulo 5** e as referências bibliográficas citadas no texto, no **Capítulo 6**.

Cabe mencionar que a notação utilizada nesta tese segue a terminologia da língua inglesa utilizada no artigo publicado (Epprecht *et al*, 2015), para uniformização das siglas com as utilizadas na literatura correspondente ao tema. A descrição em português de cada notação em inglês está apresentada no texto no momento em que é citada pela primeira vez.

2 Trabalhos Precedentes

A influência da estimação dos parâmetros do processo no desempenho dos gráficos de controle é reconhecida há bastante tempo. As recomendações clássicas encontradas nos livros de Controle Estatístico da Qualidade (CEP), desde *Shewhart*, acerca do número (m) e tamanho (n) de amostras iniciais necessárias para estabelecimento dos limites para os gráficos de controle são de 20 a 30 amostras de tamanho 4 ou 5, tomadas quando o processo está estável (“em controle”), ou seja, com a variável de interesse apresentando uma distribuição constante, com média e variância constantes. Por exemplo, Montgomery (2013) recomenda utilizar 20 a 25 amostras (ou “subgrupos” de tamanho 3, 4 ou 5) para calcular limites de controle que sejam confiáveis. No entanto, há vários artigos que apresentam resultados de pesquisa mostrando que o número de amostras necessário para se ter confiança no desempenho dos gráficos (por exemplo, para garantir que a taxa de alarmes falsos não será muito maior que a especificada) deve ser bem maior que tais 20, 25 ou 30 amostras.

Nas seções seguintes deste Capítulo, são apresentados os principais trabalhos realizados sobre o desempenho dos gráficos de *Shewhart* \bar{X} e S (ou S^2) individualmente e em conjunto, quando os parâmetros são estimados.

Especificamente sobre a questão da distribuição do RL , apesar de muitos trabalhos terem sido baseados na distribuição marginal do RL , verificou-se que alguns autores consideraram a distribuição condicional como elemento intermediário para o cálculo da distribuição marginal do RL (ver, por exemplo, Chen, 1998 ou mais recentemente, Maravelakis e Castagliola, 2009 e Castagliola e Maravelakis, 2011). Trietsch e Bischak (1998) discutiram problemas baseados na análise da taxa de alarme falso, FAR (do inglês *False Alarm Rate*) incondicional e no número médio de amostras até o primeiro sinal, ARL (do inglês *Average Run Length*) – que corresponde à média da distribuição do RL incondicional - e obtiveram a distribuição da FAR obtida (condicional), $CFAR$, para o gráfico de \bar{X} com limites 3-sigma e tamanho de amostra igual a 5, para

diferentes números de amostras na análise de Fase I. Resultados similares foram obtidos por Chakraborti (2006).

Ainda que em número menor que os trabalhos voltados para a análise do desempenho dos gráficos para monitoramento da média, o efeito da estimação dos parâmetros no desempenho dos gráficos de S e S^2 na Fase II e do número mínimo de amostras retrospectivas recomendadas tem sido estudado por vários autores, que obtiveram a média, desvio-padrão e/ ou alguns outros quantis da distribuição incondicional do RL para estes gráficos (ver Burroughs et al., 1993; Chen, 1998; Maravelakis et al., 2002; Zhang et al., 2005; Castagliola et al., 2009; e Guo e Wang, 2013). A distribuição incondicional do RL possui uma variância muito maior e uma forma diferente da distribuição do RL no caso em que a variância é conhecida (que é geométrica). Alguns desses autores propuseram um ajuste para compensar o efeito da estimação, sempre utilizando como critério algumas propriedades da distribuição incondicional do RL . Epprecht et al. (2015) utilizaram esta abordagem da distribuição condicional e focaram na análise do efeito da imprecisão das estimativas sobre as medidas de desempenho dos gráficos da variância S^2 e do desvio-padrão S na Fase II, através do estudo da distribuição condicional do RL em controle desses gráficos.

Conforme dito anteriormente, também foram desenvolvidos trabalhos utilizando-se a distribuição condicional do RL para o gráfico de X e \bar{X} (ver Saleh et al. 2015). O gráfico de \bar{X} foi idealizado para detectar mudanças na média do processo sob a suposição de que as causas especiais não alteram o desvio-padrão da variável aleatória X (variabilidade do processo). Ainda que o gráfico seja sensível a aumentos na dispersão de X , essa sensibilidade é baixa. Por isso, quando se deseja proteção tanto contra causas especiais que possam alterar a média de X quanto contra causas que possam aumentar o seu desvio-padrão, o procedimento usual é utilizar dois gráficos em conjunto, por exemplo, um gráfico de \bar{X} e outro de S .

Quando se utiliza desta forma dois gráficos para o monitoramento do processo, a cada amostra são testadas as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{ e/ou } \sigma \neq \sigma_0$$

onde H_0 corresponde à hipótese “processo sob controle” e H_1 , “processo fora de controle”.

2.1.

Análise do Desempenho do Gráfico de \bar{X}

A capacidade de detecção de perturbações no processo ou eficiência do gráfico de \bar{X} , dado que os parâmetros do processo são estimados, tem sido estudada há bastante tempo. Os vários artigos existentes determinam que a “confiança” no desempenho dos gráficos depende do número (m) e do tamanho (n) de amostras que deve ser retirado do processo em controle para construção dos limites de controle. Tais trabalhos recomendam número e tamanho de amostras iniciais muito maiores que os classicamente recomendados, conforme já foi dito.

Quesenberry (1991) analisou as distribuições em controle exatas das diferenças (ou razões, conforme o caso) entre estatísticas do $(r+1)$ -ésimo subgrupo e os valores das mesmas estatísticas calculadas com base em r subgrupos precedentes, e estabelece limites de controle para essas diferenças ou razões — na realidade, para funções das mesmas, chamadas “estatísticas Q ”, com distribuição $N(0,1)$. As estatísticas Q embutem a informação do número de amostras utilizado, evitando a necessidade de atualizar (recalcular) os limites de controle à medida que novas amostras vão sendo obtidas: os gráficos mantêm uma escala padrão, única, com limites por exemplo em $+3$ e -3 . A contrapartida é que os cálculos são mais trabalhosos, necessitando ser programados. Os cálculos são recursivos, baseados nos valores anteriores.

Os “Q-charts” constituem o primeiro tipo de gráfico de *Shewhart* corretamente distribuído para um processo estável e normal. Então, como seus limites são baseados na distribuição exata das estatísticas, podem ser utilizadas com qualquer número de amostras, mesmo desde o início da amostragem do processo, contanto que as primeiras amostras sejam retiradas antes de que se disponha de estimativas dos parâmetros. Tornam-se, assim, muito úteis para processos com corridas curtas, mas também para o controle de qualquer processo desde cedo e com probabilidade de alarme falso limitada. Constituem uma

abordagem completamente diferente das demais, e que elimina em muitos aspectos a distinção entre a *Fase I* e a *Fase II* dos gráficos de controle.

Quesenberry (1993) estudou o efeito do tamanho da amostra e do número de amostras sobre o *ARL* do processo sob controle (ARL_0) e sobre o *ARL* do processo fora de controle (ARL_1) de gráficos de \bar{X} e de X . Ele buscou a resposta para a seguinte questão: qual o número mínimo de amostras (m) necessário (de um processo estável e normalmente distribuído) para garantir que o desempenho dos limites de controle estimados seja igual ao dos limites de controle “verdadeiros” (os limites que os gráficos teriam se os parâmetros do processo fossem conhecidos sem erro)?

O autor demonstrou que a probabilidade de alarme falso, α , desses gráficos quando n e m são pequenos é maior do que a nominal (por exemplo, para o gráfico de \bar{X} com limites de três sigma, com $m=30$ e $n=5$, $\alpha=0,00378$, maior que o valor nominal 0,0027). Afirma que, no entanto, os ARL_0 's são maiores que os nominais, pois os eventos “sinal” não são independentes, e critica Hillier (1969), que é citado na próxima seção, por ter desconsiderado esse fato. Mostra que as diferenças $(\bar{X}_i - U\hat{C}L)$ e $(\bar{X}_j - U\hat{C}L)$ — onde \bar{X}_i e \bar{X}_j são valores de \bar{X} na *Fase II*, em diferentes amostras, e $U\hat{C}L$ é o limite superior de controle “estimado” na *Fase I* (considerado, portanto, uma variável aleatória) — são correlacionadas positivamente (sua covariância é igual à variância de $U\hat{C}L$), e, portanto os eventos $\bar{X}_i > U\hat{C}L$ e $\bar{X}_j > U\hat{C}L$ não são independentes, e a sequência de comparações de \bar{X}_k ($k=1, 2, 3, \dots$) com os limites de controle não pode ser vista como uma sequência de provas de Bernoulli, de modo que o *RL* não segue uma distribuição geométrica com média igual a $1/\alpha$.

O autor fornece uma tabela com essas correlações e, para obter os *ARL*'s (ARL_0 e ARL_1) na *Fase II*, para $n=5$, utilizou simulação de Monte-Carlo. O número de amostras geradas até o sinal é um valor (realização) da variável aleatória *RL*. O procedimento foi repetido um número suficiente de vezes para obter a média do *RL* com erro-padrão pequeno (o número de repetições esteve entre 6.000 e 40.000, dependendo do caso).

O efeito da correlação positiva entre os valores de $(\bar{X}_i - U\hat{CL})$ e $(\bar{X}_j - U\hat{CL})$ (e entre os de $(\bar{X}_i - L\hat{CL})$ e $(\bar{X}_j - L\hat{CL})$, onde $U\hat{CL}$ e $L\hat{CL}$ são, respectivamente, os limites de controle superior e inferior “estimados” na *Fase I*), é um aumento dos *ARL*’s em relação aos valores “nominais” (calculados sob a suposição de independência dos eventos “sinal”), aumento este tanto maior pronunciado quanto menor for o valor de m (pois maior será a variância dos limites de controle estimados).

Como resultado desse trabalho, Quesenberry recomenda coletar $m = 100$ amostras de tamanho $n = 5$ cada uma, para o gráfico de \bar{X} . As simulações realizadas restringiram-se ao tamanho de amostra $n = 5$ e o autor recomenda que o número de amostras m para o cálculo dos limites permanentes seja definido através da fórmula $m = 400/(n-1)$, à exceção de $n = 1$. Para o gráfico de X , o autor recomenda um número mínimo de 300 amostras para estabelecer os limites permanentes.

Durante a *Fase I*, porém, o autor recomenda, sempre que for possível, a substituição da prática tradicional de estabelecimento de limites de controle provisórios, a serem validados e revistos, pelo uso de gráficos Q (“*Q charts*”), cujos limites de controle garantem para o gráfico o mesmo desempenho que os limites baseados em valores conhecidos dos parâmetros.

Trietsch e Bischak (1998) realizaram um estudo sobre a taxa de alarme falso do gráfico de \bar{X} (*ARL*) para pequeno número de amostras, quando os parâmetros do gráfico são estimados. Os autores destacam que, de acordo com a sua definição, o *ARL* é a média entre um grande número de gráficos de um único alarme-falso por gráfico, o primeiro que o gráfico produz. A menos que o gráfico não seja mais utilizado depois do primeiro ponto fora de controle, o que é improvável na prática, uma melhor medida de desempenho seria a média do número de amostras entre alarmes falsos de um gráfico, em média (*RLOA*), quando o processo está sob controle. Os autores defendem que *RLOA* é uma medida de desempenho mais útil e mais intuitiva que o *RL*.

Para um dado gráfico, *RLOA* segue uma distribuição binomial negativa com parâmetros r , igual ao número de amostras em média, em conjunto; e p , igual à probabilidade de um ponto cair fora dos limites de controle. Embora os valores esperados e variância do *RL* e *RLOA* sejam os mesmos, suas distribuições não são

e a distribuição de *RLOA* não pode ser aproximada por uma Normal, o que poderia ser a mais provável para um gráfico construído com limites conhecidos. O Teorema Central do Limite não se aplica neste caso, porque cada ponto plotado é uma amostra de uma distribuição diferente, ou seja, de uma distribuição de médias de número de amostras de um dado gráfico.

Se apenas uma corrida (uma amostra até o sinal) é realizada por gráfico, tem-se a distribuição do *ARL*. Realizando-se a média de 10 (dez) ou mais corridas até o sinal no mesmo gráfico, obtêm-se distribuições similares, mas a distribuição de uma única amostra até o sinal é diferente: a probabilidade de se observar um *RLOA* menor que 50 (cinquenta), por exemplo, é muito grande se realizada apenas uma corrida por gráfico, mas muito baixa se a realizada a média de dez ou mais corridas por gráfico.

Os autores também apresentam a medida de desempenho *RFS*, que corresponde à taxa de alarme falso entre todos os gráficos, uma variável aleatória para o caso em que os parâmetros são estimados. Para entender melhor a diferença entre a *RFS* e *ARL*, suponha que um grupo de gráficos seja construído com limites estimados e que sejam utilizados durante o mesmo período de tempo. Um gráfico com menor *ARL* irá sinalizar mais que outro que tiver maior *ARL*, contribuindo de forma diferente para a estimativa do *ARL*. No caso do *RFS*, são atribuídos pesos iguais às contribuições de cada gráfico para o cálculo, além de que, no cálculo da *ARL*, apenas as corridas até o primeiro ponto fora de controle são consideradas no cálculo da média. Os resultados são obtidos através da distribuição da *RFS* e apresentados na forma de quantis (q_p) da distribuição da *RFS* em função de m e p (probabilidade de *RFS* ser menor ou igual a um determinado quantil q_p), na forma de gráficos e tabelas. Assim, o usuário pode determinar qual o tamanho de amostras razoável para construção dos limites de controle, de acordo com a taxa de alarme falso desejada.

O trabalho de Nedumaran e Pignatiello (2001) assim como o de Quesenberry (1993), apresenta o problema da construção dos gráficos de controle de *Shewhart* para a média (determinação dos limites de controle) quando os valores dos parâmetros do processo não são conhecidos. Apesar de Nedumaran e Pignatiello (2001) analisarem o desempenho do mesmo tipo de gráfico, trata-se de um estudo sobre a construção dos gráficos de controle diferente daquele proposto por Quesenberry (1993), motivado pelos casos em que não é possível esperar pelo

acúmulo do número de amostras recomendado (por exemplo, 100 amostras no caso de $n=5$) para iniciar o controle do processo. Os autores propõem um procedimento baseado em um número inicial (m) de subgrupos, com limites que são atualizados a cada k subgrupos. À medida que mais amostras são coletadas, o número k pode variar (quer dizer, podem-se atualizar os limites com menor frequência: por exemplo, pode-se iniciar com $m=5$ ou 10 amostras iniciais, atualizando os limites de 5 em 5 amostras, até um total de 30 amostras, e então passar a atualizá-los a cada 10 novas amostras, até a 50^a amostra, quando se passa a atualizá-los de 25 em 25 amostras, fixando-os definitivamente com 75, ou 100, ou 150 amostras). Os autores levam em consideração a correlação existente entre o evento em que uma amostra ultrapassa os limites de controle (B_i) e o evento em que outra amostra ultrapassa os limites de controle (B_j). A abordagem proposta consiste em construir limites de controle tais que a probabilidade de que ocorra um alarme falso em algum dos próximos k subgrupos, $\Pr[RL \leq k]$, seja igual à de um gráfico com limites verdadeiros e risco α especificado, i.e., $1 - (1 - \alpha)^k$. Dada a correlação existente entre os eventos B_i e B_j , os limites de controle são estabelecidos com base em limites de previsão da distribuição normal k -variada das diferenças $\bar{X}_i - \bar{X}$.

Jensen *et al.* (2006) apresentaram uma revisão bibliográfica sobre os efeitos da estimação dos parâmetros sobre o desempenho dos gráficos de *Shewhart* e outros tipos. Apresentaram as abordagens utilizadas desde a década de 50 até 2006, as principais medidas de desempenho utilizadas (quando os parâmetros são conhecidos e quando são estimados) e seus principais aspectos, assim como recomendações sobre temas que mereciam maior estudo.

De acordo com os autores, a distribuição condicional do RL do gráfico de controle é dependente dos valores das estimativas dos parâmetros, que, antes dos dados serem coletados na Fase I, são variáveis aleatórias. Assim, cabe estudar a função densidade de probabilidade condicional do RL . Em consequência dos parâmetros serem estimados, nunca será possível obter valores exatos para as medidas de desempenho de um determinado gráfico de controle. Entretanto, a distribuição condicional do RL pode ser utilizada para determinar um melhor e um pior cenário para gráficos com parâmetros estimados.

Uma alternativa para quando não são conhecidos os parâmetros é a

utilização da distribuição de probabilidade marginal do *RL*, que permite avaliar a variabilidade introduzida no gráfico de controle pela estimação dos parâmetros. Nesse caso, Jensen *et al.* (2006) recomendaram complementar a avaliação do gráfico com outras medidas de desempenho, além do *ARL*, tal como o *SDRL* (desvio-padrão do *RL*) - até porque, a distribuição marginal do *RL* é mais dispersa que a distribuição condicional. Como será visto, o uso da distribuição marginal do *RL* é a abordagem adotada pela maioria dos trabalhos na literatura pesquisada, sendo diferente da que foi utilizada nesta tese, a abordagem condicional do *RL*.

Os autores recomendam coletar mais dados na Fase I do que o usualmente recomendado e afirmam que o impacto da estimação depende da direção do erro de estimação, do tipo de gráfico em questão e do estimador utilizado. Sugerem que sejam aprofundadas as pesquisas para o caso em que são utilizados parâmetros estimados, em especial, que se procurem respostas para as seguintes questões:

- a) “Quanto se perde em termos de desempenho quando são utilizados parâmetros estimados ao invés de conhecidos?”
- b) “Que tamanho de amostra é necessário na Fase I para garantir desempenho adequado na Fase II?”, e
- c) “Como os limites da Fase II poderiam ser ajustados para compensar o tamanho da amostra na Fase I?”.

Chakraborti (2006) apresenta em seu artigo um estudo sobre os efeitos da estimação dos parâmetros do gráfico de \bar{X} através da taxa de alarme falso obtida (*AFAR*), da taxa de alarme falso condicional (*CFAR*), da distribuição marginal e condicional do *RL* e algumas características do *RL*, como: o *ARL*, o *ARL* condicional (*CARL*), alguns quantis incluindo a média, e a probabilidade acumulada do *RL*. A metodologia utilizada foi a derivação e avaliação da distribuição do *RL* em controle através da distribuição condicional do *RL* e a forma de apresentação dos dados em gráficos e tabelas difere das demais apresentadas em trabalhos anteriores, uma vez que o usuário pode ter acesso aos valores para as constantes dos gráficos de acordo com especificado valor do *ARL* em controle, quando os parâmetros são desconhecidos. Em trabalhos como o de Ryan (2000) e Quesenberry (1993), os resultados não foram obtidos de forma analítica e sim, via simulação.

O trabalho foi organizado em 4 (quatro) casos: Caso 0 - média e variância

conhecidos, Caso 1 - média desconhecida e variância conhecida, Caso 2 - média conhecida e variância desconhecida e Caso 3 - média e variância desconhecidos.

O autor menciona que há dois problemas básicos quando se utiliza a *FAR* como medida de desempenho de um gráfico de controle quando os parâmetros são estimados: quando há um sinal, os eventos de sinal subsequentes se tornam estatisticamente dependentes, fazendo com que a interpretação de um alarme seja menos clara; e, porque os eventos de sinal são dependentes, a distribuição do *RL* não é geométrica (então, por exemplo, a *FAR* não é igual ao inverso do *ARL* em controle). Isto posto, são apresentados em cada caso, as características e o modelo de cálculo para *FAR* (*AFAR* e *CFAR*) e os resultados obtidos para $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ e $m = 5, 10, 15, 20, \dots, 50$, $ARL_0 = 370$ e 500 .

Os principais resultados encontrados no trabalho de Chakraborti (2006), em cada caso, são apresentados abaixo de forma resumida:

Caso 0

A *FAR* é igual à taxa de alarme falso nominal, α , para todo e qualquer subgrupo inspecionado e a relação $FAR = \alpha = 1/ARL$ é válida;

Caso 1

A média do processo é estimada por $\bar{\bar{X}}$ e os eventos de sinal são dependentes, conseqüentemente, *FAR* é diferente de α . A taxa de alarme falso obtida é denominada *AFAR* e observa-se que *AFAR* contém em sua fórmula um fator de correção (*FCF*), que é função de m (e não depende de n) e que correspondente ao efeito da estimação da média por $\bar{\bar{X}}$, calculado por $\sqrt{m/m+1}$. Considerar $FAR = AFAR$, significaria considerar que $FCF=1$ para qualquer valor de m . O autor apresenta uma tabela com os valores obtidos para *AFAR* para diferentes valores de m . Para se obter uma *AFAR* próxima ao valor nominal $FAR = \alpha = 0,0027$, é necessário $m = 500$ amostras pelo menos. O autor também apresenta uma formulação analítica alternativa para a taxa de alarme falso, denominada de taxa de alarme falso condicional (*CFAR*), uma vez que o processo de estimação da média o torna uma variável aleatória dependente de $\bar{\bar{X}}$. *CFAR* é uma função simétrica de Z , uma variável aleatória normal padrão e $CFAR = \alpha$ quando $Z=0$. Os resultados demonstram que *CFAR* é muito sensível ao valor da estimativa $\bar{\bar{X}}$, principalmente quando m é pequeno (menor que 50). Apenas quando $\bar{\bar{X}}$ é muito

próximo ao valor nominal (entre o primeiro e o terceiro quantil da distribuição de $CFAR$), $CFAR$ é próximo (dentro de 10%) do valor nominal FAR . Consequentemente, essa nova expressão de $CFAR$ (função de $\bar{\bar{X}}$), fornece uma nova expressão para $AFAR$ (média da distribuição de $CFAR$), que não é considerada uma boa medida de desempenho, uma vez que a distribuição de $CFAR$ é assimétrica. Analisando a distribuição do RL em controle, é possível verificar que alguns atributos seus como a média ARL e o desvio-padrão $SDRL$, diminuem em relação aos valores-padrão (parâmetros conhecidos e não estimados) e que ARL e $SDRL$ aumentam em direção a esses valores-padrão na medida em que m aumenta. O autor também afirma que, em função da assimetria da distribuição do RL em controle, a mediana deve ser preferida à média como medida de desempenho.

Caso 2

No caso em que a média é conhecida e o desvio-padrão não, necessitando ser estimado, o cálculo é feito da mesma forma, com a diferença de que a expressão da $CFAR$ é função de uma variável aleatória W que segue uma distribuição qui-quadrado, com mn graus de liberdade. O estimador utilizado para

o desvio-padrão é o $S = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2}$ - onde S_i^2 corresponde à variância do i -ésimo

subgrupo - que possui menor erro quadrático médio de acordo com Derman & Ross (1995).

Caso 3

Este último caso, em que tanto a média quanto o desvio-padrão são desconhecidos e necessitam ser estimados, é considerado o mais geral. O estimador utilizado para a média é o $\bar{\bar{X}}$ (Caso 1) e para o desvio-padrão, o autor apresenta os cálculos para o estimador S (Caso 2). Assim como no Caso 1, a $AFAR$ para este caso não é igual ao valor nominal $FAR = \alpha$ e sim, maior do que esperado. O aumento em relação ao valor esperado também é maior que nos casos 1 e 2. Assim como no Caso 1, a $CFAR$ é uma variável aleatória, mas agora, dependente de duas variáveis aleatórias: Z , relacionada à estimação da média e W , relacionada à estimação do desvio-padrão. Analisando desta forma, sob normalidade, $\bar{\bar{X}}$ e S são estatisticamente independentes e $CFAR$ é função de duas variáveis aleatórias independentes Z e W . Os gráficos mostram que a superfície de

CFAR atinge o pico nos valores extremos de Z e W e que mudanças na taxa não são lineares: a distribuição de *CFAR* é uma curva em formato de U , que diminui para 0,0027 (valor nominal) e depois aumenta na medida em que Z varia do menor para o maior valor, para um dado valor de W ; e para um valor fixo de Z , *CFAR* diminui na medida em que W aumenta. O autor destaca que os valores de *CFAR* são extremamente diferentes do valor nominal quando os valores de Z e W são ou estão próximos de seus valores extremos. Por exemplo: enquanto que na mediana de Z e W , *CFAR* é aproximadamente 2,77% do seu valor nominal, nos quantis 0,001 de Z e W o valor de *CFAR* é enorme, 1.143% maior que o seu valor nominal. Analisando a distribuição do *RL* para este caso, o autor identificou um comportamento interessante, diferente do que foi observado no Caso 1. Para elevados números de amostras, acima de 600, a ordem das curvas se modifica no gráfico, o que significa que a probabilidade para um tamanho de amostras $m=700$ ou menos (primeiro sinal em 700 amostras ou menos) é maior na curva da distribuição geométrica do *RL* (m tendendo ao infinito) do que na curva da distribuição do *RL* para $m=5$ ou $m=15$ – o inverso do que foi apresentado no Caso 1. Isso sugere que valores extremos na cauda da distribuição do *RL* podem se comportar de maneira diferente para pequenos valores de m . Assim como no Caso 1, *ARL* e *SDRL* aumentam na medida em que m cresce, mas o 5º percentil é sensivelmente menor e o 95º consideravelmente maior, já que a distribuição do *RL* tem uma cauda direita maior que no Caso 1 e há mais variação.

O autor recomenda que estudos semelhantes sejam feitos para outros tipos de gráficos de *Shewhart*, além do gráfico da média.

Bischak e Trietsch (2007) estenderam a análise feita para o gráfico de \bar{X} em Trietsch e Bischak (1998), utilizando como medida de desempenho a *RFS* e realizaram um estudo sobre a taxa de alarme falso para *Probability-Based Diffidence Charts* para monitoramento da média. Eles acreditam que o conhecimento sobre a distribuição da *RFS* e a utilização de *Probability-Based Diffidence Charts* ajudam o usuário a conhecer a probabilidade de ter obtido um gráfico “ruim”, ou seja, com limites de controle calculados que irão produzir uma taxa de alarme falso maior do que o esperado ou perda de poder.

Os *Probability-Based Diffidence Charts* consideram as amostras iniciais da Fase I dinamicamente, de forma que o subgrupo inicial é utilizado para ajustar os limites do gráfico para o subgrupo seguinte, e assim sucessivamente, permitindo

controlar o processo enquanto ainda se está coletando dados de base. Segundo os autores, o objetivo dos gráficos baseados em intervalo de confiança (*Probability-Based Diffidence Charts*) é diferenciar os efeitos da variação do processo dos efeitos da estimação dos parâmetros, o que não foi possível obter no trabalho de Quesenberry (1991) sobre os gráficos Q para variáveis, uma vez que um ponto pode cair fora dos limites porque de fato é atípico para o processo ou porque ele é influenciado por estimativas de parâmetros que estão longe de seus valores corretos devido a erro de amostragem. Tal questão indesejável é resolvida pelos *Probability-Based Diffidence Charts* através da criação de intervalos de confiança para os limites de controle que o gráfico teria se os parâmetros fossem conhecidos, como se fossem controles internos do gráfico. Tais controles internos definem três regiões onde os subgrupos de médias podem cair: se um ponto cai mais próximo do centro do que dos limites de controle internos, então este é dito como “fortemente em controle”; se ele cai fora dos limites “externos” de controle, é considerado “fortemente fora de controle”; e se o ponto cai entre os limites internos e externos, este é dito “confiável”. Pontos “confiáveis” são exatamente os pontos para os quais o tamanho da amostra é pequeno demais para dizer se estão sob ou fora de controle e se a maioria dos pontos não são “confiáveis”, então o aumento do tamanho da amostra não é importante, uma vez que as decisões a respeito do processo podem ser feitas sem isto. Os autores afirmam que mais pesquisas sobre o tema devem ser feitas para melhorar o desempenho desses gráficos, além de que outros gráficos como S , R , p podem ser configurados de maneira semelhante.

Chakraborti (2007) examina a distribuição do RL e seus percentis para o Gráfico de \bar{X} quando a média e o desvio-padrão do processo são desconhecidos e necessitam ser estimados. O conteúdo (e alguns resultados) deste artigo são os mesmos apresentados no artigo do mesmo autor no ano de 2006 (*Journal of Applied Statistics*), com a diferença que neste último, em outro periódico (*Quality Engineering*), os cálculos são apresentados em detalhe.

Psarakis *et al.* (2013) realizaram uma pesquisa bibliográfica complementar ao trabalho de Jensen *et al.* (2006), focando nas pesquisas mais recentes sobre o tema, desde 2006 até 2013. Na verdade, trata-se de um trabalho mais abrangente, por considerar uma diversidade maior de gráficos – *EWMA*, *CUSUM*, gráficos para monitoramento da média e do desvio-padrão, para dados correlacionados,

para dados multivariados e gráficos de atributos. Informam que, desde 2006 até o momento da redação do artigo, foram publicados mais de 45 artigos de pesquisa sobre o efeito da estimação dos parâmetros no desempenho dos gráficos de controle, o que demonstra a importância e o interesse pelo tema.

Saleh et al. (2015) avaliaram o impacto da estimação dos parâmetros nos gráficos de X e \bar{X} considerando a variabilidade existente entre gráficos construídos a partir de diferentes amostras de referência de um mesmo processo, quando os parâmetros são estimados) e as medidas de desempenho *AARL* e *SDARL*, média e desvio-padrão do *ARL* em controle obtido, respectivamente. Adicionalmente, avaliaram o desempenho do gráfico de \bar{X} para diferentes estimadores do desvio-padrão.

Os autores apresentaram uma retrospectiva dos trabalhos realizados que utilizam o *AARL* e *SDRL* como medidas de desempenho e afirmam que nenhum desses estudos considerou a variabilidade gráfico-a-gráfico ao recomendarem tamanhos das amostras na Fase I, quando os parâmetros são estimados [ver Quesenberry (1993), Chen (1997), Jones e Steiner (2012), Zhang *et al.* (2012, 2013), Lee *et al.* (2013), Aly *et al.* (2013)].

O objetivo inicial do estudo foi identificar a quantidade inicial de dados na Fase I necessária para ter um valor de *AARL* próximo ao valor desejado e um *SDARL* suficientemente pequeno, de acordo com o recomendado por Zhang *et al.* (2012) – o valor de *SDARL* deve ser até 10% do *ARL* em controle esperado. Entretanto, os autores descobriram que este desempenho não pode ser obtido com um número razoável de amostras na Fase I e o objetivo do estudo foi ampliado.

Os resultados foram obtidos para cinco estimadores diferentes do desvio-padrão e valores de m de 20 a 5.000, com um tamanho fixo de amostra de $n=5$ e $ARL_0=370$. Os resultados demonstram que a quantidade de dados necessária quando se utiliza o *SDARL* como métrica é muito maior do que quando se utiliza o *AARL* apenas, impraticável para a maioria dos usuários. Na visão dos autores, é muito difícil ou impossível obter um desempenho confiável ao se monitorar o processo com o gráfico de X e \bar{X} . Para agravar a situação, destacam que tem sido demonstrado por Jones *et al.* (2001, 2004) que os valores de *AARL* para os gráficos *CUSUM* e *EWMA* são ainda mais afetados pelo erro de estimação dos parâmetros que o da média.

Quanto à análise feita com relação aos estimadores, os resultados são coerentes com os trabalhos de Mahmoud *et al.* (2010), Derman e Ross (1995) e Del Castillo (1996) e muitos outros: recomendam o uso do estimador Sp (desvio-padrão combinado ou *pooled standard deviation*, em inglês) para um melhor desempenho no controle do processo.

Por último, Saleh et al. (2015) citam um procedimento alternativo para determinação dos limites de controle, proposto por Nedumaran e Pignatiello (2001) e Tsai *et al.* (2005), semelhante aos “*Self-Starting Charts*” [ver Hawkins (1987) e Quesenberry (2001)]. Tal procedimento consiste em construir os limites de controle com poucas amostras iniciais para monitorar um número fixo de amostras seguintes, que serão tomadas como dados históricos em controle (as que caírem dentro dos limites de controle) e utilizadas para estabelecer novos limites de controle para as próximas amostras. Este processo é repetido até se obter o tamanho de amostra pretendido ou mais. Os autores não recomendam a utilização desse método, uma vez que acreditam que a Fase I é um passo importante e necessário para conhecimento do comportamento do processo e, além disso, ao se utilizar este procedimento, é possível que dados fora de controle sejam inclusos no cálculo da estimativa dos parâmetros.

2.2.

Análise do Desempenho do Gráfico de S (ou S^2)

Nesta Seção, são apresentados alguns trabalhos já existentes sobre o desempenho dos gráficos de controle de *Shewhart* para monitoramento da dispersão do processo, quando os parâmetros são estimados, bem como as recomendações de alguns autores a respeito do tamanho e número de amostras necessários para se atingir determinado grau de eficiência sob a ótica de determinada medida de desempenho.

Hillier (1969) é considerado um dos trabalhos pioneiros mais relevantes no tema. O autor avalia o desempenho dos gráficos de \bar{X} e R quando seus limites são calculados com base em um pequeno número inicial de subgrupos, e propõe um método de determinação dos limites de controle para esses gráficos de forma a garantir para eles desempenho idêntico ao dos gráficos com limites baseados em parâmetros conhecidos, independentemente da quantidade de subgrupos utilizada.

O autor refere-se a resultados de trabalhos anteriores ao seu, que mostram que os limites convencionais “de três-sigma” levam (com número de amostras pequeno) a uma probabilidade de alarme falso com valor maior que o nominal (o valor que ela teria se os parâmetros fossem conhecidos). Comenta ainda que essas probabilidades, na *Fase I*, são ligeiramente maiores que na *Fase II*, uma vez que, argumenta ele, um valor inusitadamente alto ou baixo de \bar{X} ou de R “puxaria” $\bar{\bar{X}}$ ou \bar{R} em sua direção, reduzindo ligeiramente a probabilidade de erro do tipo I em relação ao valor dessa probabilidade na *Fase II*.

Motivado por essas considerações, ele analisa as distribuições de $\bar{\bar{X}}$ e de \bar{R} , parametrizadas pelo número de amostras m e pelo tamanho de amostras n , e mostra, a partir delas, quais devem ser os valores “corrigidos” ou “exatos” para os fatores A_2 , D_3 e D_4 , usados tradicionalmente no cálculo dos limites de controle para os gráficos. Ele fornece tabelas de A_2^{**} , D_3^{**} e D_4^{**} (fatores corrigidos) em função de m , para $n=5$, e para diversos valores da probabilidade de alarme falso especificada.

Dada a diferença entre as distribuições da probabilidade de alarme falso na *Fase I* e na *Fase II*, os fatores para uma fase são diferentes dos fatores para a

outra; ele fornece, assim, tabelas de valores para cada fase (denotando os valores para cálculo dos limites para a *Fase II* por A_2^* , D_3^* e D_4^*).

Afirmam que duas considerações são importantes na escolha do número de subgrupos inicial m : o grau de necessidade por controle imediato e o poder do gráfico de controle em detectar que o processo está fora de controle. Embora os fatores fornecidos garantam que α se mantenha no nível desejado com qualquer valor de m (os limites de controle devem ser confiáveis independentemente de quão pequeno seja m , e esse é o princípio da sua proposta de fatores corrigidos), valores muito pequenos de m reduzirão sensivelmente o poder dos gráficos, pelo “alargamento” dos limites de controle do gráfico de \bar{X} . Assim, caso se deseje iniciar cedo o controle do processo, é recomendável começar com um valor pequeno para m , calcular valores iniciais provisórios para os limites, e ir recalculando-os periodicamente, à medida que m aumenta.

Finalmente, embora os limites possam ser recalculados a cada nova amostra, isso pode não ser prático. Hillier (1969) recomenda que eles sejam atualizados periodicamente, com frequência, mas não necessariamente a cada amostra. Evidentemente, os ARL_0 's (ou seus inversos, os valores de α) obtidos pelo autor são valores médios (valores esperados de valores esperados, ponderados pela distribuição de probabilidades das estimativas de \bar{X} e \bar{R} ; ou ainda, os valores esperados das distribuições marginais dessas estimativas).

O trabalho apresentado por Yang & Hillier (1970) corresponde a uma versão do trabalho anterior de Hillier (1969) para os casos de gráficos de \bar{X} e S^2 e de gráficos de \bar{X} e S . O conteúdo, a metodologia, os resultados, conclusões, recomendações, são análogos.

Chen (1998) analisa em seu trabalho as propriedades da distribuição do RL para os gráficos de controle de R , S e S^2 , para o caso em que o desvio-padrão do processo é estimado. Ele obtém a função de distribuição marginal do RL integrando a densidade conjunta dos limites de controle e do RL ao longo dos valores dos limites de controle. A densidade conjunta, por sua vez, é obtida como o produto da densidade dos limites de controle pela densidade (discreta) condicional do RL (condicionada ao valor dos limites de controle). O autor obtém, a partir daí, os ARL 's e desvios-padrão dos RL 's, ou seja, obtém a média e o desvio-padrão da distribuição marginal dos RL 's. A análise foi feita para limites

de probabilidade que levassem a um ARL_0 marginal igual a 370 (que produz uma taxa de alarme falso de 0,0027).

Ele compara esses resultados com a distribuição do ARL quando o desvio-padrão é conhecido. É suposto que a variável de interesse segue uma distribuição normal e que as estimativas do desvio-padrão do processo utilizadas são $\hat{\sigma}_{\bar{R}} = \bar{R}/d_2$ para o gráfico de R ; $\hat{\sigma}_{\bar{S}} = \bar{S}/c_4$ para o gráfico de S ; e $\hat{\sigma}_{S_p} = S_p^2$ (média ponderada dos desvios padrão amostrais) para o gráfico de S^2 .

O autor define uma variável que corresponde à razão entre o desvio-padrão para o processo fora de controle e o desvio-padrão-alvo e analisa o número de amostras até que o primeiro sinal ocorra para o caso em que σ é conhecido e para o caso em que σ é estimado. Em seu estudo, o autor calcula as probabilidades de que o número de amostras até que o primeiro sinal ocorra seja menor do que determinado valor especificado e compara os resultados obtidos para cada caso, para diferentes valores de m , n . São encontrados resultados muito semelhantes para os gráficos de R , S e S^2 .

Para os três gráficos, quando razão entre o desvio-padrão para o processo fora de controle e o desvio-padrão-alvo é igual a um (processo sob controle), o ARL é menor quando o desvio-padrão é estimado, ou seja, o processo tende a gerar, em média, maior probabilidade de sinal (α) que na situação em que ele é conhecido. Quando a variabilidade do processo sofre uma alteração (razão entre o desvio-padrão para o processo fora de controle e o desvio-padrão-alvo diferente de um), o ARL é maior quando o desvio-padrão é estimado, sugerindo que mudanças na variabilidade não são detectadas rapidamente. O autor conclui, também, que o efeito da estimação de σ é maior quando a variabilidade aumenta e que, se a variabilidade diminui, em média, o efeito da estimação parece ter um efeito muito pequeno na probabilidade de sinal. O autor também acrescenta que o efeito da estimação de σ depende de m e n , que em geral, diminui à medida que m e n aumentam: com $4 \leq n \leq 10$, o efeito é quase inexistente para $m \geq 75$.

Chen (1998) recomenda que, para que se tenha um bom desempenho para detectar mudanças no desvio-padrão do processo, com tamanhos de amostras entre 4 e 10 ($4 \leq n \leq 10$), 75 amostras ($m = 75$) devem ser coletadas na *Fase I*.

Maravelakis *et al.* (2002) estudaram os efeitos da estimação dos parâmetros sobre o desempenho dos gráficos de S com limites de três sigma e com

limites de probabilidade, bem como sobre o desempenho do gráfico de observações individuais no monitoramento da dispersão do processo, estendendo os resultados de Chen (1998) para observações individuais e subgrupos racionais. Eles obtiveram as médias (ARL 's) e os desvios-padrão ($SDRL$'s) da distribuição marginal da RL , por simulação, usando o mesmo procedimento que Quesenberry (1993), com 10.000 repetições.

De maneira geral, os principais resultados para o gráfico de S foram: os valores de ARL e $SDRL$ variam na mesma direção, aumentando no caso de processo em controle e diminuindo no caso de processo fora de controle, com a ressalva que, quando m aumenta, o ARL se aproxima mais rapidamente do valor nominal que o $SDRL$. Os autores afirmam que, quando o processo está sob controle são necessárias pelo menos $m = 200$ amostras para garantir o bom desempenho do gráfico de controle. Além disso, com vistas ao desempenho do gráfico na situação do processo fora de controle, i.e., ao seu poder, destacam a importância de se especificar também um valor mínimo para n (há uma redução considerável nos valores do ARL à medida que n se torna maior). Recomenda-se utilizar $n \geq 20$. O efeito da estimação é severo para $m \leq 20$, especialmente quanto à detecção de pequenas mudanças na dispersão do processo, é moderado para $30 \leq m \leq 50$, e satisfatoriamente pouco acentuado para $m \geq 100$.

Para o gráfico de observações individuais (gráfico de X) para monitorar a dispersão do processo, os autores recomendam o valor mínimo de 300 observações para minimizar o efeito da estimação dos limites de controle do gráfico de X .

Os artigos aqui citados constituem alguns dos principais trabalhos sobre a questão do efeito da estimação dos parâmetros do processo (e, portanto, do número e tamanho das amostras iniciais) sobre o desempenho dos gráficos de *Shewhart* para monitoramento da média e do desvio-padrão (ou variância), por ser este o assunto desta tese. Há muitos outros trabalhos, aplicados a outros tipos de gráficos, sem falar em CEP de processos autocorrelacionados ou CEP multivariado. Ao leitor interessado em outros gráficos e no tema em geral, fica indicada a revisão, bastante abrangente, de Jensen *et al.* (2006) e Psarakis *et al.* (2013), que, além disso, fornece uma extensa lista de referências.

2.3.

Análise do Desempenho conjunto dos Gráficos de \bar{X} e S (ou S^2)

De acordo com McCracken e Chakraborti (2013), os esquemas de monitoramento conjunto do processo são úteis em situações nas quais causas especiais podem resultar em mudanças tanto na média quanto na variância do processo e eles podem ajudar a evitar uma elevada taxa de alarme falso quando da utilização desses gráficos individualmente. Entretanto, os autores afirmam que o desconhecimento a respeito dos parâmetros do processo (e consequentemente, a necessidade de se utilizar parâmetros estimados) traz mais complexidade ao esquema de monitoramento conjunto do que a situação onde se utiliza apenas um gráfico. Seja por esta ou por alguma outra razão, o efeito da estimação sobre o desempenho conjunto dos gráficos (para ambas as Fases I e II), não foi estudado ainda, apesar de ser uma das mais importantes questões relativas à Fase II (impacto da estimação dos parâmetros a partir dos dados de referência dos gráficos da Fase I). Ou seja, este tema merece ser aprofundado.

O que se pode verificar através da revisão feita nas seções 2.1 e 2.2 é que praticamente todos os estudos realizados sobre este tema até a publicação de Jensen *et al.* (2006) foram baseados na distribuição marginal do RL . Desde então, alguns trabalhos passaram a apresentar o estudo do desempenho dos gráficos a partir da distribuição condicional do RL , conforme foi verificado na revisão bibliográfica apresentada por Psarakis *et al.* (2013).

Em seu trabalho, Psarakis *et al.* (2013) também afirmaram que não foi realizado, nos trabalhos anteriores sobre o efeito da estimação dos parâmetros sobre o desempenho dos gráficos de controle, uma análise sobre o desempenho de gráficos quando utilizados em conjunto, com exceção dos gráficos *Shewhart-EWMA*. Adicionalmente, verifica-se, através de pesquisa bibliográfica sobre o tema em anos posteriores a 2013 [pesquisa de Psarakis *et al.* (2013)], que também não foram publicados trabalhos até o momento sobre o desempenho conjunto dos gráficos de \bar{X} e S (ou S^2). Esta é a motivação do presente trabalho, que tem como objetivo principal determinar a distribuição do risco α (e todas as análises possíveis a partir desta medida de desempenho) quando são utilizados simultaneamente os gráficos de \bar{X} e S para o monitoramento do processo, bem

como o número necessário de amostras iniciais m para limitar esse risco, analisando, inclusive, o desempenho para diferentes estimadores do desvio-padrão do processo.

3

Modelo Matemático para análise do desempenho conjunto dos Gráficos de \bar{X} e S

A análise do desempenho conjunto dos gráficos de \bar{X} e S é feita através da utilização de um modelo matemático, que será apresentado neste Capítulo (3), como função do erro (padronizado) de estimação da média e do fator de erro de estimação do desvio-padrão. A medida de desempenho considerada é a real taxa de alarme falso conjunto (obtida), $CFAR_J$ (*joint conditional attained false alarm rate*, em inglês), que é, como visto na seção anterior, uma variável aleatória (v.a.), que poderá ou não coincidir com a probabilidade nominal especificada, α_j . Neste trabalho, em contraste com os trabalhos descritos na Seção 2, não são utilizados *softwares* computacionais de simulação para obtenção das amostras e consequentemente, do valor da medida de desempenho.

3.1.

Definições Iniciais

Assume-se que há uma amostra de referência consistindo de m subgrupos independentes de tamanho n , totalizando, portanto, mn observações extraídas do processo que se acredita estar em controle, graças a uma criteriosa análise de *Fase I*. Aqui se supõe que essas observações seguem uma distribuição normal com média μ_0 e desvio-padrão σ_0 desconhecidos. Além disso, assume-se que na *Fase II* (de monitoramento prospectivo do processo), os subgrupos são do mesmo tamanho (n) que os subgrupos da amostra de referência.

Se o processo estiver sob controle, existirá um risco de erro do Tipo I ou $CFAR_J$ de um valor de \bar{X} ou S cair fora dos limites de controle do respectivo gráfico, sinalizando indevidamente um estado de fora de controle.

Parte-se do pressuposto de que a probabilidade de alarme falso obtida para o gráfico com parâmetros estimados $CFAR$ é distinta da probabilidade de alarme falso nominal α (obtida quando não há erro de estimação). Desta forma, a

probabilidade de alarme falso conjunta, $CFAR_J$, para os gráficos de \bar{X} e S quando os parâmetros são estimados será:

$$(1 - CFAR_J) = (1 - CFAR_{\bar{X}})(1 - CFAR_S) \quad (3.1.1)$$

Denote-se os estimadores de μ_0 e σ_0 calculados a partir da amostra de referência (*Fase I*) por $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\sigma}_0$, respectivamente. Além disso, defina-se o erro padronizado de estimação da média como

$$V = \frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{\sigma_0} \quad (3.1.2)$$

E o fator de erro de estimação do desvio-padrão como

$$W = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} \quad (3.1.3)$$

Note que esta formulação é geral, independente dos estimadores utilizados. Para o desvio-padrão, a escolha do estimador continua sendo um tema de interesse - veja, por exemplo, Mahmoud *et al.* (2010) e Schoonhoven *et al.* (2011). Já para a média, há um consenso em torno do estimador $\bar{\bar{X}}$. Como apresentado anteriormente, neste trabalho são utilizados os gráficos de S e S^2 , que são baseados no desvio-padrão amostral e na variância amostral, respectivamente. Note que, dado que são considerados limites de probabilidade, esses dois gráficos são equivalentes. De fato, uma vez que $P(S > s) = P(S^2 > s^2)$, o limite de probabilidade de alarme falso (α) do gráfico de S é igual à raiz quadrada do limite de probabilidade α do gráfico de S^2 .

Uma vez calculados os estimadores da média $\hat{\mu}_0$ e do desvio padrão $\hat{\sigma}_0$, os limites de controle de probabilidade superior e inferior (UCL e LCL) para os gráficos de \bar{X} e o limite superior (UCL) para o gráfico de S^2 a serem utilizados na *Fase II*, para uma taxa de alarme falso especificada (ou nominal) α (ver Montgomery, 2013) serão calculados através das expressões abaixo

$$UCL_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_0 / \sqrt{n} \quad (3.1.4)$$

$$LCL_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_0 / \sqrt{n} \quad (3.1.5)$$

$$UCL_{S^2} = \frac{\chi^2_{n-1, \alpha} \hat{\sigma}_0^2}{n-1} \quad (3.1.6)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o quantil de $(1 - \alpha/2)$ da distribuição normal padrão e $\chi^2_{n-1, \alpha}$ denota o quantil de $(1 - \alpha)$ da distribuição de uma variável qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade.

As equações (3.1.4) e (3.1.5) acima são aplicáveis somente ao caso onde o gráfico de \bar{X} está centrado no valor $\bar{\bar{X}}$. No caso em que o gráfico de \bar{X} está centrado no valor-alvo μ_0 , $\hat{\mu}_0$ nessas equações deve ser substituído por μ_0 .

Serão discutidas, agora, algumas propriedades referentes à construção dos gráficos de \bar{X} e de S^2 na *Fase II*.

3.1.1.

Probabilidade de alarme falso do Gráfico de \bar{X}

Pelo Teorema do Limite Central, para uma grande variedade de distribuições de X , a distribuição de \bar{X} tenderá a uma distribuição normal, com média $\mu_{\bar{X}}$ igual à média de X e desvio-padrão $\sigma_{\bar{X}}$ igual ao desvio-padrão de X dividido pela raiz quadrada do tamanho de amostra n . Portanto, com o processo em controle $\mu_{\bar{X}} = \mu_0$ e $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_0 / \sqrt{n}$.

Definindo a variável aleatória Z como $Z = (\bar{X} - \mu_{\bar{X}}) / \sigma_{\bar{X}}$, esta terá distribuição normal padrão com média $\mu_{\bar{X}} = 0$ e desvio-padrão $\sigma_{\bar{X}} = 1$. Quando o processo está sob controle, $\mu_{\bar{X}} = \mu_0$ e $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_0 / \sqrt{n}$ e $Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$.

Por definição, a probabilidade de alarme falso para o gráfico de \bar{X} na *Fase II* com parâmetros estimados é dada por

$$CFAR_{\bar{X}} = P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) + P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) \quad (3.1.7)$$

3.1.1.1

Caso do Gráfico de \bar{X} centrado no valor-alvo

A expressão analítica da probabilidade em (3.1.7) difere conforme o gráfico de \bar{X} esteja centrado em $\bar{\bar{X}}$ ou μ_0 . Centrar o gráfico no valor alvo corresponde a, implicitamente, assumir que o valor alvo é a média do processo em controle, ou, equivalentemente, definir que o processo é considerado fora de controle quando a sua média não coincide com o valor alvo. Em termos de modelo matemático, isso equivale a dizer que a média em controle do processo é conhecida. Na verdade ela é definida. Basta chamar o valor alvo de μ_0 . Neste

caso não há erro de estimação de μ_0 por definição e a probabilidade de alarme falso do gráfico de \bar{X} será calculada como:

$$P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) = P(Z < \frac{LCL_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}) = \Phi \left[\frac{(\mu_0 - z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_0 / \sqrt{n}) - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right] = \Phi \left[- \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} z_{\alpha/2} \right] = \Phi[-wz_{\alpha/2}]$$

$$P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) = P(Z > \frac{UCL_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}) = 1 - \Phi \left[\frac{(\mu_0 + z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_0 / \sqrt{n}) - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right] = 1 - \Phi \left[\frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} z_{\alpha/2} \right] = 1 - \Phi[wz_{\alpha/2}]$$

$$CFAR_{\bar{X}} = P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) + P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) = 1 - \Phi[wz_{\alpha/2}] + \Phi[-wz_{\alpha/2}] \quad (3.1.8)$$

Como $1 - \Phi[wz_{\alpha/2}] = \Phi[-wz_{\alpha/2}]$, $CFAR_{\bar{X}}$ pode ser reescrita como

$$CFAR_{\bar{X}} = P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) + P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) = 2[1 - \Phi(wz_{\alpha/2})] \quad (3.1.9)$$

Como é possível observar em (3.1.9), a probabilidade de alarme falso do gráfico de \bar{X} é função monotonicamente decrescente do erro de estimação do desvio padrão, W .

3.1.1.2

Caso do Gráfico de \bar{X} centrado em $\bar{\bar{X}}$

Quando a linha central do gráfico não está no valor alvo, mas sim no valor estimado da média, $\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$, a probabilidade de alarme falso do gráfico de \bar{X} será função do erro de estimação do desvio padrão W e dependerá também, do erro padronizado de estimação da média, V .

$$CFAR_{\bar{X}} = P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) + P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}})$$

$$P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) = P\left(Z < \frac{LCL_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = \Phi\left[\frac{(\hat{\mu}_0 - z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}) - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right]$$

$$P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) = \Phi\left[\frac{(\hat{\mu}_0 - \mu_0)}{\sigma_0}\sqrt{n} - \frac{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}}{\sigma_0/\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right] = \Phi[v\sqrt{n} - wz_{\alpha/2}]$$

$$P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) = P\left(Z > \frac{UCL_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = 1 - \Phi\left[\frac{(\hat{\mu}_0 + z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}) - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right]$$

$$P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) = \Phi\left[\frac{(\hat{\mu}_0 - \mu_0)}{\sigma_0}\sqrt{n} + \frac{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}}{\sigma_0/\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right] = 1 - \Phi[v\sqrt{n} + wz_{\alpha/2}]$$

$$CFAR_{\bar{X}} = P(\bar{X} > UCL_{\bar{X}}) + P(\bar{X} < LCL_{\bar{X}}) \quad (3.1.10)$$

$$CFAR_{\bar{X}} = 1 - \Phi[v\sqrt{n} + wz_{\alpha/2}] + \Phi[v\sqrt{n} - wz_{\alpha/2}]$$

$$\text{ou } 1 - CFAR_{\bar{X}} = \Phi[v\sqrt{n} + wz_{\alpha/2}] - \Phi[v\sqrt{n} - wz_{\alpha/2}] \quad (3.1.11)$$

É possível verificar que a probabilidade de alarme falso do gráfico de \bar{X} neste caso é função de W e V e sua distribuição é função da distribuição conjunta de (W, V) . A densidade de probabilidade conjunta de W e V é o produto das densidades de W e V , pois W e V são independentes.

3.1.2.

Probabilidade de alarme falso do Gráfico de S

Os limites de controle para os gráficos de S devem ser baseados na distribuição da estatística S . Supondo que a variável a ser monitorada siga uma

distribuição normal com média μ e variância σ^2 , a variância amostral S^2 é um estimador não-viesado para σ^2 . Entretanto, o mesmo não pode ser dito a respeito do desvio-padrão amostral S . De fato, é sabido que:

$$\mu_S = E(S) = c_4 \sigma \quad (3.1.12)$$

onde c_4 é uma constante tabelada, determinada a partir do tamanho de amostra n e dado por:

$$c_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (3.1.13)$$

onde Γ é a função gama.

O desvio-padrão do estimador S é dado por:

$$\sigma_S = \sqrt{\text{Var}(S)} = \sqrt{\sigma^2 - c_4^2 \sigma^2} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2} \quad (3.1.14)$$

Para a dedução da forma da distribuição de S , de seus parâmetros e da expressão para c_4 , ver, por exemplo, Hald (1952). Tabelas dos valores de c_4 costumam ser encontradas em livros de Controle Estatístico da Qualidade, como Montgomery (2013) ou Costa *et al.* (2005).

De maneira geral, quando se monitora a dispersão do processo deseja-se detectar rapidamente aumentos na dispersão do mesmo. Nessa situação, utiliza-se um gráfico de controle unilateral (para detectar mudanças somente em uma direção) para a dispersão do processo, em que se observa se as estatísticas plotadas não excedem um limite superior de controle calculado.

No caso de limite de probabilidade (isto é, que garanta uma probabilidade de alarme falso nominal especificada α), deseja-se um UCL tal que, com o processo em controle, $P(S < UCL) = 1 - \alpha_s$. A probabilidade $P(S < UCL)$ pode ser determinada a partir da probabilidade $P[S^2 < (UCL)^2]$, uma vez que é sabido que $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade [ver, por exemplo, Costa et al. (2005)]. Portanto, o valor de UCL que, se o processo tiver desvio-padrão igual a σ_0 , é ultrapassado com probabilidade α é o valor que satisfaz à seguinte relação:

$$\chi_{n-1,\alpha}^2 = \frac{(n-1)UCL_s^2}{\sigma_0^2} \quad (3.1.15)$$

onde $\chi_{n-1,\alpha}^2$ é o quantil de $(1-\alpha)$ da variável qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade. Substituindo em (3.1.6), obtém-se:

$$UCL_s = \sqrt{\frac{\chi_{n-1,\alpha}^2 \hat{\sigma}_0^2}{(n-1)}} \quad (3.1.16)$$

Note que a expressão (3.1.16) acima se aplica ao gráfico de controle unilateral de S , sem LCL . Este é o tipo de gráfico que será considerado neste trabalho, partindo da suposição que o interesse é detectar eventuais aumentos na dispersão do processo.

Conforme apresentado em Epprecht *et al.* (2015) sobre o desempenho dos gráficos de S e S^2 , a taxa de alarme-falso para o gráfico unilateral superior de S^2 na Fase II com parâmetros estimados é igual a

$$P(S^2 > UCL) = P\left(S^2 > \frac{\chi_{n-1,\alpha}^2 \hat{\sigma}_0^2}{n-1}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{n-1,\alpha}^2 \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)$$

$$P(S^2 > UCL) = P\left(S^2 > \frac{\chi_{n-1,\alpha}^2 \hat{\sigma}_0^2}{n-1}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > w^2 \chi_{n-1,\alpha}^2\right) \quad (3.1.17)$$

onde $(n-1)S^2/\sigma^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade. Assim, a equação acima se torna:

$$CFAR_s = P(\chi_{n-1}^2 > w^2 \chi_{n-1,\alpha}^2) \text{ ou } 1 - CFAR_s = P(\chi_{n-1}^2 \leq w^2 \chi_{n-1,\alpha}^2) \quad (3.1.18)$$

A equação (3.1.18) mostra que $CFAR_s$ é

$$P(CFAR_s > b) = P(W \leq w) \quad (3.1.19)$$

onde b é o quantil de p da distribuição de probabilidade de $CFAR$ e w é o quantil de $(1 - p)$ da distribuição de probabilidade de W . Note que a distribuição de W dependerá do estimador do desvio-padrão utilizado na Fase I. Neste trabalho, b é definido como o valor máximo tolerado para a $CFAR$, ou ainda, limite de previsão.

Para a estimação do desvio-padrão a partir de uma amostra de referência de m subgrupos de tamanho n , há vários estimadores disponíveis. Neste trabalho, não são considerados os estimadores baseados na amplitude amostral, uma vez que Mahmoud *et al.* (2010) recomendam não utilizar, conforme dito

anteriormente. Serão considerados os estimadores \bar{S}/c_4 , o estimador tradicional para o desvio-padrão quando se usa o gráfico de S , e o estimador S_p (desvio-padrão combinado ou *pooled standard deviation*, em inglês), recomendado por Mahmoud *et al.* (2010) como preferível ao primeiro por possuir menor erro quadrático médio.

Para o estimador \bar{S}/c_4 , \bar{S} é dado por:

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \quad (3.1.20)$$

E o estimador S_p é dado por

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m (n_i - 1)}} \quad (3.1.21)$$

onde n_i , S_i e S_i^2 são respectivamente ao tamanho, desvio-padrão e variância da i -ésima amostra da Fase I.

Pelo Teorema do Limite Central e pelas expressões da média (3.1.12) e do desvio-padrão de S (3.1.14), se o número de amostras m for suficientemente grande e as amostras tiverem sido retiradas de um processo em controle ($\sigma = \sigma_0$),

a distribuição de $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_j$ será bem aproximada por uma

$N\left(c_4\sigma_0; \frac{(1-c_4^2)\sigma_0^2}{m}\right)$ e as seguintes distribuições para $\hat{\sigma}_0$ e W se tornam válidas

para o estimador não-viesado do desvio-padrão, \bar{S}/c_4 :

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{S}}{c_4} \sim N\left[\sigma_0; \frac{(1-c_4^2)\sigma_0^2}{c_4^2 m}\right] \quad (3.1.22)$$

$$W = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} \sim N\left(1; \frac{(1-c_4^2)}{c_4^2 m}\right) \quad (3.1.23)$$

Assim, usando a distribuição normal acumulada com os parâmetros dados em (3.1.23), é possível definir a variável aleatória Z_l , tal que $Z_l = (W - 1)\sqrt{\frac{c_4^2 m}{(1-c_4^2)}}$ e $w = 1 + z_l\sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}}$. A partir de Z_l , é possível determinar a densidade de probabilidade acumulada de W , $F(W) = P(W \leq w)$, parametrizada por n e m , e daí, por (3.1.18) e (3.1.19) pode-se obter a distribuição acumulada de $CFAR_S$.

Quando se utiliza o estimador do desvio-padrão S_p e o processo está sob controle, conforme apresentado em (3.1.15), é conhecido que $Y = \frac{m(n-1)S_p^2}{\sigma_0^2}$, $0 < Y < \infty$, é uma variável aleatória que segue uma distribuição qui-quadrado com $m(n-1)$ graus de liberdade. Substituindo $\frac{S_p^2}{\sigma_0^2}$ por W^2 em (3.1.18), podemos escrever W em função de Y como segue

$$Y = \frac{m(n-1)S_p^2}{\sigma_0^2} = m(n-1)W^2 \Leftrightarrow W = \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \quad (3.1.24)$$

Substituindo W na equação (3.1.18) obtemos a expressão da $CFAR_S$ quando o estimador do desvio-padrão utilizado é o S_p :

$$CFAR_S = P(\chi_{n-1}^2 > w^2 x_{n-1,\alpha}^2) = P\left(\chi_{n-1}^2 > \frac{y}{m(n-1)} x_{n-1,\alpha}^2\right) \quad (3.1.25)$$

3.2.

Probabilidade de alarme falso no uso conjunto dos Gráficos de \bar{X} e S

Admitindo-se o uso conjunto dos gráficos de \bar{X} e S (ou S^2) e que os parâmetros utilizados na construção desses gráficos sejam estimados; e utilizando-se as equações (3.1.9), (3.1.10), (3.1.18) e (3.1.25) é possível obter a probabilidade conjunta de alarme falso dos gráficos de \bar{X} e S , $CFAR_j$, de tal forma que a equação (3.1.1) se torna, conforme cada caso apresentado na Seção 3.1:

Caso KU – Média conhecida (“*Known*”) e Desvio-Padrão Desconhecido (“*Unknown*”):

- Estimador do desvio-padrão: \bar{S}/c_4

$$CFAR_j = 1 - \left\{ \frac{\left[\Phi \left(- \left(1 + z_1 \sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}} \right) z_{\alpha/2} \right) - \Phi \left(\left(1 + z_1 \sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}} \right) z_{\alpha/2} \right) \right]}{\left[P \left(\chi_{n-1, \alpha}^2 \leq \left(1 + z_1 \sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}} \right)^2 x_{n-1, \alpha}^2 \right) \right]} \right\} \quad (3.2.1)$$

- Estimador do desvio-padrão: S_p

$$CFAR_j = 1 - \left\{ \frac{\left[\Phi \left(- \sqrt{\frac{y}{m(n-1)}} z_{\alpha/2} \right) - \Phi \left(\sqrt{\frac{y}{m(n-1)}} z_{\alpha/2} \right) \right]}{\left[P \left(\chi_{n-1, \alpha}^2 \leq \frac{y}{m(n-1)} x_{n-1, \alpha}^2 \right) \right]} \right\} \quad (3.2.2)$$

Caso UU – Média desconhecida (“*Unknown*”) e Desvio-Padrão Desconhecido (“*Unknown*”):

- Estimador do desvio-padrão \bar{S}/c_4

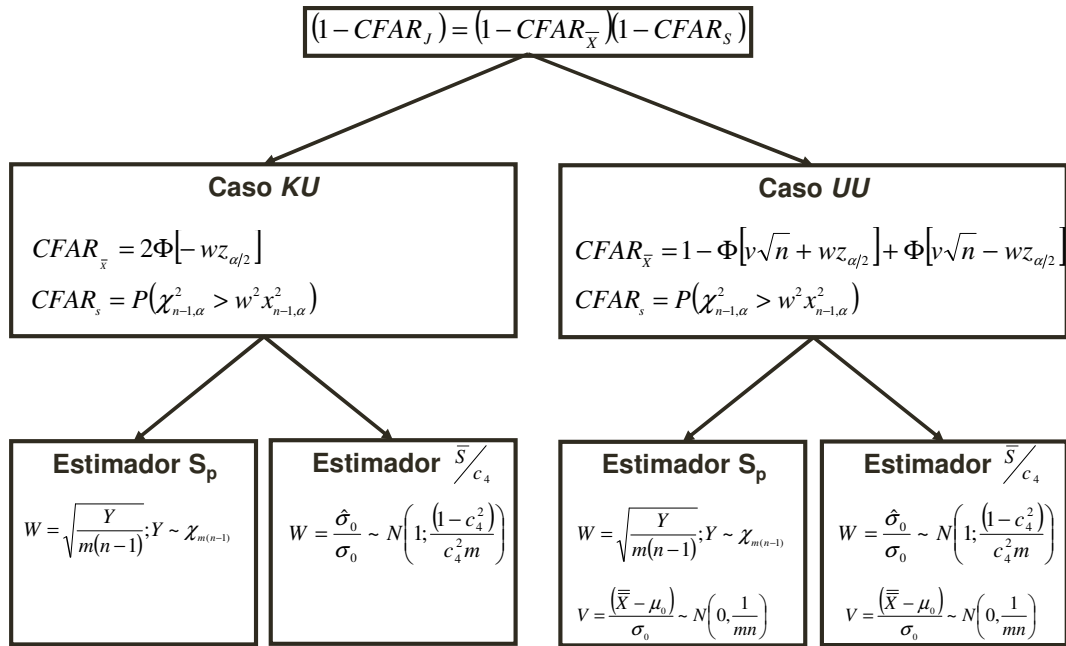
$$CFAR_J = 1 - \left[\Phi \left(v\sqrt{n} + \left(1 + z_1 \sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}} \right) z_{\alpha/2} \right) - \Phi \left(v\sqrt{n} - \left(1 + z_1 \sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}} \right) z_{\alpha/2} \right) \right] \cdot \left[P \left(\chi_{n-1, \alpha}^2 \leq \left(1 + z_1 \sqrt{\frac{1-c_4^2}{c_4^2 m}} \right)^2 x_{n-1, \alpha}^2 \right) \right] \quad (3.2.3)$$

- Estimador do desvio-padrão Sp

$$CFAR_J = 1 - \left[\Phi \left(v\sqrt{n} + \sqrt{\frac{y}{m(n-1)}} z_{\alpha/2} \right) - \Phi \left(v\sqrt{n} - \sqrt{\frac{y}{m(n-1)}} z_{\alpha/2} \right) \right] \cdot \left[P \left(\chi_{n-1, \alpha}^2 \leq \frac{y}{m(n-1)} x_{n-1, \alpha}^2 \right) \right] \quad (3.2.4)$$

Assim, por exemplo, a partir da distribuição de probabilidade acumulada de W (que difere para cada estimador do desvio-padrão e ainda varia de acordo com o número de amostras m e o tamanho de amostra n), é possível determinar o valor da $CFAR_J$ que é excedido com probabilidade p , informando nas equações acima o valor w (quantil da distribuição de W) tal que $P(W \leq w) = 1 - p$. Esta é apenas uma das análises para a probabilidade conjunta de alarme falso que pode ser feita a partir deste modelo matemático. No Caso UU , entretanto, o cálculo da $CFAR_J$ se torna mais complexa pelo fato de $CFAR_J$ ser função também do erro de estimação da média, V ; ou seja, $CFAR_J$ é função de duas variáveis aleatórias, (W e V) em vez de apenas função de W .

O esquema gráfico abaixo resume as equações utilizadas em cada caso (KU e UU), que serão apresentadas em detalhe no próximo capítulo.



4 Metodologia de Análise, Resultados e Discussão

Neste Capítulo é mostrado como o modelo matemático apresentado no Capítulo 3 foi utilizado para se verificar o efeito da estimação da média e do desvio-padrão sobre o risco α conjunto dos gráficos de \bar{X} e S , de acordo com 3 análises:

- i. Análise 1: Determinação da distribuição acumulada complementar do risco α , $P(CFAR_J > b)$, parametrizada por n e m ;
- ii. Análise 2: Determinação dos quantis de probabilidade $(1-p)$ da $CFAR_J$ em função de n e m , que correspondem, em termos práticos, a limites superiores de previsão que possuem um risco pequeno p de serem excedidos;
- iii. Análise 3: Determinação do m mínimo, que garante com uma probabilidade $(1 - p)$ especificada que a $CFAR_J$ não é superior a um valor \mathcal{E} maior que o risco α nominal (\mathcal{E} também especificado). Este m mínimo varia conforme o tamanho de amostra n e o risco α nominal considerado para o estabelecimento dos limites de controle para os gráficos.

Para melhor ilustrar os resultados e proporcionar melhor entendimento, são utilizados gráficos e tabelas (Apêndices) para cada cenário de análise proposto. É relevante dizer que as diferentes formas de apresentação dos resultados são correspondentes entre si e diferem somente pelos *inputs* definidos previamente pelo usuário para obtenção dos *outputs* correspondentes, em cada análise. Especificamente, o modelo é da distribuição acumulada da $CFAR_J$, em função de

W (e também de V), quando o gráfico estiver centrado em μ_0 ou $\bar{\bar{X}}$, parametrizada por m e n . As diferentes análises correspondem a diferentes “vistas” dessa distribuição. O que varia é o que aparece como dado, ou parâmetro, e o que é resposta. Pode-se “entrar” com n e m e obter a função densidade de probabilidade acumulada, *c.d.f.*, da $CFAR_J$; pode-se obter quantis dessa distribuição (limites superiores de previsão para a $CFAR_J$) em função de n e m ; e pode-se perguntar qual é o menor m que garante que, com uma probabilidade alta pré-especificada, $CFAR_J$ não excede um valor máximo tolerado.

Conforme dito na Seção 3.2, apresentamos neste trabalho quatro modelos distintos para o cálculo da $CFAR_J$, de acordo com a linha central do Gráfico da Média e do estimador utilizado para o desvio-padrão. Para facilitar o entendimento de cada uma das três análises acima citadas, no Capítulo 4, ao final de cada Seção, são apresentados comentários sobre os resultados obtidos caso-a-caso (quatro casos).

4.1.

Análise 1: Determinação da distribuição acumulada complementar da $CFAR_J$, $P(CFAR_J > b)$, parametrizada por n e m

Os resultados dessa primeira análise estão apresentados na forma de tabelas e gráficos nos Apêndice A e B para os casos KU (média conhecida e desvio-padrão desconhecido) e UU (média e desvio-padrão desconhecidos), para os dois estimadores de σ , \bar{S}/c_4 e S_p . Para cada tamanho de amostra n , são fornecidas as curvas $[P(CFAR_J > b) \text{ versus } b]$ para cada número de amostras m . Os valores de tamanho de amostra utilizados são $n = 5, 10, 20$ e 25 ; e para o número de amostras, $m = 25, 50, 100, 300$ e 1.000 . Os valores “nominais” do risco α_j ($w = 1$) são de $0,0054$ e $0,10$.

4.1.1.

Gráfico da Média centrado no valor alvo – Caso KU

Foi visto na Seção 3.2 que a $CFAR_J$ quando o gráfico da média está centrado no valor alvo é calculada através da equação (3.2.1) para o estimador do desvio-padrão, \bar{S}/c_4 ; e através da equação (3.2.2), quando se utiliza o estimador do desvio-padrão, S_p . Tais equações mostram que a $CFAR_J$ varia conforme o tamanho das amostras n , o número de amostras m e o valor do fator de erro na estimação de σ_0 , W . Portanto, $CFAR_J$ pode ser analisada em termos da distribuição de probabilidade acumulada de W , em cada caso. A distribuição de W , por sua vez, é função de n e de m (número de amostras iniciais), como já foi visto na Seção 3. Em outras palavras, a $CFAR_J$ é uma variável aleatória que é função (monotonicamente decrescente) da variável aleatória W . Na presente Seção, mostra-se o procedimento para obtenção do complemento da densidade de probabilidade acumulada da $CFAR_J$, parametrizado por n e m .

Denotando-se por $F_{CFAR_J}(b)$ a *c.d.f.* de $CFAR_J$, que fornece a probabilidade de $CFAR_J$ ser menor ou igual a esse valor b , $P(CFAR_J \leq b)$, $F_{CFAR_J}(b)$, pode ser obtida através da seguinte relação:

$$F_{CFAR_J}(b) = P(CFAR_J \leq b) = P(W > w_b) = 1 - F_W = 1 - P(W \leq w_b) \quad (4.1.1)$$

onde w_b é o valor de W que, substituído em (3.2.1) resulta em um valor para $CFAR_J$ igual a b . A probabilidade de se obter valores superiores ao limites de previsão b , $P(CFAR_J > b)$ ou $1 - F_{CFAR_J}(b)$, pode então ser determinada por:

$$1 - F_{CFAR_J}(b) = P(W \leq w_b) = F_W(w_b) \quad (4.1.2)$$

Como visto na seção 3.1, quando o desvio-padrão do processo é estimado por \bar{S}/c_4 , $F_W(w_b)$ ou $P(W \leq w_b)$ é bem aproximada por uma função de distribuição normal, com média igual a um e variância que é função de m e n (pois c_4 é função de n). Quando se utiliza o estimador S_p , W segue uma distribuição qui-quadrado com $m(n-1)$ graus de liberdade. Sabendo que $Y = m(n-1)W^2 \sim \chi^2_{m(n-1)}$, pode-se levantar a curva de F_{CFAR_J} por pontos, variando W a pequenos incrementos, calculando o respectivo valor Y e calculando F_{CFAR_J} por (4.1.2).

Assim, pela equação (3.2.1) e (3.2.2) é possível calcular o valor b da correspondente $CFAR_J$ em cada caso (para diferentes estimadores). Os pares $(b, F_W(w_b))$ correspondem a pontos da função $1 - F_{CFAR_J}(b)$, isto é, $[b, P(CFAR_J > b)]$.

Observa-se a partir das figuras e tabelas dos Apêndices A (Caso *KU*) e B (Caso *UU*), que para um mesmo par (n, m) , as probabilidades de $CFAR_J$ exceder um valor b diminui na medida em que b aumenta. Em cada tabela, a primeira linha de cada bloco de probabilidades (um bloco para cada n) contém probabilidades de $CFAR_J$ exceder b aproximadamente iguais a 0,50 para qualquer número de amostras m , pois corresponde ao valor de $CFAR_J$ para $w = 1$ ($CFAR_J = \alpha_j$).

Para um dado n , quando m aumenta, a probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para qualquer valor dado de $b > \alpha_j$, torna-se significativamente menor,

podendo-se concluir que para se ter um alto grau de confiança de que a $CFAR_J$ se manterá próxima ao valor especificado b (probabilidade de exceder baixa) é necessário um número de amostras m muito grande. Por exemplo, pode-se verificar através da Tabela 1 abaixo, que para $n = 5$ e $\alpha_j = 0,010$, a probabilidade de $CFAR_J$ exceder 0,022 (ou $ARL_0 < 45$) - ou seja, aproximadamente o dobro do valor nominal $\alpha_j = 0,010$ - para $m = 25$, é de aproximadamente 15,22%; para $m = 50$, de 6,86%; para $m = 100$, de 1,68%; e 0% para $m \geq 300$.

Tabela 1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_j = 0,010$ e estimador S_p , Caso KU

$P(CFAR_J > b), \alpha_j = 0,010$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0100	0,5188	0,5133	0,5094	0,5054	0,5030	10	0,0100	0,5125	0,5089	0,5063	0,5036	0,5020
	0,0131	0,3792	0,3197	0,2462	0,1119	0,0126		0,0138	0,3082	0,2324	0,1470	0,0332	0,0004
	0,0170	0,2528	0,1648	0,0804	0,0070	0,0000		0,0190	0,1496	0,0680	0,0168	0,0001	0,0000
	0,0221	0,1522	0,0686	0,0168	0,0001	0,0000		0,0261	0,0570	0,0120	0,0007	0,0000	0,0000
	0,0284	0,0820	0,0227	0,0022	0,0000	0,0000		0,0355	0,0167	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0364	0,0392	0,0058	0,0002	0,0000	0,0000		0,0480	0,0037	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0462	0,0165	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000		0,0643	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0583	0,0061	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000		0,0849	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0730	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1108	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0907	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	25	0,1426	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0100	0,5086	0,5061	0,5043	0,5025	0,5014		0,0100	0,5077	0,5054	0,5038	0,5022	0,5012
	0,0149	0,2260	0,1403	0,0622	0,0037	0,0000		0,0153	0,1976	0,1119	0,0418	0,0013	0,0000
	0,0222	0,0627	0,0145	0,0010	0,0000	0,0000		0,0237	0,0420	0,0070	0,0002	0,0000	0,0000
	0,0332	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000		0,0366	0,0045	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0490	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0558	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0712	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0832	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1211	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1411	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1710	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
25	0,1914	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,2337	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,2526	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,3089	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Resultados semelhantes de $CFAR_J$ são encontrados para o estimador \bar{S}/c_4 ,

sempre um pouco menor para o valor correspondente b , com diferença entre os resultados dos estimadores reduzida na medida em que m aumenta. Isto ocorre em função de S_p ser melhor estimador que \bar{S}/c_4 em termos do erro quadrático

médio. Para o mesmo exemplo apresentado para o estimador \bar{S}/c_4 , pode-se

verificar através da Tabela 2, que para $n = 5$, a probabilidade de $CFAR_J$ ser maior que 0,022 quando $m = 25$, é de aproximadamente 12,89%; para $m = 50$, de 7,20%; para $m = 100$, de 1,94%; e 0% para $m \geq 300$ também. Para ambos os estimadores, também são apresentados resultados para $\alpha_j = 0,0054$, que corresponde a probabilidades de alarme individuais de 0,0027 para cada gráfico.

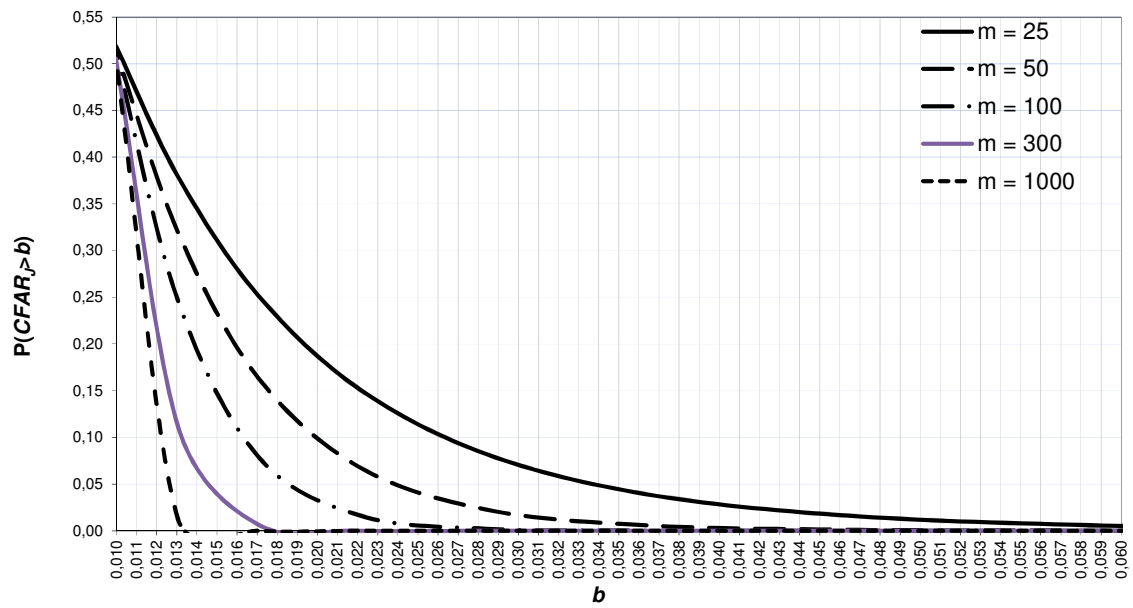
Tabela 2 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_j = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU

$P(CFAR_J > b)$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	10	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	0,0131	0,3530	0,3131	0,2455	0,1165	0,0147		0,0138	0,3003	0,2295	0,1475	0,0349	0,0005
	0,0170	0,2253	0,1650	0,0842	0,0085	0,0000		0,0190	0,1475	0,0693	0,0181	0,0001	0,0000
	0,0221	0,1289	0,0720	0,0194	0,0002	0,0000		0,0261	0,0581	0,0132	0,0008	0,0000	0,0000
	0,0284	0,0657	0,0257	0,0029	0,0000	0,0000		0,0355	0,0181	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0364	0,0296	0,0074	0,0003	0,0000	0,0000		0,0480	0,0044	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0462	0,0118	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000		0,0643	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0583	0,0041	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000		0,0849	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0730	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1108	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0907	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1426	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	25	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	0,0149	0,2219	0,1394	0,0628	0,0040	0,0000		0,0118	0,3652	0,3130	0,2453	0,1163	0,0146
	0,0222	0,0628	0,0152	0,0011	0,0000	0,0000		0,0140	0,2453	0,1648	0,0840	0,0085	0,0000
	0,0332	0,0108	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000		0,0167	0,1506	0,0718	0,0193	0,0002	0,0000
	0,0490	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0199	0,0840	0,0256	0,0029	0,0000	0,0000
	0,0712	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0237	0,0424	0,0074	0,0003	0,0000	0,0000
	0,1014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0282	0,0193	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1411	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0336	0,0079	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1914	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0399	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,2526	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0472	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Para um dado m , à medida que n aumenta, é possível obter probabilidades de $CFAR_J$ exceder um valor b menores para um dado valor b . Por exemplo, observando-se a Tabela 1 anteriormente apresentada, para a mesma probabilidade $CFAR_J = b = 0,02$ (aproximadamente, com arredondamento de uma casa decimal, pois os valores de b para cada n não são exatamente os mesmos), e $m = 25$, tem-se $P(CFAR_J > 0,2) = 15,22\%$ quando $n = 5$; $P(CFAR_J > 0,2) = 14,96\%$ para $n = 10$; $P(CFAR_J > 0,2) = 6,27\%$ para $n = 20$ e $P(CFAR_J > 0,2) = 4,2\%$ para $n = 25$.

Os resultados da Análise 1 mostram que, com 25 amostras iniciais (m) de tamanho $n = 5$, números usualmente recomendados na literatura tradicional de CEP, há grande probabilidade de $CFAR_J$ ser consideravelmente maior que o valor nominal α_j . Por exemplo, no caso em que a média é conhecida e o estimador de σ é o S_p , para $\alpha_j = 0,010$ (ver Figura 1 abaixo), há cerca de 18% de probabilidade de que $CFAR_J$ seja superior ao dobro deste valor [$P(\alpha > 0,02)$ na curva para $m = 25$]. Para que $P(CFAR_J > 0,01)$ seja de apenas 10%, são necessárias mais de 1.000 amostras iniciais - não há, dentre as curvas apresentadas (sendo a curva correspondente ao maior valor de m , $m=1.000$), curva que passe pelo ponto [$\alpha = 0,010$; $P(\alpha > 0,01)$]. Estes resultados confirmam achados precedentes na literatura, de que o número de amostras iniciais necessário para manter α dentro dos limites razoáveis com elevado grau de certeza é significativamente maior que os números mínimos tradicionalmente recomendados.

$$P(CFAR_J > b); n = 5; \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b); n = 10; \alpha_J = 0,010$$

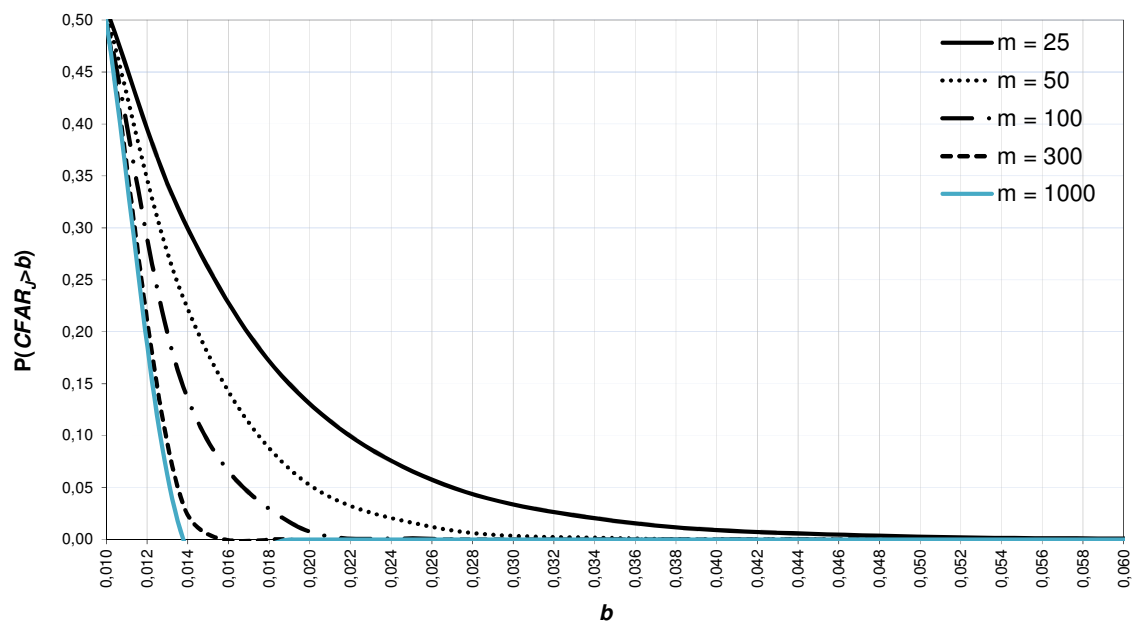


Figura 1 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador Sp .

4.1.2.

Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ – Caso *UU*

No caso de o gráfico de \bar{X} estar centrado em $\bar{\bar{X}}$ e denotando-se por $F_{CFAR_J}(b) = P(CFAR_J \leq b)$ a densidade de probabilidade acumulada para o risco α conjunto, $F_{CFAR_J}(b)$ pode ser obtida pela equação (3.2.3) para o estimador do desvio-padrão \bar{S}/c_4 e pela equação (3.2.4) para o estimador Sp .

Diferentemente do caso em que o gráfico de \bar{X} está centrado em μ_0 , $CFAR_J$ é função de duas variáveis aleatórias e não apenas uma: é função do fator de erro na estimação do desvio-padrão, W , e também é função do erro padronizado de estimação da média, V . É possível observar através das equações (3.2.3) e (3.2.4) que W afeta a distribuição de $CFAR_{\bar{X}}$ e $CFAR_S$, enquanto que V afeta somente a distribuição de $CFAR_{\bar{X}}$. Portanto, a distribuição da probabilidade de alarme falso conjunta quando o gráfico de \bar{X} está centrado em $\bar{\bar{X}}$ ($CFAR_J$) é função da distribuição conjunta das variáveis W e V e sua *c.d.f* (F_{CFAR_J}) será calculada a partir do produto das funções densidade de probabilidade de W , $f_W(w)$, e de V , $f_V(v)$, uma vez que W e V são independentes ($f_{W,V}(w,v) = f_W(w)f_V(v)$). Assim:

$$F_{CFAR_J}(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{w_v^*}^{\infty} f_W(w) dw \right) f_V(v) dv = \int_{v=-\infty}^{\infty} [1 - F_W(w_v^*)] f_V(v) dv \quad (4.1.4)$$

onde w_v^* é o valor de W que, quando $V=v$, resulta em $CFAR_J = b$, com $-\infty < V < \infty$; $f_W(w)$ e $f_V(v)$ são, respectivamente, a função densidade de probabilidade do erro de estimação do desvio-padrão, W , e do erro padronizado de

estimação da média, v ; e $F(w_v^*)$, a função densidade de probabilidade acumulada de w_v^* .

A curva $W_v^* \times V$ no plano VW é o lugar geométrico dos pontos (v, w) onde $CFAR_J = b$. Uma vez que para qualquer V , $CFAR_J$ é uma função decrescente de W , então quando $V=v$ e $W > w_v$, $CFAR_J < b$. Consequentemente, a probabilidade total, para $CFAR_J < b$, é a integral da densidade conjunta de V e W na região do plano VW , onde $W > w_v^*$ (a curva $W_v^* \times V$ é a fronteira da região de integração).

$$\text{Como } V = \frac{(\bar{\bar{X}} - \mu_0)}{\sigma_0} \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{\bar{X}}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{mn}}, \quad E(V) = 0 \quad \text{e}$$

$$Var(V) = \frac{\sigma_{\bar{\bar{X}}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sigma_0^2}{mn\sigma_0^2} = \frac{1}{mn}. \text{ Assim, } V \text{ é uma variável aleatória normal, com}$$

média igual a zero e variância $1/mn$.

Assim, para um dado valor de b (quantil da distribuição da $CFAR_J$), variando-se V a pequenos incrementos dv , as equações (4.1.4), (3.2.3) e (3.2.4) possibilitam encontrar, por meio de uma busca, o valor de w_v^* , para cada v , que resulta em $F_{CFAR_J} = b$. Os pares (b, F_{CFAR_J}) correspondem a pontos da função $1 - F_{CFAR_J}(b)$, isto é, $[b, P(CFAR_J > b)]$. Os valores de b para m igual a 300 e 1000 foram discretizados em unidades diferentes dos demais, para um melhor resultado.

Os resultados dessa primeira análise para o gráfico da média centrado em $\bar{\bar{X}}$ (Caso UU) estão apresentados no Apêndice B, para os dois estimadores do desvio padrão.

É possível observar, comparando-se as densidades acumuladas da $CFAR_J$ no Caso UU (Apêndice B), com as densidades acumuladas no Caso KU (Apêndice A), que a densidade acumulada da $CFAR_J$ no Caso UU cresce mais rapidamente que no Caso KU , para o mesmo par mxn . Por exemplo, comparando-se as Tabelas A.4 (Caso KU , estimador S_p) e B.4 (Caso UU , estimador S_p) abaixo,

para $n = 5$ e $m = 25$, a probabilidade de $CFAR_J$ em B.4 ser 30% maior que o valor esperado $\alpha_j = 0,010$ [$P(CFAR_J > 0,013)$] é de 42,75% enquanto que em A.4, $P(CFAR_J > 0,013) = 37,92\%$, ou seja, 11,3% maior. Isto, inclusive, ocorre para valores maiores de n e m ; para $n = 20$ e $m = 300$, a probabilidade de $CFAR_J$ em B.4 ser 50% maior que o valor esperado $\alpha_j = 0,010$ [$P(CFAR_J > 0,015)$] é de 8,16% enquanto que em A.4, $P(CFAR_J > 0,015) = 0,37\%$, ou seja, 21 vezes maior.

Tabela 1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_j = 0,010$ e estimador S_p , Caso KU

$P(CFAR_J > b), \alpha_j = 0,010$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0100	0,5188	0,5133	0,5094	0,5054	0,5030	10	0,0100	0,5125	0,5089	0,5063	0,5036	0,5020
	0,0131	0,3792	0,3197	0,2462	0,1119	0,0126		0,0138	0,3082	0,2324	0,1470	0,0332	0,0004
	0,0170	0,2528	0,1648	0,0804	0,0070	0,0000		0,0190	0,1496	0,0680	0,0168	0,0001	0,0000
	0,0221	0,1522	0,0686	0,0168	0,0001	0,0000		0,0261	0,0570	0,0120	0,0007	0,0000	0,0000
	0,0284	0,0820	0,0227	0,0022	0,0000	0,0000		0,0355	0,0167	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0364	0,0392	0,0058	0,0002	0,0000	0,0000		0,0480	0,0037	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0462	0,0165	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000		0,0643	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0583	0,0061	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000		0,0849	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0730	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1108	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0907	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1426	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0100	0,5086	0,5061	0,5043	0,5025	0,5014	25	0,0100	0,5077	0,5054	0,5038	0,5022	0,5012
	0,0149	0,2260	0,1403	0,0622	0,0037	0,0000		0,0153	0,1976	0,1119	0,0418	0,0013	0,0000
	0,0222	0,0627	0,0145	0,0010	0,0000	0,0000		0,0237	0,0420	0,0070	0,0002	0,0000	0,0000
	0,0332	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000		0,0366	0,0045	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0490	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0558	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0712	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0832	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1211	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1411	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1710	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1914	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,2337	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,2526	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,3089	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela 3 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$

=0,010		e						estimador			S_{D_1}			Caso			UU			
												$P(CFAR_J > \alpha)$								
		m						m						m						
n	b	25	50	100	b	300	b	1000	n	b	25	50	100	b	300	b	1000			
5	0,00997	0,56504	0,54790	0,53551	0,00997	0,52268	0,00997	0,51464	10	0,00997	0,57043	0,55156	0,53802	0,00997	0,52409	0,00997	0,51538			
	0,01098	0,51545	0,47792	0,43705	0,01048	0,43579	0,01018	0,45029		0,01098	0,50768	0,46334	0,41444	0,01048	0,41502	0,01018	0,43447			
	0,01198	0,46962	0,41419	0,34994	0,01098	0,35563	0,01038	0,38846		0,01198	0,45012	0,38426	0,30861	0,01098	0,31705	0,01038	0,35793			
	0,01298	0,42754	0,35717	0,27597	0,01148	0,28460	0,01058	0,33056		0,01298	0,39799	0,31555	0,22384	0,01148	0,23452	0,01058	0,28831			
	0,01398	0,38906	0,30684	0,21514	0,01198	0,22385	0,01078	0,27753		0,01398	0,35124	0,25722	0,15933	0,01198	0,16875	0,01078	0,22728			
	0,01498	0,35399	0,26290	0,16636	0,01248	0,17347	0,01098	0,23007		0,01498	0,30961	0,20861	0,11216	0,01248	0,11883	0,01098	0,17557			
	0,01598	0,32212	0,22485	0,12802	0,01298	0,13285	0,01118	0,18847		0,01598	0,27275	0,16865	0,07875	0,01298	0,08255	0,01118	0,13327			
	0,01698	0,29319	0,19212	0,09837	0,01348	0,10090	0,01138	0,15273		0,01698	0,24024	0,13617	0,05565	0,01348	0,05716	0,01138	0,09970			
	0,01798	0,26698	0,16411	0,07574	0,01398	0,07630	0,01158	0,12262		0,01798	0,21166	0,11000	0,04001	0,01398	0,03997	0,01158	0,07385			
	0,01898	0,24324	0,14024	0,05865	0,01448	0,05774	0,01178	0,09770		0,01898	0,18658	0,08905	0,02958	0,01448	0,02867	0,01178	0,05450			
	0,01998	0,22176	0,11995	0,04586	0,01498	0,04398	0,01198	0,07742		0,01998	0,16463	0,07237	0,02271	0,01498	0,02145	0,01198	0,04039			
	0,02098	0,20233	0,10277	0,03635	0,01598	0,02672	0,01218	0,06120		0,02098	0,14542	0,05914	0,01823	0,01598	0,01417	0,01218	0,03036			
	0,02198	0,18476	0,08824	0,02932	0,01698	0,01799	0,01238	0,04843		0,02198	0,12864	0,04869	0,01533	0,01698	0,01154	0,01238	0,02341			
	0,02298	0,16886	0,07597	0,02415	0,01798	0,01377	0,01258	0,03853		0,02298	0,11397	0,04045	0,01348	0,01798	0,01064	0,01258	0,01870			
	0,02398	0,15448	0,06562	0,02036	0,01898	0,01180	0,01278	0,03095		0,02398	0,10117	0,03396	0,01229	0,01898	0,01035	0,01278	0,01557			
	0,02498	0,14146	0,05691	0,01759	0,01998	0,01091	0,01298	0,02524		0,02498	0,08998	0,02887	0,01153	0,01998	0,01026	0,01298	0,01354			
	0,02598	0,12968	0,04956	0,01558	0,02098	0,01052	0,01318	0,02099		0,02598	0,08021	0,02487	0,01105	0,02098	0,01024	0,01318	0,01225			
	0,02698	0,11902	0,04339	0,01411	0,02198	0,01035	0,01338	0,01786		0,02698	0,07168	0,02173	0,01075	0,02198	0,01023	0,01338	0,01144			
	0,02798	0,10935	0,03819	0,01304	0,02298	0,01028	0,01358	0,01559		0,02798	0,06422	0,01927	0,01056	0,02298	0,01023	0,01358	0,01094			
	0,02898	0,10060	0,03381	0,01227	0,02398	0,01025	0,01378	0,01396		0,02898	0,05770	0,01733	0,01043	0,02398	0,01023	0,01378	0,01064			
	0,02998	0,09266	0,03013	0,01171	0,02498	0,01024	0,01398	0,01280		0,02998	0,05199	0,01582	0,01036	0,02498	0,01023	0,01398	0,01047			
	0,03098	0,08546	0,02703	0,01130	0,02598	0,01023	0,01418	0,01199		0,03098	0,04700	0,01463	0,01031	0,02598	0,01023	0,01418	0,01036			
	0,03198	0,07892	0,02442	0,01100	0,02698	0,01023	0,01438	0,01142		0,03198	0,04263	0,01370	0,01028	0,02698	0,01023	0,01438	0,01030			
	0,03298	0,07299	0,02222	0,01079	0,02798	0,01023	0,01458	0,01103		0,03298	0,03879	0,01296	0,01026	0,02798	0,01023	0,01458	0,01027			
	0,03398	0,06760	0,02037	0,01064	0,02898	0,01023	0,01478	0,01076		0,03398	0,03543	0,01239	0,01025	0,02898	0,01023	0,01478	0,01025			
0,03498	0,06270	0,01881	0,01052	0,02998	0,01023	0,01498	0,01058	0,03498	0,03248	0,01193	0,01024	0,02998	0,01023	0,01498	0,01024					
20	0,00997	0,57779	0,55657	0,54145	0,00997	0,52602	0,00997	0,51640	25	0,0100	0,58032	0,55830	0,54264	0,00997	0,52669	0,00997	0,51675			
	0,01098	0,50260	0,45116	0,39447	0,01048	0,39621	0,01018	0,41994		0,01098	0,50134	0,44765	0,38857	0,01048	0,39059	0,01018	0,41551			
	0,01198	0,43420	0,35842	0,27321	0,01098	0,28319	0,01038	0,33022		0,01198	0,42969	0,35092	0,26306	0,01098	0,27332	0,01038	0,32197			
	0,01298	0,37324	0,28044	0,18221	0,01148	0,19325	0,01058	0,25137		0,01298	0,36618	0,27046	0,17089	0,01148	0,18182	0,01058	0,24070			
	0,01398	0,31973	0,21704	0,11862	0,01198	0,12708	0,01078	0,18560		0,01398	0,31081	0,20597	0,10826	0,01198	0,11623	0,01078	0,17402			
	0,01498	0,27328	0,16680	0,07655	0,01248	0,08157	0,01098	0,13338		0,01498	0,26314	0,15570	0,06814	0,01248	0,07257	0,01098	0,12221			
	0,01598	0,23329	0,12776	0,04985	0,01298	0,05205	0,01118	0,09380		0,01598	0,22248	0,11734	0,04357	0,01298	0,04530	0,01118	0,08395			
	0,01698	0,19908	0,09787	0,03346	0,01348	0,03386	0,01138	0,06506		0,01698	0,18803	0,08852	0,02904	0,01348	0,02919	0,01138	0,05701			
	0,01798	0,16995	0,07525	0,02364	0,01398	0,02316	0,01158	0,04507		0,01798	0,15899	0,06715	0,02067	0,01398	0,02012	0,01158	0,03887			
	0,01898	0,14523	0,05828	0,01789	0,01448	0,01709	0,01178	0,03169		0,01898	0,13461	0,05144	0,01595	0,01448	0,01523	0,01178	0,02718			
	0,01998	0,12430	0,04564	0,01456	0,01498	0,01378	0,01198	0,02306		0,01998	0,11142	0,03997	0,01334	0,01498	0,01268	0,01198	0,01994			
	0,02098	0,10662	0,03628	0,01266	0,01598	0,01111	0,01218	0,01768		0,02098	0,09713	0,03166	0,01190	0,01598	0,01078	0,01218	0,01562			
	0,02198	0,09170	0,02936	0,01159	0,01698	0,01043	0,01238	0,01444		0,02198	0,08289	0,02564	0,01113	0,01698	0,01034	0,01238	0,01313			
	0,02298	0,07912	0,02427	0,01068	0,01798	0,01027	0,01258	0,01255		0,02298	0,071	0,02131	0,01071	0,01798	0,01025	0,01258	0,01175			
	0,02398	0,06851	0,02053	0,01095	0,01898	0,01024	0,01278	0,01147		0,02398	0,0611	0,01819	0,01048	0,01898	0,01023	0,01278	0,01100			
	0,02498	0,05957	0,01779	0,01046	0,01998	0,01023	0,01298	0,01088		0,02498	0,05283	0,01595	0,01036	0,01998	0,01023	0,01298	0,01061			
	0,02598	0,05203	0,01577	0,01036	0,02098	0,01023	0,01318	0,01056		0,02598	0,04594	0,01434	0,01030	0,02098	0,01023	0,01318	0,01041			
	0,02698	0,04567	0,01430	0,01030	0,02198	0,01023	0,01338	0,01039		0,02698	0,04019	0,01319	0,01027	0,02198	0,01023	0,01338	0,01031			
	0,02798	0,04031	0,01322	0,01027	0,02298	0,01023	0,01358	0,01031		0,02798	0,03539	0,01236	0,01025	0,02298	0,01023	0,01358	0,01027			
	0,02898	0,03578	0,01243	0,01025	0,02398	0,01023	0,01378	0,01027		0,02898	0,03139	0,01176	0,01024	0,02398	0,01023	0,01378	0,01025			
	0,02998	0,03195	0,01185	0,01024	0,02498	0,01023	0,01398	0,01025		0,02998	0,02803	0,01134	0,01023	0,02498	0,01023	0,01398	0,01024			
	0,03098	0,02872	0,01142	0,01023	0,02598	0,01023	0,01418	0,01024		0,03098	0,02523	0,01103	0,01023	0,02598	0,01023	0,01418	0,01023			
	0,03198	0,02598	0,01111	0,01023	0,02698	0,01023	0,01438	0,01023		0,03198	0,02288	0,01081	0,01023	0,02698	0,01023	0,01438	0,01023			
	0,03298	0,02366	0,01088	0,01023	0,02798	0,01023	0,01458	0,01023		0,03298	0,02091	0,01065	0,01023	0,02798	0,01023	0,01458	0,01023			
	0,03398	0,02169	0,01071	0,01023	0,02898	0,01023	0,01478	0,01023		0,03398	0,01925	0,01053	0,01023	0,02898	0,01023	0,01478	0,01023			
0,03498	0,02002	0,01058	0,01023	0,02998	0,01023	0,01498	0,01023	0,03498	0,01787	0,01045	0,01023	0,02998	0,01023	0,01498	0,01023					

estimadores diminui na medida em que m aumenta. Tal fato pode ser verificado na Tabela abaixo, que contém as probabilidades de $CFAR_j$ ser 10% maior que o valor esperado $\alpha_j = 0,010$, provenientes das Tabelas B.2 e B.4.

Tabela 4 – Probabilidade de $CFAR_j$ exceder o valor 0,011, para $n=10$ e $\alpha_j = 0,010$ (exemplos das Tabelas B.2 e B.4 – Caso UU)

	Tabela B.2 - Estimador \bar{S}/c_4	Tabela B.4 (Tabela 3 no texto) - Estimador S_p
$m = 25$	49,35%	50,77%
$m = 50$	45,31%	46,33%
$m = 100$	40,73%	41,44%
$m = 300$	31,36%	31,71%
$m = 1.000$	16,31%	17,56%

Para um dado m , à medida que n aumenta, é possível obter probabilidades de ultrapassagem $P(CFAR_j > b)$ menores para um mesmo valor b . Por exemplo, observando-se a Tabela 3, para a mesma probabilidade $b = 0,011$ e $m = 50$, tem-se $P(CFAR_j > 0,011) = 47,79\%$ quando $n = 5$; $P(CFAR_j > 0,011) = 46,33\%$ para $n = 10$; $P(CFAR_j > 0,011) = 45,12\%$ para $n = 20$ e $P(CFAR_j > 0,011) = 44,77\%$ para $n = 25$. Observa-se também, ao analisar os dados das duas tabelas, que as probabilidades $P(CFAR_j > b)$ para $n = 20$ pouco se diferenciam das probabilidades de ultrapassagem para $n = 25$.

Os gráficos obtidos para valores especificados de n e m fornecem, dado um valor máximo tolerado para $CFAR_j$, b , a indicação sobre a probabilidade de ultrapassagem desses valores. As curvas nos gráficos, porém, não permitem a determinação precisa desta probabilidade e as tabelas podem não possuir como entrada o valor exato da $CFAR_j$ máxima (b) tolerado pelo usuário. Assim, ainda que tais curvas tenham a vantagem de fornecer uma boa percepção da distribuição da $CFAR_j$ em função de m e n , outras formas de organização ou apresentação dos resultados são mais úteis em termos práticos, por corresponderem mais diretamente às questões de interesse do usuário e por lhe fornecerem a resposta a essas suas questões diretamente na forma em que mais provavelmente elas serão formuladas por ele. A saber:

- (a) Para um dado tamanho de amostra n e um número de amostras iniciais m , qual é o quantil b de $P(CFAR_j > b) = p$, onde p é especificado pelo usuário como uma probabilidade pequena, por exemplo, 0,05 ou 0,10? Isso lhe permitirá determinar o número mínimo de amostras iniciais a considerar, em função do valor desse quantil;
- (b) Dado um tamanho de amostra n e um valor máximo tolerado para a $CFAR_j$ (maior que α_j por uma pequena porcentagem ε especificada, igual a $(1 + \varepsilon/100)\alpha_j$), qual é o número de amostras iniciais (m) que garante, com uma probabilidade alta especificada (por exemplo, 0,95 ou 0,90) que esse risco não será ultrapassado?

A Seção seguinte (4.2) mostra como obter o quantil b , tal que $P(CFAR_j > b)$ é igual a um valor especificado p (questão (a) acima). A Seção (4.3) demonstra como obter o valor de m que garante que a tolerância limite especificada para a $CFAR_j$ não será ultrapassada, com um grau de certeza especificado (questão (b) acima).

4.2.

Análise 2: Determinação dos Quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_j$, parametrizada por n e m

4.2.1.

Gráfico da Média centrado no valor alvo – Caso KU

Mostra-se nesta seção como obter, para um par (n, m) especificado, o valor de b cuja probabilidade de ultrapassagem desse valor pela $CFAR_j$, $P(CFAR_j > b)$, seja igual a um valor p especificado a priori, ou seja, para uma probabilidade p especificada, obtém-se o valor de b que é ultrapassado pela $CFAR_j$ somente com uma pequena probabilidade p .

Para a determinação de b , no caso em que o estimador utilizado é \bar{S}/c_4 , dados n, m e a probabilidade p especificada, como as densidades de probabilidade acumulada de W e $CFAR_j$ têm correspondência biunívoca, seus quantis também

terão e será possível obter (invertendo-se a distribuição normal acumulada de W) o valor de W , w_p , tal que $P(W \leq w_p) = p$. Sendo assim,

$$P(CFAR_J > b) = 1 - F_{CFAR_J} = p = F_{w_p} \Rightarrow w_p = F_W^{-1}(p) \quad (4.2.1)$$

Por exemplo, considere $\alpha_J = 0,005$, $n=5$ e $m=25$. É possível obter o valor b de $CFAR_J$ que é excedido com $p=10\%$:

$$\begin{aligned} P(CFAR_J > b) &= 1 - F_{CFAR_J} = p = 0,10 = F_{w_p} \\ w_p &= F_W^{-1}(p) = F_W^{-1}(0,10) = 1,0930 \end{aligned}$$

Substituindo o valor w_p na equação (3.2.1), obtém-se o quantil desejado de $CFAR_J$ correspondente (valor de b tal que $P(CFAR_J > b)$ é igual ao valor de probabilidade p especificada).

O mesmo método se aplica à situação em que o estimador de σ_0 utilizado é S_p , sendo que neste caso, a variável aleatória W_p é função de Y_p , uma variável aleatória que segue uma distribuição qui-quadrada com $m(n-1)$ graus de liberdade, conforme apresentado na Seção 3.1. Através da Equação (3.1.24), é possível obter um valor w_p em função de Y_p , de tal forma que:

$$w_p = \sqrt{\frac{y_p}{m(n-1)}} = \sqrt{\frac{F_{\chi_{m(n-1)}}^{-1}(p)}{m(n-1)}} \quad (4.2.2)$$

Entrando com o valor de w_p na equação (3.2.2), obtém-se o quantil desejado de $CFAR_J$ (valor de b tal que $P(CFAR_J > b)$ é igual ao valor de probabilidade p especificada).

Os resultados dessa segunda análise (quantis da distribuição de $CFAR_J$) são apresentados em tabelas e gráficos nos Apêndices C (Caso KU) e D (Caso UU). Por ser a diferença entre os quantis da distribuição de $CFAR_J$ encontrados para o estimador \bar{S}/c_4 e S_p em cada caso mínima, são apresentadas somente as tabelas e

gráficos calculados com o estimador S_p . Foram construídas tabelas e gráficos para $p = 5\%$ (quantil de 0,95) e 10% (quantil de 0,90), parametrizados por m e n . A partir desta forma de apresentação dos dados, o usuário poderá identificar o limite de previsão $(1-p)$ -quantil, b , para a $CFAR_J$ que cada par (n, m) oferece para uma probabilidade p especificada de ultrapassagem. Como se pode observar na Tabela 5 abaixo, à medida que a probabilidade de ultrapassagem p aumenta (de 0,05 para 0,10), para um dado par (n, m) , os limites de previsão ou $(1-p)$ -quantis para a $CFAR_J$ se reduzem. Fixando-se p , os valores de $CFAR_J$ também diminuem com o aumento de n e/ou m .

Tabela 5 – Quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p (Caso KU).

		$b, P(CFAR_J > b)=0,05$					$b, P(CFAR_J > b)=0,10$				
		m					m				
	n	25	50	100	300	1000	25	50	100	300	1000
$\alpha_j=0,0054$	5	0,0215	0,0146	0,0110	0,0082	0,0068	0,0161	0,0118	0,0094	0,0075	0,0064
	10	0,0165	0,0119	0,0095	0,0075	0,0064	0,0129	0,0100	0,0084	0,0069	0,0062
	20	0,0139	0,0105	0,0086	0,0071	0,0063	0,0113	0,0091	0,0078	0,0067	0,0060
	25	0,0134	0,0102	0,0085	0,0070	0,0062	0,0109	0,0089	0,0076	0,0066	0,0060
$\alpha_j=0,010$	5	0,0344	0,0243	0,0188	0,0144	0,0122	0,0265	0,0201	0,0164	0,0133	0,0117
	10	0,0273	0,0204	0,0166	0,0134	0,0117	0,0219	0,0174	0,0148	0,0125	0,0113
	20	0,0236	0,0183	0,0153	0,0128	0,0114	0,0195	0,0160	0,0139	0,0121	0,0111
	25	0,0228	0,0178	0,0150	0,0126	0,0113	0,0189	0,0157	0,0137	0,0120	0,0110

O mesmo comportamento é observado para os dois estimadores do desvio-padrão e também para o caso em que o gráfico da média está centrado em $\bar{\bar{X}}$, que será apresentado na próxima Seção.

Na prática, este arranjo dos resultados permite ao usuário identificar, para cada tamanho de amostra n desejado, qual o número de amostras m que o mesmo deverá utilizar, de acordo com o limites de previsão admitido por ele para a $CFAR_J$ e para a probabilidade de ultrapassagem correspondente, p . Por exemplo, é fácil verificar através da Tabela 5 que, se o usuário desejar uma probabilidade de ultrapassagem $p = P(CFAR_J > b) = 5\%$, e um limites de previsão para a $CFAR_J$ bastante reduzido, como 0,0064 (quase 20% maior que o valor nominal 0,0054), deverá retirar no mínimo 1.000 amostras do processo com tamanho mínimo de $n = 10$. Se o usuário admitir uma probabilidade de ultrapassagem maior

$p = P(CFAR_j > b) = 10\%$, ainda assim serão necessárias 1.000 amostras, mas agora de tamanho $n = 5$. Se o usuário trabalhar com um limite de previsão da $CFAR_j$ de 0,007, 30% maior que o valor esperado 0,0054, é possível obter $p = P(CFAR_j > b) = 5\%$ com 300 amostras de tamanho 10 e obter $p = P(CFAR_j > b) = 10\%$ com 300 amostras de tamanho 5.

4.2.2.

Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ – Caso *UU*

Para a determinação de b , tanto na situação em que σ_0 é estimado por \bar{S}/c_4 quanto na situação em que é estimado por S_p , a metodologia utilizada é uma extensão da que foi adotada na Análise 1, Seção 4.1.2. A partir da equação (4.1.4), com o auxílio do *Solver* do *Microsoft Excel*, foram obtidos os pares $[b, P(CFAR_j > b)]$ e deseja-se agora responder à seguinte pergunta: qual o valor de b, b^* , tal que a probabilidade de $CFAR_j > b^*$ é limitada a p ? Por exemplo, qual o valor b^* tal que $P(CFAR_j > b^*) = p = 0,10$? A partir da observação dos valores das probabilidades de ultrapassagem $P(CFAR_j > b)$ das Tabelas B.1 a B.4, é possível verificar que b^* estará entre dois valores consecutivos de b (b_1 e b_2) nessas tabelas, tais que $F(b_1) < p$ e $F(b_2) > p$. Por exemplo, observe as duas linhas marcadas na Tabela 6 (alguns valores da Tabela B.1) abaixo para $n = 5$ e $m = 25$ - o valor b^* deve estar entre os valores 0,01739 e 0,01789, uma vez que as correspondentes probabilidades de ultrapassagem destes valores, 0,1030 e 0,0971 compreendem o valor $p = 0,10$. Já para $n = 10$ e $m = 25$, o valor b^* deve estar entre os valores 0,01389 e 0,01439, já que $p = 0,10$ está entre os valores de probabilidade $P(CFAR_j > b)$ correspondentes a estes valores de b , 0,1045 e 0,0955, respectivamente.

Tabela 6 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b para $n = 5$ e 10 da Tabela B.1 (Caso UU).

$P(CFAR_J > b)$													
n	b	m				b	m	n	b	m			
		25	50	100	300					25	50	100	300
5	0,00539	0,54434	0,53255	0,52402	0,51519	0,00539	0,50964	10	0,00539	0,55697	0,54132	0,53013	0,51863
	0,00589	0,50382	0,47560	0,44397	0,37864	0,00544	0,48333		0,00589	0,50464	0,46795	0,42732	0,34493
	0,00639	0,46640	0,42353	0,37216	0,26507	0,00549	0,45744		0,00639	0,45649	0,40152	0,33711	0,21018
	0,00689	0,43193	0,37638	0,30932	0,17834	0,00554	0,43186		0,00689	0,41253	0,34258	0,26145	0,11965
	0,00739	0,40022	0,33400	0,25540	0,11649	0,00559	0,40685		0,00739	0,37262	0,29107	0,20012	0,06524
	0,00789	0,37108	0,29613	0,20985	0,07472	0,00564	0,38244		0,00789	0,33651	0,24656	0,15173	0,03531
	0,00839	0,34430	0,26242	0,17182	0,04768	0,00569	0,35871		0,00839	0,30395	0,20844	0,11434	0,01995
	0,00889	0,31969	0,23253	0,14039	0,03080	0,00574	0,33572		0,00889	0,27464	0,17602	0,08594	0,01250
	0,00939	0,29708	0,20608	0,11460	0,02056	0,00579	0,31354		0,00939	0,24829	0,14859	0,06463	0,00904
	0,00989	0,27629	0,18272	0,09356	0,01448	0,00584	0,29221		0,00989	0,22463	0,12548	0,04881	0,00749
	0,01039	0,25718	0,16211	0,07649	0,01094	0,00589	0,27178		0,01039	0,20339	0,10607	0,03717	0,00682
	0,01089	0,23959	0,14395	0,06268	0,00891	0,00594	0,25219		0,01089	0,18433	0,08979	0,02865	0,00653
	0,01139	0,22339	0,12796	0,05156	0,00777	0,00599	0,23360		0,01139	0,16722	0,07617	0,02246	0,00642
	0,01189	0,20847	0,11387	0,04261	0,00713	0,00604	0,21597		0,01189	0,15187	0,06478	0,01796	0,00637
	0,01239	0,19471	0,10147	0,03542	0,00677	0,00614	0,18355		0,01239	0,13807	0,05527	0,01471	0,00635
	0,01289	0,18202	0,09055	0,02965	0,00657	0,00624	0,15491		0,01289	0,12568	0,04733	0,01237	0,00634
	0,01339	0,17030	0,08093	0,02504	0,00646	0,00634	0,12989		0,01339	0,11454	0,04070	0,01068	0,00634
	0,01389	0,15946	0,07245	0,02134	0,00640	0,00644	0,10830		0,01389	0,10452	0,03516	0,00946	0,00633
	0,01439	0,14944	0,06498	0,01837	0,00637	0,00654	0,08983		0,01439	0,09550	0,03054	0,00859	0,00633
	0,01489	0,14017	0,05839	0,01600	0,00635	0,00664	0,07421		0,01489	0,08738	0,02667	0,00796	0,00633
	0,01539	0,13158	0,05258	0,01410	0,00634	0,00674	0,06111		0,01539	0,08005	0,02344	0,00751	0,00633
	0,01589	0,12362	0,04745	0,01258	0,00634	0,00684	0,05024		0,01589	0,07344	0,02074	0,00718	0,00633
	0,01639	0,11623	0,04291	0,01136	0,00634	0,00694	0,04129		0,01639	0,06747	0,01847	0,00695	0,00633
	0,01689	0,10937	0,03890	0,01038	0,00634	0,00704	0,03398		0,01689	0,06208	0,01657	0,00678	0,00633
	0,01739	0,10300	0,03536	0,00960	0,00633	0,00714	0,02807		0,01739	0,05720	0,01498	0,00666	0,00633
	0,01789	0,09708	0,03221	0,00897	0,00633	0,00724	0,02332		0,01789	0,05279	0,01365	0,00657	0,00633

Dessa forma, para encontrar b^* , deve-se realizar uma busca entre os valores b_1 e b_2 , utilizando o mesmo método de busca adotado na Seção 4.1.2. A busca por b^* é finalizada quando um valor de $P(CFAR_J > b^*)$ suficientemente próximo de p é encontrado. Define-se valor “suficientemente próximo”, o valor $P(CFAR_J > b^*)$ que com dois dígitos significativos seja igual a p . Lembrando que, os valores de b para m igual a 300 e 1000 foram discretizados em unidades diferentes dos demais, para um melhor resultado.

Os resultados dessa segunda análise para o gráfico da média centrado em \bar{X} são apresentados em tabelas e gráficos no Apêndice D (também aqui são apresentados os resultados para o estimador S_p apenas, em função da semelhança encontrada com os resultados do estimador \bar{S}/c_4).

É possível observar comparando-se os quantis das tabelas do Apêndice D (Caso UU) com os valores do Apêndice C (Caso KU), em que o gráfico da média está centrado no valor alvo, que os quantis da $CFAR_J$ do Apêndice D são maiores para o mesmo par $m \times n$, como foi observado também na Análise 1.

É possível verificar através da Tabela 7 abaixo que se se deseja limites a 10%, o risco p de que o valor tolerado de 0,007 para $CFAR_J$, por exemplo, seja ultrapassado, será necessário retirar pelo menos 300 amostras de tamanho 10. Se o usuário for mais rigoroso e quiser uma probabilidade de ultrapassagem desse valor de apenas 5%, apenas com tamanho de amostras maiores ou iguais a 20 é que serão suficientes “somente” 300 amostras para se obter $p = 5\%$.

Tabela 7 – Quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p Caso UU .

	n	$b, P(CFAR_J > b)=0.05$					$b, P(CFAR_J > b)=0.10$				
		m					m				
		25	50	100	300	1000	25	50	100	300	1000
$\alpha_J=0.0054$	5	0.0234	0.0154	0.0114	0.0084	0.0068	0.0175	0.0124	0.0096	0.0075	0.0065
	10	0.0184	0.0126	0.0098	0.0076	0.0065	0.0144	0.0105	0.0086	0.0070	0.0062
	20	0.0154	0.0114	0.0089	0.0072	0.0063	0.0124	0.0095	0.0080	0.0067	0.0061
	25	0.0146	0.0108	0.0087	0.0071	0.0063	0.0120	0.0094	0.0079	0.0067	0.0060
$\alpha_J=0.010$	5	0.0355	0.0254	0.0193	0.0146	0.0123	0.0290	0.0210	0.0170	0.0134	0.0117
	10	0.0300	0.0215	0.0171	0.0136	0.0118	0.0240	0.0183	0.0152	0.0127	0.0114
	20	0.0260	0.0193	0.0160	0.0130	0.0115	0.0212	0.0170	0.0143	0.0122	0.0111
	25	0.0250	0.0190	0.0155	0.0127	0.0114	0.0205	0.0164	0.0141	0.0121	0.0111

Constata-se que os limites de previsão ou quantis da $CFAR_J$ para $n = 25$ pouco se diferenciam dos quantis para $n = 20$ e que os limites de previsão sofrem reduções proporcionalmente menores na situação em que m é fixo e n aumenta, do que na situação inversa (n fixo e m aumenta), conforme já foi relatado na Análise 1.

Para os valores de m , n e p considerados neste trabalho, o menor quantil de 0,90 que $CFAR_J$ pode apresentar no monitoramento conjunto é de 0,0060, para o valor esperado $\alpha_J = 0,0054$ (ver Tabela 7 acima e Figura 2 abaixo) e 0,0111, para o valor esperado $\alpha_J = 0,010$ (ver Tabela 7 acima e Figuras D.1 e D.2 abaixo). Observe que esses quantis, que são obtidos com nível de confiança $(1-p)$ alto e com um número elevadíssimo de observações ($n=25$ e $m=1.000$, resultando em 25.000 observações), já são 10% maiores que os valores desejados (nominais), o que indica quão severo é o efeito do erro na estimação da média e do desvio-padrão do processo.

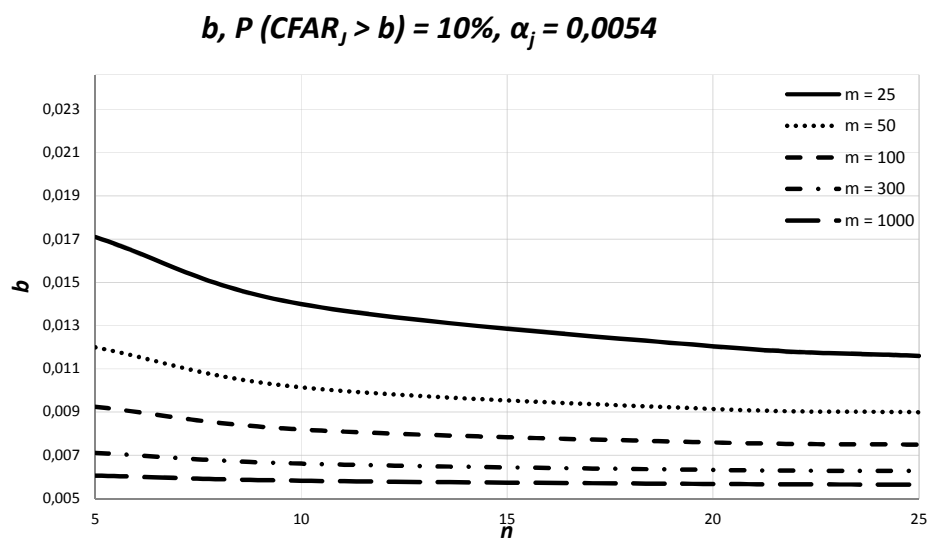
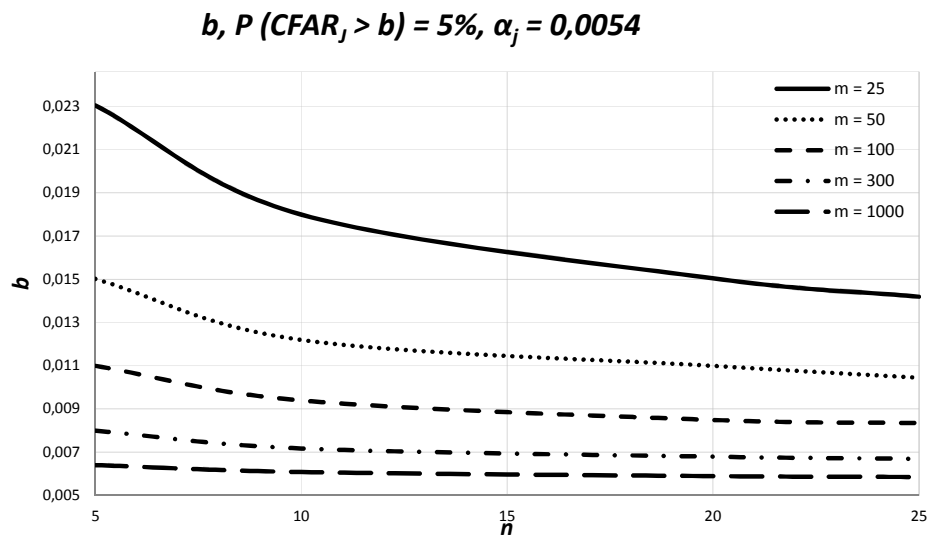


Figura 2 - Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_j$, em função de n e m , $\alpha_j=0,0054$, estimador S_p .

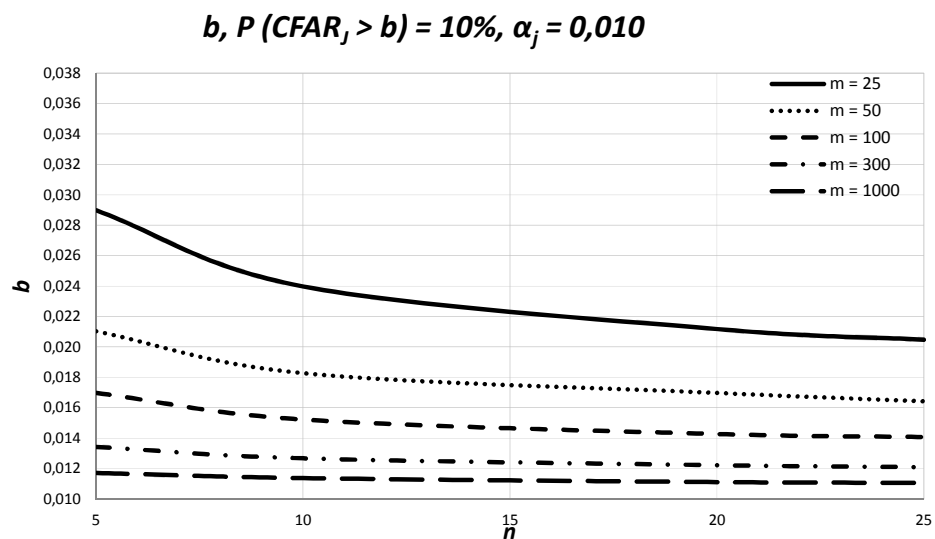
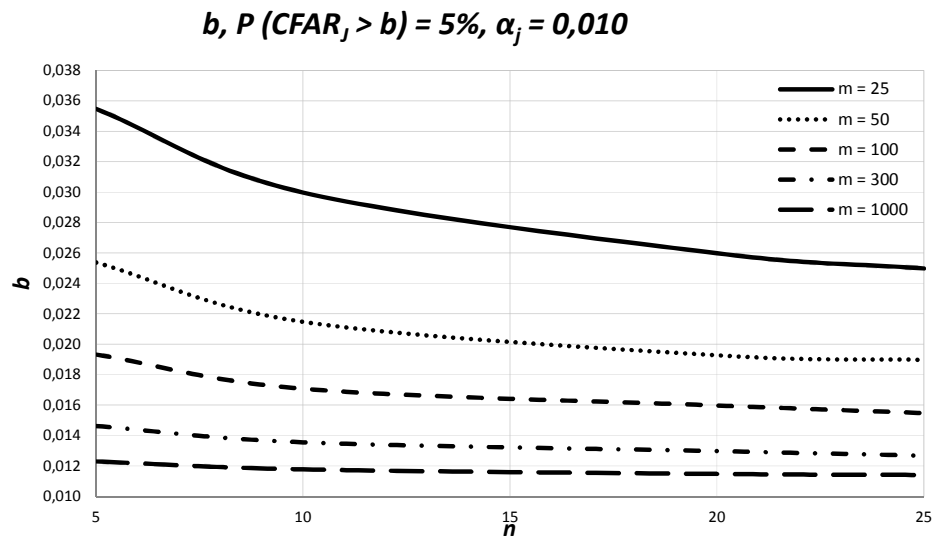


Figura 3 - Gráfico dos quantis de 95% e 90% da $CFAR_j$, em função de n e m , $\alpha_j=0,010$, estimador S_p .

4.3.

Análise 3: Número mínimo de amostras m para cada tamanho de amostra n que garante com probabilidade p que $CFAR_J$ não é maior que $\varepsilon\%$ em relação à α_j .

Nesta seção, dados o tamanho de amostra n e um valor máximo tolerado para $CFAR_J$, determina-se o menor número de amostras iniciais, m , requerido para limitar a uma probabilidade p pequena, especificada, o risco de $CFAR_J$ exceder o referido valor máximo tolerado; em outras palavras, para garantir uma probabilidade $1 - p$ de que $CFAR_J$ não exceda o valor tolerado. O valor tolerado é aqui representado em termos de um percentual ε a maior da probabilidade conjunta de alarme falso nominal. Formalmente, trata-se de determinar o menor valor de m que garanta que seja satisfeita a seguinte condição:

$$CFAR_J \leq \alpha_j + \frac{\varepsilon}{100} \alpha_j. \quad (4.3.1)$$

Em outras palavras, quer-se que o $(1 - p)$ -quantil de $CFAR_J$ seja igual (ou menor) que o valor tolerado.

No caso de o gráfico da média ser centrado no valor alvo, como já visto na Seção 3.2, $CFAR_J$ é uma função monotônica decrescente de W . Veja as equações (3.2.1) e (3.2.2). Então o $(1 - p)$ -quantil de $CFAR_J$ se relaciona biunivocamente com o p -quantil de W , que será denotado por w_{1-p} . Substituindo w por w_{1-p} naquelas equações, obtém-se o $(1 - p)$ -quantil de $CFAR_J$. Como, porém, a distribuição de W depende de m e n , assim os seus quantis dependem de m e n , como visto na Seção 4.2. Trata-se, então, de, dados n , α_j , ε e p , determinar o menor valor de m tal que, ao substituir w por w_{1-p} no membro direito de (3.2.1) — ou de (3.2.2), conforme o estimador utilizado para o desvio-padrão — o seu membro esquerdo se torne igual ou menor a $(1 + \varepsilon/100)\alpha_j$. Não há maneira de determinar m por uma fórmula direta: é necessário realizar uma busca para obter o menor m tal que a condição seja satisfeita.

Foi mostrado na Seção 3.2 como obter quantis desejados de W , tanto no caso do estimador S_p como no do estimador \bar{S}/c_4 . Utilizando o procedimento ali

descrito, para cada valor de m considerado na busca, calcula-se w_{1-p} , em seguida calcula-se $CFAR_J$ e verifica-se se a condição em (4.3.1) foi atendida.

Para o caso de o gráfico da média ser centrado em $\bar{\bar{X}}$, o problema torna-se mais complexo, pois agora, $CFAR_J$ é função de duas variáveis aleatórias, W e V ; portanto, não há uma função biunívoca relacionando seu $(1-p)$ -quantil com o p -quantil de outra variável. Os valores de m requeridos, porém, ainda podem ser obtidos por busca, já que, dado o valor de n , para cada valor de m a distribuição de probabilidades de $CFAR_J$ é única e seus quantis podem ser determinados, conforme mostrado na Seção 4.2.2. Apenas, a busca requer muito mais esforço computacional que no caso anterior, já que os próprios quantis de $CFAR_J$ requerem busca para a sua determinação, como visto na Seção 4.2.2. Então, trata-se de uma busca embutida dentro de outra: deve-se variar m e, para cada valor de m , determinar por uma busca (não mais por uma expressão fechada) o $(1-p)$ -quantil de $CFAR_J$; em seguida, verificar se a condição em (4.3.1) foi satisfeita.

4.3.1.

Gráfico da Média centrado no valor alvo – Caso *KU*

A partir da análise da Tabela 8 abaixo, pode-se constatar que, como esperado, os menores valores de m são obtidos quando se toleram maiores valores para $CFAR_j$ (maiores valores de ε) e/ou maiores probabilidades (p) de ultrapassagem do valor tolerado. Da mesma forma, evidentemente, para amostras maiores, o número mínimo de amostras inicial requerido diminui. Considerando $n = 5$, $\alpha_j = 0,0054$ e $\varepsilon = 50\%$, o menor número de amostras iniciais que garante com 85% de probabilidade que o risco α_j não é maior que 50% em relação à $CFAR_j$ (em notação formal, $P(CFAR_j > 1,5\alpha_j) = P(CFAR_j > 0,0081) = 0,15$) é, no mínimo, de 120 amostras. Com um tamanho de amostras maior, por exemplo, $n = 20$ o número mínimo de amostras requerido é de 54 amostras. Para probabilidades de ultrapassagem do risco α_j menores, por exemplo, $P(CFAR_j > 1,5\alpha_j) = 0,10$, o número mínimo de amostras necessário aumenta consideravelmente, passando a ser de 181 amostras de tamanho $n = 5$.

Para um valor maior de α_j , por exemplo, 0,010, o menor m que garante $P(CFAR_j > 1,5\alpha_j) = P(CFAR_j > 0,015) = 0,15$ é de 97 amostras (aproximadamente 19% menor do que para $\alpha_j = 0,0054$) de tamanho $n = 5$ e 43 amostras para $n = 20$.

Tabela 8 – Número mínimo de amostras iniciais m em função de n , com $p = 5, 10$ e 15% , $\varepsilon = 10, 20, 30, 40$ e 50% e estimador S_p , Caso *KU*.

$m, \alpha_j = 0,0054$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _j > 1,10 α_j]			P [CFAR _j > 1,20 α_j]			P [CFAR _j > 1,30 α_j]			P [CFAR _j > 1,40 α_j]			P [CFAR _j > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	5.468	3.328	2.184	1.489	909	598	716	438	289	434	266	176	295	181	120
10	3.403	2.070	1.358	920	561	369	451	275	182	274	168	111	180	110	73
20	2.356	1.433	940	647	394	259	313	191	126	192	118	78	133	76	54
25	2.136	1.299	852	588	358	236	285	174	114	175	107	71	122	72	49
$m, \alpha_j = 0,010$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _j > 1,10 α_j]			P [CFAR _j > 1,20 α_j]			P [CFAR _j > 1,30 α_j]			P [CFAR _j > 1,40 α_j]			P [CFAR _j > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	4.384	2.669	1.752	1.192	725	479	571	351	231	347	213	141	236	145	97
10	2.771	1.686	1.107	758	463	304	366	224	148	222	136	90	148	91	60
20	1.954	1.189	780	531	323	213	260	159	105	159	98	60	110	65	43
25	1.774	1.079	708	485	295	194	239	146	96	142	87	57	101	61	41

Para menores diferenças percentuais entre o risco α_j e maior risco $CFAR_j$ tolerado, o número mínimo de amostras aumenta. Ainda pela Tabela 8 acima, verifica-se, por exemplo, que para $\alpha_j = 0,010$ e $\varepsilon = 10\%$, para garantir que $P(CFAR_j > 1,10\alpha_j) = 0,15$, são necessárias no mínimo 1.752 amostras de tamanho $n = 5$ e 780 amostras de tamanho $n = 20$.

Uma importante constatação a partir desta forma de apresentação dos dados e para os parâmetros utilizados na análise é a de que o número de amostras recomendado em livros tradicionais e amplamente recomendados de CEP [por exemplo, Montgomery (2013)], $m = 25$, não consta na Tabela acima, podendo-se inferir que não é possível obter com no mínimo 85% de probabilidade, um risco $CFAR_j$ no máximo 50% maior em relação ao α_j . É equivalente afirmar que não é possível garantir com um razoável grau de certeza ($p \geq 85\%$), que $m = 25$ amostras iniciais, retiradas de um processo cujos parâmetros são desconhecidos e estimados com erro, seja suficiente para estabelecer um risco de alarme falso conjunto obtido no máximo 50% maior em relação ao risco de alarme falso conjunto dos gráficos de \bar{X} e S , quando os parâmetros são estimados com precisão.

Como nas análises anteriores já se verificou que os valores de saída obtidos em cada análise para ambos os estimadores do desvio-padrão são muito próximos, os resultados apresentados para a Análise 3 correspondem somente aos valores calculados utilizando-se o estimador S_p .

4.3.2.

Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$ – Caso *UU*

Para o caso do gráfico da média centrado em $\bar{\bar{X}}$, os valores mínimos de m são maiores do que os obtidos na Seção anterior, como esperado. A partir da análise da Tabela 9 abaixo, onde são apresentados os valores de m , o menor número de amostras iniciais que garante com 85% de probabilidade que $CFAR_j$ não será mais que 50% maior que a probabilidade nominal de alarme-falso α_j [$P(CFAR_j > 1,5\alpha_j) = 0,15$] é de 51 amostras para o valor esperado $\alpha_j = 0,010$ e $n = 25$; e 61 amostras para o valor esperado $\alpha_j = 0,0054$ (aproximadamente 24% maior do que a situação equivalente no caso do gráfico da média centrado no valor alvo). Para probabilidades de ultrapassagem do risco α_j menores, por exemplo, $P(CFAR_j > 1,5\alpha_j) = 0,05$, o número mínimo de amostras necessário aumenta consideravelmente, passando a ser de 140 (15% maior do que o valor obtido com parâmetros equivalentes no Caso *KU* para o valor esperado $\alpha_j = 0,010$) e 118 (17% maior do que o valor obtido com parâmetros equivalentes no Caso *KU* para o valor esperado $\alpha_j = 0,0054$). Observe-se, porém, que $n = 25$ não é um tamanho de amostra tipicamente empregado ou recomendado em CEP. Com um valor mais típico, $n = 5$ e $\alpha_j = 0,0054$, os valores de m necessários para garantir com 85% de probabilidade que $CFAR_j$ não será mais que 50 % maior que a probabilidade nominal de alarme falso α_j já se tornam $m = 120$ no caso *KU* e $m = 137$ no caso *UU*; e, para riscos de 10% de ultrapassagem de um valor 20% maior que a probabilidade nominal de alarme falso $\alpha_j = 0,0054$, já são necessárias no mínimo 909 amostras no caso *KU* e 982 no caso *UU*.

Tabela 9 – Número mínimo de amostras iniciais m em função de n , com $p = 5, 10$ e 15% , $\varepsilon = 10, 20, 30, 40$ e 50% e estimador S_p , Caso UU .

$m, \alpha_j = 0,0054$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _J > 1,10 α_j]			P [CFAR _J > 1,20 α_j]			P [CFAR _J > 1,30 α_j]			P [CFAR _J > 1,40 α_j]			P [CFAR _J > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	5.955	3.557	2.335	1.633	982	650	791	478	319	482	293	197	332	203	137
10	3.729	2.232	1.470	1.030	622	414	502	306	205	308	188	127	214	131	89
20	2.588	1.563	1.033	723	442	296	356	219	149	219	136	93	153	96	66
25	2.348	1.419	940	658	402	271	323	200	136	201	125	86	140	88	61

$m, \alpha_j = 0,010$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _J > 1,10 α_j]			P [CFAR _J > 1,20 α_j]			P [CFAR _J > 1,30 α_j]			P [CFAR _J > 1,40 α_j]			P [CFAR _J > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	4.781	2.860	1.879	1.311	790	524	634	385	257	387	236	159	267	163	111
10	3.042	1.824	1.203	841	509	340	410	250	169	252	155	105	175	108	74
20	2.154	1.296	858	602	367	246	296	182	124	183	113	78	128	79	55
25	1.961	1.181	783	550	335	226	272	167	114	168	105	72	118	74	51

Assim como observado na seção anterior, é possível constatar que não é possível obter com no mínimo 85% de probabilidade um risco $CFAR_J$ no máximo 50% maior em relação ao valor esperado α_j com $m = 25$.

5

Considerações Finais e Recomendações

O controle estatístico de processos compõe-se, essencialmente, do monitoramento *on line* dos processos por gráficos de controle. Os limites dos gráficos de controle baseiam-se em estimativas dos parâmetros do processo (média e desvio-padrão, no caso de características de qualidade mensuráveis — “controle por variáveis”). Modelos matemáticos para determinar a probabilidade de alarme falso pressupõem parâmetros estimados com precisão. A imprecisão das estimativas afeta os valores dessa medida de desempenho, fazendo-os diferir dos valores “nominais”, previstos pelos modelos matemáticos.

Recomendações tradicionais são de que os parâmetros sejam estimados com base nos valores da variável de interesse medidos em pelo menos 25 amostras de 4 ou mais unidades do produto. Vários autores advertem que tal número de amostras iniciais é insuficiente para manter, com um razoável grau de certeza, a probabilidade de alarme falso próxima ao valor nominal. Por exemplo, com amostras de tamanho entre 4 e 5, para manter a probabilidade de alarme falso dentro de limites razoáveis, seria necessário utilizar pelo menos 100 amostras na estimação dos parâmetros do processo.

Neste trabalho, analisou-se o efeito da estimação dos parâmetros na Fase II no monitoramento conjunto do processo em controle através dos gráficos de \bar{X} e S , obtendo-se expressões analíticas para a probabilidade conjunta de alarme-falso condicional, $CFAR_J$, em dois casos: quando ambos a média e o desvio-padrão do processo são desconhecidos e necessitam ser estimados, e quando apenas o desvio-padrão é desconhecido e, portanto, estimado (gráfico de \bar{X} centrado no valor-alvo). Tabelas foram apresentadas para quantis superiores da $CFAR_J$, que constituem limites de previsão da taxa de alarme falso real que um particular par de gráficos pode apresentar. Adicionalmente, foram fornecidos os números de amostras na Fase I necessários para garantir um especificado desempenho em controle, em termos de manter limitado a um valor pequeno a probabilidade de que $CFAR_J$ exceda um valor tolerado (também especificado).

Foram considerados gráficos com limites de probabilidade ajustados para ARL 's nominais em controle de 370 e 200 (para cada um dos gráficos), e utilizado

como estimador do desvio-padrão do processo $\frac{\bar{S}}{c_4}$ ou S_p (a raiz quadrada da variância S_p^2). Foi considerado o Gráfico de S sem limite de controle inferior.

Verificou-se que, para um dado n , quando m aumenta, a probabilidade de $CFAR_j$ exceder um valor b torna-se significativamente menor, podendo-se concluir que para se ter um alto grau de confiança de que a $CFAR_j$ se manterá próxima ao valor especificado b (probabilidade de exceder baixa) é necessário um número de amostras m muito grande. Os resultados demonstram que com 25 amostras iniciais (m) de tamanho $n = 5$, números usualmente recomendados na literatura tradicional de CEP, há grande probabilidade de $CFAR_j$ ser consideravelmente maior que o valor nominal α_j . Além disso, comparando-se as densidades acumuladas da $CFAR_j$ no Caso UU com as densidades acumuladas no Caso KU), constata-se que a densidade acumulada da $CFAR_j$ no Caso UU cresce mais rapidamente que no Caso KU , para o mesmo par mxn .

Verificou-se que para os valores de m , n e α_j considerados neste trabalho, o menor quantil de 0,90 que $CFAR_j$ pode apresentar no monitoramento conjunto é de 0,0060, para o valor esperado $\alpha_j = 0,0054$ e 0,0111, para o valor esperado $\alpha_j = 0,010$, que são obtidos para $n = 25$ (atípico) e $m = 1.000$ (muito grande). Observe que esses quantis “mínimos” já são 10% maiores que os valores esperados para α_j em cada caso, o que indica quão severo é o efeito do erro na estimação da média e do desvio-padrão do processo. Esses resultados são consistentes com os obtidos por Epprecht et al. (2015), Saleh et al. (2015) e Jardim et al. (2016).

Uma importante constatação, conforme já apresentado, é a de que o número de amostras recomendado em livros tradicionais e amplamente recomendados de CEP, $m = 25$, não consta entre os resultados, podendo-se afirmar que não é possível garantir com um razoável grau de certeza ($p \geq 85\%$), que $m = 25$ amostras iniciais, retiradas de um processo cujos parâmetros são

desconhecidos e estimados com erro, seja suficiente para estabelecer um risco de alarme falso conjunto obtido no máximo 50% maior em relação ao risco de alarme falso conjunto dos gráficos de \bar{X} e S , quando os parâmetros são estimados com precisão.

Em todas as análises foram obtidos resultados semelhantes para os dois estimadores do desvio-padrão utilizados, \bar{S}/c_4 e S_p . Por este motivo, em alguns casos, somente foram apresentados os resultados obtidos para o estimador S_p , por ser melhor estimador que \bar{S}/c_4 em termos do erro quadrático médio. Observou-se que a diferença entre os resultados para os dois estimadores, em cada análise, diminuiu na medida em que m aumentou.

É importante destacar que o número de amostras (m) na Fase I necessário para garantir o desejado desempenho conjunto em controle dos gráficos está entre os números de amostras encontrados para o gráfico de \bar{X} (resultados intermediários calculados neste trabalho) e os números de amostra obtidos por Epprecht et al. (2015) para o gráficos de S , dadas as mesmas condições (a mesma probabilidade p de a taxa de alarme falso conjunta condicional em questão — $CFAR_J$, $CFAR_{\bar{X}}$ ou $CFAR_S$ — exceder o seu respectivo valor nominal por um mesmo percentual ε) e considerando como taxa de alarme-falso conjunta nominal a taxa de alarme-falso conjunta quando cada gráfico apresentasse sua taxa de alarme-falso nominal individual.

Em termos concretos: uma taxa de alarme-falso individual de 0,0027 para cada gráfico correspondente a uma taxa de alarme-falso conjunta de 0,0054 para o par de gráficos. E, por exemplo, para qualquer tamanho de amostra, o número mínimo de amostras para garantir com uma probabilidade de 0,90 que a taxa de alarme-falso conjunta obtida não excederá 0,0054 mais do que 20%, está entre o número mínimo de amostras que garante com probabilidade de 0,90 que a taxa de alarme-falso obtida para o gráfico de \bar{X} não excede mais do que 20% o valor esperado 0,0027 e o número mínimo de amostras que garante com probabilidade

de 0,90 que a taxa de alarme-falso obtida para o gráfico de S não excede mais do que 20% o valor esperado 0,0027.

Isso demonstra que considerar o desempenho conjunto dos gráficos em controle alivia ligeiramente o problema do grande número de amostras iniciais necessário, que não é tão grande como o número máximo requerido pelos dois gráficos. No entanto, este número ainda é muito grande. Isso motiva a investigação do ajuste dos limites dos gráficos (estudado por Faraz et al., 2015 e por Goedhard et al., 2016b para o gráfico de S individualmente, bem como por Goedhard et al., 2016a e por Jardim et al., 2016 para o gráfico de \bar{X} individualmente) a partir da perspectiva do seu desempenho conjunto. Esta é uma questão que merece ser investigada.

Na seção 4.1.1 observou-se que, para $m=25$ e valores de n analisados, a probabilidade de $CFAR_J$ exceder determinado valor para o estimador S_p é maior do que a probabilidade de exceder esse mesmo valor quando se utiliza o estimador \bar{S}/c_4 , ou seja, o inverso do que ocorreu para valores de m maiores que 25. Por exemplo, $P(CFAR_J > 0,021 | \hat{\sigma} = \bar{S}/c_4, m = 25, n = 5, \alpha_J = 0,10) = 0,1289$ e $P(CFAR_J > 0,021 | \hat{\sigma} = S_p, m = 25, n = 5, \alpha_J = 0,10) = 0,1522$. Essa é uma questão que merece ser investigada, recomendando-se verificar o comportamento da $CFAR_J$ para valores de m entre 25 e 100, para ambos os estimadores, uma vez que pode ser que para alguns valores específicos de $CFAR_J$ a situação se inverta e a probabilidade de ultrapassagem de tais valores seja maior com o estimador \bar{S}/c_4 do que com o estimador S_p .

ALY, A. A.; MAHMOUD, M. A.; WOODALL, W. H. **A Comparison of the Performance of Phase II Simple Linear Profile Control Charts when Parameters are Estimated.** Communication in Statistics: Simulation and Computation, v. 44, n. 6, p.1.432-1.440, abr. 2015.

BISCHAK, D. P.; TRIETSCH, D. **The Rate of False Signals in \bar{X} Charts with Estimated Limits.** Journal of Quality Technology, v. 39, n. 1, p. 54 – 65, 2007.

BURROUGHS, T. E.; RIGDON, S. E.; CHAMP, C. W. **An Analysis of Shewhart Charts with Run Rules When No Standards Are Given.** Proceedings of the Quality and Productivity Section of the American Statistical Association, p. 16-19, aug. 1993.

CASTAGLIOLA, P.; CELANO, G.; CHEN, G. **The Exact Run Length Distribution and Design of the S^2 Chart When the In-Control Variance Is Estimated.** International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, v. 16, n. 1, p. 23–38, 2009.

CASTAGLIOLA, P.; MARAVELAKIS, P. **A CUSUM control chart for monitoring the variance when parameters are estimated.** Journal of Statistical Planning and Inference, v. 141, p. 1463–1478, 2011.

CHAKRABORTI, S. **Parameter Estimation and Design Considerations in Prospective Applications of the \bar{X} Chart.** Communication in Statistics: Simulation & Computation, v. 29, n. 1, p. 61-81, 2006.

_____. **Run Length Distribution and Percentiles: The Shewhart Chart with Unknown Parameters.** Quality Engineering, v. 19, n. 2, p. 119-127, 2007.

CHEN, G. **The Mean and Standard Deviation of the Run Length Distribution of \bar{X}**

Charts when Control Limits are Estimated. Statistica Sinica, v. 7, n. 3, p. 789-798, 1997.

_____. **The Run Length Distributions of the R , S and S^2 Control Charts When S Is Estimated.** The Canadian Journal of Statistics, v. 26, n. 2, p. 311-322, jun. 1998.

COSTA, F. B. C.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade.** 2. ed. São Paulo: Atlas, 2005. 334 p.

DEL CASTILHO, E. **Run Length Distribution and Economic Design of \bar{X} Charts with Unknown Process variance.** Metrika v. 43, p. 189-201, 1996.

DERMAN, C.; ROSS, S. **An Improved Estimator of σ in Quality Control**. Probability in the Engineering and Informational Sciences, v. 9, p. 411-415, 1995.

EPPRECHT, E. K.; LOUREIRO, L.D.; CHAKRABORTI, S. **Effect of the Amount of Phase I Data on the Phase II Performance of S^2 and S Control Charts**. Journal of Quality Technology, v. 47, n. 2, p. 139-155, abr. 2015.

FARAZ, A., WOODALL, W. H., HEUCHENNE, C. **Guaranteed conditional performance of the S^2 control chart with estimated parameters**. International Journal of Production Research, v. 53, n. 14, p. 4405-4413, 2015.

GOEDHART, R., SCHOONHOVEN, M., DOES, R. J.M.M. **Guaranteed In-Control Performance for the Shewhart \bar{X} and \bar{X} Control Charts**. Ainda não publicado. 2016a.

GOEDHART, R., SILVA, M. M., SCHOONHOVEN, M., EPPRECHT, E. K., CHAKRABORTI, S. DOES, R. J.M.M., VEIGA FILHO, A. L. **Shewhart Control Charts for Dispersion Adjusted for Parameter Estimation**. Ainda não publicado. 2016b.

GUO, B. WANG, B. X. **The Design of the ARL-Unbiased S^2 Chart When the In-Control Variance Is Estimated**. Quality and Reliability Engineering International, v.31, n. 3, p. 501-511, abr.2015.

HALD, A. **Statistical Theory with Engineering Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1952. 783p.

HAWKINS, D. M. **Self-starting CUSUM Charts for Location and Scale**. The Statistician, v. 36, p. 299-315. 1987.

HILLIER, F. S. **\bar{X} – and \bar{R} – Chart Control Limits Based on A Small Number of Subgroups**. Journal of Quality Technology, v. 1, n. 1, p. 17-26, jan. 1969.

JARDIM, F. S., CHAKRABORTI, S., EPPRECHT, E. K., WEN, S. **Effect of the Amount of Phase I Data on the Phase II Performance of the \bar{X} Chart and Guaranteed In-Control Performance**. Ainda não publicado. 2015.

JENSEN, W. A.; JONES-FARMER, L. A.; CHAMP, C. W.; WOODALL, W. H. **Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review**. Journal of Quality Technology, v. 38, n. 4, p. 349-364, oct. 2006.

JONES, L. A.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. **The Performance of Exponentially Weighted Moving Average Charts with Estimated Parameters**. Technometrics v. 43, n. 2, p. 156-167, 2001.

JONES, L. A.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. **The Run Length Distribution of the CUSUM with Estimated Parameters**. Journal of Quality Technology, v. 36, n. 1, p. 95-108, 2004.

JONES, M. A.; STEINER, S. H. **Assessing the Effect of Estimation Error on the Riskadjusted CUSUM Chart Performance.** International Journal for Quality in Health Care, v. 24, n. 2, p. 176-181, 2012.

LEE, J.; WANG, N.; XU, L.; SCHUH, A.; WOODALL, W. H. **The Effect of Parameter Estimation on Upper-sided Bernoulli Cumulative Sum Charts.** Quality and Reliability Engineering International, v. 29, n. 5, p. 639-651, 2013.

MAHMOUD, M. A.; HENDERSON, G. R.; EPPRECHT, E. K.; WOODALL, W. H. **Estimating the Standard Deviation in Quality Control Applications.** Journal of Quality Technology, v. 42, n. 4, p. 348-357, 2010.

MARAVELAKIS, P. E.; PANARETOS, J.; PSARAKIS, S. **Effect of Estimation of the Process Parameters on the Control Limits of the Univariate Control Charts for Process Dispersion.** Communications in Statistics: Simulation & Computation, v. 31, n. 3, p. 443-461, 2002.

MARAVELAKIS, P.; CASTAGLIOLA, P. **An EWMA chart for monitoring the process standard deviation when parameters are estimated.** Computational Statistics and Data Analysis, v. 53, p. 2653-2664, 2009.

MCCRACKEN, A. K.; CHAKRABORTI, S. **Control Charts for Joint Monitoring of Mean and Variance: An Overview.** Quality Technology & Quantitative Management, v. 10, n.1, p. 17-36, 2013.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**, 7. ed. New York: John Wiley & Sons, 2013. 674 p.

NEDUMARAN, G.; PIGNATIELLO JR, J. J. **On Estimating \bar{X} Control Chart Limits.** Journal of Quality Technology, v. 33, n. 2, p. 206-212, abr. 2001.

PSARAKIS, S.; VYNIU, A. K.; CASTAGLIOLA, P. (2013). **Some Recent Developments on the Effects of Parameter Estimation on Control Charts.** Quality and Reliability Engineering International, v. 30, n. 8, p. 1.113-1.129, dez. 2014.

QUESENBERRY, C. P. **SPC Q Charts for Start-Up Processes and Short or Long Runs.** Journal of Quality Technology, v. 23, n. 3, p. 213-224, jul. 1991.

_____. **The Effect of Sample Size on Estimated Limits for \bar{X} and X Control Charts.** Journal of Quality Technology, v. 25, n. 4, p. 237-247, oct. 1993.

RYAN, T. P. **Statistical Methods for Quality Improvement**, 2. ed. New York : Wiley, 2000. 657p.

SALEH, N. A.; MAHMOUD, M. A.; KEEFE, M. J.; WOODALL, W. H. **The Difficulty in Designing Shewhart \bar{X} and X Control Charts with Estimated Parameters.** Journal of Quality Technology, v. 47, n. 2, p. 127-138, Abr. 2015.

SCHOONHOVEN, M.; RIAZ, M.; DOES, R.J.M.M. **Design and Analysis of Control Charts for Standard Deviation with Estimated Parameters.** Journal of Quality Technology, v. 43, n. 4, p. 307-333, 2011.

TRIETSCH, D.; BISCHAK, D. **The Rate of False Signals for Control Charts with Limits Estimated from Small Samples.** 33rd Annual Conference, The Operational Research Society of New Zealand, p. 232-241, 1998.

TSAL, T. R.; LIN, J. J.; WU, S. J.; LIN, H. C. **On Estimating Control Limits of \bar{X} Chart When the Number of Subgroups is Small.** International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 26, n. 11-12, p. 1312-1316, 2005.

WHEELER, D. J. **Advanced Topics in Statistical Quality Control: The Power of Shewhart's Charts.** Knoxville, Tennessee: SPC Press, 1995. 484 p.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. **Research Issues and Ideas in Statistical Process Control.** Journal of Quality Technology, v. 31, n. 4, p. 376-386, oct. 1999.

YANG, C.-H.; HILLIER, F. S. **Mean and Variance Control Chart Limits Based on a Small Number of Subgroups.** Journal of Quality Technology, v. 2, n. 1, p. 9-16, jan. 1970.

ZHANG, L. BEBBINGTON, M. S.; LAI, C. D.; GOVINDARAJU, K. **On Statistical Design of the S^2 Chart.** Communications in Statistics: Theory and Methods, v. 34, n. 1, p. 229-244, jan. 2005.

ZHANG, M.; MEGAHED, F. M.; WOODALL, W. H. **Exponential CUSUM Charts with Estimated Control Limits.** Quality and Reliability Engineering International, v. 30, n. 2, p. 275-286, Mar. 2014.

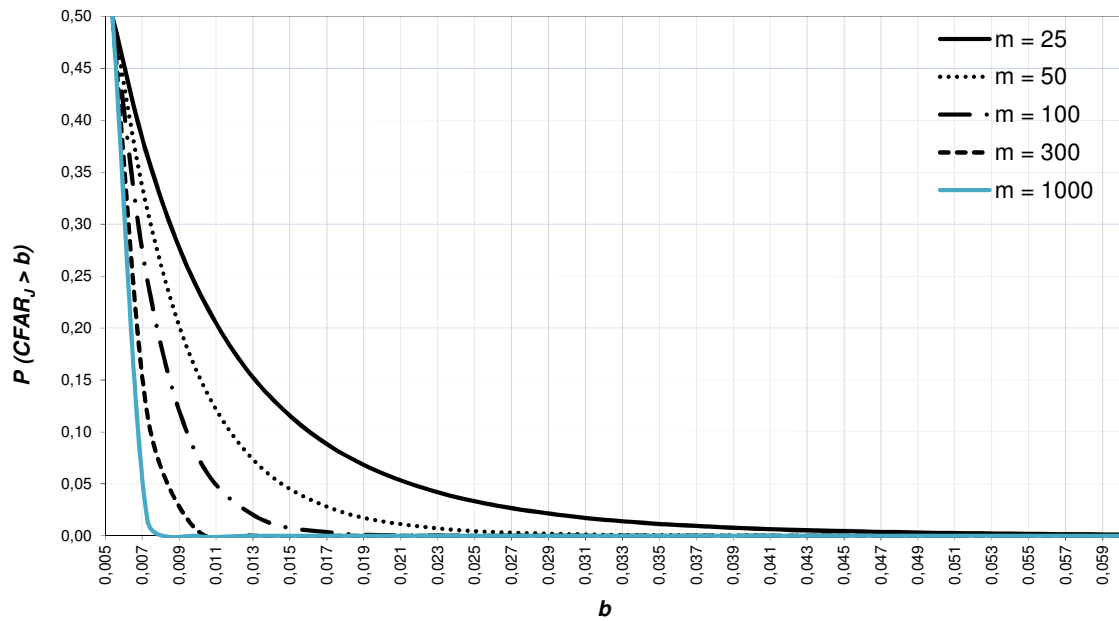
ZHANG, M.; PENG, Y.; SCHUH, A.; MEGAHED, F. M.; WOODALL, W. H. **Geometric Charts with Estimated Control Limits.** Quality and Reliability Engineering International v. 29, n.2, p. 209-223, 2013.

**Apêndice A -
Tabelas e Gráficos da Análise 1 – Gráfico da Média
centrado no valor alvo (Caso *KU*)**

Tabela A.1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU .

$P(CFAR_J > b)$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0054	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	10	0,0054	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	0,0073	0,3653	0,3131	0,2455	0,1165	0,0147		0,0077	0,3003	0,2295	0,1475	0,0349	0,0005
	0,0098	0,2455	0,1650	0,0842	0,0085	0,0000		0,0110	0,1475	0,0693	0,0181	0,0001	0,0000
	0,0131	0,1508	0,0720	0,0194	0,0002	0,0000		0,0157	0,0581	0,0132	0,0008	0,0000	0,0000
	0,0174	0,0842	0,0257	0,0029	0,0000	0,0000		0,0221	0,0181	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0229	0,0426	0,0074	0,0003	0,0000	0,0000		0,0309	0,0044	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0299	0,0194	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000		0,0428	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0389	0,0080	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000		0,0585	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0500	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0789	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0638	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1047	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0054	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	25	0,0054	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	0,0084	0,2219	0,1394	0,0628	0,0040	0,0000		0,0065	0,3652	0,3130	0,2453	0,1163	0,0146
	0,0131	0,0628	0,0152	0,0011	0,0000	0,0000		0,0079	0,2453	0,1648	0,0840	0,0085	0,0000
	0,0203	0,0108	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000		0,0095	0,1506	0,0718	0,0193	0,0002	0,0000
	0,0314	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0115	0,0840	0,0256	0,0029	0,0000	0,0000
	0,0476	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0140	0,0424	0,0074	0,0003	0,0000	0,0000
	0,0707	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0170	0,0193	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0206	0,0079	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1443	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0249	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1975	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0301	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$$P(CFAR_J > b); n = 5; \alpha_J = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b); n = 10; \alpha_J = 0,0054$$

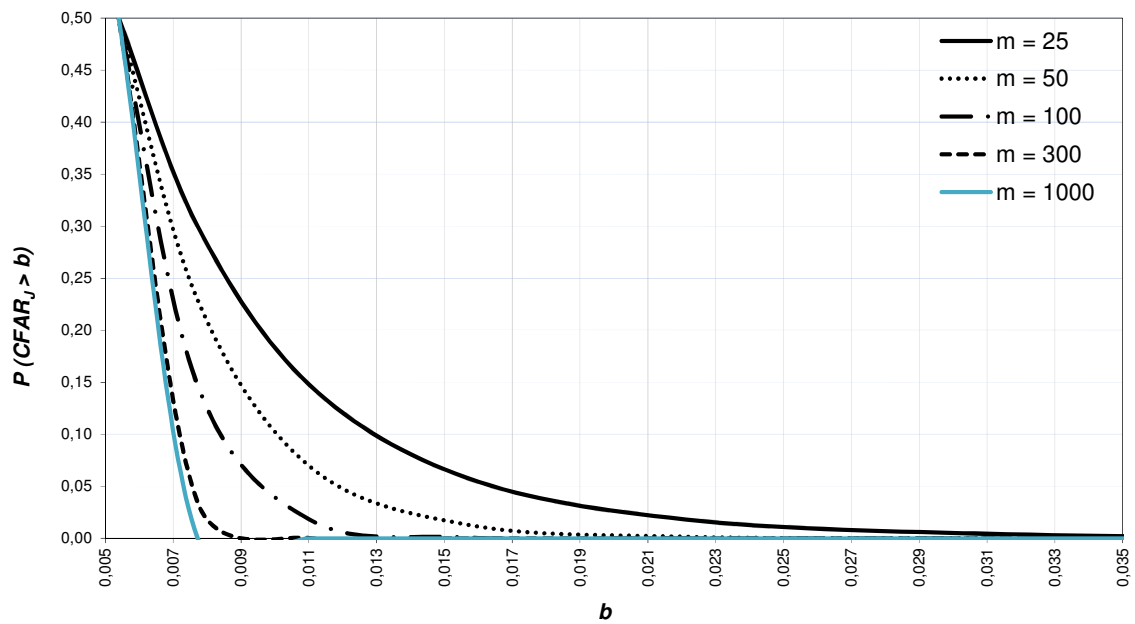
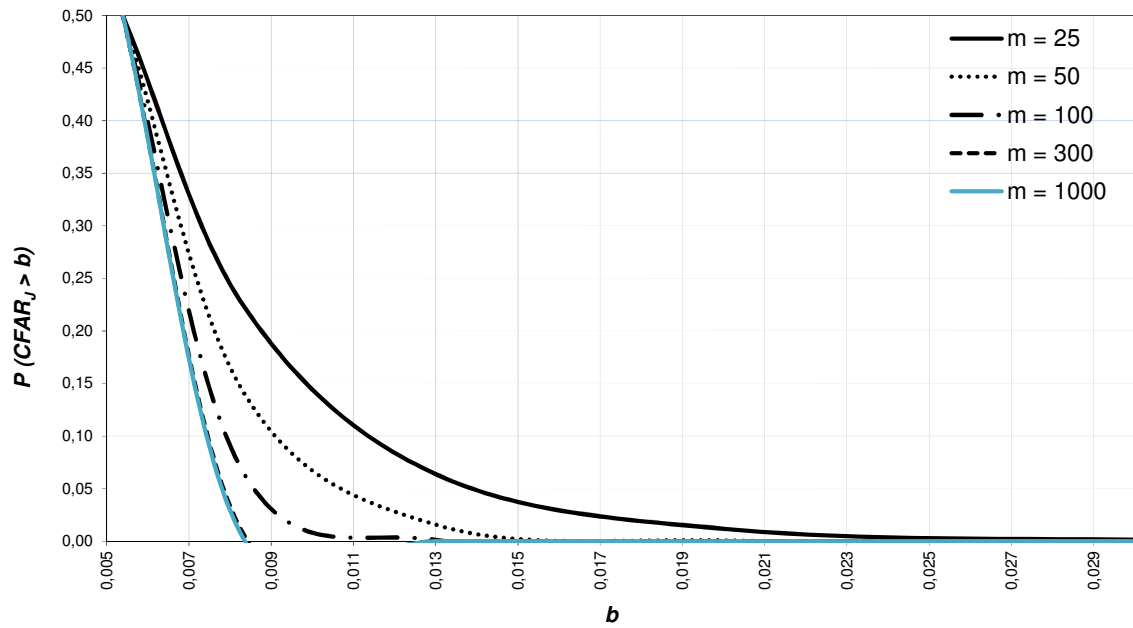


Figura A.1 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU .

$$P(CFAR_J > b); n = 20; \alpha_J = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b); n = 25; \alpha_J = 0,0054$$

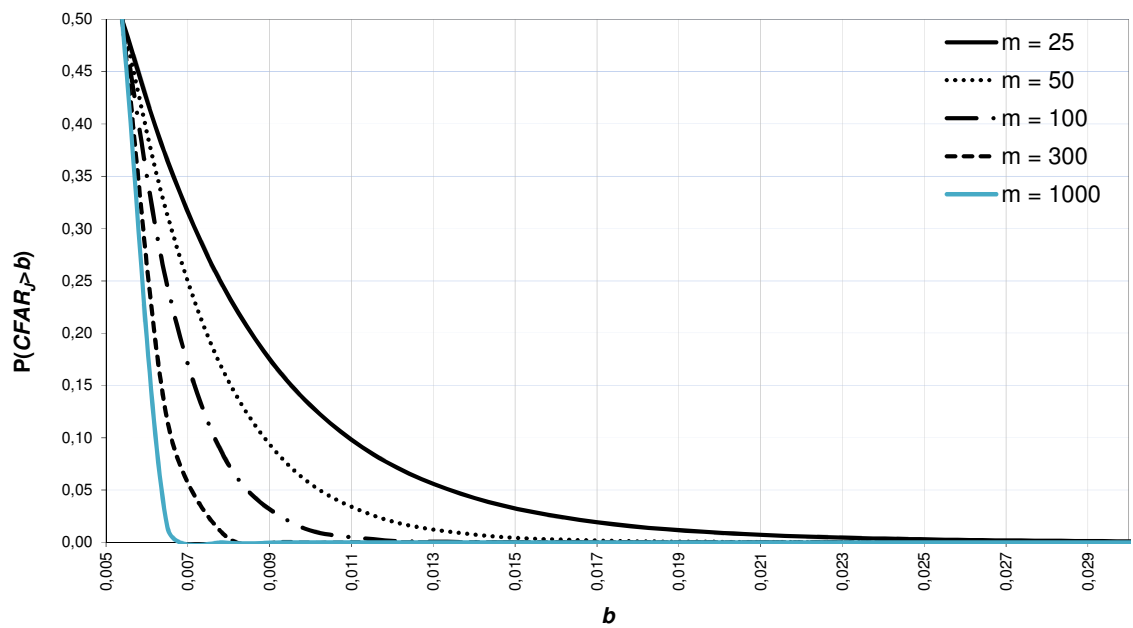
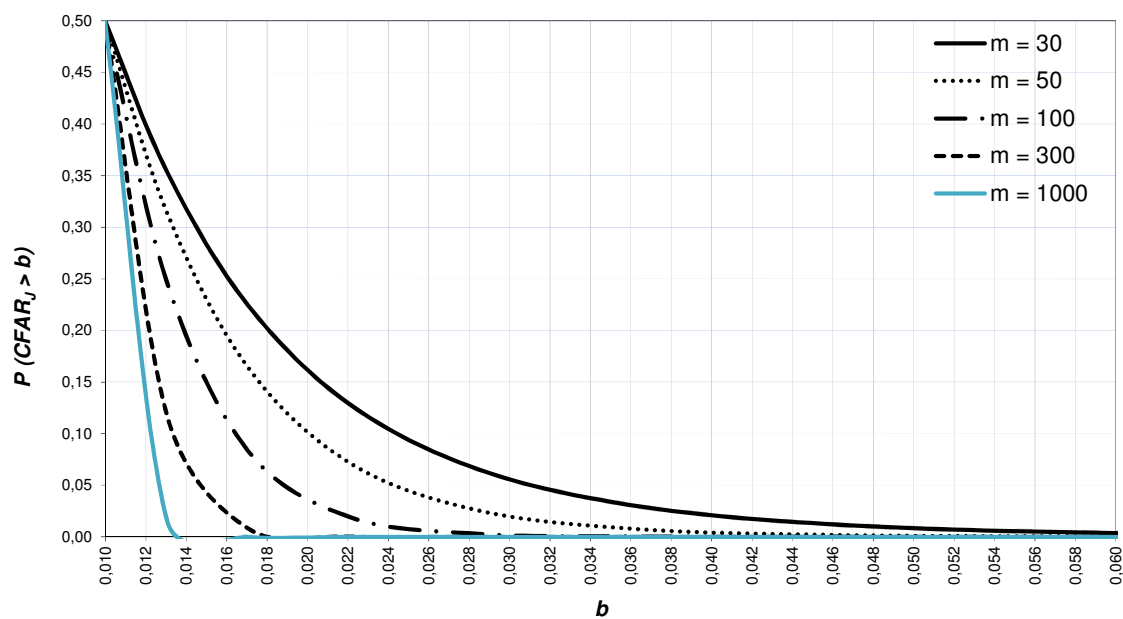


Figura A.2 - Gráfico da distribuição acumulada complementar $P(CFAR_J > a)$, para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU .

Tabela A.2 (Tabela 2 no texto) – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU .

$P(CFAR_J > b)$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	10	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	0,0131	0,3530	0,3131	0,2455	0,1165	0,0147		0,0138	0,3003	0,2295	0,1475	0,0349	0,0005
	0,0170	0,2253	0,1650	0,0842	0,0085	0,0000		0,0190	0,1475	0,0693	0,0181	0,0001	0,0000
	0,0221	0,1289	0,0720	0,0194	0,0002	0,0000		0,0261	0,0581	0,0132	0,0008	0,0000	0,0000
	0,0284	0,0657	0,0257	0,0029	0,0000	0,0000		0,0355	0,0181	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0364	0,0296	0,0074	0,0003	0,0000	0,0000		0,0480	0,0044	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0462	0,0118	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000		0,0643	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0583	0,0041	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000		0,0849	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0730	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1108	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0907	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1426	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	25	0,0100	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
	0,0149	0,2219	0,1394	0,0628	0,0040	0,0000		0,0118	0,3652	0,3130	0,2453	0,1163	0,0146
	0,0222	0,0628	0,0152	0,0011	0,0000	0,0000		0,0140	0,2453	0,1648	0,0840	0,0085	0,0000
	0,0332	0,0108	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000		0,0167	0,1506	0,0718	0,0193	0,0002	0,0000
	0,0490	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0199	0,0840	0,0256	0,0029	0,0000	0,0000
	0,0712	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0237	0,0424	0,0074	0,0003	0,0000	0,0000
	0,1014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0282	0,0193	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1411	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0336	0,0079	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1914	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0399	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,2526	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0472	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$$P(CFAR_J > b); n = 5; \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b); n = 10; \alpha_J = 0,010$$

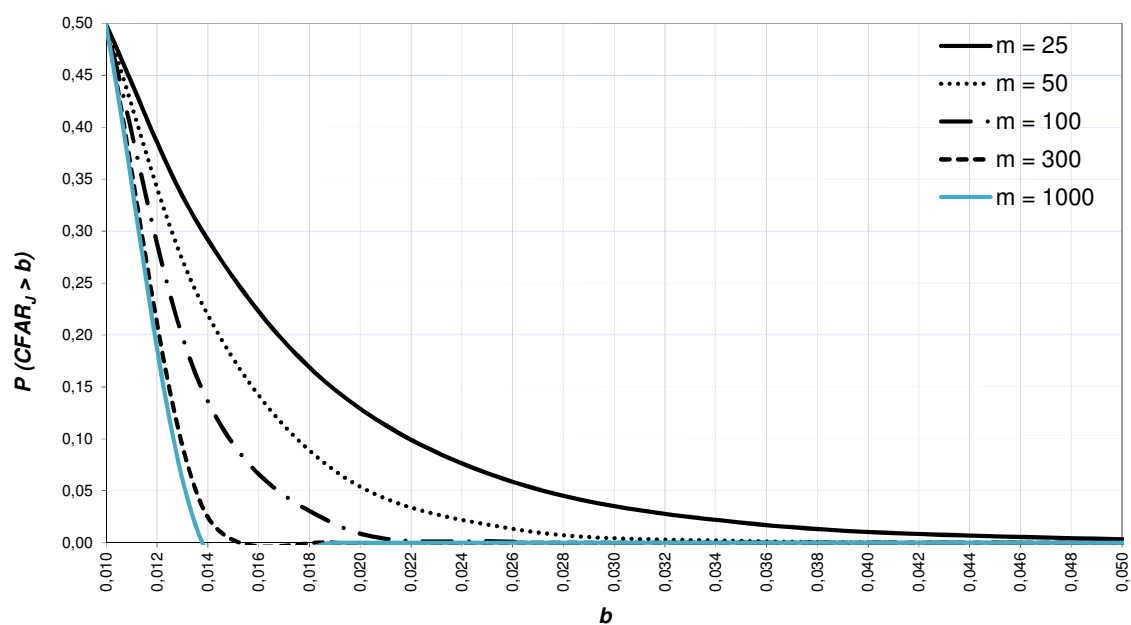
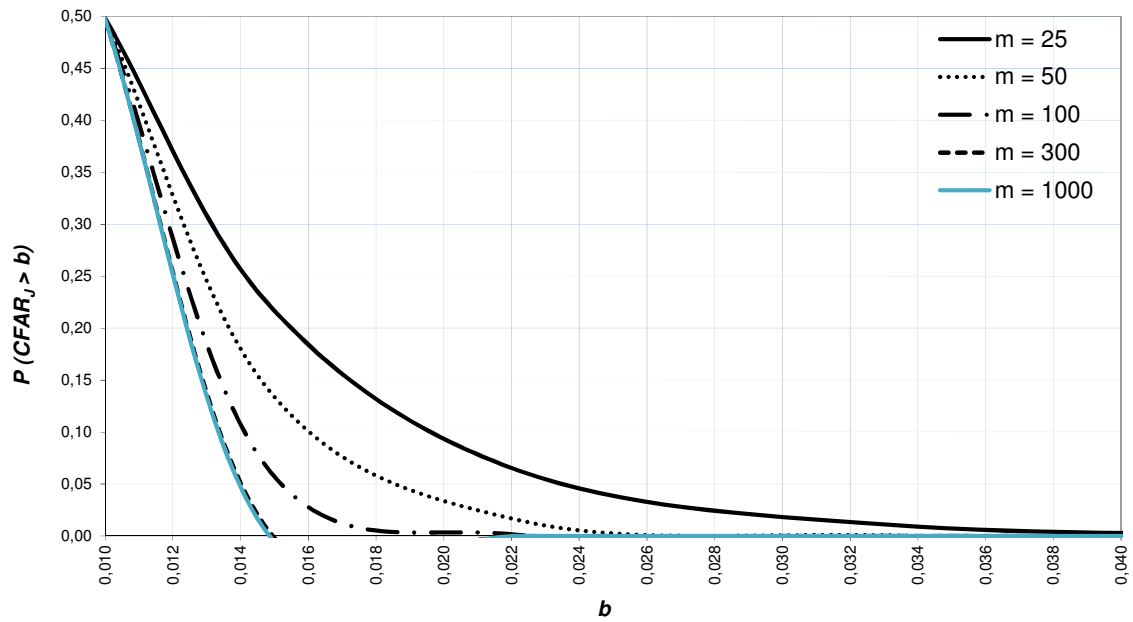


Figura A.3 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU.

$$P(CFAR_J > b); n = 20; \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b); n = 25; \alpha_J = 0,010$$

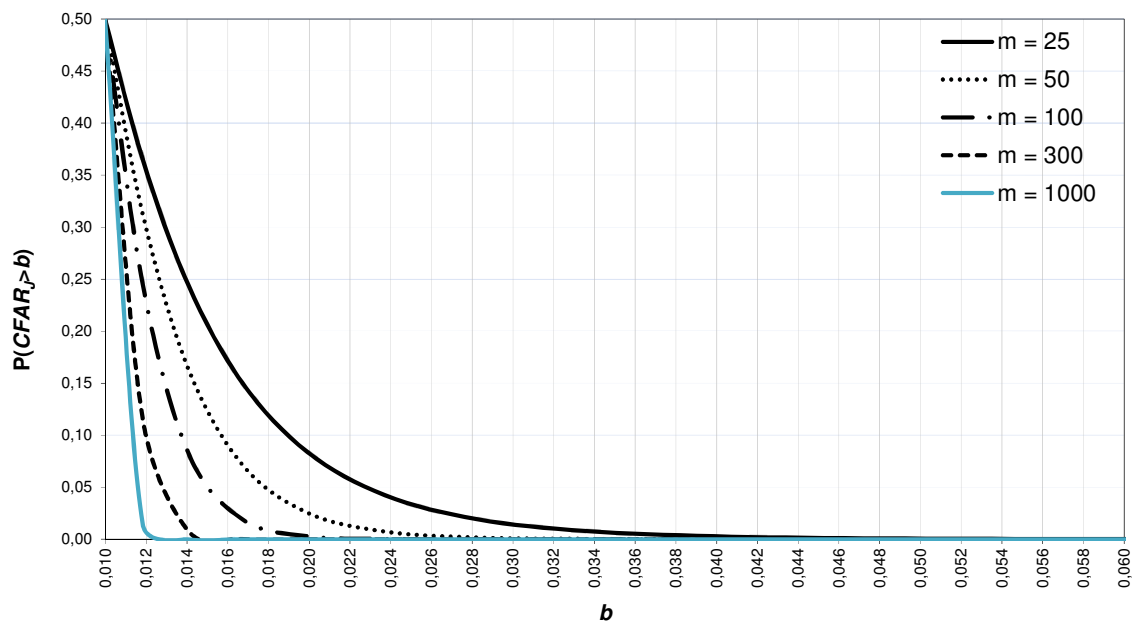
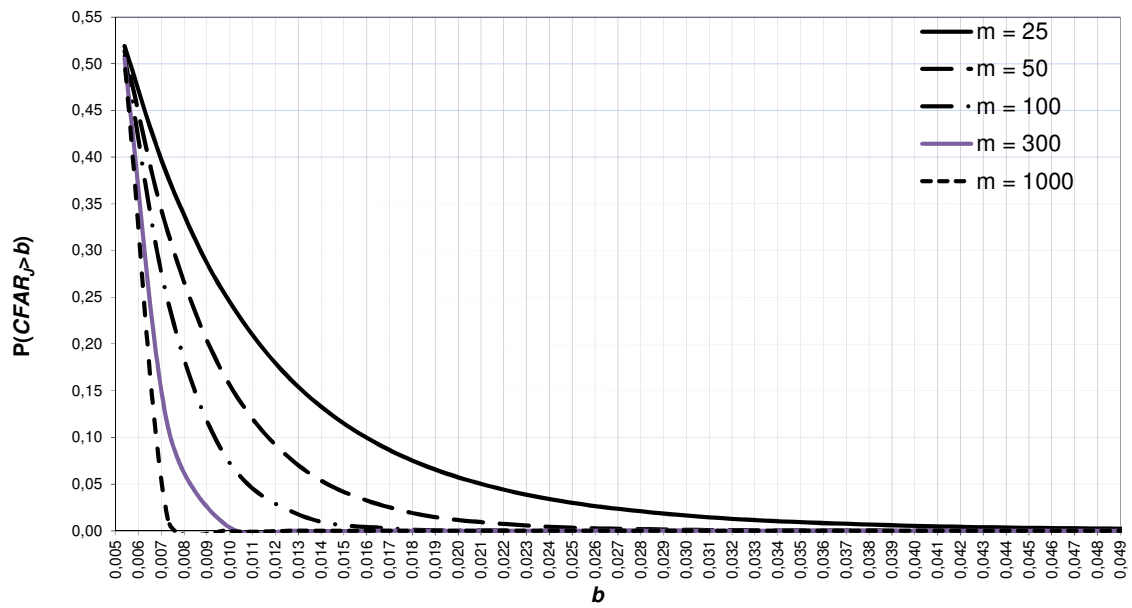


Figura A.4 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso KU .

Tabela A.3 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador S_p , Caso KU .

$P(CFAR_J > b), \alpha_J = 0,0054$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0110	0,2090	0,1192	0,0454	0,0016	0,0000	10	0,0054	0,5125	0,5089	0,5063	0,5036	0,5020
	0,0124	0,1700	0,0833	0,0238	0,0003	0,0000		0,0077	0,3082	0,2324	0,1470	0,0332	0,0004
	0,0139	0,1358	0,0561	0,0116	0,0000	0,0000		0,0110	0,1496	0,0680	0,0168	0,0001	0,0000
	0,0155	0,1065	0,0363	0,0052	0,0000	0,0000		0,0157	0,0570	0,0120	0,0007	0,0000	0,0000
	0,0174	0,0820	0,0227	0,0022	0,0000	0,0000		0,0221	0,0167	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0229	0,0392	0,0058	0,0002	0,0000	0,0000		0,0309	0,0037	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0299	0,0165	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000		0,0428	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0389	0,0061	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000		0,0585	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0500	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0789	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0638	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1047	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0054	0,5086	0,5061	0,5043	0,5025	0,5014	25	0,0054	0,5077	0,5054	0,5038	0,5022	0,5012
	0,0084	0,2260	0,1403	0,0622	0,0037	0,0000		0,0086	0,1976	0,1119	0,0418	0,0013	0,0000
	0,0131	0,0627	0,0145	0,0010	0,0000	0,0000		0,0140	0,0420	0,0070	0,0002	0,0000	0,0000
	0,0203	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000		0,0226	0,0045	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0314	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0362	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0476	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0565	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0707	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0860	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1267	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1443	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1803	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1975	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,2475	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$$P(CFAR_J > b); n = 5; \alpha_J = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b); n = 10; \alpha_J = 0,0054$$

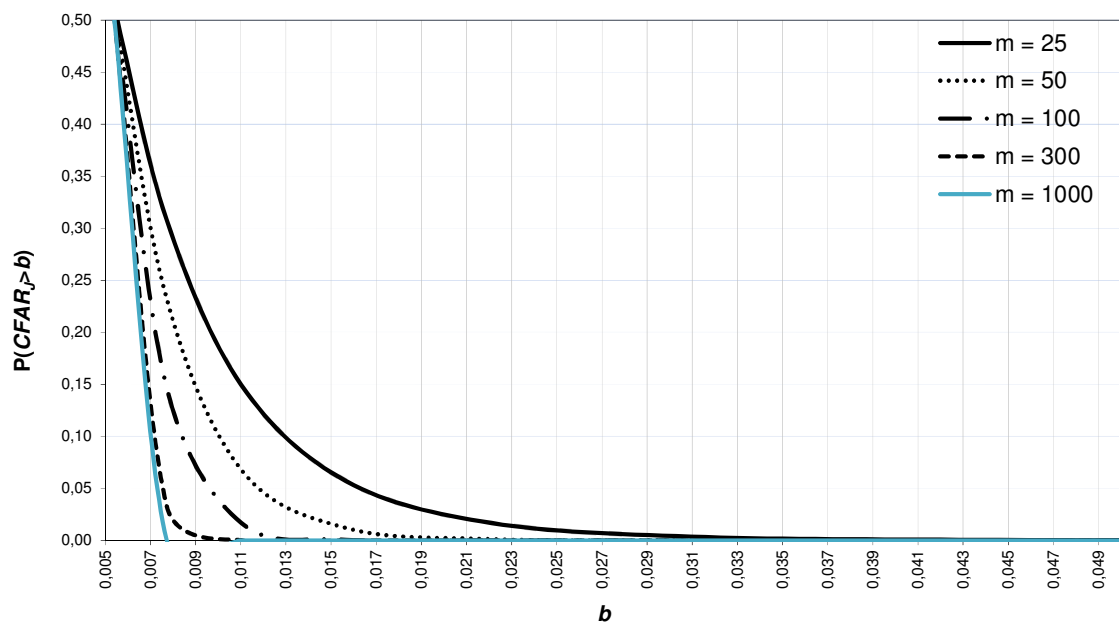
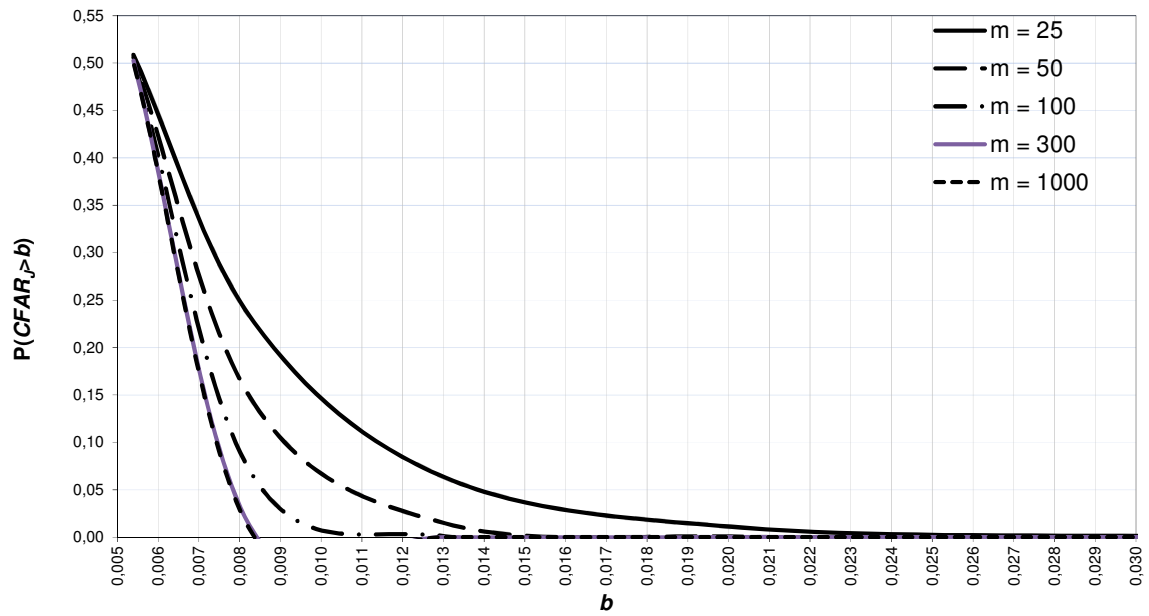


Figura A.5 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador Sp , Caso KU .

$$P(CFAR_J > b); n = 20; \alpha_J = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b); n = 25; \alpha_J = 0,0054$$

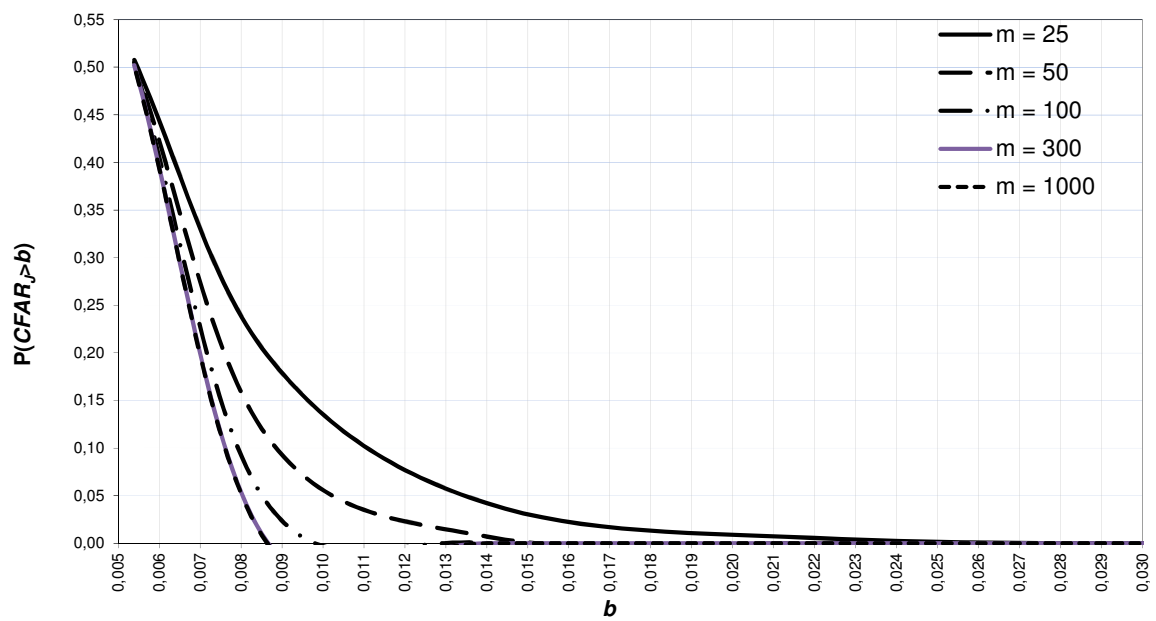
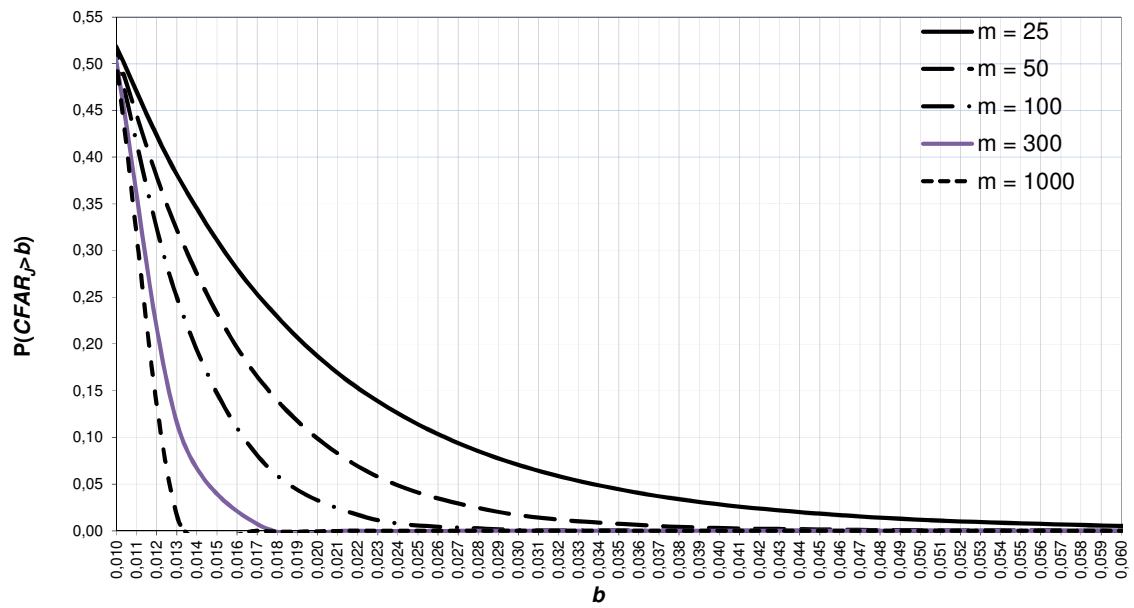


Figura A.6 – Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador Sp , Caso KU .

Tabela A.4 (Tabela 1 no texto) – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador Sp , Caso KU .

$P(CFAR_J > b), \alpha_J = 0,010$													
n	b	m					n	b	m				
		25	50	100	300	1000			25	50	100	300	1000
5	0,0100	0,5188	0,5133	0,5094	0,5054	0,5030	10	0,0100	0,5125	0,5089	0,5063	0,5036	0,5020
	0,0131	0,3792	0,3197	0,2462	0,1119	0,0126		0,0138	0,3082	0,2324	0,1470	0,0332	0,0004
	0,0170	0,2528	0,1648	0,0804	0,0070	0,0000		0,0190	0,1496	0,0680	0,0168	0,0001	0,0000
	0,0221	0,1522	0,0686	0,0168	0,0001	0,0000		0,0261	0,0570	0,0120	0,0007	0,0000	0,0000
	0,0284	0,0820	0,0227	0,0022	0,0000	0,0000		0,0355	0,0167	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0364	0,0392	0,0058	0,0002	0,0000	0,0000		0,0480	0,0037	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0462	0,0165	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000		0,0643	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0583	0,0061	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000		0,0849	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0730	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1108	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0907	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1426	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0100	0,5086	0,5061	0,5043	0,5025	0,5014	25	0,0100	0,5077	0,5054	0,5038	0,5022	0,5012
	0,0149	0,2260	0,1403	0,0622	0,0037	0,0000		0,0153	0,1976	0,1119	0,0418	0,0013	0,0000
	0,0222	0,0627	0,0145	0,0010	0,0000	0,0000		0,0237	0,0420	0,0070	0,0002	0,0000	0,0000
	0,0332	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000		0,0366	0,0045	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0490	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0558	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0712	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0832	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1211	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1411	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1710	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,1914	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,2337	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,2526	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,3089	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$$P(CFAR_J > b); n = 5; \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b); n = 10; \alpha_J = 0,010$$

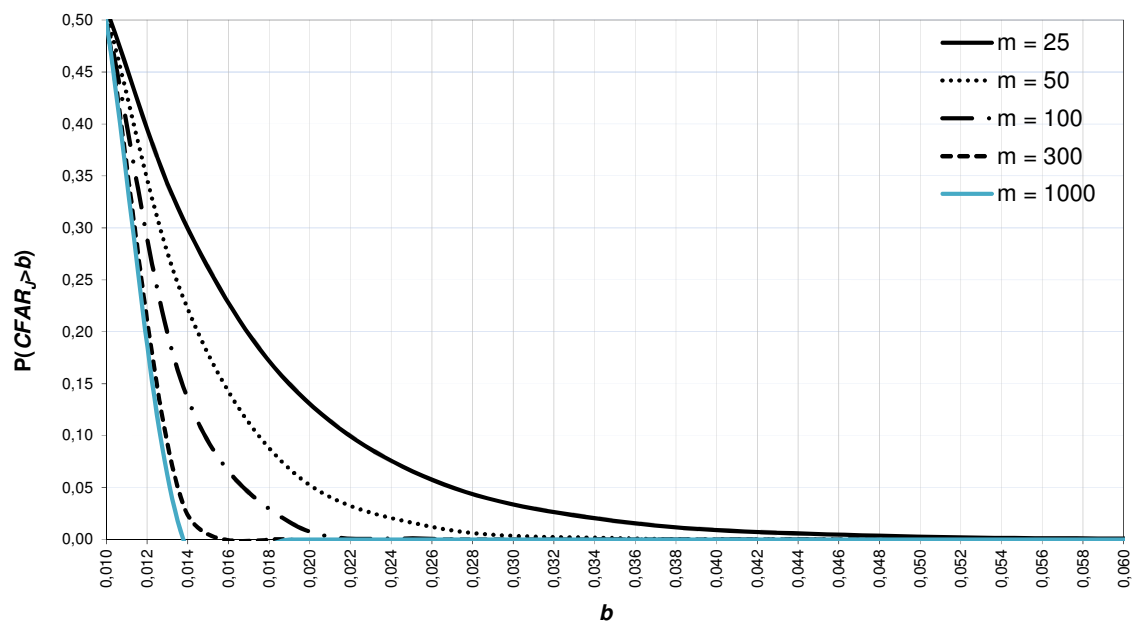
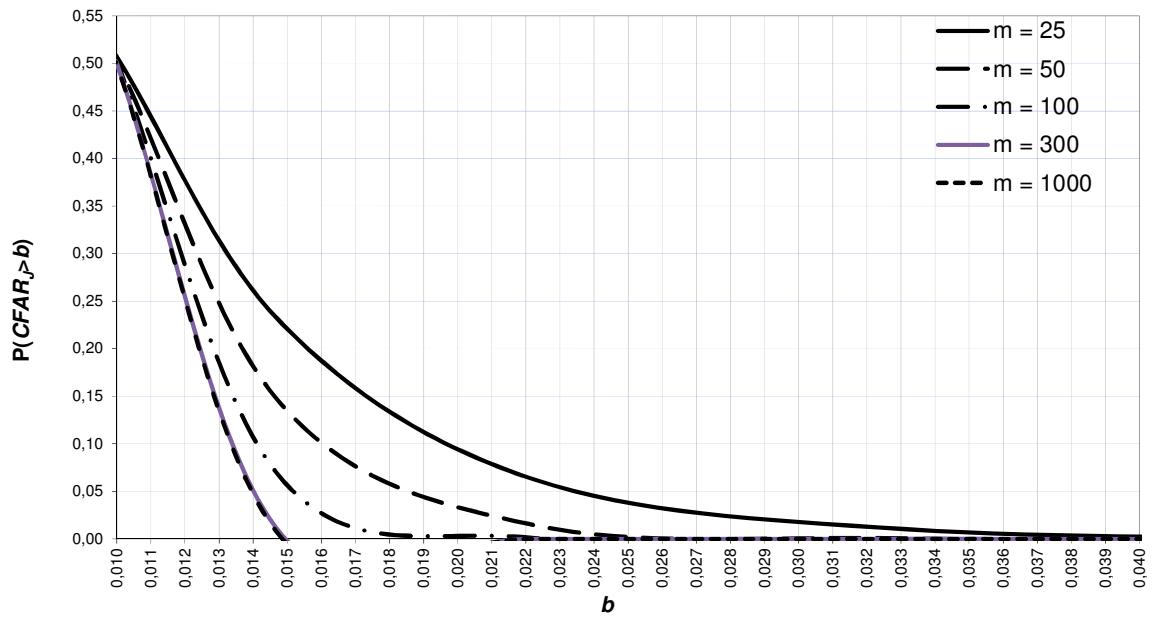


Figura A.7 (Figura 1 no texto) - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador Sp , Caso KU .

$P(CFAR_J > b); n = 20; \alpha_J = 0,010$



$P(CFAR_J > b); n = 25; \alpha_J = 0,010$

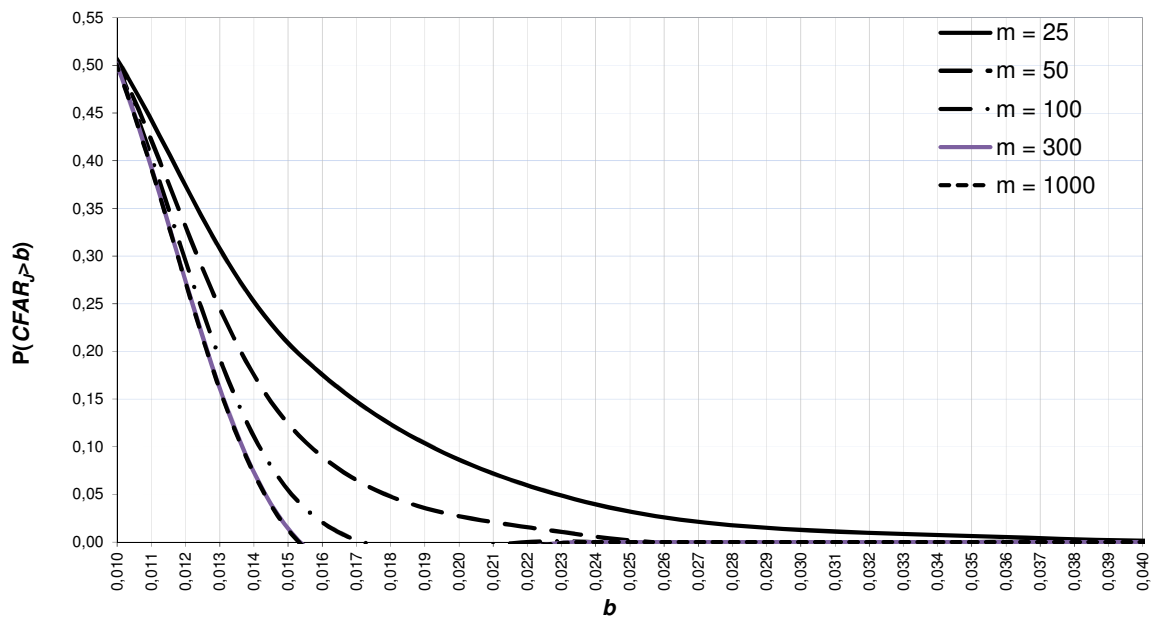


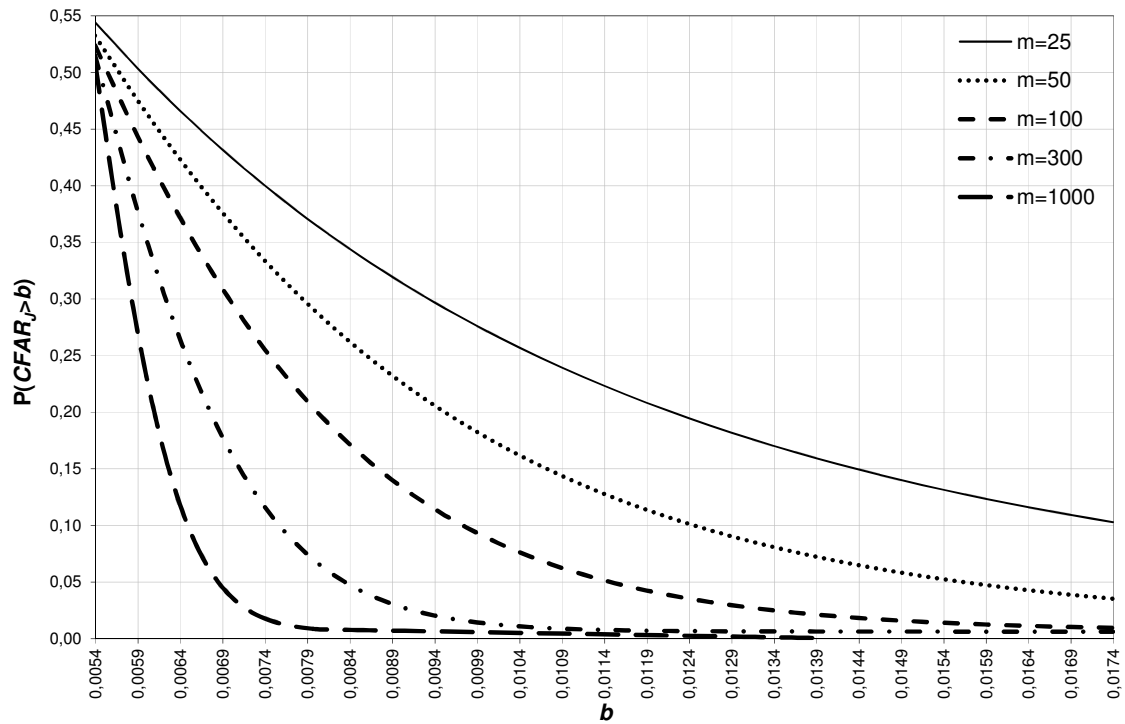
Figura A.8 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25, $\alpha_J = 0,010$ e estimador Sp , Caso KU .

**Apêndice B -
Tabelas e Gráficos da Análise 1 – Gráfico da Média
centrado em $\bar{\bar{X}}$ - Caso *UU***

Tabela B.1 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU.

		$P(CFAR_J > b)$															
n	b	m				b	m	n	b	m				b	m	n	b
		25	50	100	300					25	50	100	300				
5	0,00539	0,54434	0,53255	0,52402	0,51519	0,00539	0,50964	10	0,00539	0,55697	0,54132	0,53013	0,51863	0,00539	0,51153		
	0,00589	0,50382	0,47560	0,44397	0,37864	0,00544	0,48333		0,00589	0,50464	0,46795	0,42732	0,34493	0,00544	0,47768		
	0,00639	0,46640	0,42353	0,37216	0,26507	0,00549	0,45744		0,00639	0,45649	0,40152	0,33711	0,21018	0,00549	0,44433		
	0,00689	0,43193	0,37638	0,30932	0,17834	0,00554	0,43186		0,00689	0,41253	0,34258	0,26145	0,11965	0,00554	0,41174		
	0,00739	0,40022	0,33400	0,25540	0,11649	0,00559	0,40685		0,00739	0,37262	0,29107	0,20012	0,06524	0,00559	0,38008		
	0,00789	0,37108	0,29613	0,20985	0,07472	0,00564	0,38244		0,00789	0,33651	0,24656	0,15173	0,03531	0,00564	0,34952		
	0,00839	0,34430	0,26242	0,17182	0,04768	0,00569	0,35871		0,00839	0,30395	0,20844	0,11434	0,01995	0,00569	0,32021		
	0,00889	0,31969	0,23253	0,14039	0,03080	0,00574	0,33572		0,00889	0,27464	0,17602	0,08594	0,01250	0,00574	0,29215		
	0,00939	0,29708	0,20608	0,11460	0,02056	0,00579	0,31354		0,00939	0,24829	0,14859	0,06463	0,00904	0,00579	0,26563		
	0,00989	0,27629	0,18272	0,09356	0,01448	0,00584	0,29221		0,00989	0,22463	0,12548	0,04881	0,00749	0,00584	0,24066		
	0,01039	0,25718	0,16211	0,07649	0,01094	0,00589	0,27178		0,01039	0,20339	0,10607	0,03717	0,00682	0,00589	0,21727		
	0,01089	0,23959	0,14395	0,06268	0,00891	0,00594	0,25219		0,01089	0,18433	0,08979	0,02865	0,00653	0,00594	0,19548		
	0,01139	0,22339	0,12796	0,05156	0,00777	0,00599	0,23360		0,01139	0,16722	0,07617	0,02246	0,00642	0,00599	0,17530		
	0,01189	0,20847	0,11387	0,04261	0,00713	0,00604	0,21597		0,01189	0,15187	0,06478	0,01796	0,00637	0,00604	0,15671		
	0,01239	0,19471	0,10147	0,03542	0,00677	0,00614	0,18355		0,01239	0,13807	0,05527	0,01471	0,00635	0,00614	0,12405		
	0,01289	0,18202	0,09055	0,02965	0,00657	0,00624	0,15491		0,01289	0,12568	0,04733	0,01237	0,00634	0,00624	0,09719		
	0,01339	0,17030	0,08093	0,02504	0,00646	0,00634	0,12989		0,01339	0,11454	0,04070	0,01068	0,00634	0,00634	0,07548		
	0,01389	0,15946	0,07245	0,02134	0,00640	0,00644	0,10830		0,01389	0,10452	0,03516	0,00946	0,00633	0,00644	0,05826		
	0,01439	0,14944	0,06498	0,01837	0,00637	0,00654	0,08983		0,01439	0,09550	0,03054	0,00859	0,00633	0,00654	0,04481		
	0,01489	0,14017	0,05839	0,01600	0,00635	0,00664	0,07421		0,01489	0,08738	0,02667	0,00796	0,00633	0,00664	0,03448		
	0,01539	0,13158	0,05258	0,01410	0,00634	0,00674	0,06111		0,01539	0,08005	0,02344	0,00751	0,00633	0,00674	0,02667		
20	0,01589	0,12362	0,04745	0,01258	0,00634	0,00684	0,05024	25	0,01589	0,07344	0,02074	0,00718	0,00633	0,00684	0,02086		
	0,01639	0,11623	0,04291	0,01136	0,00634	0,00694	0,04129		0,01639	0,06747	0,01847	0,00695	0,00633	0,00694	0,01659		
	0,01689	0,10937	0,03890	0,01038	0,00634	0,00704	0,03398		0,01689	0,06208	0,01657	0,00678	0,00633	0,00704	0,01350		
	0,01739	0,10300	0,03536	0,00960	0,00633	0,00714	0,02807		0,01739	0,05720	0,01498	0,00666	0,00633	0,00714	0,01128		
	0,01789	0,09708	0,03221	0,00897	0,00633	0,00724	0,02332		0,01789	0,05279	0,01365	0,00657	0,00633	0,00724	0,00972		
	0,00539	0,56924	0,54978	0,53600	0,52194	0,00539	0,51334		0,0054	0,57304	0,55241	0,53781	0,52296	0,00539	0,51390		
	0,00589	0,50569	0,46084	0,41177	0,31428	0,00544	0,47222		0,00589	0,50607	0,45870	0,40707	0,30519	0,00544	0,47057		
	0,00639	0,44751	0,38133	0,30569	0,16584	0,00549	0,43200		0,00639	0,44486	0,37530	0,29646	0,15379	0,00549	0,42822		
	0,00689	0,39496	0,31244	0,22094	0,07956	0,00554	0,39290		0,00689	0,38976	0,30361	0,20951	0,06993	0,00554	0,38716		
	0,00739	0,34795	0,25412	0,15653	0,03676	0,00559	0,35526		0,00739	0,34073	0,24358	0,14487	0,03090	0,00559	0,34776		
	0,00789	0,30621	0,20562	0,10946	0,01800	0,00564	0,31399		0,00789	0,29745	0,19428	0,09880	0,01502	0,00564	0,31036		
	0,00839	0,26934	0,16582	0,07607	0,01052	0,00569	0,28551		0,00839	0,25949	0,15439	0,06701	0,00919	0,00569	0,27523		
	0,00889	0,23691	0,13350	0,05292	0,00776	0,00574	0,25380		0,00889	0,22635	0,12248	0,04563	0,00722	0,00574	0,24256		
	0,00939	0,20845	0,10745	0,03717	0,00680	0,00579	0,22439		0,00939	0,1975	0,09717	0,03152	0,00660	0,00579	0,21248		
	0,00989	0,18353	0,08659	0,02659	0,00648	0,00584	0,19722		0,00989	0,17244	0,07723	0,02235	0,00641	0,00584	0,18504		
	0,01039	0,16174	0,06996	0,01957	0,00638	0,00589	0,17253		0,01039	0,15072	0,06159	0,01646	0,00635	0,00589	0,16023		
	0,01089	0,14271	0,05673	0,01495	0,00635	0,00594	0,15020		0,01089	0,1319	0,04936	0,01270	0,00634	0,00594	0,13802		
	0,01139	0,12608	0,04625	0,01192	0,00634	0,00599	0,13015		0,01139	0,1156	0,03983	0,01033	0,00633	0,00599	0,11829		
	0,01189	0,11156	0,03795	0,00995	0,00633	0,00604	0,11229		0,01189	0,1015	0,03241	0,00884	0,00633	0,00604	0,10092		
	0,01239	0,09888	0,03138	0,00867	0,00633	0,00614	0,08265		0,01239	0,08928	0,02665	0,00790	0,00633	0,00614	0,07260		
	0,01289	0,08779	0,02619	0,00785	0,00633	0,00624	0,06012		0,01289	0,07871	0,02217	0,00731	0,00633	0,00624	0,05166		
25	0,01339	0,07811	0,02209	0,00731	0,00633	0,00634	0,04346		0,01339	0,06954	0,01869	0,00695	0,00633	0,00634	0,03662		
	0,01389	0,06963	0,01885	0,00697	0,00633	0,00644	0,03145		0,01389	0,06159	0,01598	0,00672	0,00633	0,00644	0,02613		
	0,01439	0,06221	0,01628	0,00674	0,00633	0,00654	0,02299		0,01439	0,05469	0,01388	0,00657	0,00633	0,00654	0,01898		
	0,01489	0,05571	0,01425	0,00660	0,00633	0,00664	0,01718		0,01489	0,0487	0,01224	0,00648	0,00633	0,00664	0,01426		
	0,01539	0,05001	0,01264	0,00651	0,00633	0,00674	0,01327		0,01539	0,04349	0,01096	0,00643	0,00633	0,00674	0,01120		
	0,01589	0,04501	0,01137	0,00645	0,00633	0,00684	0,01070		0,01589	0,03896	0,00997	0,00639	0,00633	0,00684	0,00927		
	0,01639	0,04062	0,01036	0,00641	0,00633	0,00694	0,00903		0,01639	0,03501	0,00919	0,00637	0,00633	0,00694	0,00807		
	0,01689	0,03675	0,00955	0,00638	0,00633	0,00704	0,00798		0,01689	0,03157	0,00858	0,00636	0,00633	0,00704	0,00734		
	0,01739	0,03335	0,00891	0,00636	0,00633	0,00714	0,00732		0,01739	0,02856	0,00811	0,00635	0,00633	0,00714	0,00691		
	0,01789	0,03035	0,00840	0,00635	0,00633	0,00724	0,00691		0,01789	0,02594	0,00774	0,00634	0,00633	0,00724	0,00666		

$$P(CFAR_j > b), n = 5, \alpha_j = 0,0054$$



$$P(CFAR_j > b), n = 10, \alpha_j = 0,0054$$

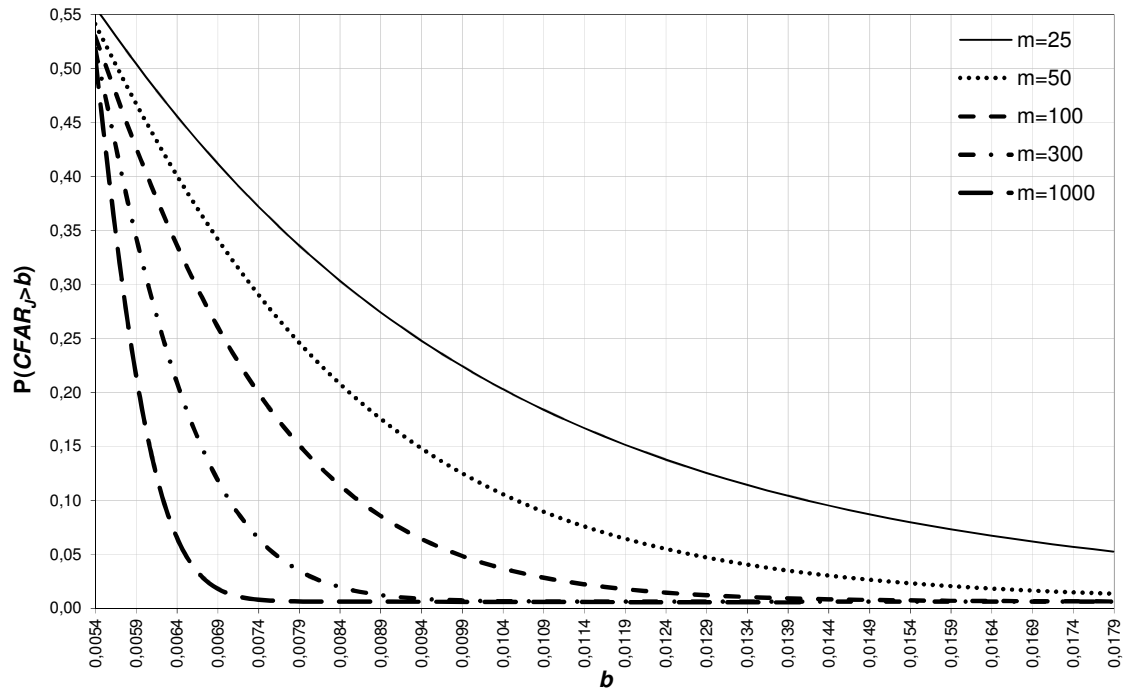
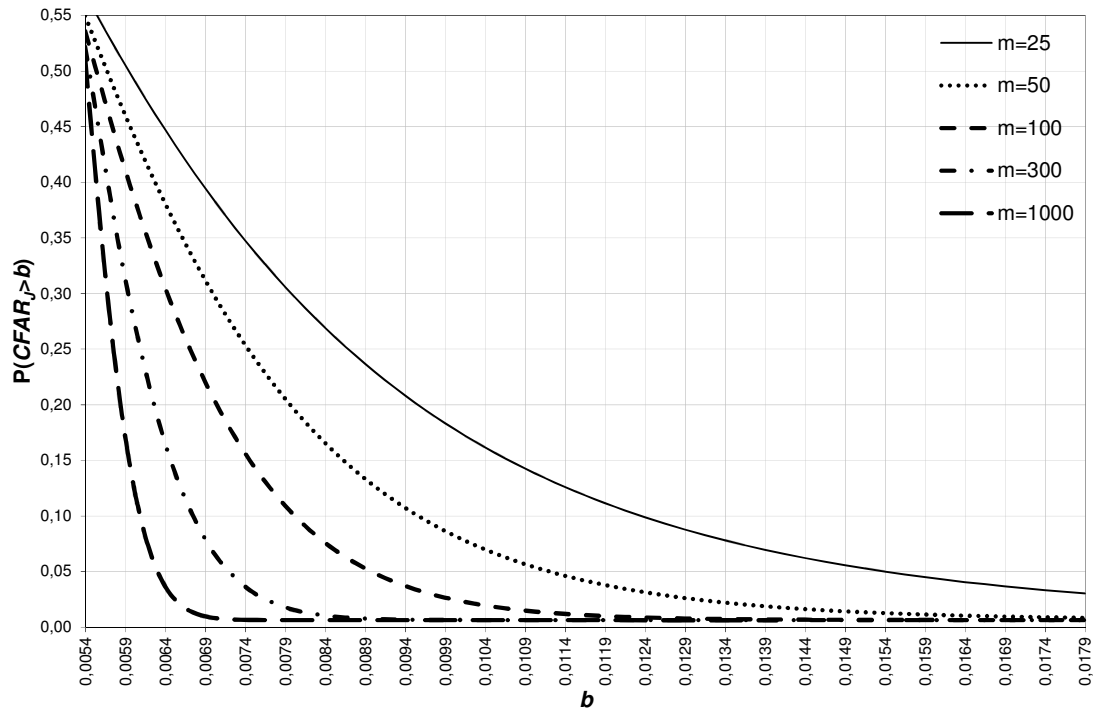


Figura B.1 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_j$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_j=0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU.

$$P(CFAR_J > b), n = 20, \alpha_J = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b), n = 25, \alpha_J = 0,0054$$

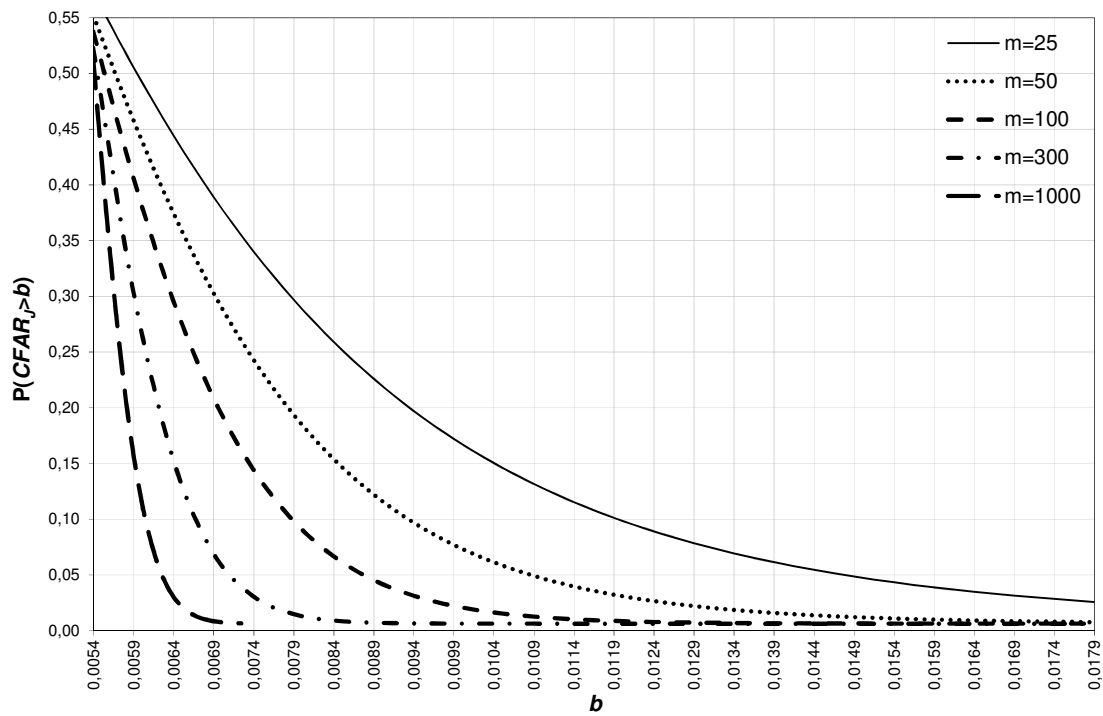
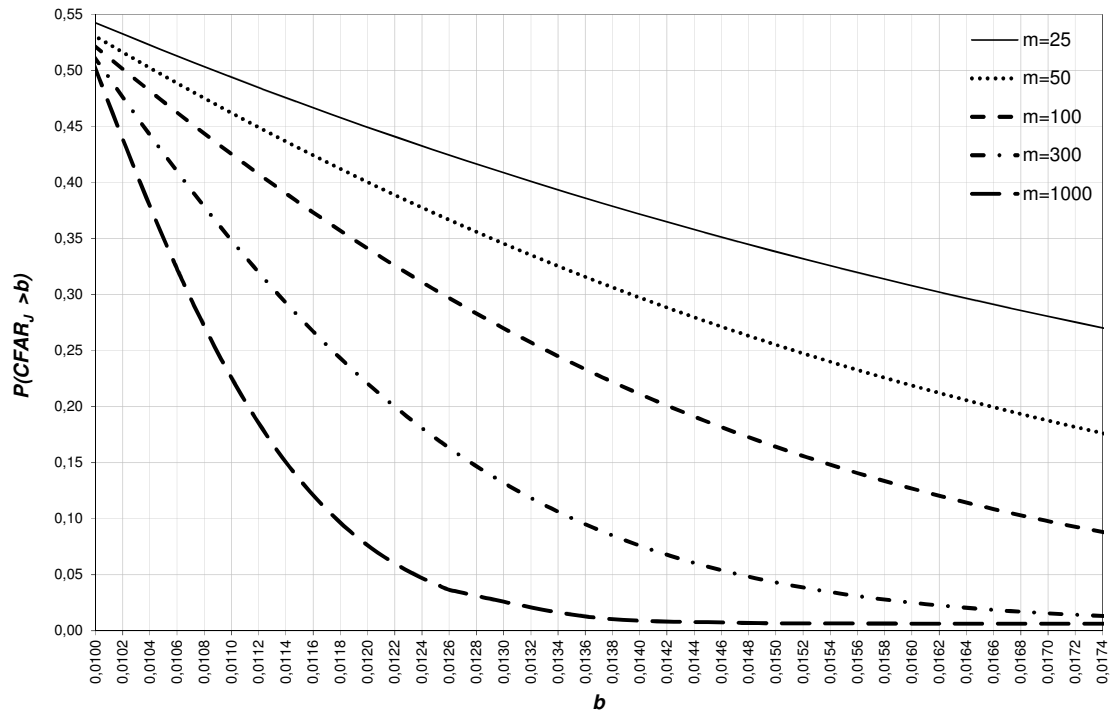


Figura B.2 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU .

Tabela B.2 – Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_J = 0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso *UU*.

$P(CFAR_J > b)$													
n	b	m				b	m	n	b	m			
		25	50	100	300					25	50	100	300
5	0,00997	0,54388	0,53218	0,52375	0,51505	0,00997	0,50956	10	0,00997	0,55588	0,54052	0,52957	0,51836
	0,01048	0,51899	0,49717	0,47442	0,43019	0,01003	0,49370		0,01048	0,52400	0,49572	0,46656	0,41039
	0,01098	0,49514	0,46372	0,42765	0,35208	0,01008	0,47791		0,01098	0,49346	0,45308	0,40730	0,31360
	0,01148	0,47230	0,43194	0,38381	0,28284	0,01013	0,46224		0,01148	0,46432	0,41286	0,35266	0,23203
	0,01198	0,45047	0,40185	0,34313	0,22346	0,01018	0,44671		0,01198	0,43660	0,37521	0,30312	0,16689
	0,01248	0,42963	0,37348	0,30571	0,17398	0,01023	0,43134		0,01248	0,41030	0,34021	0,25887	0,11725
	0,01298	0,40974	0,34680	0,27155	0,13380	0,01028	0,41610		0,01298	0,38541	0,30785	0,21984	0,08093
	0,01348	0,39078	0,32179	0,24056	0,10189	0,01033	0,40110		0,01348	0,36189	0,27810	0,18580	0,05530
	0,01398	0,37272	0,29840	0,21263	0,07704	0,01038	0,38631		0,01398	0,33972	0,25085	0,15641	0,03778
	0,01448	0,35552	0,27656	0,18757	0,05805	0,01043	0,37177		0,01448	0,31884	0,22600	0,13125	0,02613
	0,01498	0,33914	0,25622	0,16521	0,04376	0,01048	0,35747		0,01498	0,29920	0,20341	0,10987	0,01857
	0,01548	0,32357	0,23730	0,14533	0,03316	0,01053	0,34344		0,01548	0,28075	0,18293	0,09183	0,01378
	0,01598	0,30875	0,21972	0,12772	0,02539	0,01058	0,32970		0,01598	0,26343	0,16442	0,07670	0,01080
	0,01648	0,29465	0,20342	0,11217	0,01977	0,01063	0,31624		0,01648	0,24719	0,14772	0,06407	0,00898
	0,01698	0,28125	0,18830	0,09848	0,01573	0,01073	0,29026		0,01698	0,23196	0,13269	0,05359	0,00788
	0,01748	0,26851	0,17431	0,08646	0,01287	0,01083	0,26558		0,01748	0,21769	0,11918	0,04491	0,00723
	0,01798	0,25639	0,16136	0,07593	0,01085	0,01093	0,24225		0,01798	0,20433	0,10705	0,03777	0,00685
	0,01848	0,24487	0,14939	0,06672	0,00944	0,01102	0,22031		0,01848	0,19183	0,09619	0,03190	0,00663
	0,01898	0,23392	0,13833	0,05869	0,00846	0,01112	0,19977		0,01898	0,18012	0,08647	0,02709	0,00650
	0,01948	0,22350	0,12812	0,05169	0,00778	0,01122	0,18063		0,01948	0,16917	0,07777	0,02316	0,00643
	0,01998	0,21360	0,11869	0,04559	0,00731	0,01132	0,16288		0,01998	0,15893	0,07001	0,01996	0,00638
	0,02048	0,20419	0,10999	0,04030	0,00700	0,01142	0,14647		0,02048	0,14935	0,06307	0,01735	0,00636
	0,02098	0,19523	0,10196	0,03570	0,00678	0,01152	0,13141		0,02098	0,14039	0,05688	0,01524	0,00635
	0,02148	0,18672	0,09456	0,03172	0,00663	0,01162	0,11762		0,02148	0,13201	0,05137	0,01352	0,00634
	0,02198	0,17861	0,08773	0,02827	0,00653	0,01172	0,10505		0,02198	0,12417	0,04645	0,01213	0,00634
	0,02248	0,17091	0,08144	0,02528	0,00647	0,01182	0,09364		0,02248	0,11684	0,04207	0,01101	0,00634
20	0,00997	0,56736	0,54844	0,53507	0,52148	0,00997	0,51303	25	0,0100	0,57089	0,55088	0,53676	0,52244
	0,01048	0,52892	0,49446	0,45926	0,39212	0,01003	0,48862		0,01048	0,53045	0,49410	0,45705	0,38663
	0,01098	0,49214	0,44331	0,38866	0,27967	0,01008	0,46440		0,01098	0,49179	0,44038	0,38308	0,26980
	0,01148	0,45718	0,39548	0,32478	0,19022	0,01013	0,44046		0,01148	0,45508	0,39031	0,31658	0,17865
	0,01198	0,42411	0,35129	0,26839	0,12430	0,01018	0,41681		0,01198	0,42043	0,34425	0,25840	0,11325
	0,01248	0,39298	0,31087	0,21965	0,07880	0,01023	0,39364		0,01248	0,38788	0,30234	0,20866	0,06957
	0,01298	0,36378	0,27422	0,17830	0,04914	0,01028	0,37098		0,01298	0,35745	0,26458	0,16700	0,04216
	0,01348	0,33647	0,24122	0,14376	0,03076	0,01033	0,34889		0,01348	0,32909	0,23083	0,13268	0,02587
	0,01398	0,31102	0,21171	0,11530	0,01984	0,01038	0,32743		0,01398	0,30275	0,20087	0,10485	0,01663
	0,01448	0,28734	0,18547	0,09215	0,01359	0,01043	0,30666		0,01448	0,27835	0,17445	0,08257	0,01159
	0,01498	0,26536	0,16224	0,07349	0,01014	0,01048	0,28661		0,01498	0,2558	0,15127	0,06493	0,00895
	0,01548	0,24500	0,14176	0,05861	0,00828	0,01053	0,26733		0,01548	0,235	0,13102	0,05110	0,00760
	0,01598	0,22616	0,12378	0,04683	0,00731	0,01058	0,24884		0,01598	0,21584	0,11340	0,04036	0,00694
	0,01648	0,20875	0,10805	0,03757	0,00682	0,01063	0,23117		0,01648	0,19822	0,09813	0,03207	0,00662
	0,01698	0,19268	0,09431	0,03034	0,00657	0,01073	0,19835		0,01698	0,18204	0,08493	0,02573	0,00646
	0,01748	0,17786	0,08235	0,02472	0,00645	0,01083	0,16892		0,01748	0,16719	0,07354	0,02089	0,00639
	0,01798	0,16420	0,07195	0,02037	0,00639	0,01093	0,14279		0,01798	0,15358	0,06376	0,01723	0,00636
	0,01848	0,15163	0,06293	0,01702	0,00636	0,01102	0,11992		0,01848	0,14111	0,05535	0,01446	0,00634
	0,01898	0,14005	0,05513	0,01446	0,00634	0,01112	0,10010		0,01898	0,12969	0,04815	0,01239	0,00634
	0,01948	0,12940	0,04837	0,01250	0,00634	0,01122	0,08311		0,01948	0,11924	0,04198	0,01083	0,00634
	0,01998	0,11961	0,04254	0,01100	0,00634	0,01132	0,06869		0,01998	0,10969	0,03671	0,00967	0,00633
	0,02048	0,11060	0,03750	0,00986	0,00633	0,01142	0,05658		0,02048	0,10095	0,03221	0,00880	0,00633
	0,02098	0,10233	0,03316	0,00900	0,00633	0,01152	0,04651		0,02098	0,09296	0,02837	0,00816	0,00633
	0,02148	0,09472	0,02942	0,00834	0,00633	0,01162	0,03821		0,02148	0,08565	0,02510	0,00768	0,00633
	0,02198	0,08773	0,02620	0,00785	0,00633	0,01172	0,03144		0,02198	0,07898	0,02231	0,00733	0,00633
	0,02248	0,08130	0,02343	0,00747	0,00633	0,01182	0,02596		0,02248	0,07288	0,01994	0,00707	0,00633

$$P(CFAR_J > b), n = 5, \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b), n = 10, \alpha_J = 0,010$$

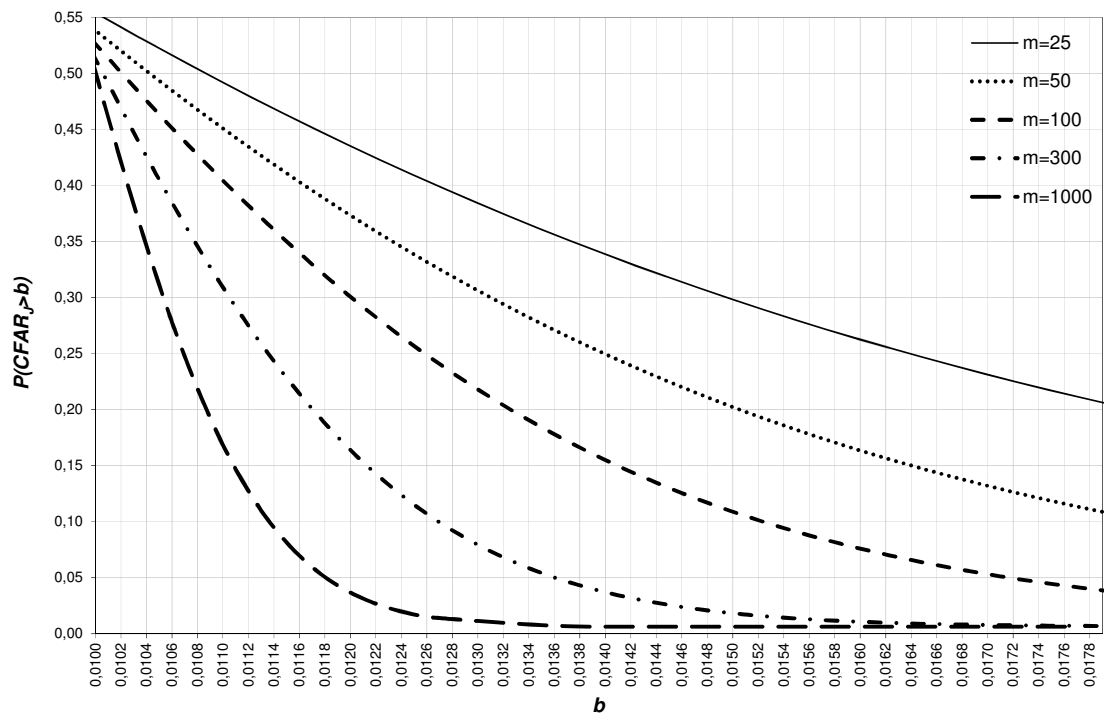
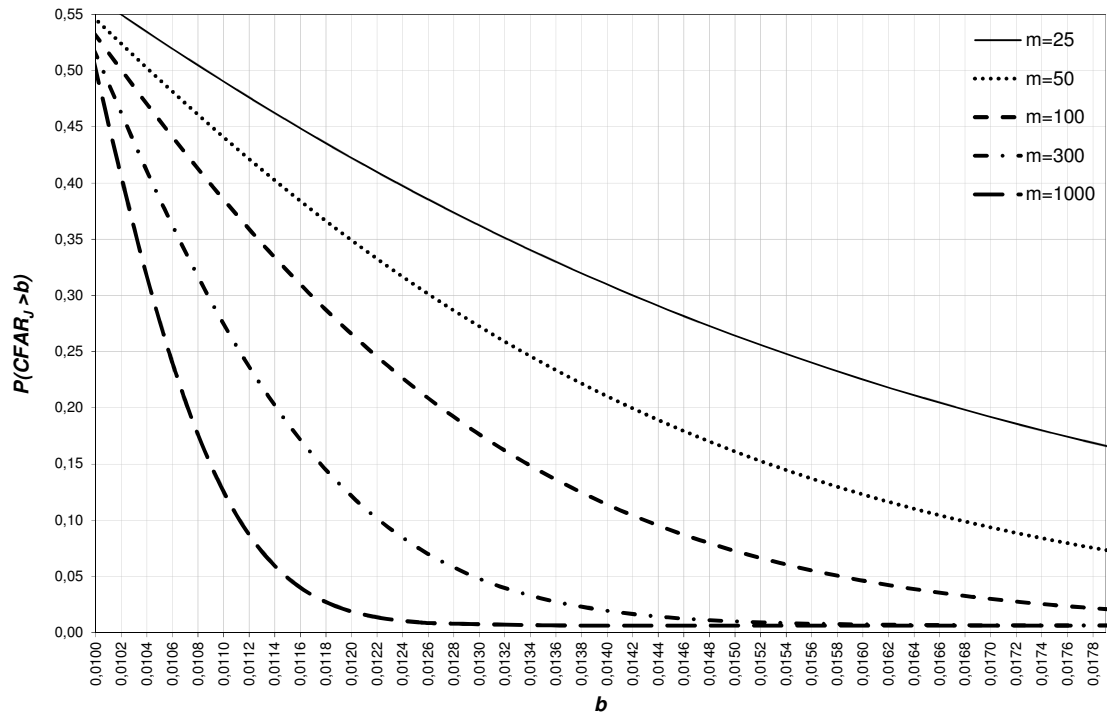


Figura B.3 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU .

$$P(CFAR_J > b), n = 20, \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b), n = 25, \alpha_C = 0,010$$

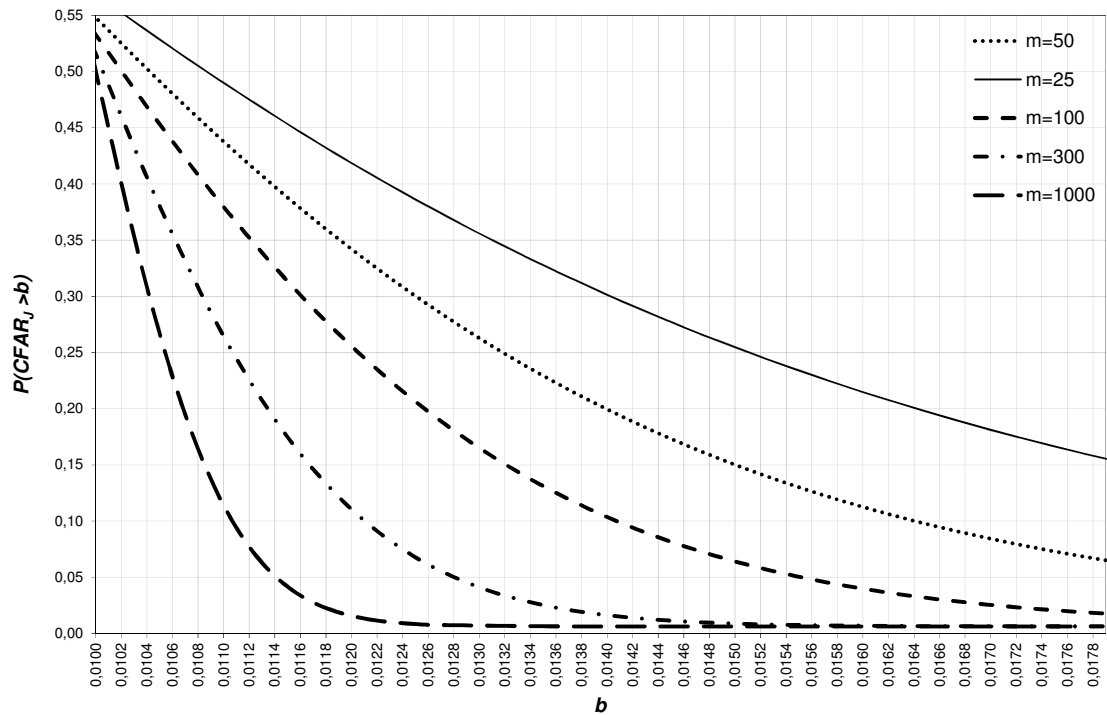
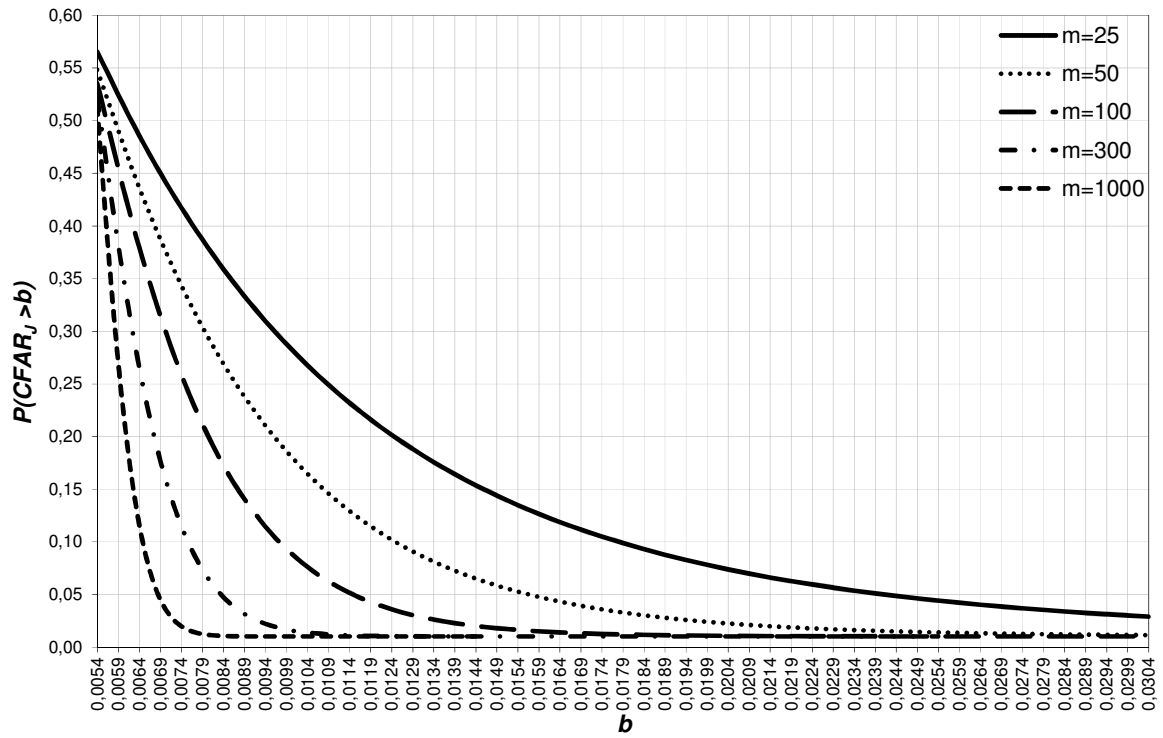


Figura B.4 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador \bar{S}/c_4 , Caso UU .

Tabela B.3 – Probabilidade de $CFAR_j$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_j=0,0054$ e estimador S_p , Caso UU .

$P(CFAR_j > b)$																	
n	b	m			b	m			b	m			b	m			
		25	50	100		300	b	25		50	100	300		b	25	50	100
5	0,00539	0,56550	0,54826	0,53577	0,00539	0,52280	0,00539	0,51464	10	0,00539	0,57152	0,55236	0,53858	0,00539	0,52437	0,00539	0,51544
	0,00639	0,48601	0,43657	0,37990	0,00589	0,38291	0,00559	0,40948		0,00639	0,47029	0,41103	0,34318	0,00589	0,34878	0,00559	0,38281
	0,00739	0,41767	0,34387	0,25930	0,00639	0,26638	0,00579	0,31399		0,00739	0,38491	0,29839	0,20377	0,00639	0,21243	0,00579	0,26734
	0,00839	0,35938	0,26937	0,17315	0,00689	0,17791	0,00599	0,23261		0,00839	0,31449	0,21377	0,11669	0,00689	0,12124	0,00599	0,17638
	0,00939	0,30985	0,21064	0,11467	0,00739	0,11549	0,00619	0,16708		0,00939	0,25712	0,15245	0,06666	0,00739	0,06698	0,00619	0,11108
	0,01039	0,26781	0,16489	0,07630	0,00789	0,07400	0,00639	0,11699		0,01039	0,21069	0,10899	0,03942	0,00789	0,03756	0,00639	0,06790
	0,01139	0,23212	0,12951	0,05166	0,00839	0,04773	0,00659	0,08050		0,01139	0,17322	0,07860	0,02510	0,00839	0,02276	0,00659	0,04140
	0,01239	0,20179	0,10227	0,03608	0,00889	0,03173	0,00679	0,05503		0,01239	0,14303	0,05752	0,01774	0,00889	0,01574	0,00679	0,02622
	0,01339	0,17596	0,08132	0,02631	0,00939	0,02230	0,00699	0,03794		0,01339	0,11868	0,04296	0,01400	0,00939	0,01257	0,00699	0,01804
	0,01439	0,15393	0,06523	0,02023	0,00989	0,01688	0,00719	0,02690		0,01439	0,09902	0,03293	0,01212	0,00989	0,01120	0,00719	0,01387
	0,01539	0,13510	0,05286	0,01644	0,01039	0,01384	0,00739	0,02000		0,01539	0,08312	0,02600	0,01118	0,01039	0,01062	0,00739	0,01186
	0,01639	0,11896	0,04335	0,01410	0,01139	0,01126	0,00759	0,01582		0,01639	0,07023	0,02122	0,01071	0,01139	0,01029	0,00759	0,01093
	0,01739	0,10510	0,03602	0,01264	0,01239	0,01051	0,00779	0,01335		0,01739	0,05975	0,01792	0,01047	0,01239	0,01024	0,00779	0,01052
	0,01839	0,09317	0,03036	0,01174	0,01339	0,01030	0,00799	0,01194		0,01839	0,05120	0,01562	0,01035	0,01339	0,01023	0,00799	0,01034
	0,01939	0,08289	0,02598	0,01118	0,01439	0,01025	0,00819	0,01115		0,01939	0,04422	0,01403	0,01029	0,01439	0,01023	0,00819	0,01027
	0,02039	0,07399	0,02258	0,01082	0,01539	0,01023	0,00839	0,01071		0,02039	0,03851	0,01291	0,01026	0,01539	0,01023	0,00839	0,01024
	0,02139	0,06628	0,01994	0,01060	0,01639	0,01023	0,00859	0,01048		0,02139	0,03381	0,01213	0,01024	0,01639	0,01023	0,00859	0,01023
	0,02239	0,05959	0,01788	0,01047	0,01739	0,01023	0,00879	0,01035		0,02239	0,02994	0,01158	0,01024	0,01739	0,01023	0,00879	0,01023
	0,02339	0,05377	0,01628	0,01038	0,01839	0,01023	0,00899	0,01029		0,02339	0,02674	0,01120	0,01023	0,01839	0,01023	0,00899	0,01023
	0,02439	0,04870	0,01502	0,01032	0,01939	0,01023	0,00919	0,01026		0,02439	0,02410	0,01092	0,01023	0,01939	0,01023	0,00919	0,01023
	0,02539	0,04427	0,01403	0,01029	0,02039	0,01023	0,00939	0,01024		0,02539	0,02190	0,01073	0,01023	0,02039	0,01023	0,00939	0,01023
	0,02639	0,04040	0,01325	0,01027	0,02139	0,01023	0,00959	0,01023		0,02639	0,02007	0,01059	0,01023	0,02139	0,01023	0,00959	0,01023
	0,02739	0,03700	0,01264	0,01025	0,02239	0,01023	0,00979	0,01023		0,02739	0,01855	0,01049	0,01023	0,02239	0,01023	0,00979	0,01023
	0,02839	0,03402	0,01216	0,01024	0,02339	0,01023	0,00999	0,01023		0,02839	0,01727	0,01042	0,01023	0,02339	0,01023	0,00999	0,01023
	0,02939	0,03140	0,01177	0,01024	0,02439	0,01023	0,01019	0,01023		0,02939	0,01620	0,01037	0,01023	0,02439	0,01023	0,01019	0,01023
	0,03039	0,02909	0,01147	0,01023	0,02539	0,01023	0,01039	0,01023		0,03039	0,01531	0,01033	0,01023	0,02539	0,01023	0,01039	0,01023
20	0,00539	0,57965	0,55791	0,54238	0,00539	0,52649	0,00539	0,51654	25	0,0054	0,58246	0,55983	0,54369	0,00539	0,52722	0,00539	0,51693
	0,00639	0,45776	0,38874	0,31086	0,00589	0,31799	0,00559	0,35812		0,00639	0,45425	0,38221	0,30142	0,00589	0,30886	0,00559	0,35068
	0,00739	0,35721	0,26007	0,16023	0,00639	0,16877	0,00579	0,22678		0,00739	0,34926	0,24921	0,14858	0,00639	0,15687	0,00579	0,21515
	0,00839	0,27733	0,17044	0,07913	0,00689	0,08233	0,00599	0,13258		0,00839	0,26689	0,15887	0,07023	0,00689	0,07293	0,00599	0,12096
	0,00939	0,21520	0,11120	0,04023	0,00739	0,03979	0,00619	0,07324		0,00939	0,20379	0,10091	0,03478	0,00739	0,03415	0,00619	0,06422
	0,01039	0,16743	0,07324	0,02286	0,00789	0,02136	0,00639	0,03994		0,01039	0,15607	0,06496	0,01992	0,00789	0,01855	0,00639	0,03413
	0,01139	0,13093	0,04936	0,01544	0,00839	0,01414	0,00659	0,02315		0,01139	0,12023	0,04310	0,01397	0,00839	0,01291	0,00659	0,01989
	0,01239	0,10310	0,03450	0,01235	0,00889	0,01153	0,00679	0,01544		0,01239	0,09339	0,02994	0,01166	0,00889	0,01104	0,00679	0,01382
	0,01339	0,08188	0,02530	0,01109	0,00939	0,01064	0,00699	0,01219		0,01339	0,07328	0,02207	0,01077	0,00939	0,01046	0,00699	0,01147
	0,01439	0,06569	0,01961	0,01058	0,00989	0,01035	0,00719	0,01092		0,01439	0,0582	0,01736	0,01043	0,00989	0,01029	0,00719	0,01063
	0,01539	0,05330	0,01609	0,01037	0,01039	0,01026	0,00739	0,01046		0,01539	0,04686	0,01454	0,01031	0,01039	0,01025	0,00739	0,01035
	0,01639	0,04380	0,01391	0,01029	0,01139	0,01023	0,00759	0,01030		0,01639	0,03831	0,01285	0,01026	0,01139	0,01023	0,00759	0,01026
	0,01739	0,03649	0,01255	0,01025	0,01239	0,01023	0,00779	0,01025		0,01739	0,03184	0,01183	0,01024	0,01239	0,01023	0,00779	0,01024
	0,01839	0,03084	0,01170	0,01024	0,01339	0,01023	0,00799	0,01023		0,01839	0,02693	0,01121	0,01023	0,01339	0,01023	0,00799	0,01023
	0,01939	0,02647	0,01116	0,01023	0,01439	0,01023	0,00819	0,01023		0,01939	0,02318	0,01084	0,01023	0,01439	0,01023	0,00819	0,01023
	0,02039	0,02306	0,01083	0,01023	0,01539	0,01023	0,00839	0,01023		0,02039	0,02031	0,01061	0,01023	0,01539	0,01023	0,00839	0,01023
	0,02139	0,02041	0,01061	0,01023	0,01639	0,01023	0,00859	0,01023		0,02139	0,0181	0,01046	0,01023	0,01639	0,01023	0,00859	0,01023
	0,02239	0,01833	0,01048	0,01023	0,01739	0,01023	0,00879	0,01023		0,02239	0,0164	0,01038	0,01023	0,01739	0,01023	0,00879	0,01023
	0,02339	0,01669	0,01039	0,01023	0,01839	0,01023	0,00899	0,01023		0,02339	0,01509	0,01032	0,01023	0,01839	0,01023	0,00899	0,01023
	0,02439	0,01540	0,01033	0,01023	0,01939	0,01023	0,00919	0,01023		0,02439	0,01406	0,01029	0,01023	0,01939	0,01023	0,00919	0,01023
	0,02539	0,01439	0,01030	0,01023	0,02039	0,01023	0,00939	0,01023		0,02539	0,01327	0,01027	0,01023	0,02039	0,01023	0,00939	0,01023
	0,02639	0,01358	0,01027	0,01023	0,02139	0,01023	0,00959	0,01023		0,02639	0,01264	0,01025	0,01023	0,02139	0,01023	0,00959	0,01023
	0,02739	0,01293	0,01026	0,01023	0,02239	0,01023	0,00979	0,01023		0,02739	0,01215	0,01024	0,01023	0,02239	0,01023	0,00979	0,01023
	0,02839	0,01242	0,01025	0,01023	0,02339	0,01023	0,00999	0,01023		0,02839	0,01176	0,01024	0,01023	0,02339	0,01023	0,00999	0,01023
	0,02939	0,01201	0,01024	0,01023	0,02439	0,01023	0,01019	0,01023		0,02939	0,01146	0,01023	0,01023	0,02439	0,01023	0,01019	0,01023
	0,03039	0,01167	0,01024	0,01023	0,02539	0,01023	0,01039	0,01023		0,03039	0,01122	0,01023	0,01023	0,02539	0,01023	0,01039	0,01023

$$P(CFAR_J > b), n = 5, \alpha_J = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b), n = 10, \alpha_J = 0,0054$$

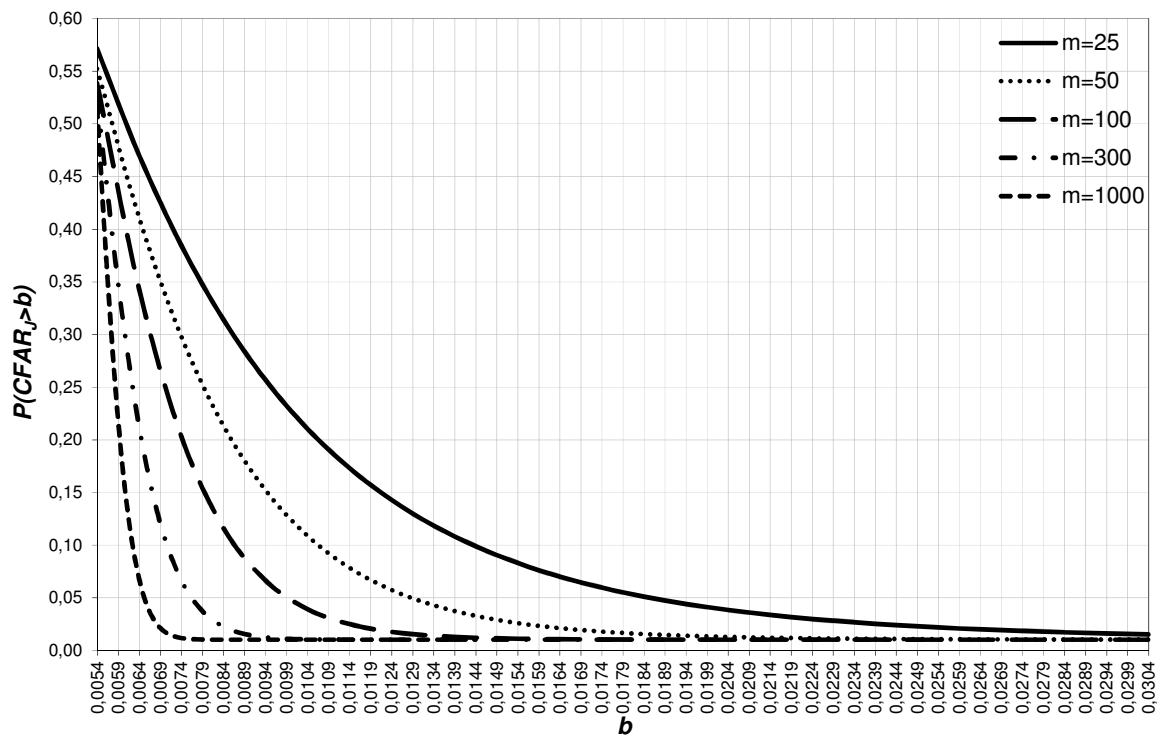
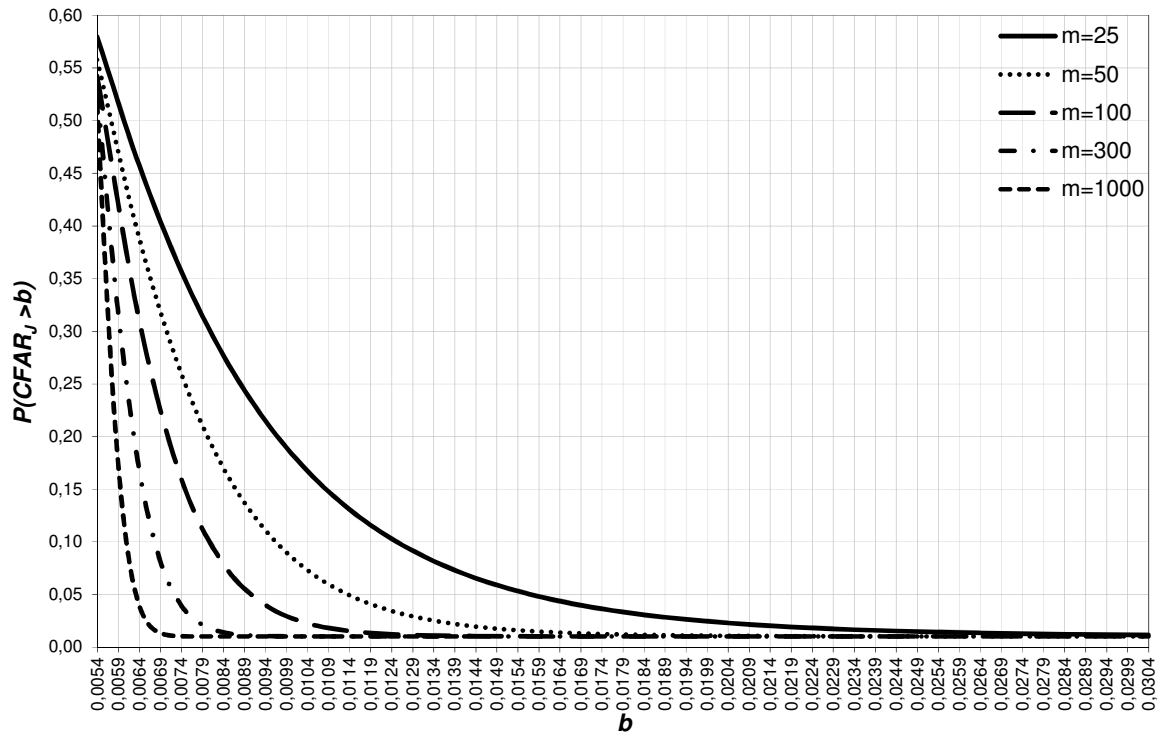


Figura B.5 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,0054$ e estimador S_p , Caso UU .

$$P(CFAR_J > b), n = 20, \alpha_j = 0,0054$$



$$P(CFAR_J > b), n = 25, \alpha_j = 0,0054$$

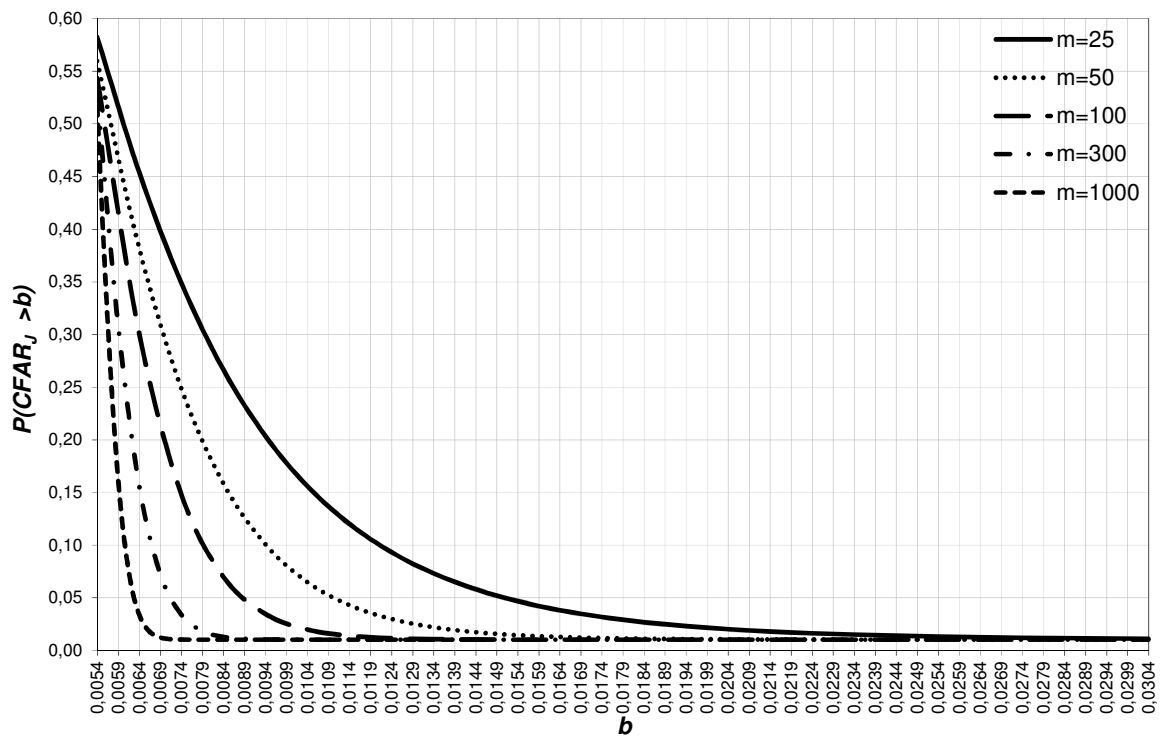
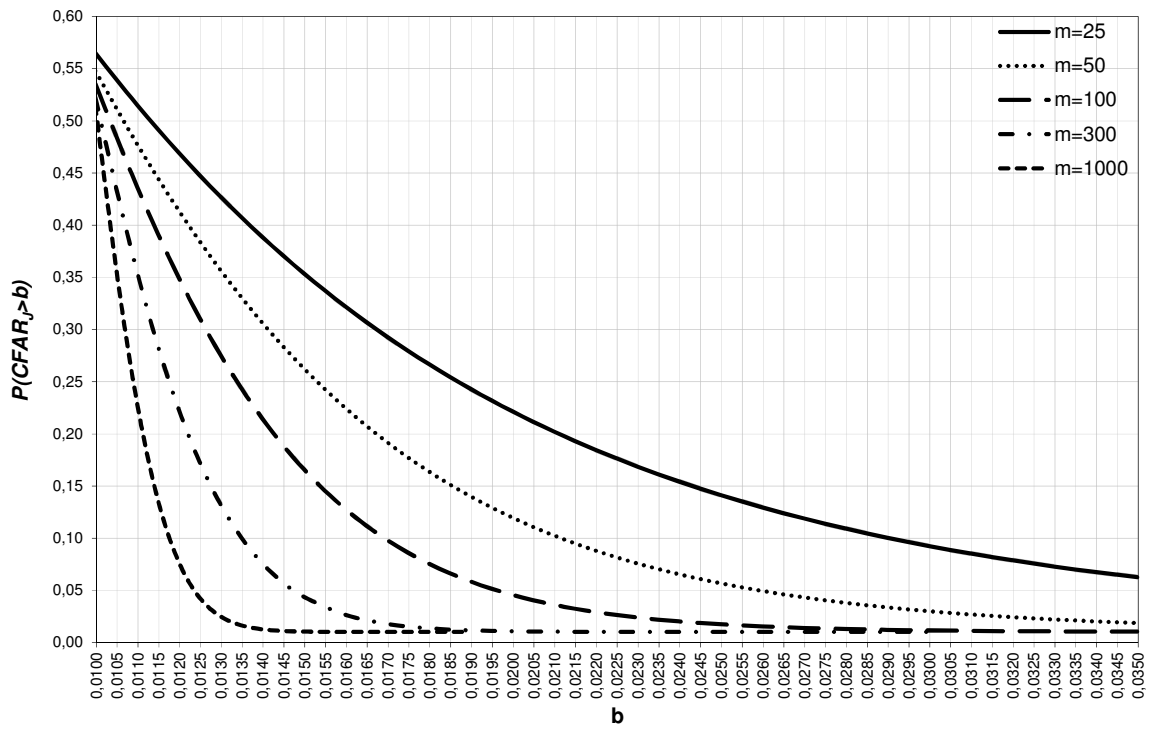


Figura B.6 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_j=0,0054$ e estimador S_p , Caso UU .

Tabela B.4 (Tabela 3 no texto) – Probabilidade de $CFAR_j$ exceder um valor b , para $n = 5, 10, 20$ e 25 , $\alpha_j = 0,010$ e estimador S_p , Caso UU .

P(CFAR _j > b)																	
n	b	m			b	m		b	m			b	m		b	m	
		25	50	100		300	1000		25	50	100		300	1000			
5	0,00997	0,56504	0,54790	0,53551	0,00997	0,52268	0,00997	0,51464	10	0,00997	0,57043	0,55156	0,53802	0,00997	0,52409	0,00997	0,51538
	0,01098	0,51545	0,47792	0,43705	0,01048	0,43579	0,01018	0,45029		0,01098	0,50768	0,46334	0,41444	0,01048	0,41502	0,01018	0,43447
	0,01198	0,46962	0,41419	0,34994	0,01098	0,35563	0,01038	0,38846		0,01198	0,45012	0,38426	0,30861	0,01098	0,31705	0,01038	0,35793
	0,01298	0,42754	0,35717	0,27597	0,01148	0,28460	0,01058	0,33056		0,01298	0,39799	0,31555	0,22384	0,01148	0,23452	0,01058	0,28831
	0,01398	0,38906	0,30684	0,21514	0,01198	0,22385	0,01078	0,27753		0,01398	0,35124	0,25722	0,15933	0,01198	0,16875	0,01078	0,22728
	0,01498	0,35399	0,26290	0,16636	0,01248	0,17347	0,01098	0,23007		0,01498	0,30961	0,20861	0,11216	0,01248	0,11883	0,01098	0,17555
	0,01598	0,32212	0,22485	0,12802	0,01298	0,13285	0,01118	0,18847		0,01598	0,27275	0,16865	0,07875	0,01298	0,08255	0,01118	0,13327
	0,01698	0,29319	0,19212	0,09837	0,01348	0,10090	0,01138	0,15273		0,01698	0,24024	0,13617	0,05565	0,01348	0,05716	0,01138	0,09970
	0,01798	0,26698	0,16411	0,07574	0,01398	0,07630	0,01158	0,12262		0,01798	0,21166	0,11000	0,04001	0,01398	0,03997	0,01158	0,07385
	0,01898	0,24324	0,14024	0,05865	0,01448	0,05774	0,01178	0,09770		0,01898	0,18658	0,08905	0,02958	0,01448	0,02867	0,01178	0,05450
	0,01998	0,22176	0,11995	0,04586	0,01498	0,04398	0,01198	0,07742		0,01998	0,16463	0,07237	0,02271	0,01498	0,02145	0,01198	0,04039
	0,02098	0,20233	0,10277	0,03635	0,01598	0,02672	0,01218	0,06120		0,02098	0,14542	0,05914	0,01823	0,01598	0,01417	0,01218	0,03036
	0,02198	0,18476	0,08824	0,02932	0,01698	0,01799	0,01238	0,04843		0,02198	0,12864	0,04869	0,01533	0,01698	0,01154	0,01238	0,02341
	0,02298	0,16886	0,07597	0,02415	0,01798	0,01377	0,01258	0,03853		0,02298	0,11397	0,04045	0,01348	0,01798	0,01064	0,01258	0,01870
	0,02398	0,15448	0,06562	0,02036	0,01898	0,01180	0,01278	0,03095		0,02398	0,10117	0,03396	0,01229	0,01898	0,01035	0,01278	0,01557
	0,02498	0,14146	0,05691	0,01759	0,01998	0,01091	0,01298	0,02524		0,02498	0,08998	0,02887	0,01153	0,01998	0,01026	0,01298	0,01354
	0,02598	0,12968	0,04956	0,01558	0,02098	0,01052	0,01318	0,02099		0,02598	0,08021	0,02487	0,01105	0,02098	0,01024	0,01318	0,01225
	0,02698	0,11902	0,04339	0,01411	0,02198	0,01035	0,01338	0,01786		0,02698	0,07168	0,02173	0,01075	0,02198	0,01023	0,01338	0,01144
	0,02798	0,10935	0,03819	0,01304	0,02298	0,01028	0,01358	0,01559		0,02798	0,06422	0,01927	0,01056	0,02298	0,01023	0,01358	0,01094
	0,02898	0,10060	0,03381	0,01227	0,02398	0,01025	0,01378	0,01396		0,02898	0,05770	0,01733	0,01043	0,02398	0,01023	0,01378	0,01064
	0,02998	0,09266	0,03013	0,01171	0,02498	0,01024	0,01398	0,01280		0,02998	0,05199	0,01582	0,01036	0,02498	0,01023	0,01398	0,01047
	0,03098	0,08546	0,02703	0,01130	0,02598	0,01023	0,01418	0,01199		0,03098	0,04700	0,01463	0,01031	0,02598	0,01023	0,01418	0,01036
	0,03198	0,07892	0,02442	0,01100	0,02698	0,01023	0,01438	0,01142		0,03198	0,04263	0,01370	0,01028	0,02698	0,01023	0,01438	0,01030
	0,03298	0,07299	0,02222	0,01079	0,02798	0,01023	0,01458	0,01103		0,03298	0,03879	0,01296	0,01026	0,02798	0,01023	0,01458	0,01027
	0,03398	0,06760	0,02037	0,01064	0,02898	0,01023	0,01478	0,01076		0,03398	0,03543	0,01239	0,01025	0,02898	0,01023	0,01478	0,01025
	0,03498	0,06270	0,01881	0,01052	0,02998	0,01023	0,01498	0,01058		0,03498	0,03248	0,01193	0,01024	0,02998	0,01023	0,01498	0,01024
20	0,00997	0,57779	0,55657	0,54145	0,00997	0,52602	0,00997	0,51640	25	0,0100	0,58032	0,55830	0,54264	0,00997	0,52669	0,00997	0,51675
	0,01098	0,50260	0,45116	0,39447	0,01048	0,39621	0,01018	0,41994		0,01098	0,50134	0,44765	0,38857	0,01048	0,39059	0,01018	0,41551
	0,01198	0,43420	0,35842	0,27321	0,01098	0,28319	0,01038	0,33022		0,01198	0,42969	0,35092	0,26306	0,01098	0,27332	0,01038	0,32197
	0,01298	0,37324	0,28044	0,18221	0,01148	0,19325	0,01058	0,25137		0,01298	0,36618	0,27046	0,17089	0,01148	0,18182	0,01058	0,24070
	0,01398	0,31973	0,21704	0,11862	0,01198	0,12708	0,01078	0,18560		0,01398	0,31081	0,20597	0,10826	0,01198	0,11623	0,01078	0,17402
	0,01498	0,27328	0,16680	0,07655	0,01248	0,08157	0,01098	0,13338		0,01498	0,26314	0,15570	0,06814	0,01248	0,07257	0,01098	0,12221
	0,01598	0,23329	0,12776	0,04985	0,01298	0,05205	0,01118	0,09380		0,01598	0,22248	0,11734	0,04357	0,01298	0,04530	0,01118	0,08395
	0,01698	0,19908	0,09787	0,03346	0,01348	0,03386	0,01138	0,06506		0,01698	0,18803	0,08852	0,02904	0,01348	0,02919	0,01138	0,05701
	0,01798	0,16995	0,07525	0,02364	0,01398	0,02316	0,01158	0,04507		0,01798	0,15899	0,06715	0,02067	0,01398	0,02012	0,01158	0,03887
	0,01898	0,14523	0,05828	0,01789	0,01448	0,01709	0,01178	0,03169		0,01898	0,13461	0,05144	0,01595	0,01448	0,01523	0,01178	0,02718
	0,01998	0,12430	0,04564	0,01456	0,01498	0,01378	0,01198	0,02306		0,01998	0,1142	0,03997	0,01334	0,01498	0,01268	0,01198	0,01994
	0,02098	0,10662	0,03628	0,01266	0,01598	0,01111	0,01218	0,01768		0,02098	0,09713	0,03166	0,01190	0,01598	0,01078	0,01218	0,01562
	0,02198	0,09170	0,02936	0,01159	0,01698	0,01043	0,01238	0,01444		0,02198	0,08289	0,02564	0,01113	0,01698	0,01034	0,01238	0,01313
	0,02298	0,07912	0,02427	0,01098	0,01798	0,01027	0,01258	0,01255		0,02298	0,071	0,02131	0,01071	0,01798	0,01025	0,01258	0,01175
	0,02398	0,06851	0,02053	0,01065	0,01898	0,01024	0,01278	0,01147		0,02398	0,0611	0,01819	0,01048	0,01898	0,01023	0,01278	0,01100
	0,02498	0,05957	0,01779	0,01046	0,01998	0,01023	0,01298	0,01088		0,02498	0,05283	0,01595	0,01036	0,01998	0,01023	0,01298	0,01061
	0,02598	0,05203	0,01577	0,01036	0,02098	0,01023	0,01318	0,01056		0,02598	0,04594	0,01434	0,01030	0,02098	0,01023	0,01318	0,01041
	0,02698	0,04567	0,01430	0,01030	0,02198	0,01023	0,01338	0,01039		0,02698	0,04019	0,01319	0,01027	0,02198	0,01023	0,01338	0,01031
	0,02798	0,04031	0,01322	0,01027	0,02298	0,01023	0,01358	0,01031		0,02798	0,03539	0,01236	0,01025	0,02298	0,01023	0,01358	0,01027
	0,02898	0,03578	0,01243	0,01025	0,02398	0,01023	0,01378	0,01027		0,02898	0,03139	0,01176	0,01024	0,02398	0,01023	0,01378	0,01025
	0,02998	0,03195	0,01185	0,01024	0,02498	0,01023	0,01398	0,01025		0,02998	0,02803	0,01134	0,01023	0,02498	0,01023	0,01398	0,01024
	0,03098	0,02872	0,01142	0,01023	0,02598	0,01023	0,01418	0,01024		0,03098	0,02523	0,01103	0,01023	0,02598	0,01023	0,01418	0,01023
	0,03198	0,02598	0,01111	0,01023	0,02698	0,01023	0,01438	0,01023		0,03198	0,02288	0,01081	0,01023	0,02698	0,01023	0,01438	0,01023
	0,03298	0,02366	0,01088	0,01023	0,02798	0,01023	0,01458	0,01023		0,03298	0,02091	0,01065	0,01023	0,02798	0,01023	0,01458	0,01023
	0,03398	0,02169	0,01071	0,01023	0,02898	0,01023	0,01478	0,01023		0,03398	0,01925	0,01053	0,01023	0,02898	0,01023	0,01478	0,01023
	0,03498	0,02002	0,01058	0,01023	0,02998	0,01023	0,01498	0,01023		0,03498	0,01787	0,01045	0,01023	0,02998	0,01023	0,01498	0,01023

$$P(CFAR_J > b), n = 5, \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b), n = 10, \alpha_J = 0,010$$

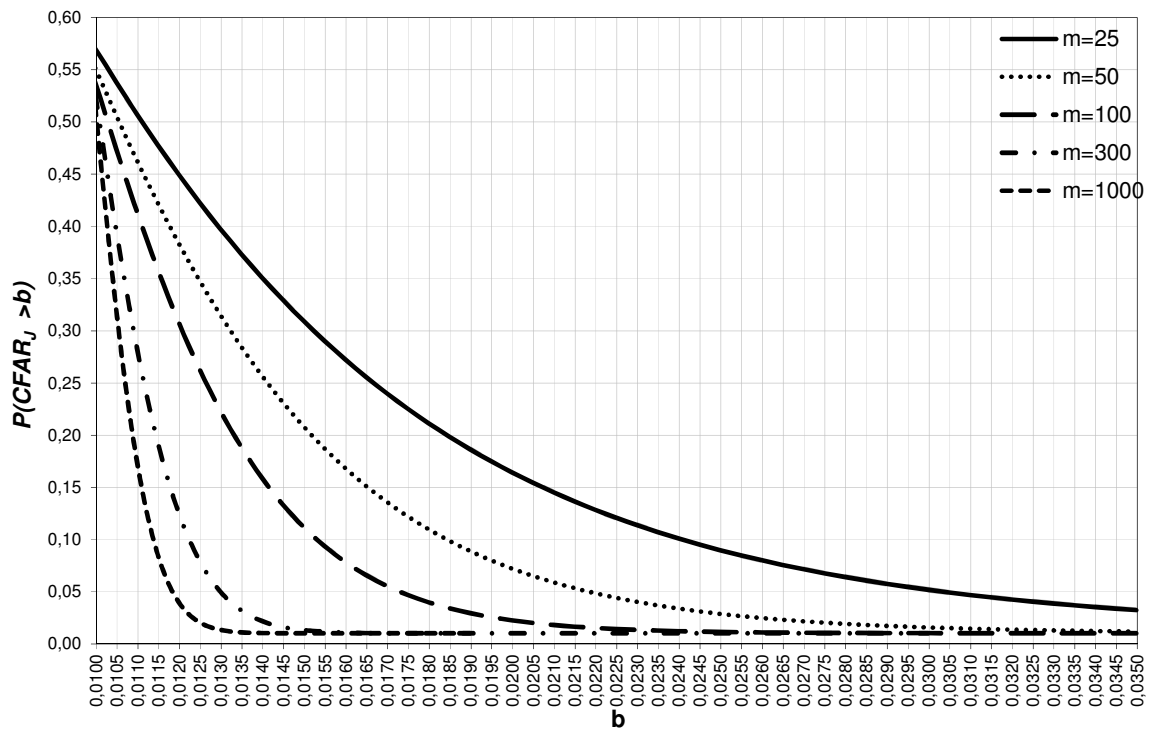
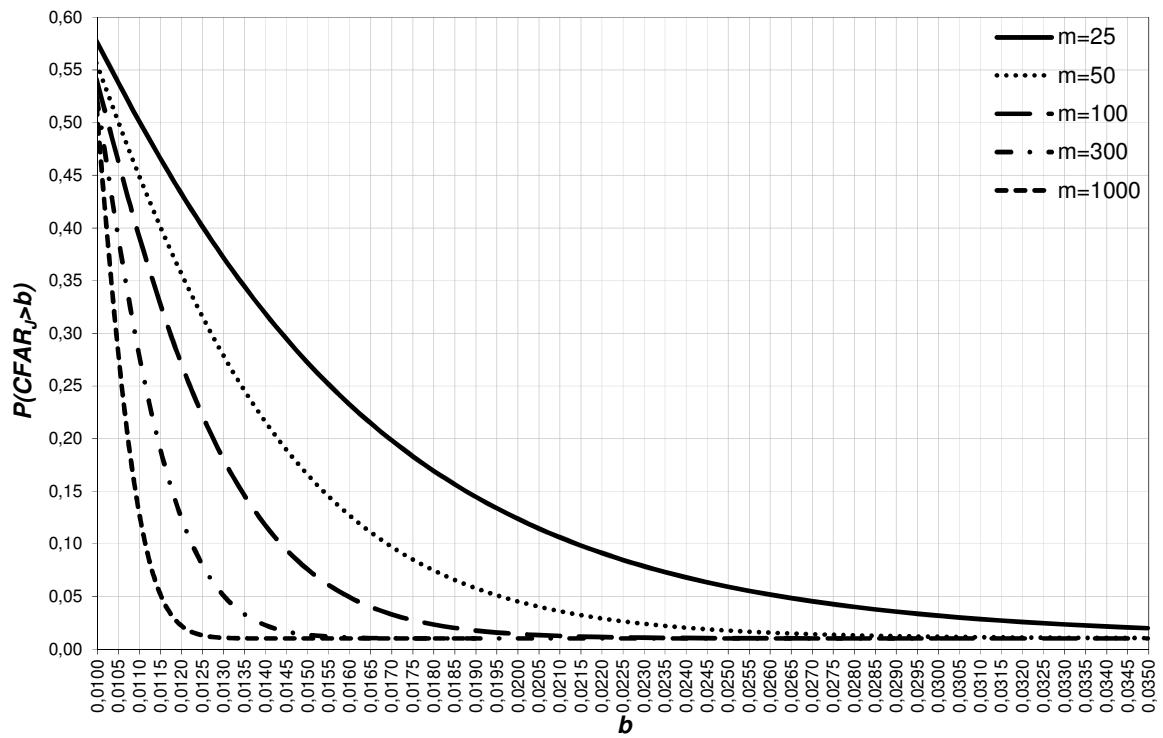


Figura B.7 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 5$ e 10 , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso UU .

$$P(CFAR_J > b), n = 20, \alpha_J = 0,010$$



$$P(CFAR_J > b), n = 25, \alpha_J = 0,010$$

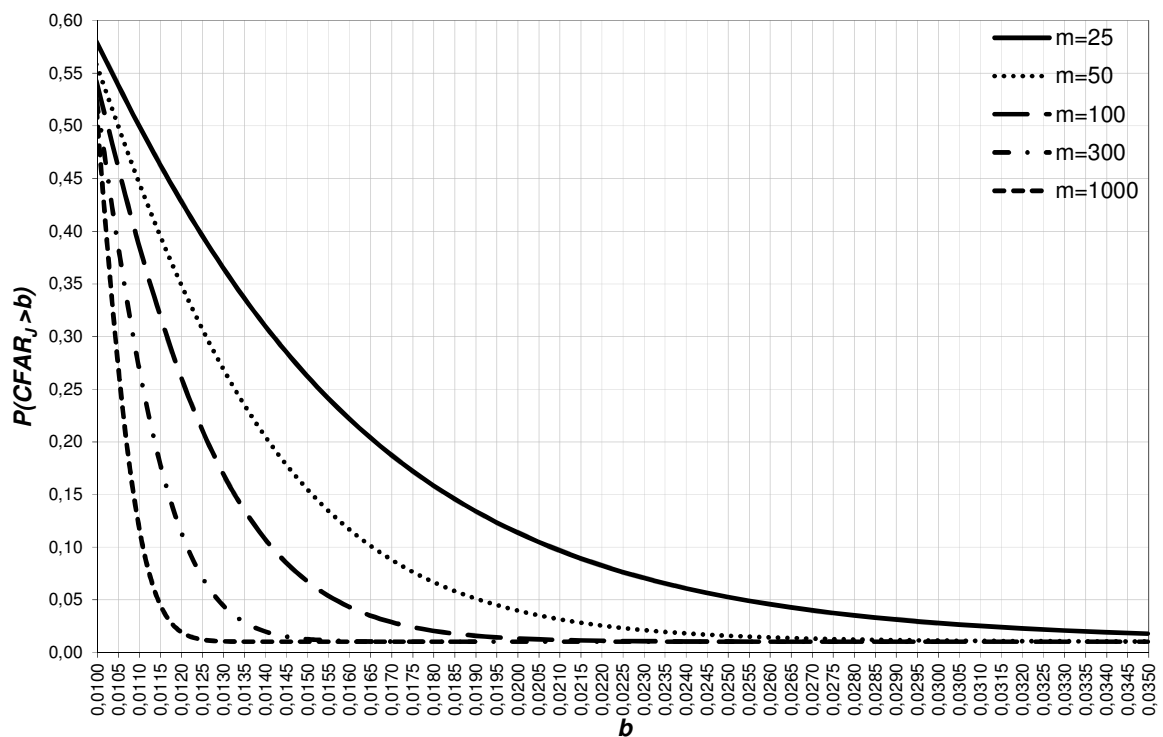


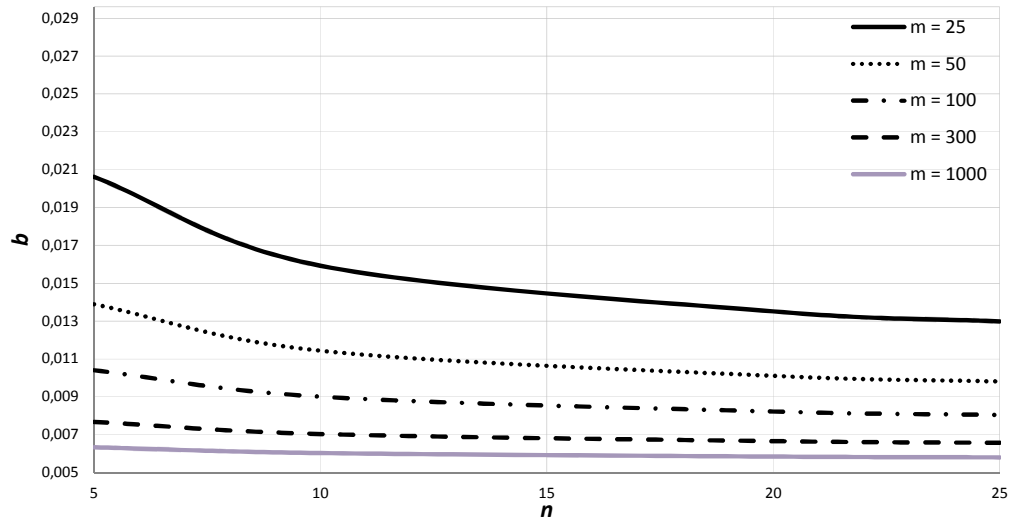
Figura B.8 - Gráfico da Probabilidade de $CFAR_J$ exceder um valor b , para $n = 20$ e 25 , $\alpha_J=0,010$ e estimador S_p , Caso UU .

**Apêndice C -
Tabelas e Gráficos da Análise 2 – Gráfico da Média
centrado no valor alvo - Caso *KU***

Tabela C.1 (Tabela 5 no texto) – Quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p Caso KU .

$b, P(CFAR_J > b)=0,05$							$b, P(CFAR_J > b)=0,10$				
m							m				
	n	25	50	100	300	1000	25	50	100	300	1000
$\alpha_l=0,0054$	5	0,0215	0,0146	0,0110	0,0082	0,0068	0,0161	0,0118	0,0094	0,0075	0,0064
	10	0,0165	0,0119	0,0095	0,0075	0,0064	0,0129	0,0100	0,0084	0,0069	0,0062
	20	0,0139	0,0105	0,0086	0,0071	0,0063	0,0113	0,0091	0,0078	0,0067	0,0060
	25	0,0134	0,0102	0,0085	0,0070	0,0062	0,0109	0,0089	0,0076	0,0066	0,0060
$\alpha_l=0,010$	5	0,0344	0,0243	0,0188	0,0144	0,0122	0,0265	0,0201	0,0164	0,0133	0,0117
	10	0,0273	0,0204	0,0166	0,0134	0,0117	0,0219	0,0174	0,0148	0,0125	0,0113
	20	0,0236	0,0183	0,0153	0,0128	0,0114	0,0195	0,0160	0,0139	0,0121	0,0111
	25	0,0228	0,0178	0,0150	0,0126	0,0113	0,0189	0,0157	0,0137	0,0120	0,0110

$$b, P(CFAR_j > b) = 5\%, \alpha_j = 0,0054$$



$$b, P(CFAR_j > b) = 10\%, \alpha_j = 0,0054$$

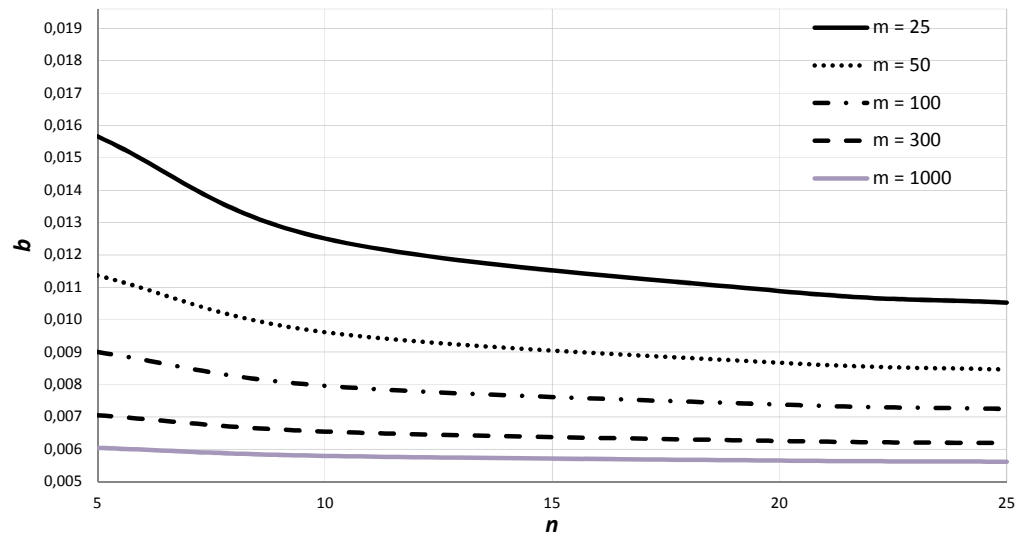
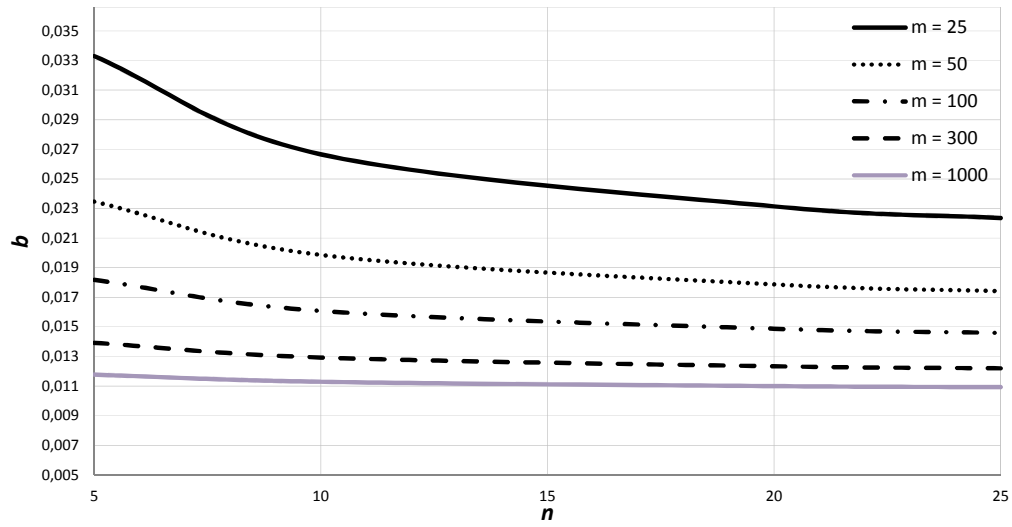


Figura C.1 - Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_j$, em função de n e m , $\alpha_j=0,0054$ e estimador S_p , Caso KU .

$$b, P(CFAR_j > b) = 5\%, \alpha_j = 0,010$$



$$b, P(CFAR_j > b) = 10\%, \alpha_j = 0,010$$

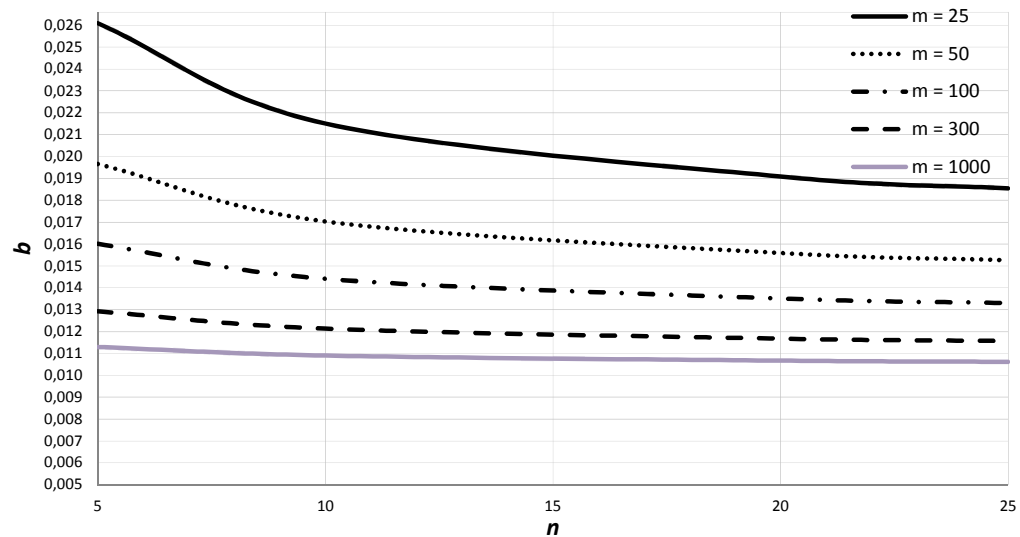


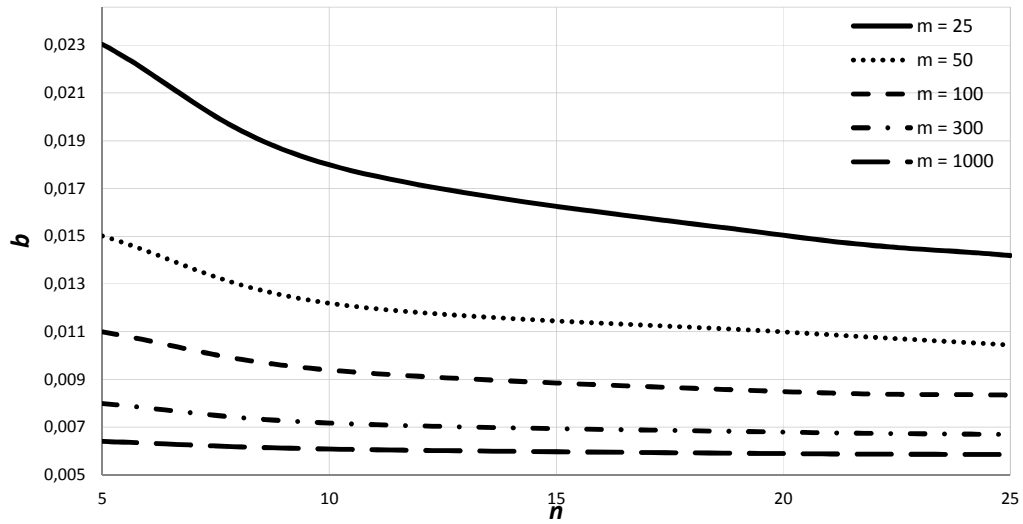
Figura C.2 - Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_j$, em função de n e m , $\alpha_j=0,010$ e estimador S_p , Caso KU .

**Apêndice D -
Tabelas e Gráficos da Análise 2 – Gráfico da Média
centrado em $\bar{\bar{X}}$, Caso *UU***

Tabela D.1 (Tabela 7 no texto) – Quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_J$, em função de n e m e estimador S_p , Caso UU .

		$b, P(CFAR_J > b)=0.05$					$b, P(CFAR_J > b)=0.10$				
		m					m				
	n	25	50	100	300	1000	25	50	100	300	1000
$\alpha_j=0.0054$	5	0.0234	0.0154	0.0114	0.0084	0.0068	0.0175	0.0124	0.0096	0.0075	0.0065
	10	0.0184	0.0126	0.0098	0.0076	0.0065	0.0144	0.0105	0.0086	0.0070	0.0062
	20	0.0154	0.0114	0.0089	0.0072	0.0063	0.0124	0.0095	0.0080	0.0067	0.0061
	25	0.0146	0.0108	0.0087	0.0071	0.0063	0.0120	0.0094	0.0079	0.0067	0.0060
$\alpha_j=0.010$	5	0,0355	0,0254	0,0193	0,0146	0,0123	0,0290	0,0210	0,0170	0,0134	0,0117
	10	0,0300	0,0215	0,0171	0,0136	0,0118	0,0240	0,0183	0,0152	0,0127	0,0114
	20	0,0260	0,0193	0,0160	0,0130	0,0115	0,0212	0,0170	0,0143	0,0122	0,0111
	25	0,0250	0,0190	0,0155	0,0127	0,0114	0,0205	0,0164	0,0141	0,0121	0,0111

$$b, P(CFAR_j > b) = 5\%, \alpha_j = 0,0054$$



$$b, P(CFAR_j > b) = 10\%, \alpha_j = 0,0054$$

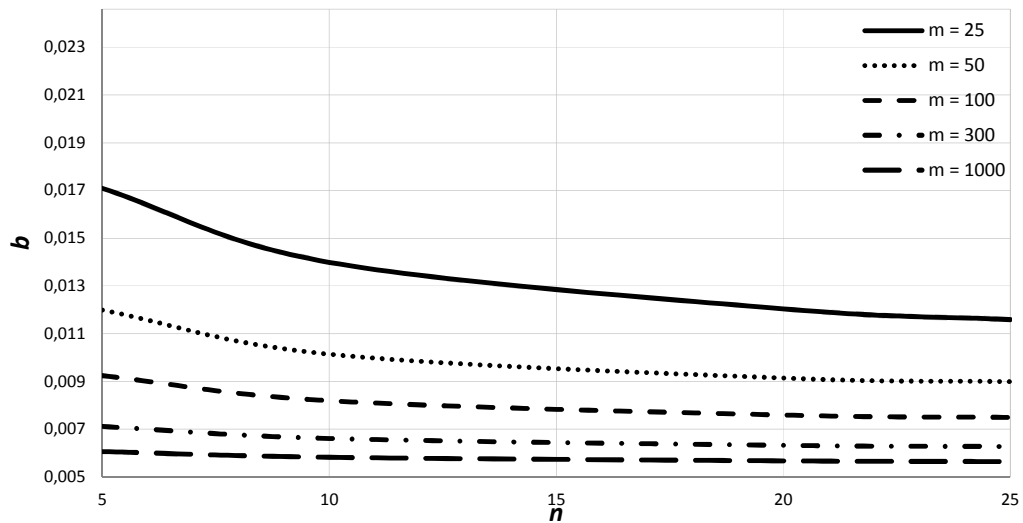


Figura D.1 (Figura 2 no texto) - Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_j$, em função de n e m , $\alpha_j=0,0054$, estimador S_p , Caso UU .

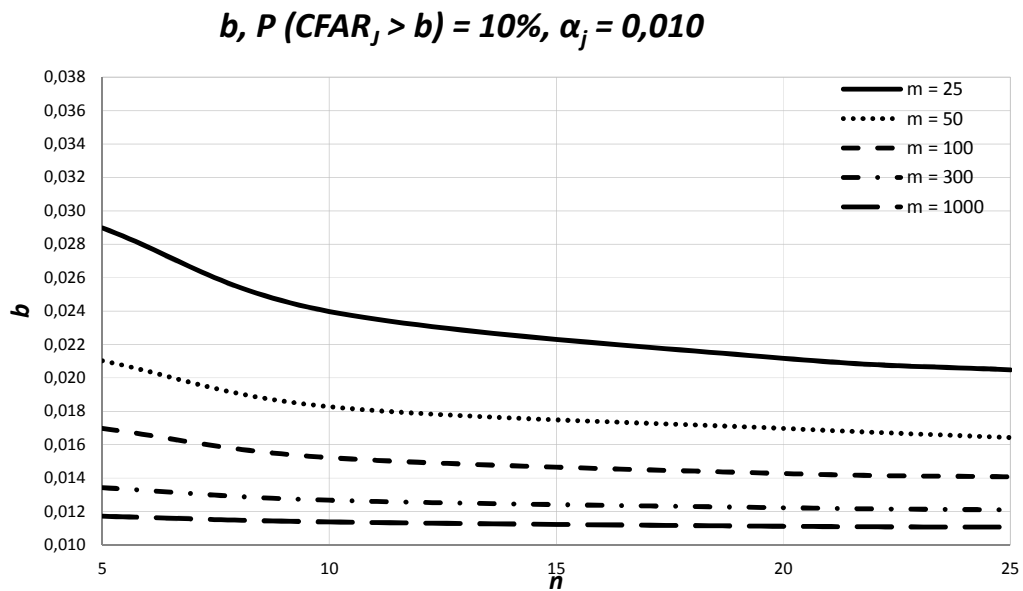
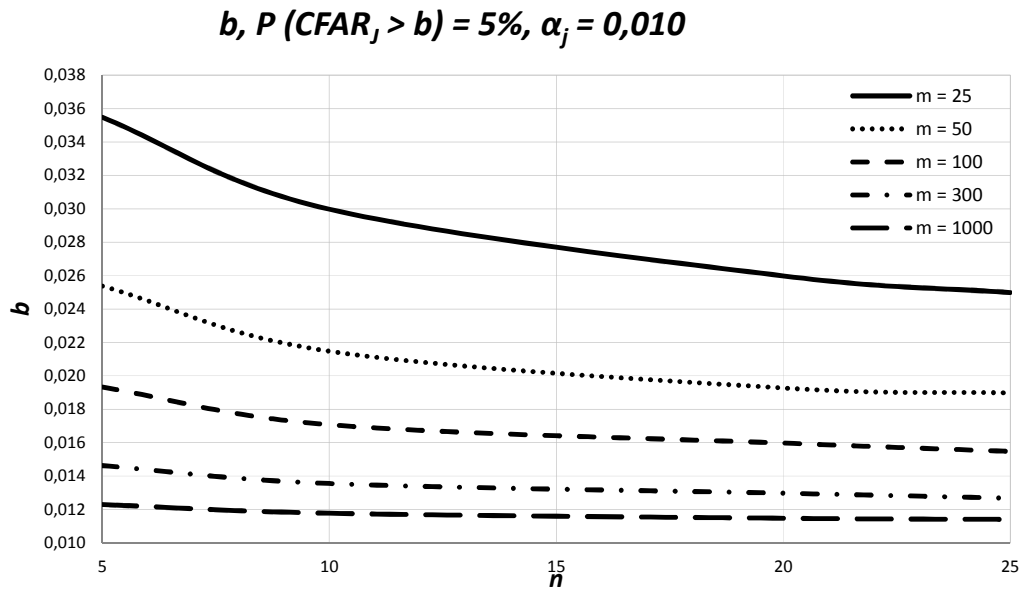


Figura D.2 (Figura 3 no texto) - Gráfico dos quantis de 0,95 e 0,90 da $CFAR_j$, em função de n e m , $\alpha_j=0,010$, estimador S_p , Caso UU .

**Apêndice E -
Tabela da Análise 3 – Gráfico da Média centrado no valor
alvo, Caso *KU***

Tabela E.1 (Tabela 8 no texto) – Número mínimo de amostras iniciais m em função de n , com $p = 5, 10$ e 15% , $\varepsilon = 10, 20, 30, 40$ e 50% e estimador S_p , Caso KU .

$m, \alpha_j = 0,0054$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _J > 1,10 α_j]			P [CFAR _J > 1,20 α_j]			P [CFAR _J > 1,30 α_j]			P [CFAR _J > 1,40 α_j]			P [CFAR _J > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	5.468	3.328	2.184	1.489	909	598	716	438	289	434	266	176	295	181	120
10	3.403	2.070	1.358	920	561	369	451	275	182	274	168	111	180	110	73
20	2.356	1.433	940	647	394	259	313	191	126	192	118	78	133	76	54
25	2.136	1.299	852	588	358	236	285	174	114	175	107	71	122	72	49
$m, \alpha_j = 0,010$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _J > 1,10 α_j]			P [CFAR _J > 1,20 α_j]			P [CFAR _J > 1,30 α_j]			P [CFAR _J > 1,40 α_j]			P [CFAR _J > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	4.384	2.669	1.752	1.192	725	479	571	351	231	347	213	141	236	145	97
10	2.771	1.686	1.107	758	463	304	366	224	148	222	136	90	148	91	60
20	1.954	1.189	780	531	323	213	260	159	105	159	98	60	110	65	43
25	1.774	1.079	708	485	295	194	239	146	96	142	87	57	101	61	41

Apêndice F -
Tabela da Análise 3 – Gráfico da Média centrado em $\bar{\bar{X}}$,
Caso *UU*

Tabela F.1 (Tabela 9 no texto) – Número mínimo de amostras iniciais m em função de n , com $p = 5, 10$ e 15% , $\varepsilon = 10, 20, 30, 40$ e 50% e estimador S_p , Caso UU .

$m, \alpha_j = 0,0054$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _J > 1,10 α_j]			P [CFAR _J > 1,20 α_j]			P [CFAR _J > 1,30 α_j]			P [CFAR _J > 1,40 α_j]			P [CFAR _J > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	5.955	3.557	2.335	1.633	982	650	791	478	319	482	293	197	332	203	137
10	3.729	2.232	1.470	1.030	622	414	502	306	205	308	188	127	214	131	89
20	2.588	1.563	1.033	723	442	296	356	219	149	219	136	93	153	96	66
25	2.348	1.419	940	658	402	271	323	200	136	201	125	86	140	88	61
$m, \alpha_j = 0,010$															
n	$\varepsilon = 10\%$			$\varepsilon = 20\%$			$\varepsilon = 30\%$			$\varepsilon = 40\%$			$\varepsilon = 50\%$		
	P [CFAR _J > 1,10 α_j]			P [CFAR _J > 1,20 α_j]			P [CFAR _J > 1,30 α_j]			P [CFAR _J > 1,40 α_j]			P [CFAR _J > 1,50 α_j]		
	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15	0,05	0,10	0,15
5	4.781	2.860	1.879	1.311	790	524	634	385	257	387	236	159	267	163	111
10	3.042	1.824	1.203	841	509	340	410	250	169	252	155	105	175	108	74
20	2.154	1.296	858	602	367	246	296	182	124	183	113	78	128	79	55
25	1.961	1.181	783	550	335	226	272	167	114	168	105	72	118	74	51