4
Modelos Constitutivos Elasto-Plásticos Avançados

Os critérios de Mohr-Coulomb, principalmente, e de Drucker-Prager, em menor extensão, são bem conhecidos dos engenheiros geotécnicos mas apresentam limitações, discutidas no capítulo anterior, que os tornam inadequados para uma representação mais próxima do comportamento real de solos. Nas últimas décadas, consideráveis esforços de pesquisa têm sido feitos no desenvolvimento de modelos elasto-plásticos mais avançados, com formulação voltada para aplicações numéricas pelo método dos elementos finitos, que procuram simular vários aspectos do comportamento mecânico de materiais geológicos como o endurecimento (*hardening*) por deformações plásticas. Alguns destes modelos são descritos brevemente nas seções seguintes.

4.1
Modelos com endurecimento isotrópico

4.1.1
Modelo de Lade – Kim

Este modelo constitutivo foi proposto Lade e Kim (1988a,b,c), como um aperfeiçoamento do modelo de duas superfícies anteriormente desenvolvido por Lade (1977) para areias e argilas. O modelo é formulado no estado 3D de tensões, dispondo de recursos para simular os fenômenos de amolecimento e de endurecimento isotrópicos. Trata-se de um modelo unificado para materiais com atrito interno (solos, rochas, concreto, etc) necessitando de 12 parâmetros de materiais determinados em ensaios convencionais de laboratório.

Características do modelo.. Uma importante característica é a adoção de uma superfície de escoamento única e isotrópica, que representa os pontos de igual trabalho plástico total. O trabalho plástico, assim, atua como parâmetro de endurecimento e define a forma e localização da superfície de escoamento no espaço das tensões principais.

A lei de fluxo é assumida não associada (outra característica dos materiais com atrito interno) fazendo uso de uma função de potencial plástico expressa em termos dos invariantes de tensão. A passagem da fase do endurecimento para o amolecimento plástico ocorre abruptamente no ponto de pico, sem a transição que em geral se observa nos resultados de ensaios experimentais de solos.

Comportamento elástico. As deformações elásticas são calculadas a partir da lei de Hooke generalizada, utilizando o módulo de descarregamento / recarregamento definido por

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left(\frac{s_3}{p_a} \right)^n \tag{4.1}$$

onde K_{ur} e n constantes do material determinadas dos resultados de ensaios convencionais de compressão triaxial executados sob diversos níveis de tensão de confinamento. A pressão do ar p_a é expressa nas mesma unidade de s_3. O coeficiente de Poisson é geralmente assumido constante, com valores típicos determinados com base no tipo de solo investigado.

Critério de ruptura. Trata-se de um critério geral, tridimensional, proposto para solos, concreto, rochas e outros materiais com atrito interno. Depende do primeiro e terceiro invariantes do tensor de tensões, sendo expresso pela função

$$\left(\frac{J_1^3}{J_3} - 27 \right) \left(\frac{J_1}{p_a} \right)^m = h_1 \tag{4.2}$$

Os parâmetros m e h_1 são constantes adimensionais. A superfície descrita pela equação (4.2) se assemelha a uma bala assimétrica no espaço de tensões, com a ponta na origem dos eixos. O ângulo da ponta aumenta com o valor de h_1 (figura 4.1a), enquanto que a curvatura da superfície, sempre côncava com respeito ao eixo hidrostático, aumenta com o valor de m. Para m constante e h_1 crescente, a projeção da superfície no plano octaédrico é uma curva que varia da forma circular para um triângulo com bordas arredondadas. Para $m = 0$, a forma da curva não é afetada por J_1 e para $m > 0$ muda gradualmente de triangular para circular à medida que J_1 aumenta (figura 4.1b).

A resistência à tração (coesão) é incorporada no modelo trasladando-se a origem dos eixos de tensão ao longo do eixo hidrostático de um valor ap_a, de tal forma que:

$$\overline{s}_{ij} = s_{ij} + d_{ij} a p_a \tag{4.3}$$

onde a é uma constante adimensional. Os três parâmetros (h_1, m e a) devem ser determinados a partir dos resultados de ensaios de compressão triaxial convencional.

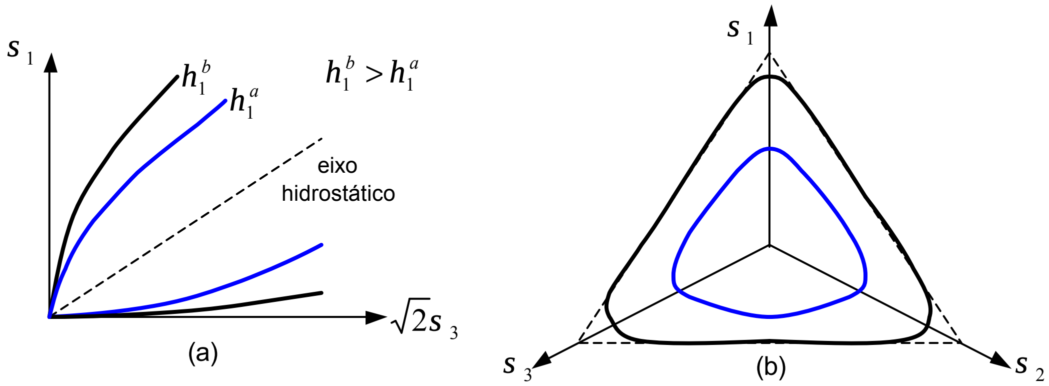


Figura 4.1: Modelo de Lade-Kim. Superfície de ruptura: a) no plano triaxial; b) em plano octaédrico (adaptado de Lade e Kim, 1988).

Lei de fluxo. As deformações plásticas incrementais são calculadas a partir da função potencial plástico Q, sendo portanto assumido fluxo não associado, e a lei de fluxo generalizada (equação 4.4).

$$de_{ij}^{p} = dl\,\frac{\partial Q}{\partial s_{ij}} \qquad (4.4)$$

A forma da função potencial plástico é obtida da análise dos vetores $d\bar{e}^{p}$ calculados com base nos resultados dos ensaios. Foi observado que em ensaios tipo CTC (compressão triaxial convencional) as deformações volumétricas plásticas são altamente compressivas para estados de tensão situados próximos do eixo hidrostático, diminuindo à medida que a tensão de desvio é incrementada. Para altas tensões perto da ruptura, as deformações volumétricas plásticas se tornam dilatantes, sugerindo a forma de elipses distorcidas para a função Q no plano triaxial, conforme ilustra a figura 4.2b.

Em planos octaédricos se observou que o efeito da anisotropia só é relevante para baixos níveis de tensão de desvio, tendo pequena influência para estados de tensão vizinhos à ruptura. Os ensaios mostraram ainda que a forma da função Q no plano octaédrico se aproxima da circular, para tensões de desvio baixas, tendendo à forma triangular com bordas arredondadas, para estados próximos da ruptura (figura 4.2a).

O modelo de Lade-Kim propõe uma função Q dependente dos três invariantes de tensão segundo a relação

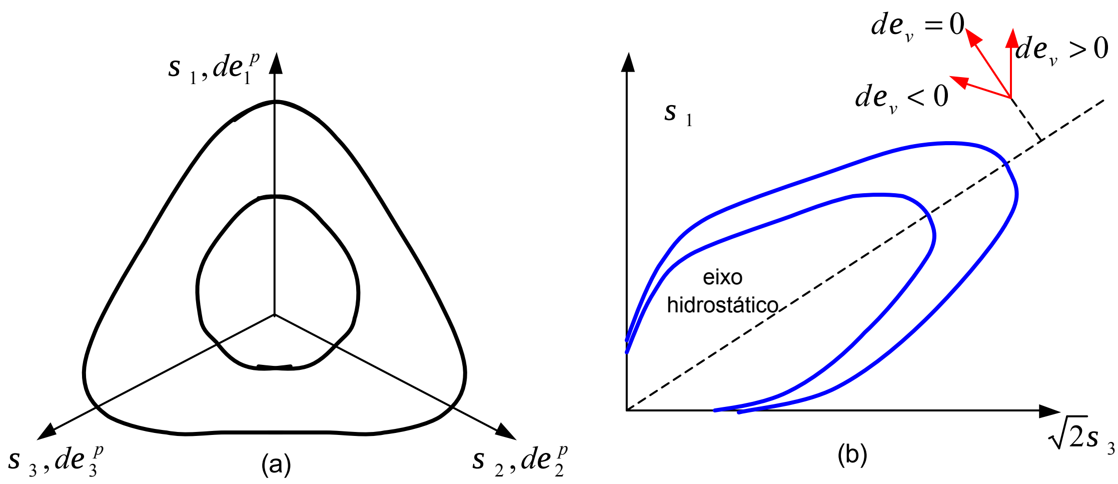


Figura 4.2: Potencial plástico no modelo de Lade-Kim. a) Em plano octaédrico; b) No plano triaxial (adaptado de Lade e Kim, 1988).

$$Q = \left(y_1 \frac{J_1^3}{J_3} - \frac{J_1^2}{J_2} + y_2 \right) \left(\frac{J_1}{p_a} \right)^m \tag{4.5}$$

onde os parâmetros do material y_2 e m são constantes adimensionais que devem ser determinadas mediante interpretação dos resultados de ensaios CTC. A constante y_1 esta relacionado com o parâmetro m do critério de ruptura, e atua como fator de ponderação entre as formas triangular (controlada pelo termo de J_3) e circular (controlada pelo termo de J_2). O parâmetro y_2, por sua vez, controla a interseção da função potencial plástico com o eixo hidrostático, enquanto o expoente m influencia a curvatura dos meridianos. A superfície assim definida se assemelha a um charuto assimétrico com seção transversal triangular arredondada, similar, porém não idêntica, à forma da superfície de ruptura ilustrada pela figura 4.2.

Os incrementos de deformação plástica obtêm-se das eqs (4.4-5) como:

$$\begin{Bmatrix} de_x^p \\ de_y^p \\ de_z^p \\ dg_{yz}^p \\ dg_{zx}^p \\ dg_{xy}^p \end{Bmatrix} = dl_p \left(\frac{J_1}{p_a} \right)^m \begin{Bmatrix} G - (s_y + s_z)\frac{J_1^2}{J_2^2} - y_1 (s_y s_z - t_{yz}^2)\frac{J_1^3}{J_3^2} \\ G - (s_z + s_x)\frac{J_1^2}{J_2^2} - y_1 (s_z s_x - t_{zx}^2)\frac{J_1^3}{J_3^2} \\ G - (s_x + s_y)\frac{J_1^2}{J_2^2} - y_1 (s_x s_y - t_{xy}^2)\frac{J_1^3}{J_3^2} \\ 2\frac{J_1^2}{J_2^2} t_{yz} - 2y_1 (t_{xy} t_{zx} - s_x t_{yz})\frac{J_1^3}{J_3^2} \\ 2\frac{J_1^2}{J_2^2} t_{zx} - 2y_1 (t_{xy} t_{yz} - s_y t_{zx})\frac{J_1^3}{J_3^2} \\ 2\frac{J_1^2}{J_2^2} t_{xy} - 2y_1 (t_{yz} t_{zx} - s_z t_{xy})\frac{J_1^3}{J_3^2} \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

Superfície de escoamento. Descreve as condições sob as quais as deformações plásticas acontecem, levando em consideração que para solos o escoamento é um processo contínuo, sem um ponto de escoamento definido na curva tensão x deformação, como no estudo tradicional do comportamento de metais.

Neste modelo o *trabalho plástico* armazenado pelo material é adotado como parâmetro de endurecimento. Analisando-se, portanto, os contornos de igual trabalho plástico no espaço de tensões, é possível investigar-se as principais características do escoamento plástico experimentado pelo material.

Tendo como referencial o ensaio de compressão isotrópica, o trabalho plástico aumenta monotonicamente com o incremento da tensão hidrostática, sendo possível expressá-lo pela seguinte função:

$$W_p = Cp_a\left(J_1 / p_a\right)^p \tag{4.7}$$

onde C e p são parâmetros adimensionais a serem determinados. Realizando ensaios sob diferentes níveis de tensão obtêm-se as curvas de igual trabalho plástico, das quais são derivadas as superfícies de escoamento f_p. Dados experimentais mostram que as mesmas têm forma circular para baixas tensões, transformando-se em triângulos arredondados quando o estado de tensões se aproxima da superfície de ruptura (figura 4.3a). Cabe destacar ainda que a superfície de ruptura não é um contorno de igual trabalho plástico.

A função f_p isotrópica proposta por Lade-Kim é escrita como:

$$f_p = f_p'(s) - f_p''(W_p) = 0 \quad \text{com} \tag{4.8}$$

$$f_p' = \left(y_1 \frac{J_1^3}{J_3} - \frac{J_1^2}{J_2}\right)\left(\frac{J_1}{p_a}\right)^h e^q \tag{4.9}$$

A superfície de escoamento assim definida se assemelha a uma lágrima no espaço de tensões, com seção transversal triangular suavemente arredondada, contínua para todos os pontos do espaço à exceção da origem (figura 4.3b).

Os parâmetros utilizados para definir a superfície de escoamento são y_1, h e q, também determinados dos resultados experimentais. O parâmetro y_1, já descrito na definição da função potencial plástico, controla a influência relativa dos termos no primeiro parênteses da equação (4.9) que definem a forma da seção transversal da superfície, enquanto que a constante h e a variável q servem para controlar a forma dos meridianos da superfície (figura 4.3b). O parâmetro q é função do nível de tensão, sendo considerado os valores $q = 0$ durante compressão isotrópica, $0 < q < 1$ para estados com tensões de desvio e $q = 1$ na ruptura.

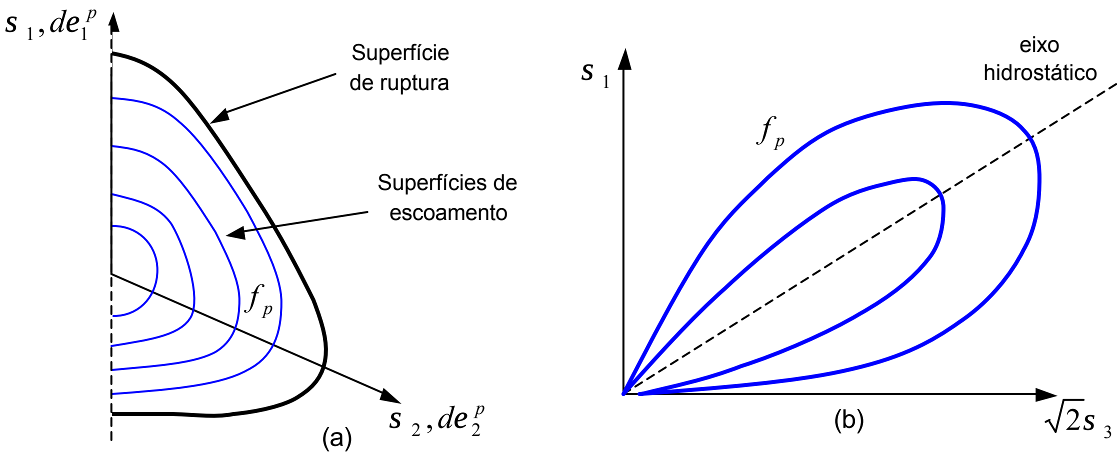


Figura 4.3: Superfície de escoamento no modelo de Lade-Kim. a) Em plano octaédrico; b) No plano triaxial (adaptado de Lade e Kim, 1988).

Para o caso de estado de compressão isotrópica, o valor de f'_p é dado por

$$f'_p = (27y_1 + 3)\left(\frac{J_1}{p_a}\right)^h \tag{4.10}$$

Utilizando a expressão acima, combinada com a equação (4.7), o trabalho plástico sob compressão isotrópica pode ser escrito como

$$W_p = Dp_a f''^r_p \qquad \text{com} \qquad f''_p = \left(\frac{1}{D}\right)^{1/r}\left(\frac{W_p}{p_a}\right)^{1/r} \tag{4.11}$$

onde $r = p/h$ e $D = C/(27y_1 + 3)^r$. Assim se relaciona de forma única o critério de escoamento com o trabalho plástico, constituindo portanto a lei de endurecimento.

Amolecimento plástico. No caso de solos onde ocorre o amolecimento sob fluxo plástico, considera-se que este inicia nos pontos que atingem a superfície de ruptura, isto é, sob a condição $q = 1$. A lei de amolecimento isotrópico é assumida como uma exponencial que decai em função do trabalho plástico de acordo com

$$f''_p = Ae^{-B(W_p/p_a)} \tag{4.12}$$

onde A e B são constantes positivas. Conforme já mencionado, a transição entre as fases de endurecimento e de amolecimento é admitida abrupta no modelo de Lade-Kim, o que facilita a implementação computacional, adotando-se também a hipótese de que, em valor absoluto, a inclinação da curva de endurecimento, imediatamente à esquerda do ponto de pico, é igual à inclinação da curva de amolecimento, imediatamente à direita deste ponto. Disto, podem ser obtidas expressões para cálculo das constantes A e B:

$$A = (f_p')_{pico}\, e^{B(W_p/p_a)_{pico}} \qquad B = \left(\frac{df_p''}{d(W_p/p_a)}\right)_{end.pico} \frac{1}{(f_p')_{pico}} \tag{4.13}$$

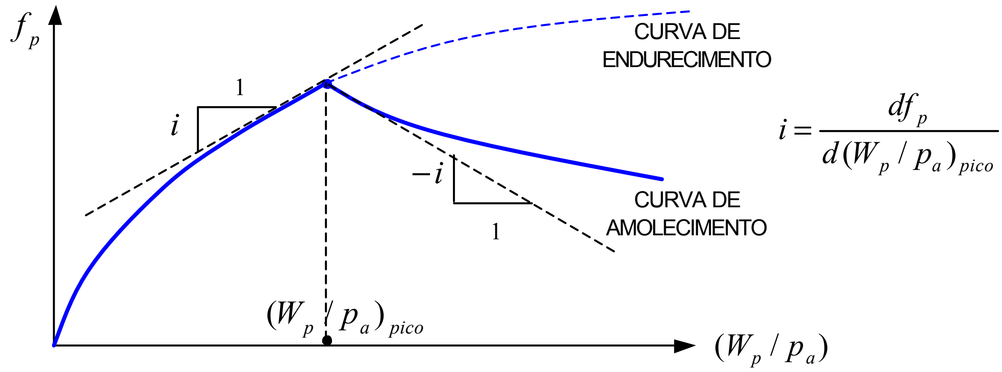


Figura 4.4: Esquema das curvas de endurecimento e de amolecimento no modelo de Lade-Kim (adaptado de Lade e Kim, 1988).

Utilizando a equação do potencial plástico, a relação entre o trabalho plástico e a constante $d\lambda$ da lei de fluxo finamente pode ser expressa como:

$$d\lambda = dW_p / mg_p \tag{4.14}$$

onde o incremento de trabalho plástico é determinado a partir das equações de endurecimento e amolecimento. No caso de endurecimento, derivando-se a equação (4.11), tem-se $dW_p = Dp_a r f_p^{r-1} df_p$ e, para a situação de amolecimento, da equação (4.12) deriva-se $dW_p = -(1/B) p_a f_p^{-1} df_p$, onde df_p é admitido negativo na região de amolecimento. Combinado-se estas equações, com a expressão (4.14) e a lei de fluxo generalizada (equação 4.10) conseguem-se expressar completamente os cálculos necessários para a obtenção dos incrementos de deformação plástica.

Parâmetros do modelo. Doze parâmetros são requeridos para definição do modelo de Lade-Kim, a saber: K_{ur}, n, n para a componente elástica do incremento de deformação, h_1 e m para o critério de ruptura, y_2 e μ para a definição do potencial plástico, h e q para a superfície de escoamento, C e p para a função de endurecimento e finalmente a para o caso de materiais com coesão.

Conclusões. O modelo de Lade-Kim, formulado inteiramente com base na observação de resultados experimentais em areias, argilas, rochas e concreto é especialmente adequado para representar o escoamento contínuo de materiais granulares, associado a ocorrências de endurecimento e/ou amolecimento isotrópicos. Trata-se de um modelo altamente não linear que requer 12 parâmetros para sua definição, todos obtidos com base em ensaios convencionais da mecânica de solos, sendo orientado para a resolução de problemas geotécnicos através do método dos elementos finitos.

4.1.2
Modelo Hierárquico (HiSS)

O modelo hierárquico com superfície simples (HiSS), desenvolvido por Desai (Desai, 1980; Desai *et al.*, 1986), também tem como objetivo propor uma formulação geral para caracterização do comportamento elasto-plástico de materiais geológicos. O modelo foi apresentado em várias versões ou hierarquias, como informa a tabela 4.1, contemplando leis de fluxo associada e não associada, endurecimento isotrópico e anisotrópico, etc.

Tabela 4.1: Versões do modelo hierárquico – HiSS.

Versão	Características	Materiais
δ_0	endurecimento isotrópico e plasticidade associada	areia e concreto
δ_0*	endurecimento isotrópico e plasticidade associada	argila
δ_1	endurecimento isotrópico e plasticidade não associada	areia
δ_2	endurecimento isotrópico e cinemático, plasticidade não associada com anisotropia induzida.	areia
δ_2*	endurecimento isotrópico e cinemático, plasticidade não associada com anisotropia induzida.	argila

É importante destacar esta característica da formulação do modelo hierárquico, permitindo a seleção de modelos de sofisticação crescente de acordo com as necessidades do problema geotécnico a ser solucionado e da quantidade, precisão e abrangência dos resultados experimentais disponíveis para determinação dos parâmetros necessários. A formulação geral pode ser simplificada conforme a situação o exigir, recuperando-se, neste processo, as formulações de modelos clássicos da mecânica dos solos, modelos de estado crítico e outros modelos elasto-plásticos propostos na literatura.

Superfície de escoamento *F*. Uma mesma função de escoamento é utilizada para todas as versões do modelo. Uma função polinomial geral dependente dos invariantes do tensor de tensão foi inicialmente proposta por Desai (1980) para descrever o escoamento dos materiais geológicos, posteriormente (Desai e Faruque, 1984) simplificada para

$$F = J_{2D} + aJ_1^2 - bJ_1J_3^{1/3} - gJ_1 - k^2 = 0 \qquad (4.15)$$

onde a, b, g, k são as funções de resposta do material.

Uma forma compacta e adimensional da função de escoamento foi novamente apresentada por Desai e Wathugala (1987):

$$F = \bar{J}_{2D} - (-a\bar{J}_1^n + g\bar{J}_1^2)(1 - bS_r)^m = 0 \qquad (4.16)$$

onde:

$\bar{J}_{2D} = J_{2D} / p_a^2$, sendo p_a a pressão atmosférica;

$\bar{J}_1 = (J_1 + 3R) / p_a$;

R = resistência à tração ($R = 0$ para materiais sem coesão);

n = parâmetro de mudança de fase, quando a variação de volume muda de sinal ou se torna nula;

$m = -0,5$ (valor constante geralmente utilizado no modelo);

a = função de endurecimento, dependente da trajetória de deformações plásticas;

b = parâmetro de forma, associado à geometria de F no plano octaédrico;

g = parâmetro de escoamento, associado à superfície de escoamento última.

S_r = relação de tensões $= -3\,\mathrm{sen}(3q) = (\sqrt{27}/2)(J_{3D} / J_{2D}^{3/2})$, sendo q o ângulo de Lode;

Alternativa, a função de escoamento F pode também ser expressa por

$$F = \bar{J}_{2D} - F_bF_s = 0 \qquad (4.17)$$

onde $F_b = -a\bar{J}_1^n + g\bar{J}_1^2$ é uma função componente que descreve a forma da superfície de escoamento no plano $(J_1, \sqrt{J_{2D}})$ - figura 4.5a- e $Fs = (1 - bS_r)^m$ é uma função que descreve a forma da superfície de escoamento em um plano octaédrico - figura 4.5b.

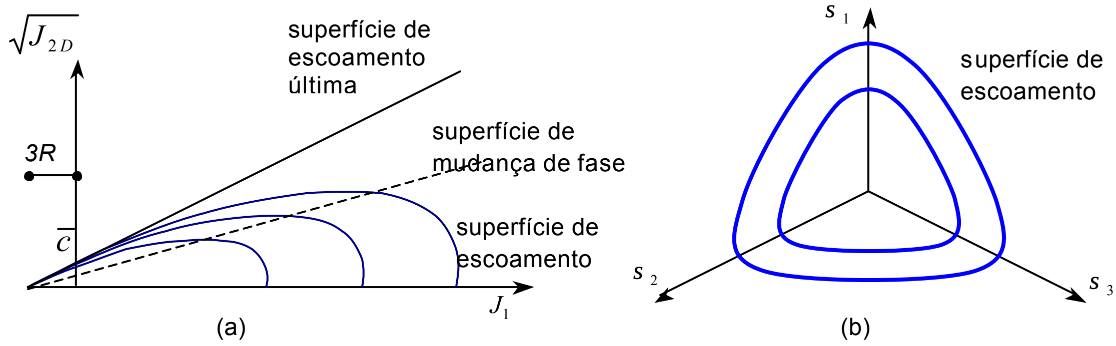


Figura 4.5: Modelo hierárquico: a) superfície de escoamento no plano $(J_1, \sqrt{J_{2D}})$; b) superfície de escoamento em plano octaédrico (adaptado de Desai, 1980).

A figura (4.5a) mostra duas superfícies, representadas por retas no plano $(J_1, \sqrt{J_{2D}})$: a) a superfície de escoamento última com inclinação $\sqrt{gF_s}$, posição extrema de F para $a = 0$; b) a superfície de mudança de fase que passa pela crista das diferentes superfícies de escoamento contínuo do solo. Na hipótese de fluxo associado, o modelo prevê deformações volumétricas plásticas compressivas ou de expansão para pontos situados abaixo ou acima desta superfície, respectivamente.

Quanto à forma da superfície de escoamento em plano octaédrico, o requisito de sua convexidade imposto pela teoria da plasticidade limita o valor do parâmetro $b \leq 0{,}756$. Para o caso particular *b* = *0*, *F* é descrita por um círculo no plano octaédrico.

Endurecimento plástico. O endurecimento é controlado pela função α dependente de variáveis associadas às deformações plásticas, na forma geral de $a = a(x, x_D, x_V)$, onde x, x_D, x_V são as trajetórias de deformação plástica total, de desvio e volumétrica, respectivamente, definidas pela equação (4.18):

$$x = \int (de^p_{ij} de^p_{ij})^{1/2} \tag{4.18a}$$

$$x = x_D + x_V = \int (d\mathrm{E}^p_{ij} d\mathrm{E}^p_{ij})^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| e^p_{ii} \right| \tag{4.18b}$$

Dos diversos tipos de funções propostas na literatura, uma das mais utilizadas é a desenvolvida por Desai et al. (1986) para materiais dilatantes,

$$a = a / x^{h} \tag{4.19a}$$

onde a e h são parâmetros de endurecimento do material. No caso de argilas, geralmente adota-se a seguinte simplificação

$$a = a / x_{V}^{h} \tag{4.19b}$$

Á medida que a função a evolui com as deformações plásticas, a superfície de escoamento se expande aproximando-se da superfície última, até atingi-la na condição $a = 0$.

Cabe destacar que as definições de a aqui apresentadas implicam em valores positivos e decrescentes da deformação plástica, até o valor nulo na condição última, como ilustra a figura 4.6a. Desta maneira, é reproduzido o comportamento de endurecimento contínuo, sem existência de pico ou ocorrência de amolecimento; caso seja desejado modelar estes fenômenos, uma definição diferente da função a é necessária, partindo-se de valor positivo que decresce até tornar-se negativo no pico, para em seguida voltar a crescer até atingir zero no processo de amolecimento esquematizado na figura 4.6b.

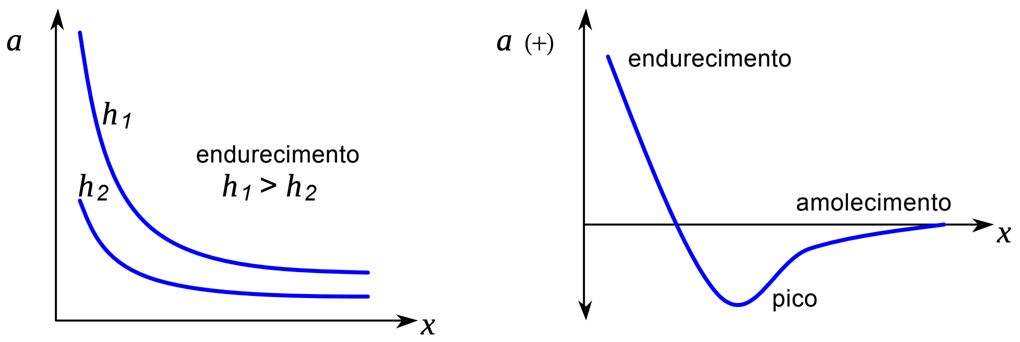


Figura 4.6: Modelo hierárquico - evolução da função de endurecimento a:: a) solos sem pico de resistência; b) solos com pico de resistência seguido por amolecimento plástico.

Potencial plástico Q. No caso da versão δ_0 de plasticidade associada (tabela 4.1), o potencial plástico Q coincide com a superfície F, resultando em tensor constitutivo simétrico, enquanto que na versão δ_1, de plasticidade não associada, o potencial plástico é definido por

$$Q = F + h(J_i, a) \tag{4.20}$$

onde h pode ser interpretado como uma função de correção, incorporada, por conveniência, na própria função de endurecimento,

$$a_Q = a + k(a_0 - a)(1 - r_v) \tag{4.21}$$

onde a_0 é o valor de a correspondente ao final do carregamento isotrópico inicial, k um parâmetro de não associatividade e $r_v = x_V / x$.

Em ambos os modelos δ_0 e δ_1 é também assumido comportamento elástico para trajetórias de carregamento não virgens. No caso de solos submetidos a carregamentos cíclicos podem produzir-se deformações plásticas que, dependendo da sua importância, deverão ser devidamente contempladas, como nas versões do modelo hierárquico δ_0*, δ_2 e δ_2*.

Modelos clássicos na formulação hierárquica. A função F definida pela equação (4.16) engloba, como casos particulares, os critérios clássicos de ruptura para solos. Assumindo-se $b = 0$, $n = 2$ e $a = 0$ tem-se:

$$F = J_{2D} - gJ_1^2 - 6gJ_1R - 9gR^2 = 0 \tag{4.22a}$$

onde o valor de $3R$ pode ser aproximado por $3R = \bar{c} / \sqrt{g}$, com $\bar{c}$ representado pelo intercepto linear da figura 4.5 quando $J_1 = 0$, relacionado com a resistência à tração (coesão) do material. Logo,

$$F = J_{2D} - gJ_1^2 - 2\sqrt{g}\,\bar{c}J_1 - \bar{c}^2 = 0 \tag{4.22b}$$

ou, ignorando-se os efeitos de J_1^2,

$$F = J_{2D} - (2\sqrt{g}\,\bar{c})J_1 - \bar{c}^2 = 0 \tag{4.22c}$$

que apresenta a mesma forma matemática geral do critério de ruptura de Drucker-Prager. Se a influência de J_1 for também negligenciada, então

$$F = J_{2D} - \bar{c}^2 = 0 \tag{4.22d}$$

que coincide com o critério de von Mises, apresentado no capítulo 3.

Se tratar-se de um solo granular normalmente adensado, resulta 3R = 0 e a seguinte expressão:

$$J_{2D} + aJ_1^2 - gJ_1^2 = 0 \tag{4.23}$$

que recupera a formulação do modelo Cam Clay modificado. No modelo Cam Clay o parâmetro de endurecimento p_0 depende das deformações plásticas volumétricas, enquanto no modelo HiSS a função de endurecimento a pode depender das deformações plásticas totais, de desvio e volumétricas, generalizando a descrição do processo de endurecimento plástico.

Parâmetros do modelo HiSS. Os parâmetros das versões d_0 e δ_1 do modelo hierárquico são agora mencionados, assim como o processo de sua obtenção a partir dos resultados de ensaios de laboratório.

- *g* e *b* - A envoltória de escoamento última no plano $(J_1, \sqrt{J_{2D}})$ pode ser curva, mas geralmente é considerada como uma linha reta de inclinação proporcional ao parâmetro γ. Esta envoltória define um estado de tensão assintótico, mas diferente para cada trajetória de tensão. Assim, os estados de tensão correspondentes aos picos das curvas tensão x deformação apresentadas por alguns materiais são externos à envoltória ou com ela coincidem.

Já o parâmetro b, que controla a forma da envoltória F_u no plano octaédrico para o estado último $a = 0$, pode ser determinado da equação

$$F_u = J_{2D} - gJ_1^2(1 - bS_r)^{-0,5} = 0 \qquad (4.24)$$

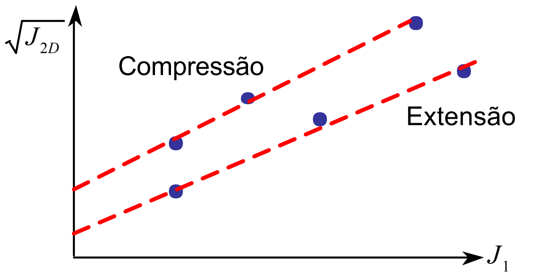


Figura 4.7: Modelo HiSS - pontos da envoltória para diferentes trajetórias de tensão.

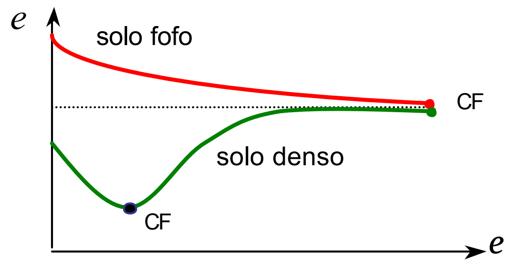


Figura 4.8: CF - pontos de mudança de fase $(de_V = 0)$ para solos fofos e densos.

O valor de b pode variar entre $b = 0$, para uma forma circular do critério de Drucker-Prager, até $b = 0,756$, correspondendo ao limite de convexidade da superfície de escoamento última. Ambos os parâmetros (γ e β) são determinados com auxílio do método dos mínimos quadrados, considerando-se vários pontos dos resultados experimentais pertencentes à envoltória de ruptura (figura 4.7).

- ***n.*** Este parâmetro está relacionado com o estado de tensão no qual o material experimenta variação de volume nula. Materiais de comportamento elasto-perfeitamente plástico satisfazem esta condição quando o estado de tensão atinge a envoltória de ruptura. Materiais com endurecimento tendem a apresentar volume constante para altas deformações (figura 4.8), enquanto que materiais com amolecimento (p.ex. areias densas) o nível de tensão correspondente à variação de volume nula situa-se antes daquele associado ao pico de resistência. Para garantir uma superfície de escoamento convexa, exige-se que $n > 2,0$. Desai (2000) sugere valores de n entre 2,05 a 2,40 para solos coesivos saturados, $n \cong 3$ para solos granulares densos e n variando de 6 a 10 para solos granulares fofos.

- **Função de endurecimento** a**.** Os parâmetros a e h da equação (4.19) são determinados com base nas curvas tensão-deformação de ensaios de laboratório, considerando-se medidas das trajetórias de deformações plásticas x. No caso de resultados em termos do espaço das tensões principais (s_i, e_i) x é expressa pela equação (4.25a), enquanto que no caso de ensaio de cisalhamento direto (t, g) x pode ser calculada pela equação (4.25b).

$$x = \int (de_1^p \cdot de_1^p + de_2^p de_2^p + de_3^p de_3^p)^{1/2} \quad (4.25a)$$

$$x = x_D = \int (dg^p \cdot dg^p)^{1/2} \quad (4.25b)$$

Os valores dos acréscimos de deformação plástica são obtidos das curvas tensão x deformação, enquanto que a parcela de deformação elástica é determinada com auxílio das constantes elásticas E_{ur} ou G_{ur} (figura 4.9), permitindo assim a determinação do valor de x como uma somatória de vários incrementos.

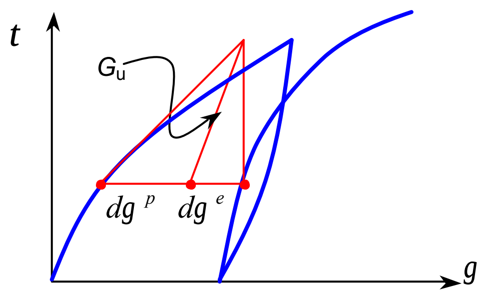


Figura 4.9: Acréscimos de deformação elástica e plástica na curva τ x γ. (adaptado de Desai, 2000).

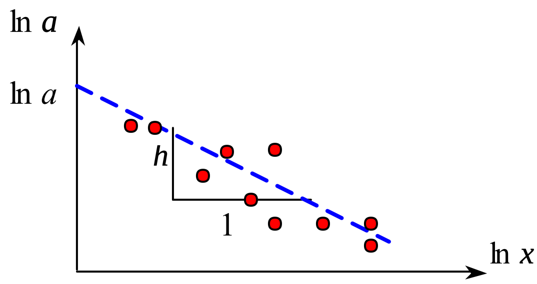


Figura 4.10: Modelo HiSS. Determinação Dos parâmetros de endurecimento a_1 e h_1. (adaptado de Desai, 2000).

Utilizando a equação (4.16) ($F = 0$) obtém-se então vários valores de a para diferentes valores de x, extraídos das curvas dos ensaios de laboratório. Reescrevendo-se a equação (4.19) na forma logarítmica $\ln a + h \ln x = \ln a$, é possível calcular-se os parâmetros (a, h) através de uma regressão linear pelo método dos mínimos quadrados, como ilustra a figura (4.10).

- ***parâmetro*** k. No caso de plasticidade não associada (modelo δ_1) a formulação requer um parâmetro k adicional para a correção do potencial plástico (equação 4.21). Assumindo que essa correção depende principalmente do comportamento volumétrico do material (correção da dilatância), o parâmetro será obtido a partir da resposta volumétrica observada nas curvas $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ de ensaios triaxiais convencionais. Os valores de a_0, r_v e a_Q na região da curva perto da condição última podem ser determinados e através da relação $a_Q = a + k(a_0 - a)(1 - r_v)$ determina-se k, assumido como constante.

- **Parâmetros elásticos.** Finalmente, os parâmetros elásticos E e n, ou K e G, são obtidos dos resultados dos ensaios convencionais de laboratório, podendo ser considerados como constantes ou dependentes da tensão de confinamento.

Hierarquias. Outras versões do modelo HiSS foram formuladas, aperfeiçoando-se a formulação básica a fim de simular aspectos particulares do comportamento de alguns solos, como viscoplasticidade, termoplasticidade, anisotropia, efeitos de carregamentos cíclicos, dependência da taxa de deformação, solos não saturados, entre outros.

Conclusões.

- O modelo hierárquico, no conjunto de suas diversas versões, constitui uma ferramenta avançada para modelagem constitutiva de solos. Trata-se de uma formulação versátil que fornece uma representação aceitável para diversos tipos de solos.
- A função de endurecimento deve ser mais profundamente estudada, com a proposição de novas definições visando a melhorar a precisão da simulação dos fenômenos de endurecimento, resistência de pico e amolecimento plástico.
- Por ser uma proposta relativamente recente, falta ao modelo HiSS um acervo de experiências, resultados e críticas que permitam, neste estágio, um reconhecimento mais amplo da capacidade do modelo por parte dos engenheiros geotécnicos.

4.1.3
Modelo de Matsuoka-Nakai

Este modelo foi proposto inicialmente por Matsuoka (1974), Matsuoka e Nakai (1974), sendo posteriormente revisado e aperfeiçoado por Matsuoka e Nakai (1977) e Matsuoka (1982). Trata-se de um modelo elasto-plástico para solos não coesivos, de fluxo não associado, para situações de análises bi e tridimensionais. O modelo foi desenvolvido com base no conceito do *plano mobilizado*, descrito a seguir.

Formulação bidimensional. Plano mobilizado se refere ao plano onde é máxima a relação entre a tensão cisalhante e a tensão normal mobilizadas (t_{pm} / s_{pm}). O *plano mobilizado* forma um ângulo de $45° + \frac{1}{2} f_m$ com o plano onde atua a tensão principal maior, sendo f_m o ângulo de atrito mobilizado máximo, como ilustram os esquemas da figura 4.11.

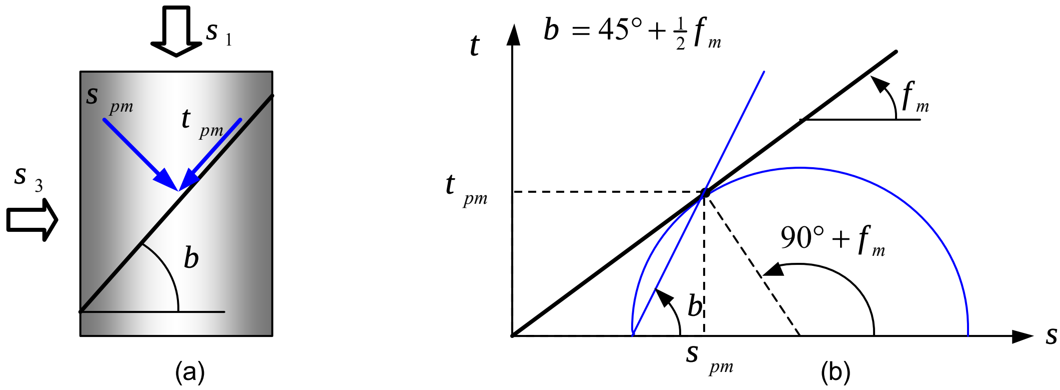


Figura 4.11: Modelo de Matsuoka-Nakai: a) Plano mobilizado; b) Circulo de Mohr (modificado de Matsuoka, 1982).

Superfícies de escoamento e de ruptura. As superfícies de escoamento são definidas como uma família de planos que obedecem ao critério de Mohr-Coulomb (equação 4.26a). Assim, cada superfície de escoamento, identificada por um ângulo de atrito mobilizado f_m, delimitam as regiões elástica e elasto-plástica. As superfícies se sucedem durante o carregamento até atingirem a superfície de escoamento última, ou superfície de ruptura, além da qual nenhum estado de tensão é possível. A superfície de ruptura é descrita de maneira similar às superfícies de escoamento, sendo caracterizada pelo ângulo de atrito na ruptura f_F (equação 4.26b):

$$t_{pm} / s_{pm} = \tan f_m = K_m \tag{4.26a}$$

$$(t_{pm} / s_{pm})_F = \tan f_F = K_F \tag{4.26b}$$

onde os lados esquerdos das equações expressam a razão de tensões avaliada no plano mobilizado e tanto K_m quanto K_F são constantes. Ambas as superfícies são mostradas na figura 4.12.

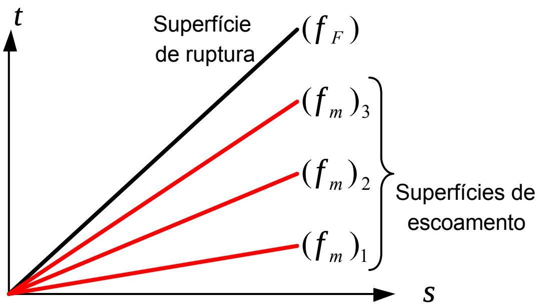


Figura 4.12: Superfícies de escoamento e de ruptura no plano (s, t).

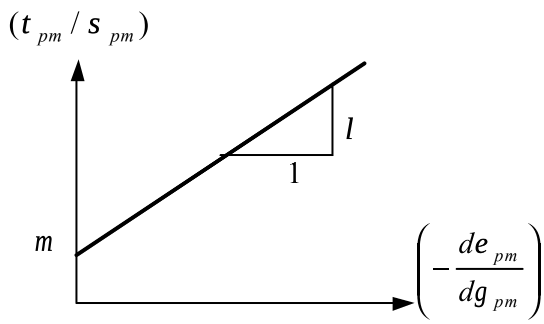


Figura 4.13: Modelo Matsuoka-Nakai. Lei de fluxo.

Lei de fluxo. O estado de tensão e os incrementos de deformação plástica se relacionam no plano mobilizado por

$$\frac{t_{pm}}{s_{pm}} = l\left(-\frac{de^{p}_{pm}}{dg^{p}_{pm}}\right) + m \tag{4.27}$$

onde l e m são parâmetros do material a serem avaliados (figura 4.13). Esta lei linear foi comprovada de forma empírica em ensaios triaxiais de compressão e de extensão (com tensão normal octaédrica constante) executados em areia (Matsuoka, 1977, 1982). A mesma lei de fluxo pode ser expressa em termos das tensões principais, pois no plano mobilizado sabe-se que:

$$t_{pm} = \tfrac{1}{2}(s_1 - s_3)\cos f_m \tag{4.28a}$$

$$s_{pm} = \tfrac{1}{2}(s_1 + s_3) - \tfrac{1}{2}(s_1 - s_3)\,\mathrm{sen}\, f_m \tag{4.28b}$$

Admitindo-se que as direções principais dos incrementos de deformação plástica e das tensões principais são colineares, como usual na teoria da plasticidade, tem-se também que:

$$dg_{pm} = (de_1 - de_3)\cos f_m \tag{4.29a}$$

$$de_{pm} = \tfrac{1}{2}(de_1 + de_3) - \tfrac{1}{2}(de_1 - de_3)\,\mathrm{sen}\, f_m \tag{4.29b}$$

o que permite então reescrever-se a equação (4.27) em função das tensões e incrementos de deformação principais.

Lei de endurecimento. Matsuoka (1974b) sugeriu a seguinte relação entre a razão de tensões e as deformações plásticas no plano mobilizado,

$$\frac{t_{pm}}{s_{pm}} = l\left(-\frac{e_{pm}}{g_{pm}}\right) + m' \tag{4.30}$$

onde m' é um parâmetro adicional do solo. Assim como a lei de fluxo, a lei de endurecimento (4.30) foi também verificada experimentalmente, obtendo-se um ajuste linear dos resultados dos ensaios, independentemente da variação do índice de vazios inicial e do valor da tensão normal octaédrica nos ensaios triaxiais.

Combinando-se a lei de fluxo com a lei de endurecimento obtém-se então uma expressão, função da razão de tensões (t_{pm}/s_{pm}), que após diferenciação produz:

$$dg_{pm} = \frac{1}{G_p} d\left(\frac{t_{pm}}{s_{pm}}\right) \tag{4.31}$$

onde G_p é o parâmetro que relaciona os incrementos de deformação cisalhante com a razão de tensões no plano mobilizado. Posteriormente, Nakai e Matsuoka (1983) também indicaram que a relação entre (t_{pm}/s_{pm}) e g_{pm} neste plano pode ser aproximada por uma hipérbole, de acordo com

$$\frac{t_{pm}}{s_{pm}} = \frac{g_{pm}}{\dfrac{1}{G_{pi}} + \dfrac{g_{pm}}{(t_{pm}/s_{pm})_{ult}}} \tag{4.32}$$

onde G_{pi} é a inclinação inicial da curva no plano $(t/s \times g)$ e $(t_{pm}/s_{pm})_{ult}$ o valor assintótico da razão de tensões (figura 4.14), determinados com base em resultados experimentais de forma similar à empregada para obtenção dos parâmetros no modelo hiperbólico do capítulo 2. O valor de G_{pi} é considerado dependente da tensão normal no plano mobilizado s_{pm}, isto é,

$$G_{pi} = K_{GP}(s_{pm}/p_a)^{np} \tag{4.33}$$

onde K_{GP} e np são, respectivamente, o número e o expoente de cisalhamento e p_a representa a pressão atmosférica, utilizada apenas para normalizar as unidades.

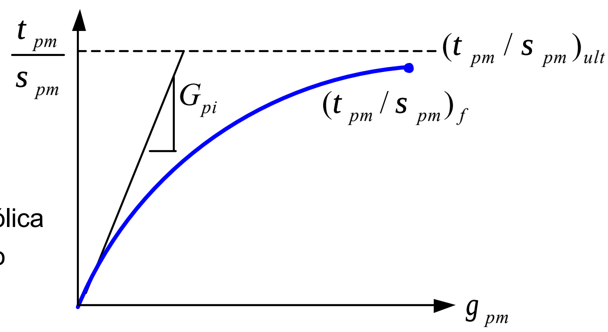


Figura 4.14: Relação hiperbólica entre (t_{pm}/s_{pm}) e g_{pm} no plano mobilizado. (adaptado de Matsuoka, 1982).

Assim, através da equação (4.32) pode-se obter uma relação incremental para cálculo do incremento de deformações cisalhantes plásticas dg_{pm} no plano mobilizado:

$$dg_{pm} = \frac{1}{G_{pt}} d\left(\frac{t_{pm}}{s_{pm}}\right) \tag{4.34}$$

onde G_{pt} é o módulo de deformação cisalhante plástica tangente. Para o cálculo deste módulo é utilizado o mesmo procedimento do modelo hiperbólico descrito no item 2.3.3. O parâmetro G_{pt} é assumido dependente da tensão normal s_{pm}, da razão de ruptura R_f e do nível da razão de tensões *SRL* (“*stress ratio level”*) no plano mobilizado:

$$G_{pt} = G_{pi}(1 - R_f SRL)^2 \quad \text{onde} \tag{4.35a}$$

$$R_f = (t_{pm} / s_{pm})_f \big/ (t_{pm} / s_{pm})_{ult} \tag{4.35b}$$

$$SRL = (t_{pm} / s_{pm}) \big/ (t_{pm} / s_{pm})_f \tag{4.35c}$$

Formulação Tridimensional. Esta formulação (Matsuoka, 1983) foi desenvolvida para o *plano espacial mobilizado* (*PEM*), definido no espaço das tensões principais pela normal $\overline{n}$ e estado de tensão caracterizado por s_{pem} e t_{pem}. Este plano passa pela região na qual as partículas do solo encontram-se mais mobilizadas (figura 4.15) e, no caso do estado de tensão hidrostático $(s_1 = s_2 = s_3)$, coincide com um plano octaédrico.

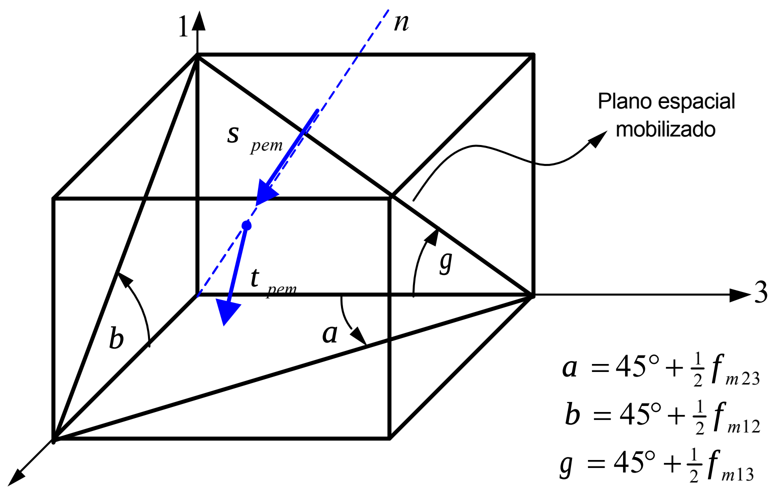


Figura 4.15: Modelo de Matsuoka-Nakai - Plano espacial mobilizado (*PEM*) (modificado de Matsuoka, 1982).

A seguinte equação entre as tensões principais e os ângulos que formam o plano especial mobilizado pode ser escrita, observando-se as relações na figura acima.

$$\tan\left(45+\frac{f_{m(i,j)}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} f_{m(i,j)}}{1-\operatorname{sen} f_{m(i,j)}}}=\sqrt{\frac{s_i}{s_j}} \qquad (i,j=1,2,3 \quad i<j) \qquad (4.36)$$

onde $f_{m(i,j)}$ é o ângulo de atrito mobilizado no plano que contém os eixos ij. As componentes de tensão normal s_{pem} e de cisalhamento t_{pem} podem ser igualmente expressas em função das tensões principais (ou de seus invariantes, alternativamente) e dos cossenos diretores $a_i = \sqrt{J_3}\Big/\sqrt{s_i J_2}$ que definem o plano espacial mobilizado,

$$s_{pem} = s_1 a_1^2 + s_2 a_2^2 + s_3 a_3^2 = 3J_3 / J_2 \qquad (4.37)$$

$$t_{pem} = \left[(s_1 - s_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (s_2 - s_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (s_3 - s_1)^2 a_3^2 a_1^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.38a)$$

$$t_{pem} = \sqrt{J_1 J_2 J_3 - 9J_3^2} / J_2 \text{ em termos dos invariantes de tensão} \qquad (4.38b)$$

Portanto, a razão de tensões no plano espacial mobilizado pode ser calculada

$$\frac{t_{pem}}{s_{pem}} = \sqrt{\frac{J_1 J_2 - 9J_3}{9J_3}} \qquad (4.39)$$

Admitindo-se a hipótese de que as tensões principais são coaxiais com os incrementos de deformação plástica de_{pem} e dg_{pem}, então

$$de_{pem} = de_1 a_1^2 + de_2 a_2^2 + de_3 a_3^2 = \frac{J_3}{J_2}\left(\frac{de_1}{s_1}+\frac{de_2}{s_2}+\frac{de_3}{s_3}\right) \qquad (4.40a)$$

$$dg_{pem} = \left[(de_1 - de_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (de_2 - de_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (de_3 - de_1)^2 a_3^2 a_1^2\right] \qquad (4.40b)$$

$$dg_{pem} = \frac{J_3}{J_2}\sqrt{\frac{(de_1 - de_2)^2}{s_1 s_2}+\frac{(de_2 - de_3)^2}{s_2 s_3}+\frac{(de_3 - de_1)^2}{s_3 s_1}} \qquad (4.40b)$$

Em particular, para um estado triaxial de compressão convencional, as três equações anteriores são da seguinte forma:

$$\frac{t_{pem}}{s_{pem}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{\frac{s_1}{s_3}}-\sqrt{\frac{s_3}{s_1}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{de_{pem}}{dg_{pem}} = \frac{\sqrt{\frac{s_1}{s_3}}de_3 + \sqrt{\frac{s_3}{s_1}}\frac{de_1}{2}}{\sqrt{2}(de_1 - de_3)} \qquad (4.41)$$

$$de_{pem} = \frac{2s_1 de_3 + s_3 de_1}{2s_1 + s_3} \qquad \text{e} \qquad dg_{pem} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{s_1 s_3}(de_1 - de_3)}{2s_1 + s_3} \qquad (4.42)$$

Superfícies de escoamento e de ruptura. A modelagem tridimensional utiliza para a definição das superfícies de escoamento e de ruptura, uma formulação semelhante àquela empregada no modelo bidimensional, sendo descritas por, respectivamente,

$$\frac{t_{pem}}{s_{pem}} = (2/3)\left(\tan^2 f_{mob(12)} + \tan^2 f_{mob(23)} + \tan^2 f_{mob(31)}\right)^{\frac{1}{2}} = K \qquad (4.43a)$$

$$\left(\frac{t_{pem}}{s_{pem}}\right)_F = (2/3)\left(\tan^2 f_{F(12)} + \tan^2 f_{F(23)} + \tan^2 f_{F(31)}\right)^{\frac{1}{2}} = K_F \qquad (4.43b)$$

Em termos dos invariantes de tensão o critério de ruptura pode ser concisamente expresso como:

$$J_1 J_2 / J_3 = 9(K^2 + 1) = cte \qquad (4.44)$$

O critério de ruptura apresenta-se geometricamente no plano octaédrico como uma superfície triangular arredondada, coincidente com o critério de Mohr-Coulomb nos pontos correspondentes às trajetórias de compressão e extensão triaxiais (figura 4.16). Assim como no critério de Lade-Kim (1988), a superfície de ruptura não apresenta pontos ângulos, um aspecto favorável em relação à sua implementação computacional em programas desenvolvidos com base no método dos elementos finitos.

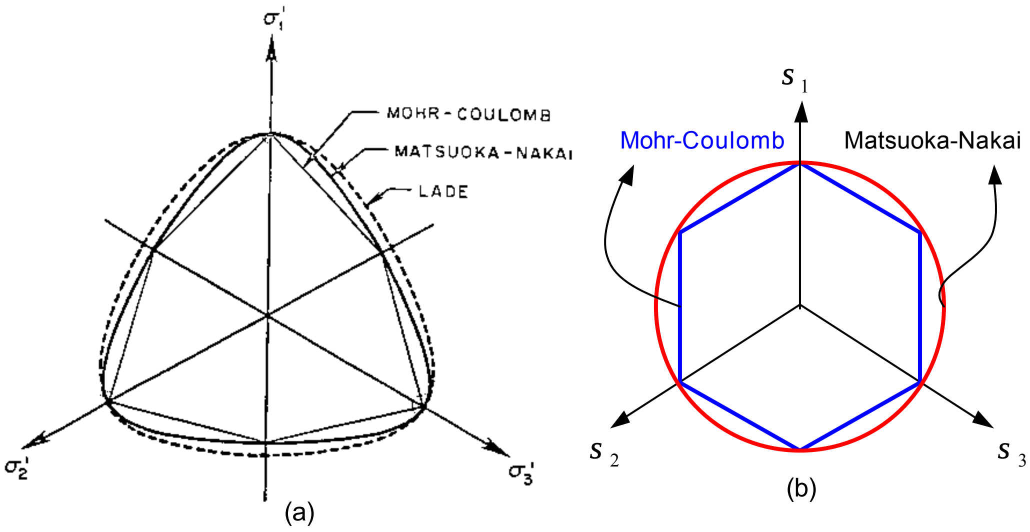


Figura 4.16: Modelo de Matsuoka-Nakai e de Mohr-Coulomb: a) Em plano octaédrico b) No plano espacial mobilizado (PEM) (modificado de Matsuoka, 1982).

No plano espacial mobilizado o critério de Mohr-Coulomb pode ser expresso pela razão $s_1 / s_3 = cte$ para solos granulares e representado por um hexágono regular, conforme ilustra a figura 4.16b. Por sua vez, o critério de Matsuoka-Nakai, expresso por $t / s_N = cte$, para valores constantes de s_N é geometricamente mostrado como um círculo. Relembrando-se das formas dos critérios de Tresca e de von Mises no plano octaédrico, pode-se também entender os critérios de Mohr-Coulomb e de Matsuoka-Nakai como generalizações daqueles no caso de materiais granulares.

Lei de fluxo e de endurecimento. Analogamente, a lei de fluxo desenvolvida para o modelo bidimensional é estendida para a situação tridimensional (equação 4.45) bem como a respectiva lei de endurecimento plástico (equação 4.46):

$$\frac{t_{pem}}{s_{pem}} = l\left(-\frac{de_{pem}}{dg_{pem}}\right) + m \tag{4.45}$$

$$dg_{pem} = \frac{1}{G_{pt}} d\left(\frac{t_{pem}}{s_{pem}}\right) \tag{4.46}$$

onde o procedimento para a determinação de G_{pt} segue o já discutido no modelo 2D de Matsuoka-Nakai.

A formulação aqui apresentada do modelo tridimensional foi estabelecida em relação ao plano espacial mobilizado (PEM), razão pela qual foi designada como *formulação tridimensional plena*. Entretanto, Matsuoka (1974b, 1982) propôs também uma formulação tridimensional alternativa, baseada nos chamados *planos mobilizados compostos*, utilizando-se a formulação bidimensional para analisar separadamente os três planos mobilizados nos seguintes estados de tensão: (s_1, s_2), (s_1, s_3) e (s_2, s_3).

A figura 4.17 ilustra o conceito relativo à independência dos planos mobilizados, sendo cada qual caracterizado pelo seu respectivo ângulo de atrito mobilizado. As deformações principais são neste caso somadas linearmente.

Conclusões. A formulação 2D e 3D do modelo de Matsuoka-Nakai foi inteiramente desenvolvida a partir de conceitos mecânicos básicos representados pela existência de planos mobilizados (PM, PEM), fáceis de serem visualizados e que proporcionam um melhor ambiente para interpretação física das equações do modelo. Resultados satisfatórios obtidos na literatura recomendam seu uso para modelagem de areias. O aspecto da superfície de ruptura é similar à do modelo de Lade-Kim (figura 4.16) mas diferentemente deste o modelo de Matsuoka-Nakai não apresenta uma formulação para simulação do amolecimento plástico de solos.

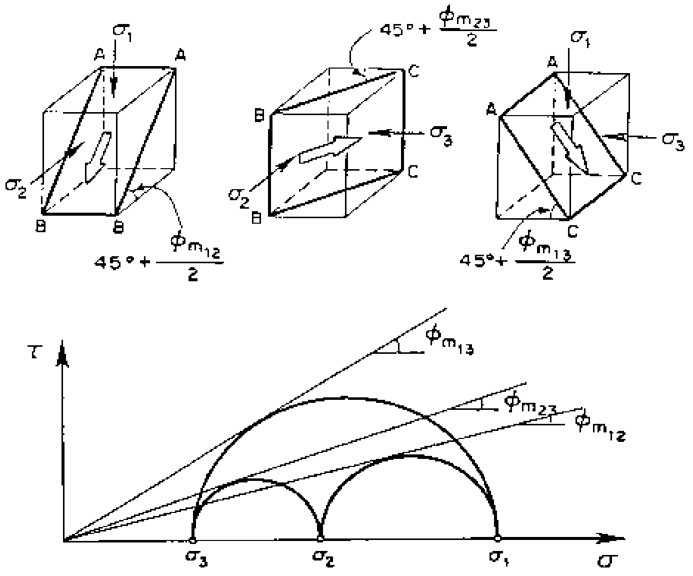


Figura 4.17: Modelo de Matsuoka-Nakai de planos mobilizados compostos (Matsuoka, 1982).

4.2 Modelos com endurecimento cinemático

As superfícies de escoamento convencionais separam o comportamento do material no regime elástico (estados de tensão no interior da mesma) e no regime elasto-plástico (estados de tensão sobre a superfície). Os modelos de endurecimento isotrópico apresentados anteriormente prevêem somente a ocorrência de deformações elásticas para trajetórias de tensão que permaneçam no interior das superfícies de escoamento, embora saiba-se das observações experimentais que solos também exibem comportamento elasto-plástico durante ciclos de carregamento, como o caso do acúmulo de deformações volumétricas (sob solicitação drenada) ou de poro-pressões (sob solicitação não drenada) em carregamentos cíclicos. A fim de superar esta deficiência dos modelos constitutivos, é necessário um desenvolvimento teórico adicional para melhorar sua capacidade de representação através da introdução do conceito de endurecimento cinemático.

4.2.1
Modelo de superfícies aninhadas

Mroz (1967) propôs uma lei de endurecimento mista, baseada na combinação dos conceitos de endurecimento isotrópico e cinemático, apresentando o modelo de superfícies aninhadas (*nested surfaces model*).

Caso uniaxial. A figura 4.18 mostra a curva tensão-deformação de um solo subdividida em n segmentos lineares, em correspondência com n superfícies de escoamento f_i assumidas, cada uma delas, com um módulo plástico constante E_i^p. O módulo tangente constante E_i associado a cada superfície é obtido considerando-se as deformações totais como um somatório das componentes de deformação elástica e plástica ($de = de^e + de^p$). Logo,

$$de = \frac{ds}{E}, \qquad de^e = \frac{ds}{E^e}, \qquad de^p = \frac{ds}{E^p} \quad \text{com} \tag{4.47}$$

$$1/E = 1/E^e + 1/E^p \tag{4.48}$$

onde ds é o incremento de tensão e E^e o módulo de elasticidade. A representação da curva de resposta no espaço das tensões é mostrada como uma série de superfícies f_i ($i = 0,1,2,...,n$), considerando-se f_0 como a superfície de escoamento inicial (figura 4.19). Cada superfície está associada a um segmento da curva tensão x deformação, sendo admitidas concêntricas antes do processo de deformação começar.

Estas superfícies delimitam regiões onde o módulo plástico E_i^p é constante, assumindo que existam, entre as superfícies inicial f_0 e final f_n, uma série de superfícies de escoamento f_i que controlam, cada uma, uma dada região do espaço de tensões. Quando ocorrem deformações plásticas, as superfícies se transladam no espaço tão logo a superfície f_i tocar a seguinte f_{i+1}, e ambas moverem-se em conjunto até atingir a superfície seguinte f_{i+2}, e assim por diante. Neste movimento, as superfícies tocam-se apenas tangencialmente e não podem interceptar-se.

As deformações plásticas são calculadas em função do módulo E_i^p de cada segmento da curva, assim quando f_0 se translada para encontrar a superfície f_1, o módulo E_1^p passa a controlar o fluxo plástico, num processo de simulação do endurecimento do material; similarmente, quando ambas as superfícies se transladam para encontrar f_2, o módulo E_2^p é escolhido para cálculo das deformações plásticas, e assim por diante.

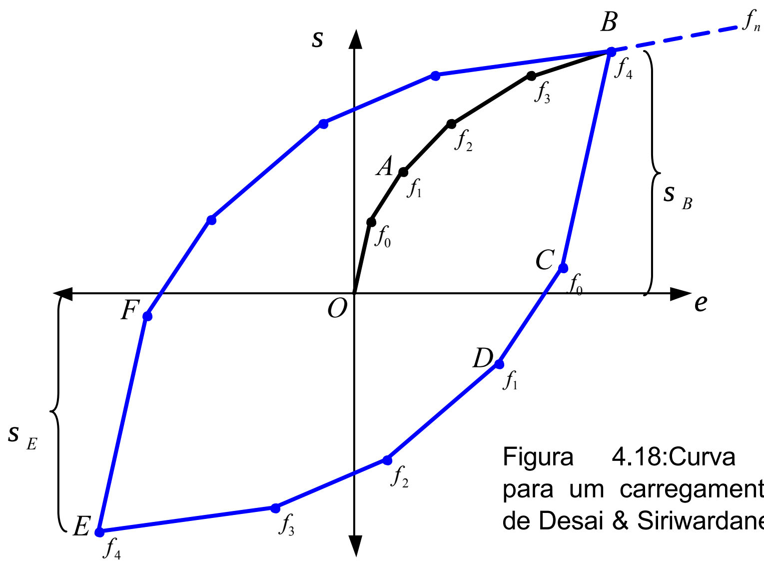


Figura 4.18:Curva tensão-deformação para um carregamento cíclico (adaptado de Desai & Siriwardane, 1984).

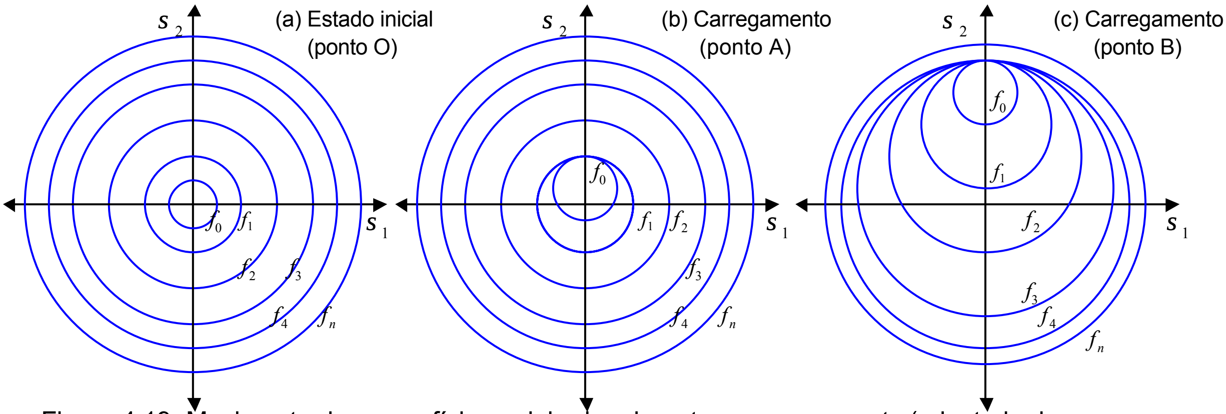


Figura 4.19: Movimento das superfícies aninhadas durante o carregamento (adaptado de Desai & Siriwardane, 1984).

Para o caso multiaxial de tensões, uma generalização do módulo plástico E^p pode ser feita, ampliando-se a definição dada pela equação (4.48), de acordo com Desai & Siriwardane (1984):

$$1/H = 1/H^e + 1/H^p \qquad (4.49)$$

onde H^p passa a ser denominado de módulo de endurecimento. Assumindo a lei de fluxo associada, o incremento de deformações plásticas é dado, na forma vetorial, por

$$d\bar{e}^p = \frac{1}{H^p}\bar{n}_f(d\bar{s}\cdot\bar{n}_f) = \frac{1}{H_p}\bar{n}_f ds_f \qquad (4.50)$$

onde ds_f é a projeção do incremento de tensão ds sobre o vetor normal unitário n_f associado com a superfície f no ponto analisado. O módulo H^p, por sua vez, é determinado como

$$H^p = \frac{ds_f}{de^p} = \frac{ds\, de^p}{(de^p)^2} = \frac{ds_{ij} de_{ij}^p}{de_{ij}^p de_{ij}^p} \tag{4.51}$$

Descarregamento e recarregamento. Considerando a trajetória de descarregamento BCDE da figura 4.18, o solo parte de B com uma tensão s_B e experimenta deformações elásticas no segmento BC. Quando o estado de tensões atingir novamente a superfície f_0, esta começa a se transladar na direção de f_1 e novas deformações plásticas ocorrem no material; quando f_0 tocar f_1 no ponto D, ambas as superfícies f_0 e f_1 se trasladam solidárias e o processo de fluxo plástico continua ocorrendo até que o ponto E seja atingido na reversão do ciclo, com uma tensão s_E = s_B, iguais em valor absoluto (figura 4.20). A trajetória de recarregamento EFB pode ser analisada de maneira similar.

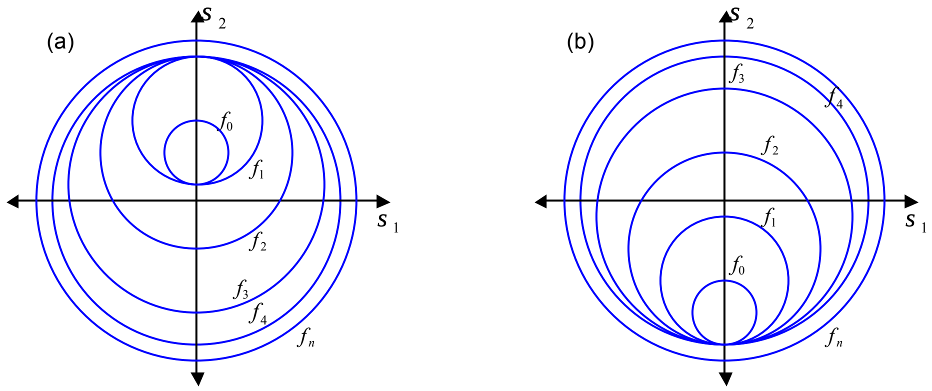


Figura 4.20: Movimento das superfícies aninhadas em descaregamento: a) ponto D; b) ponto E (adaptado de Desai & Siriwardane, 1984).

Movimento das superfícies f_i. Na generalização dos conceitos apresentados para o caso 1D, é mantido o critério que determina a translação das superfícies de escoamento, estabelecendo que estas não podem se interceptar mas apenas se tocar em um ponto.

A figura 4.21 mostra duas superfícies de escoamento f_m e f_{m+1}, com centros em O_m e O_{m+1}, respectivamente, definidos pelos vetores-posição a_{ij}^m e a_{ij}^{m+1}. As superfícies são matematicamente descritas por

$$f(s_{ij} - a_{ij}^{m}) - (s_{0}^{m})^{n} = 0 \tag{4.52a}$$

$$f(s_{ij} - a_{ij}^{m+1}) - (s_{0}^{m+1})^{n} = 0 \tag{4.52b}$$

onde s_0^m e s_0^{m+1} são os raios das superfícies com respeito às suas origens e cujos valores podem variar durante o processo de endurecimento plástico.

Supondo que o estado de tensão s_{ij}^{m}, representado pelo ponto P, sofra um incremento de tensão ds_{ij}. Em consequência, a superfície de escoamento f_m se transladará instantaneamente ao longo da trajetória PR, onde R é o ponto correspondente ao estado de tensão s_{ij}^{m+1}. situado sobre a superfície f_{m+1} na mesma direção da normal exterior que contém o ponto P. Logo, a posição de R pode ser obtida traçando-se o vetor $(O_{m+1}R)$ paralelo a $(O_m P)$.

Como as superfícies de escoamento f são homotéticas, obtém-se por proporção geométrica que:

$$s_{ij}^{m+1} - a_{ij}^{m+1} = \frac{s_{0}^{m+1}}{s_{0}^{m}}(s_{ij}^{m} - a_{ij}^{m}) \tag{4.53a}$$

e a translação da superfície f_m é dada por

$$da_{ij}^{m} = \frac{dm}{s_{0}^{m}}\left[(s_{0}^{m+1} - s_{0}^{m})s_{ij}^{m} - (a_{ij}^{m} s_{0}^{m+1} - a_{ij}^{m+1} s_{0}^{m})\right] \tag{4.53b}$$

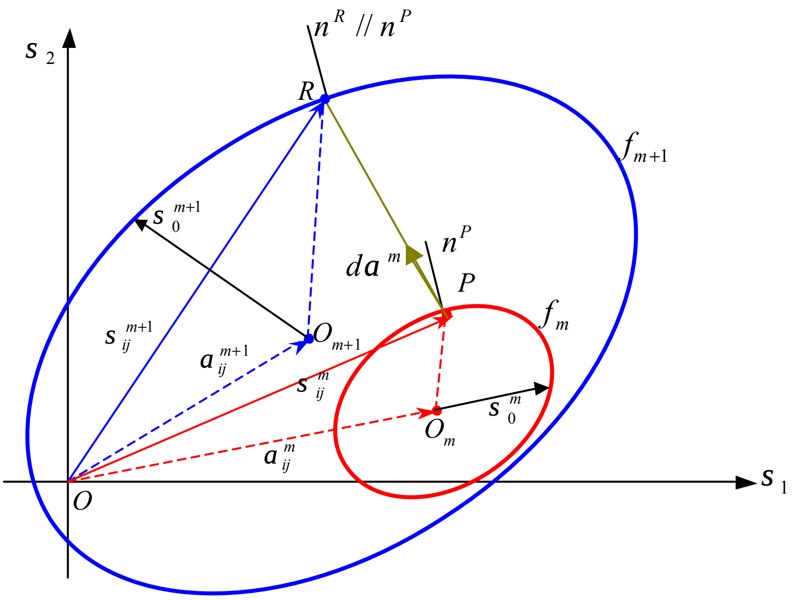


Figura 4.21: Movimento de translação das superfícies aninhadas (adaptado de Desai & Siriwardane, 1984).

Caso os centros de ambas as superfícies sejam coincidentes ($a_{ij}^{m} = a_{ij}^{m+1}$), então

$$da_{ij}^{m} = dm \frac{s_0^{m+1} - s_0^{m}}{s_0^{m}} (s_{ij}^{m} - a_{ij}^{m}) \tag{4.54}$$

e, neste caso, a translação instantânea acontece ao longo do raio, como no modelo proposto por Shield e Ziegler (1958) e mencionado no ítem 3.1.2.

Considerando que o estado de tensão permanece sempre sobre a superfície de escoamento durante o fluxo plástico, uma expressão para dm pode ser obtida.

$$(da_{ij}^{m} - ds_{ij}^{m}) \partial f / \partial s_{ij} = 0 \tag{4.55a}$$

$$dm = \frac{(\partial f / \partial s_{ij}) ds_{ij}}{(\partial f / \partial s_{kl})(s_{kl}^{m+1} - s_{kl}^{m})} = \frac{ds_f}{(s^{m+1} - s^{m}) n_f} \tag{4.55b}$$

Prevost (1977, 1978, 1979) propôs modificações para a aplicação do modelo de superfícies aninhadas para as condições drenada e não drenada, estabelecendo que na solicitação não drenada o modelo é independente da tensão normal octaédrica p.

4.2.2 Modelo de Superfície Limite

Uma outra formulação proposta na literatura para corrigir a deficiência dos modelos elasto-plásticos com endurecimento isotrópico na modelagem de ciclos de carregamento foi proposta por Dafalias (1975), Krieg (1975) e Dafalias e Papov (1976) com o desenvolvimento do modelo de superfície limite ("*bounding surface model*"), Nesta abordagem é definida uma superfície limite, dentro da qual ocorrem deformações plásticas cujos valores dependem do estado de tensão na superfície limite e da proximidade do ponto, representando o estado de tensão atual, em relação a esta superfície.

O modelo combina endurecimentos isotrópico e cinemático, apresentando a vantagem, em comparação com a formulação do modelo de superfícies aninhadas, de ser bastante mais simplificado por fazer uso de apenas duas superfícies: a superfície limite e a superfície atual de escoamento plástico.

Superfície limite. A superfície limite é definida como uma superfície de escoamento convencional, i.e. $F(\{s'\},\{k\}) = 0$. Considere um elemento de solo cujo estado de tensões é representado pelo ponto s'_0, sobre a superfície de escoamento inicial (figura 4.22). Nesta condição, o modelo prevê um comportamento puramente elástico para trajetórias de descarregamento e um comportamento elasto-plástico na condição de carregamento. A quantificação das deformações plásticas requer o conhecimento do gradiente da função de escoamento (∇F), na hipótese de fluxo associado, ou do gradiente da função potencial plástico (∇Q), para fluxo não associado. Os valores destes gradientes são relacionados com o correspondente valor de ∇F (ou ∇Q) na superfície limite através de leis de mapeamento.

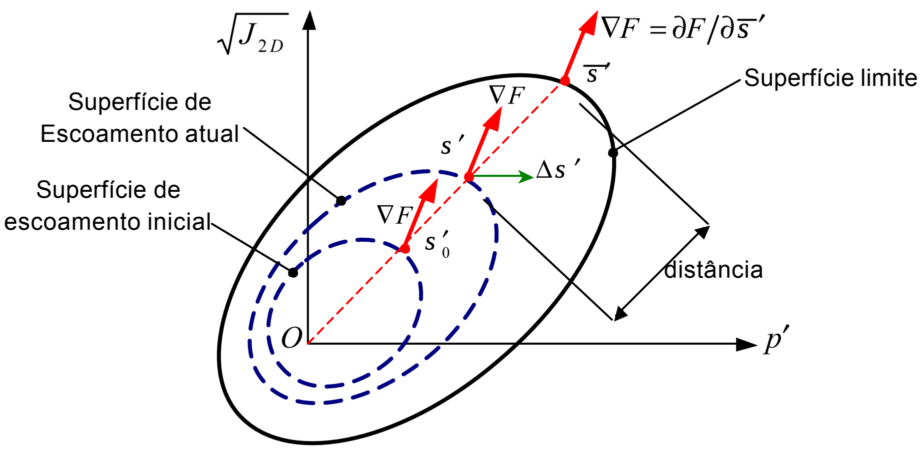


Figura 4.22: Esquema da superfície limite e das superfícies de escoamento inicial e atual (modificado de Potts e Zravkovic, 1999).

A superfície de escoamento inicial tem forma similar à da superfície limite, sendo homotéticas em relação à origem do espaço das tensões principais. Esta propriedade permite concluir que o gradiente ∇F no ponto s'_0 é igual ao gradiente no ponto imagem $\bar{s}'$ sobre a superfície limite. A localização do ponto $\bar{s}'$ é obtida através de um mapeamento radial, prolongando-se a linha reta que une a origem O ao ponto s'_0, até sua interseção com a superfície limite. No caso de fluxo não associado, o gradiente do potencial plástico ∇Q e o parâmetro de endurecimento também devem ser obtidos por interpolação considerando-se os respectivos valores na superfície de escoamento inicial e na superfície limite.

Modelo MIT-E3. Um modelo que também incorpora o conceito de superfície limite foi desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), por Whittle (1987), com o objetivo de descrever o comportamento de argilas pré-adensadas. Este modelo está fundamentado no modelo Cam Clay Modificado, apresentando diversas modificações introduzidas para representar mais adequadamente o comportamento de argilas PA.

Algumas das características incorporadas pelo modelo MIT-E3 são superfícies de escoamento anisotrópicas definidas em termos de variáveis transformadas, endurecimento cinemático, amolecimento plástico sob condição não drenada e elasticidade não linear. Mais detalhes o leitor interessado pode encontrar em Potts e Zravkovic (1999).

O modelo necessita de quinze parâmetros do material, cuja determinação em laboratório não é facilmente conseguida através de ensaios convencionais. Esta dificuldade, aliada à maior complexidade matemática de sua formulação, torna-o ainda um modelo mais voltado para atividades de pesquisa.

4.2.3
Modelo Bolha

O modelo de superfície limite assume comportamento elástico linear durante descarregamento, o que limita a representação do acoplamento entre as componentes volumétrica e de desvio neste estágio. Para superar esta limitação, o modelo bolha introduz uma pequena superfície de escoamento cinemática ("*bubble*") que se movimenta na região do espaço de tensões delimitada pela superfície limite. No interior da bolha o comportamento do solo é assumido elástico, passando para o regime elasto-plástico assim que o estado de tensão for representado por um ponto situado sobre sua superfície.

Al-Tabbaa (1987) e Al-Tabbaa e Wood (1989) desenvolveram um modelo com uma única superfície de escoamento cinemática, adotando a superfície de escoamento do modelo Cam Clay Modificado como superfície limite. Stallebrass e Taylor (1997) estenderam este modelo para o caso de duas superfícies cinemáticas aninhadas, com o objetivo de simular a ocorrência de escoamento plástico sob pequenas deformações e os efeitos da história recente de tensões.

Superfície de escoamento cinemática. Os principais elementos do modelo de única superfície de escoamento cinemática (bolha) são mostrados na figura (4.23).

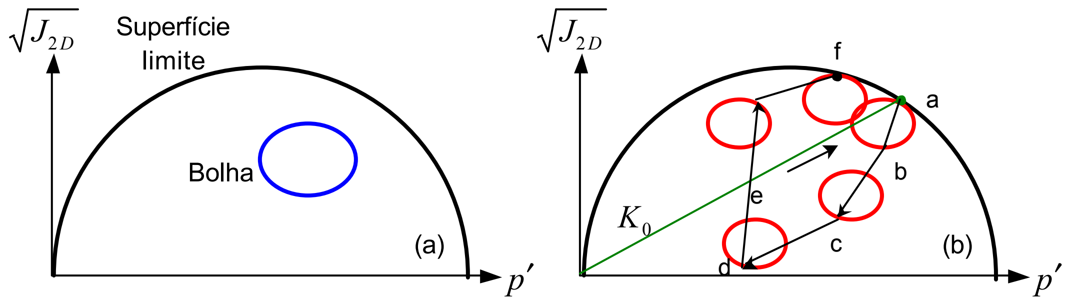


Figura 4.23: Modelo tipo bolha: a) Elementos básicos do modelo; b) Trajetórias de tensão (adaptado de Al-Tabbaa e Wood, 1989).

A bolha atua como uma superfície de escoamento convencional, no sentido de que as deformações são puramente elásticas para todos os estados de tensão situados em seu interior. O comportamento torna-se elasto-plástico quando a superfície de escoamento é atingida e inicia o deslocamento da bolha ao longo da trajetória de tensão.

A bolha pode mover-se livremente dentro da superfície limite, mas não pode atravessá-la. Quando o estado de tensões atinge a superfície limite, a bolha é orientada de maneira tal que permaneça toda dentro da superfície limite. Nesta condição, a própria superfície limite também atua como uma superfície de escoamento convencional, controlando o fluxo plástico do solo na ruptura.

Considere-se um elemento de solo NA que inicialmente se encontra na condição K_0, correspondente ao ponto identificado por '*a*' na figura 4.23b, pertencente simultaneamente à bolha e à superfície limite que nele se tangenciam. Se, na seqüência, o elemento de solo for descarregado segundo a trajetória *a-b-c-d*, a resposta do modelo será a seguinte:

- Comportamento elástico enquanto o ponto da trajetória de tensão mantiver-se no interior da bolha que, por sua vez, permanece ainda fixa no espaço de tensões.
- Quando o ponto atingir a superfície da bolha (ponto '*b*'), o fluxo plástico inicia e a bolha move-se no interior da superfície limite. As deformações plásticas ocorridas podem alterar o tamanho de ambas as superfícies (endurecimento isotrópico) de acordo com leis específicas, função das deformações plásticas ou do trabalho plástico.
- No ponto '*d*' o elemento de solo é novamente carregado, comportando-se elasticamente enquanto o ponto na trajetória *d-e-f* permanecer no interior da bolha, que se mantém estacionada no espaço.

- A superfície da bolha é novamente atingida no ponto 'e' e o fluxo plástico se reinicia, bem como os fenômenos de endurecimento isotrópico (variação de tamanho da bolha) e cinemático (deslocamento da bolha), até a supefície limite se alcançada no ponto 'f'. Caso o carregamento continue, a bolha acompanhará a expansão da superfície limite (endurecimento plástico) ou atingirá a ruptura (material elasto-perfeitamente plástico).

A formulação do modelo requer o conhecimento de uma lei que controle o movimento da bolha de modo a garantir que seu eventual contato com a superfície limite seja sempre tangencial. É também necessário definir-se funções de mapeamento que controlem a variação do módulo plástico do material com o translação da bolha, para assegurar que, à medida que esta se aproxima da superfície limite, o valor do módulo plástico venha a tender para aquele associado à superfície limite.

Modelo de Bolha de Al-Tabbaa e Wood (1989) - *Superfície limite e de escoamento cinemático (bolha).* Neste modelo a superfície limite F é representada pela elipse do modelo Cam Clay Modificado,

$$F = \left(p' - \frac{p'_0}{2}\right)^2 + \frac{J_{2D}}{M_J^2} - \frac{p'^2_0}{4} = 0 \tag{4.56}$$

e a bolha (F_1) com a mesma geometria elíptica, mas de menor tamanho,

$$F_1 = (p' - p'_a)^2 + \left(\frac{\sqrt{J_{2D}} - \sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2}\right)^2 - R^2\frac{p'^2_0}{4} = 0 \tag{4.57}$$

onde p'_a e $\sqrt{J^a_{2D}}$ indicam o estado de tensão no centro da bolha e R a razão entre os tamanhos da bolha e da superfície limite (figura 4.24):

$$R = \frac{2a}{p'_0} = \frac{2b}{p'_0 M_J} \tag{4.58}$$

Durante escoamento plástico, pela condição de consistência $dF_1 = 0$,

$$(p' - p'_a)(dp' - dp'_a) + \frac{\sqrt{J_{2D}} - \sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2}(d\sqrt{J_{2D}} - d\sqrt{J^a_{2D}}) - \frac{R^2}{4}p'_0 dp'_0 = 0 \tag{4.59}$$

e no regime elástico (ponto no interior da bolha) as deformações são normalmente determinadas pela lei de Hooke generalizada, admitindo-se um coeficiente de Poisson n constante e um módulo de deformação volumétrica variável ($K = p'/k^*$). O fluxo plástico é considerado associado e a lei de endurecimento/amolecimento expressa por

$$\frac{dp'_0}{p'_0} = \frac{de_v^p}{l^* - k^*} \qquad (4.60)$$

onde k^*, l^* são parâmetros do material.

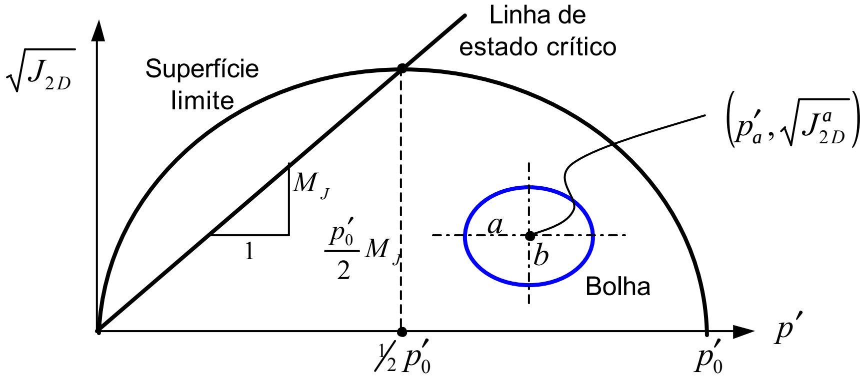


Figura 4.24: Modelo de bolha simples (adaptado de Al-Tabbaa e Wood, 1989).

Cabe aqui ressaltar que as equações (4.56) a (4.60) são similares às apresentadas no modelo Cam Clay Modificado (capítulo 3), diferindo apenas na definição dos parâmetros k^*, l^*. No modelo de bolha estes são determinados ajustando-se as equações da reta virgem e de descarregamento no plano ($\ln n - \ln p'$), enquanto que no modelo Cam Clay Modificado o procedimento é feito no plano ($n - \ln p'$).

Movimento da bolha. A bolha se movimenta dentro da superfície limite elíptica controlada por uma lei que garanta que ambas as superfícies possam se tocar mas não se interceptar. Esta lei estabelece que o centro da bolha deve se mover ao longo da direção do vetor $\vec{r}$, que liga o estado atual de tensão C com o seu ponto conjugado D sobre a superfície limite (figura 4.25).

A mudança na posição da bolha apresenta duas componentes: a primeira associada com a translação ao longo de $\vec{r}$ e a segunda devido à variação no tamanho da bolha por endurecimento/amolecimento isotrópico. Quando a bolha e a superfície limite estão em contato, $\vec{r} = 0$ e, portanto, a eventual mudança na posição da bolha deve-se inteiramente a processos de expansão ou contração de tamanho da própria bolha e da superfície limite.

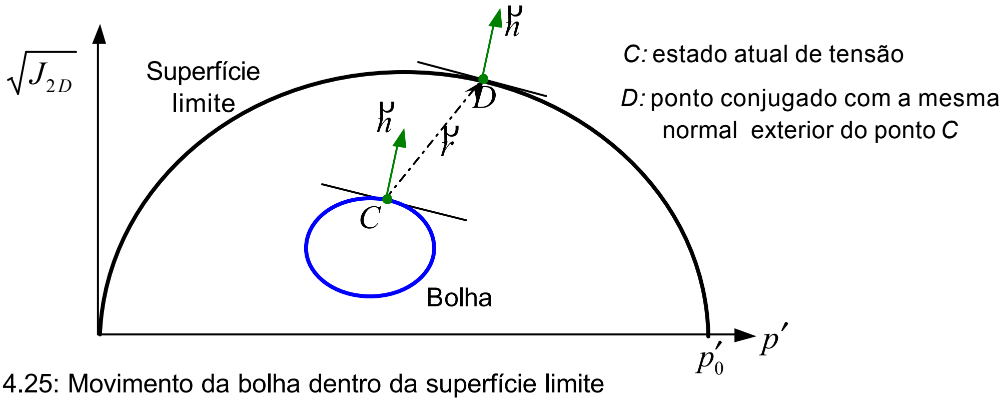


Figura 4.25: Movimento da bolha dentro da superfície limite

Uma expressão geral para a variação da posição da bolha no espaço de tensões foi apresentada por Al-Tabbaa e Wood (1989) como:

$$\begin{Bmatrix} dp'_a \\ d\sqrt{J^a_{2D}} \end{Bmatrix} = \frac{dp'_0}{p'_0}\begin{Bmatrix} p'_a \\ \sqrt{J^a_{2D}} \end{Bmatrix} + T\begin{Bmatrix} \dfrac{p'-p'_a}{R} - (p' - \tfrac{1}{2} p'_0) \\ (1/R)\left(\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}\right) - \sqrt{J_{2D}} \end{Bmatrix} \tag{4.61}$$

O primeiro termo desta equação representa a mudança nas coordenadas do centro da bolha ($p'_a, \sqrt{J^a_{2D}}$) devido à variação em p'_0, enquanto que o segundo está associado com sua translação ao longo do vetor $\vec{r}$. O escalar T é obtido substituindo-se a equação (4.61) em (4.59), considerando-se a equação (4.57):

$$T = \frac{(p'-p'_a)\left(dp' - \dfrac{dp'_0}{p'_0}p'\right) + \dfrac{\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2}\left(d\sqrt{J_{2D}} - \dfrac{dp'_0}{p'_0}\sqrt{J_{2D}}\right)}{(p'-p'_a)\left[\dfrac{p'-p'_a}{R} - \left(p' - \dfrac{p'_0}{2}\right)\right] + \dfrac{\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2}\left(\dfrac{\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}}{R} - \sqrt{J_{2D}}\right)} \tag{4.62}$$

Comportamento elasto-plástico. Os incremento das deformações volumétrica e de desvio plásticas são calculadas através da seguinte expressão geral:

$$\begin{Bmatrix} de^p_v \\ dE^p_d \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} (p'-p'_a)^2 & (p'-p'_a)\dfrac{\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2} \\ (p'-p'_a)\dfrac{\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2} & \left(\dfrac{\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}}{M_J^2}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} dp' \\ d\sqrt{J_{2D}} \end{Bmatrix} \tag{4.63}$$

onde h é uma função escalar para representação do endurecimento plástico. Para o caso no qual a bolha está em contato com a superfície limite, é calculada como:

$$h = h_0 = \frac{p'-p'_a}{l^*-k^*}\left[p'(p'-p'_e) + \sqrt{J_{2D}}\left(\sqrt{J_{2D}}-\sqrt{J^a_{2D}}\right)/M_J^2\right] \tag{4.64}$$

A função h_0 não é completamente adequada pois torna-se nula em certos pontos singulares como, por exemplo, no topo da bolha onde $p' = p'_a$. Para solucionar esta dificuldade, a função de endurecimento é corrigida $(h = h_0 + H)$ para garanti-la sempre positiva. Al-Tabbaa e Wood (op.cit.) propuseram a seguinte função de correção H baseados em resultados experimentais em argilas:

$$H = \frac{1}{l^* - k^*}\left(B / B_{max}\right)^y p_0'^3 \tag{4.65}$$

onde B é a componente do vetor $\vec{r}$ na direção normal à bolha, no ponto correspondente ao estado atual de tensão, e y é um valor positivo obtido experimentalmente. É importante destacar que a função H deve ser pesquisada e matematicamente descrita para cada solo, em particular.

Conclusões. O modelo requer de sete parâmetros: n_1, l^*, k^*, M_J, R, y e o coeficiente de Poisson n. Foi originalmente desenvolvido para o espaço das tensões principais com apenas uma bolha para representação do endurecimento cinemático e, mais recentemente, estendido por Stallebrass e Taylor (1997) para incluir uma segunda bolha aninhada. Trata-se de um modelo adequado quando se procura estabelecer, com maior precisão, a resposta de solos sob ciclos de carregamento, com a vantagem de fazer uso de muitos conceitos já conhecidos dos engenheiros geotécnicos através do modelo Cam Clay Modificado.

4.3
Avanços recentes

Nos anos recentes tem havido um grande esforço dos pesquisadores nos mais diversos paises do mundo na investigação, teórica e experimental, de modelos constitutivos para materiais geológicos, como reflete o grande número de publicações em periódicos e conferências da área da engenharia geotécnica.

São destacadas nesta seção algumas destas contribuições, como a Teoria do Estado Perturbado (*Disturbed state concept DSC*), proposta por Desai (2000), e aplicações da teoria da hipoplasticidade (Dafalias, 1986), aqui julgadas, subjetivamente, como os modelos com maior chance de reconhecimento pela comunidade acadêmica e geotécnica nos próximos anos.

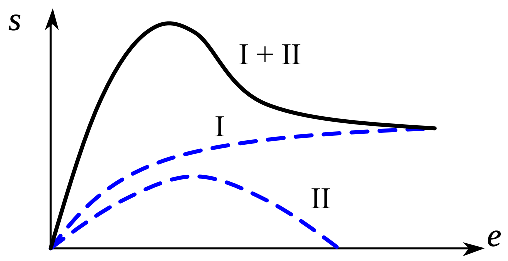
4.3.1 Teoria do Estado Perturbado (DSC)

A teoria do estado perturbado (*DSC - Disturbed State Concept*), proposta por Desai (2000), constitui-se numa abordagem original com o objetivo de unificar os modelos constitutivos para vários materiais aplicados na engenharia, como solos (argilas, areias), rochas, concreto, metais, materiais cerâmicos, etc., incluindo o seu comportamento especial junto a interfaces.

Em geral, os modelos constitutivos descrevem o comportamento mecânico de um material contínuo ideal, governado sob determinadas funções matemáticas, princípios da mecânica do contínuo e parâmetros obtidos pela interpretação dos resultados de ensaios de laboratório. No entanto, os materiais reais contêm imperfeições como anisotropias, heterogeneidades, bandas de cisalhamento e descontinuidades, que fazem com que o comportamento em micro-escala do 'ponto' (ou da amostra de solo) possa ser bastante diferente da previsão em macro-escala do comportamento do 'corpo' (ou do maciço de solo).

A teoria do estado perturbado tenta incluir os efeitos destas perturbações sobre o material ideal dos modelos constitutivos convencionais, procurando um desenvolver um modelo mais geral e unificado para as diversas classes de materiais e nos seus vários estados.

Conceito do Estado Perturbado (DSC). O conceito de estado perturbado foi proposta por Desai (1974) para caracterização do comportamento de argilas pré-adensadas, quando sugeriu a idéia de que a resposta do solo poderia ser interpretada como uma composição da resposta da argila no estado normalmente adensado (estado de referência) e os efeitos do pré-adensamento, como perturbação adicional, como ilustra a figura 4.26.



I: argila normalmente adensada

II: perturbação (pré-adensamento)

I + II: argila pré-adensada

Figura 4.26: Curva tensão-deformação de argila pré-adensada. Conceito de perturbação (modificado de Desai, 1974).

Na teoria do estado perturbado cada material é assumido como sendo composto por duas fases ou estados de referência; o primeiro chamado de Relativamente Intacto (*RI – Relatively Intact*) e o segundo denominado de Completamente Ajustado (*FA - Fully Adjusted*), quando o material, devido ao carregamento, sofre mudanças microestruturais. Assim, o comportamento mecânico de uma amostra de solo durante um ensaio pode ser compreendido como uma resposta ponderada envolvendo simultaneamente ambas as fases, cada qual podendo ser descrita por distintos modelos constitutivos.

A influência relativa da fase FA no comportamento geral do material é considerada no modelo DSC através da introdução de uma *função de perturbação* D, cujos valores variam entre 0 e 1, dependendo dos efeitos de vários fatores tais como a trajetória de deformações plásticas, o trabalho plástico, sucção, etc. A figura 4.27 esquematiza a idéia da função de perturbação como função de ponderação entre os estados RI e FA.

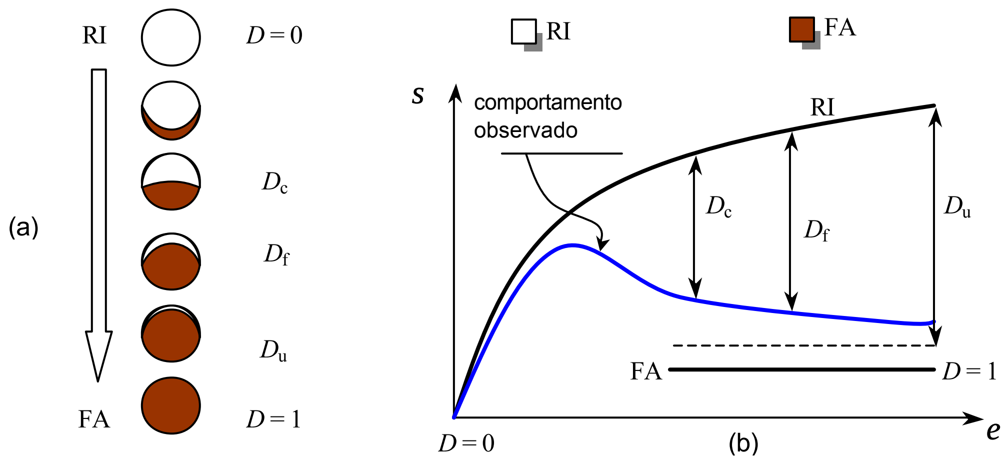


Figura 4.27: a) Representação simbólica do DSC; b) Esquema de comportamento tensão-deformação como uma composição das respostas nas fases RI e FA. (modificado de Desai, 2000)

Estado Relativamente Intacto - RI. Não inclui os efeitos causadores de perturbação, podendo ser caracterizado de várias formas como, por exemplo, com base nas informações obtidas em ensaios de laboratório sob níveis de baixas deformações. Como o estado de uma amostra pode não corresponder ao estado intacto do solo em campo, utiliza-se a terminologia relativamente intacto com o propósito de lembrar a natureza aproximada dos resultados experimentais.

Estado Completamente Ajustado FA. Neste estado o material deformado pode exibir respostas manifestas e não manifestas. As primeiras podem ser quantificadas em ensaios de laboratório (por exemplo, endurecimento plástico), enquanto que as segundas refletem mudanças identificadas apenas qualitativamente, como fraturamento do material, formação de bandas de cisalhamento, desintegração da estrutura, perda de cimentação entre partículas, anisotropias induzidas pelo estado de tensão, variações químicas, etc. O estado FA exibe caráter geralmente assintótico em relação às deformações, sendo normalmente definido pelo valor na ruptura (D_f) ou pelo valor último ou assintótico (D_u), conforme pode ser visto na figura 4.27.

No caso em que a perturbação D está associada à evolução da resistência do material, o comportamento do material no estado FA pode ser caracterizado, por exemplo, como:

- *Um sólido em estado crítico:* o material apresenta um comportamento de estado crítico, com deformações cisalhantes contínuas sob estado de tensão constante.
- *Um líquido confinado:* ao atingir o estado FA as tensões cisalhantes no material caem abruptamente para zero, podendo o material somente suportar as tensões hidrostáticas.
- *Uma fissura ou vazio finito:* neste caso o material no estado FA não suporta mais carregamentos, comportando-se como houvesse um vazio na massa do material.

Para solos não saturados onde a função de perturbação D pode ser definida em relação ao nível de sucção, o estado completamente ajustado FA poderia ser entendido como o correspondente à saturação completa (sucção nula).

Função de Perturbação *D*. A função de perturbação D pode ser tratada como uma medida do volume do solo no estado FA (V_c) em relação ao seu volume total (V).

$$D = V_c / V \qquad (4.66)$$

A função é expressa em termos de variáveis internas como a trajetória de deformações plásticas ou o trabalho plástico, densidade do material, grau de saturação ou sucção, temperatura, número de ciclos, tempo, fatores químicos e ambientais, etc. Algumas formas para a função de perturbação D foram propostas na literatura, dentre as quais a função exponencial de Weibull (Kachanov, 1986), escrita em termos da trajetória das deformações plásticas $x_D = \int (dE_{ij}^p . dE_{ij}^p)^{1/2}$ (figura 4.28).

$$D = D_u [1 - \exp(-A x_D^Z)] \tag{4.67}$$

onde D_u, A e Z são constantes do material

Outra forma alternativa foi utilizada por Desai e Toth (1996) como:

$$D = D_u \left[1 - \left\{ 1 + \left(\frac{x_D}{h} \right)^W \right\}^{-S} \right] \tag{4.68}$$

onde h, w e s representam parâmetros do material que devem ser ajustados em relação aos resultados disponíveis de ensaios de laboratório.

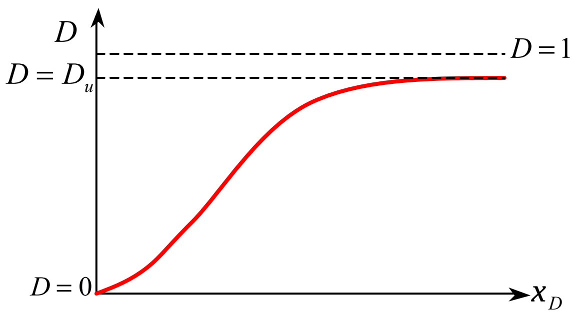


Figura 4.28: Representação esquemática da função exponencial de perturbação D(ξ_D) proposta por Weibull (modificado de Desai, 2000).

Deformações. Os modelos constitutivos assumem em geral uma mesma definição do tensor de deformações para todas as fases do material, enquanto que a teoria DSC considera a possibilidade de diferentes medidas de deformação nos estados RI e FA. Wathugala e Desai (1989), Armaleh e Desai (1994) e Katti e Desai (1995) apresentam as deformações do material (e_{ij}^a) como composições de parcelas correspondentes aos estados RI (e_{ij}^i) e FA (e_{ij}^c),

$$e_{ij}^a = (1 - D) e_{ij}^i + D e_{ij}^c \tag{4.69a}$$

e na forma incremental como

$$de_{ij}^a = (1 - D) de_{ij}^i + D de_{ij}^c + dD(e_{ij}^c - e_{ij}^i) \tag{4.69b}$$

De maneira similar, o índice de vazios (e^a) do material pode ser particionado nas parcelas relativas ao estado RI (e^i) e FA (e^c).

$$e^a = (1-D)e^i + De^c \quad \text{e} \tag{4.70a}$$

$$de^a = (1-D)de^i + Dde^c + dD(e^c - e^i) \tag{4.70b}$$

Sendo as deformações volumétricas expressas por

$$de_v^a = de^a/(1+e_0^a) = (1-D)de_v^i + Dde_v^c + dD(e_v^c - e_v^i) \tag{4.71}$$

Assim, a teoria DSC permite uma modelagem constitutiva particular para cada um dos estados, propiciando maior capacidade de representação do modelo mas acrescentando um segundo tensor de deformações no processo de cálculo. Em certas situações algumas simplificações podem ser assumidas com o objetivo de incorporar apenas um tipo de tensor de deformações, facilitando a implementação numérica em programas computacionais para resolução de problemas geotécnicos através do método dos elementos finitos.

Admitindo-se, por exemplo, que o material na fase completamente ajustada encontra-se no estado crítico, então as deformações de desvio são somente controladas pelo modelo constitutivo adotado para representação do estado RI, ou seja,

$$dE_{ij}^a = dE_{ij}^i = dE_{ij}^c = dE_{ij} \tag{4.72a}$$

$$de_{ij}^a = \frac{d_{ij}}{3} de_v^a + dE_{ij}^a \tag{4.72b}$$

$$de_{ij}^a = (1-D)de_{ij}^i + Dde_{ij}^c + \frac{d_{ij}}{3} dD(de_v^c - de_v^i) \tag{4.72c}$$

Tensões. De maneira análoga ao caso das deformações, o tensor de tensões pode ser expresso através de duas medidas correspondentes aos estados RI e FA:

$$s_{ij}^a = (1-D)s_{ij}^i + Ds_{ij}^c \tag{4.73a}$$

$$ds_{ij}^a = (1-D)ds_{ij}^i + Dds_{ij}^c + dD(s_{ij}^c - s_{ij}^i) \tag{4.73b}$$

A componente hidrostática é assumida, como aproximação, $J_1^a = J_1^c = J_1^i = J_1$ e a componente de desvio expressa por:

$$S_{ij}^a = (1-D)S_{ij}^i + DS_{ij}^c \tag{4.74a}$$

Admite-se também que haja proporcionalidade entre os tensores de tensão associados aos estados RI e FA, i.e., $S_{ij}^c = kDS_{ij}^i$, onde k é um escalar. Logo,

$$dS_{ij}^c = kdDS_{ij}^i + dkS_{ij}^i \tag{4.74b}$$

e os segundos invariantes dos tensores das tensões de desvio nos estados RI e FA se relacionam como

$$J_{2D}^{c} = \tfrac{1}{2} S_{ij}^{c} S_{ij}^{c} = k^{2} (\tfrac{1}{2} S_{ij}^{i} S_{ij}^{i}) = k^{2} J_{2D}^{i} \tag{4.74b}$$

Incorporando as relações acima na equação (4.73b) resulta:

$$ds_{ij}^{a} = [D(k-1)+1] ds_{ij}^{i} - D(k-1)\frac{dJ_1 d_{ij}}{3} + S_{ij}^{i}[dD(k-1)+dkD] \tag{4.75}$$

Relações tensão x deformação. As relações tensão x deformação do modelo DSC estão amplamente detalhadas em Desai (2000) e nas demais referências citadas neste item, onde o leitor interessado pode também verificar algumas aplicações da teoria do estado perturbado na modelagem do comportamento de argilas e areias. A forma geral da lei constitutiva é escrita como

$$ds_{ij}^{a} = C_{ijkl}^{DSC} de_{kl}^{i} \tag{4.76}$$

onde C_{ijkl}^{DSC} é a matriz constitutiva elasto-plástica que relaciona os incrementos médios de tensão no material com os incrementos de deformação no estado RI.

Conclusões. A teoria do estado perturbado constitui numa importante inovação na modelagem constitutiva de solos, considerando que o material sob carregamento sofre mudanças não quantificáveis nos ensaios de laboratório mas que podem alterar profundamente o seu comportamento mecânico. O modelo materiais. No modelo DSC a resposta do material é o resultado das respostas observadas em estados de referência inicial (RI – relativamente intacto) e final (FA – completamente ajustado) ponderadas através de uma função de perturbação D, variável para cada tipo de material e definida em termos de variáveis internas que, dependendo do tipo de aplicação, são baseadas em trajetórias de deformação plástica ou trabalho plástico, sucção, densidade do material, etc. Naturalmente, como em todo novo modelo, faz-se necessário uma maior comprovação experimental de sua capacidade de previsão, hipóteses e fundamentos pela comunidade geotécnica internacional.

4.3.2
Teoria da hipoplasticidade

A teoria da hipoplasticidade também oferece uma abordagem diferente na representação do comportamento elasto-plástico de solos e outros materiais de engenharia (concreto, rochas, ...). Os primeiros trabalhos publicados sobre hipoplasticidade em solos foram provavelmente publicados por Kolymbas (1977, 1985), seguido por outros pesquisadores que mais se recentemente interessaram pelo tema e muito contribuíram para seu desenvolvimento nesta última década.

A teoria da hipoplasticidade busca descrever o fenômeno elasto-plástico sem a utilização de alguns dos conceitos tradicionais da teoria da plasticidade, como a existência de superfícies de escoamento e de potencial plástico, partindo do princípio que as deformações plásticas acontecem desde o início da aplicação do carregamento e não havendo necessidade de separá-las em suas componentes elástica e plástica, como usualmente feito nos modelos convencionais.

A principal característica da formulação hipoplástica é sua simplicidade pois, além de evitar as abstrações matemáticas de superfícies, utiliza poucos parâmetros do material e apenas uma equação constitutiva para casos de carregamento e descarregamento (mas hábil em fazer a distinção dos casos).

Formulação básica. A hipoplasticidade relaciona estados de tensão e de deformação levando em conta a história de deformações do material (Kolymbas, 2000). O modelo parte de uma relação constitutiva incremental , assumindo o solo como material cujo comportamento depende da taxa de deformação, de acordo com

$$\dot{\sigma}_{ij} = h_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\varepsilon}_{kl}) \tag{4.77a}$$

onde as taxas de tensão $\dot{\sigma}$ ($\dot{\sigma} = d\sigma/dt$) e deformação $\dot{\varepsilon}$ ($\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$) são vinculadas pela função *h* expressa de forma geral pela equação polinomial

$$h(\sigma, \dot{\varepsilon}) = \psi_1 + \psi_2\sigma + \psi_3\dot{\varepsilon} + \psi_4\sigma^2 + \psi_5\dot{\varepsilon}^2 + \psi_6(\sigma\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}\sigma) + \psi_7(\sigma\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\varepsilon}^2\sigma)$$
$$+ \psi_8(\sigma^2\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}\sigma^2) + \psi_9(\sigma^2\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\varepsilon}^2\sigma^2) \tag{4.77b}$$

sendo ψ_i funções escalares dos invariantes de tensão e deformação (os índices *ij* na representação dos tensores foram omitidos por simplicidade).

Trata-se de uma relação constitutiva não linear no incremento, já que o valor esperado de $\dot{\sigma}/\dot{\varepsilon}$ (uma medida de rigidez incremental do material) deve ser maior no descarregamento do que no carregamento, comportamento conhecido e evidenciado nos ensaios de laboratório (figura 4.29).

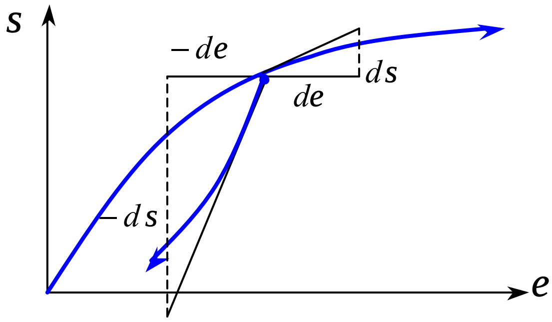


Figura 4.29: Curva $\sigma - \varepsilon$. Diferentes valores de rigidez incremental no carregamento e descarregamento.

A fim de conseguir representar adequadamente as características de solos, a a função h deve satisfazer:

- *Não linearidade em relação à taxa de deformação* $\dot{\varepsilon}$, para simular as diferenças de comportamento nas etapas de carregamento e de descarregamento, conforme comentado anteriormente.
- *Homogeneidade em relação à taxa de deformação* $\dot{\varepsilon}$, para inclusive permitir a descrição do comportamento mecânico de materiais que independem da taxa de deformação.
- *Homogeneidade em relação ao tensor de tensão* σ, para assegurar que trajetórias proporcionais de tensão sejam assumidas caso o material seja submetido a trajetórias proporcionais de deformação.

Formulação para solos granulares. Dentre as diversas formas propostas na literatura para a equação (4.77b), grande parte delas expressa a função h em termos de quatro termos tensoriais combinados com quatro parâmetros do material (C_i). Para areias, por exemplo, Wu e Bauer (1994) sugeriram como relação constitutiva hipoplástica:

$$\dot{\sigma} = C_1 (tr\sigma)\dot{\varepsilon} + C_2 \frac{tr(\sigma\dot{\varepsilon})}{tr\sigma}\sigma + C_3 \frac{\sigma^2}{tr\sigma}\sqrt{tr\dot{\varepsilon}^2} + C_4 \frac{\mathrm{E}^2}{tr\sigma}\sqrt{tr\dot{\varepsilon}^2} \qquad (4.78)$$

onde E representa o tensor de desvio, definido como $\mathrm{E}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(tr\sigma)\delta_{ij}$ e os parâmetros do material C_1, C_2, C_3 e C_4 podem ser determinados com base nos resultados de ensaios convencionais de compressão triaxial (CTC).

Para incorporar na formulação do modelo a tendência dilatante observada em solos densos, Kolymbas *et al* (1995) multiplicaram aos dois últimos termos não lineares da equação (4.78) o fator I_e dependente do índice de vazios e ($I_e=1$ quando $e = e_{crit}$),

$$I_e = (1-a)\frac{e-e_{\min}}{e_{crit}-e_{\min}} + a \qquad (4.79)$$

onde a é um parâmetro de ajuste, permitindo, assim, introduzir a dependência em relação à densidade do material através da variável de estado e.

Para também levar em conta a dependência do nível de tensão, que influi no comportamento volumétrico do solo e no valor crítico de e, definiram-se (Kolymbas, 2000):

$$e_{cr} = p_1 + p_2 \exp(p_3 p) \qquad (4.80a)$$

$$a = q_1 + q_2 \exp(q_3 p) \qquad (4.80b)$$

onde p é a tensão esférica no solo e p_i, q_i constantes de ajuste em relação aos resultados experimentais. Obtém-se assim um modelo hipoplástico simples que reproduz adequadamente as principais características do comportamento de solos granulares.

Conclusões.

- Além da formulação apresentada acima, outras mais complexas foram desenvolvidas para considerar características de amolecimento plástico e a transição do solo para o estado crítico (Wu *et al*, 1996).
- As presentes versões na literatura do modelo hipoplástico podem ser aplicadas para materiais granulares (de grãos não muito brandos) submetidos a processos de carregamento e descarregamento mas não (e ainda) ciclos de carregamento. Comportamento de solos exibindo pequena coesão é possível, mas não a modelagem de solos fortemente pré-adensados. Igualmente, o modelo ainda não simula situações de comportamento viscoso.
- Trata-se de um modelo jovem e em expansão, mas que se constitui numa base alternativa para modelagem constitutiva de solos, sem a necessidade de recorrer a hipóteses da teoria da plasticidade como a existência de superfícies de escoamento. Na medida em que as limitações forem apontadas e (espera-se) superadas, o modelo poderá ter grandes aplicações na engenharia geotécnica principalmente devido à simplicidade de sua natureza.