3
Modelos Constitutivos Elasto-Plásticos Básicos

As limitações dos modelos elásticos, hipereláticos e hipoelásticos em relação à sua capacidade para representar consistentemente os processos de escoamento e os estados de descarregamento / recarregamento, contribuíram no interesse pela pesquisa e formulação de modelos constitutivos mais versáteis, realistas e abrangentes. A teoria da plasticidade foi o alicerce para o desenvolvimento destes modelos, inicialmente voltados para o comportamento de metais e posteriormente estendidos para materiais com atrito interno, como o caso de materiais geológicos.

3.1
Conceitos fundamentais da Teoria da Plasticidade Infinitesimal

3.1.1
Definições básicas

- *Componentes de deformação*. Na teoria da plasticidade infinitesimal as deformações dos materiais são consideradas compostas por deformações elásticas (reversíveis) e_{ij}^{e} e deformações plásticas (irreversíveis) e_{ij}^{p},

$$e_{ij} = e_{ij}^{e} + e_{ij}^{p} \tag{3.1}$$

- *Limite de escoamento.* Estado de tensão a partir do qual o material passa a se comportar como elasto-plástico, sendo definido por um *critério de escoamento* matematicamente expresso por uma função dependente do tensor de tensões, a chamada *função de escoamento* F (eq. 3.2). As características deste limite variam de acordo com as propriedades do material.

$$F(s_{ij}) = k \quad \text{ou} \quad F(s_{ij}) = 0 \tag{3.2}$$

Assumindo propriedades de homogeneidade e isotropia do material, a função de escoamento pode ser expressa em termos das tensões principais ou dos invariantes de tensão de acordo com:

$$F(s_1, s_2, s_3) = k \quad \text{ou} \quad F(J_1, J_2, J_3) = k \tag{3.3}$$

O comportamento para estados de tensão situados no interior da superfície definida por F é considerado elástico, tornando-se elasto-plástico para estados de tensão situados sobre a superfície.

- *Potencial plástico (Q).* Função dependente do tensor de tensões do material, cujo gradiente determina a direção dos acréscimos de deformação plástica.

- *Lei de fluxo.* Relação tensão x incremento de deformação plástica, durante ocorrência de fluxo plástico, definida por meio da função potencial plástico. Caso o potencial plástico Q coincida com a superfície de escoamento F, a lei de fluxo é dita *associada*, caso contrário é chamada de *não associada*.

- *Endurecimento.* Aumento na resistência do material à deformação plástica ("*hardening*"), implicando na expansão da superfície de escoamento controlada pelo valor do parâmetro k (equação 3.3). O fenômeno oposto, isto é da diminuição da resistência do material com o fluxo plástico, denomina-se *amolecimento* ("*softening*")

3.1.2
Tipos de Endurecimento

Analisando o comportamento do material durante escoamento, o mesmo pode apresentar as seguintes características:

a) O material se comporta como *perfeitamente plástico* sem endurecimento, com a superfície de escoamento permanecendo fixa: $F(s_{ij}) = k = cte.$ e o mesmo estado de tensão observado no início do escoamento. Assim, ocorrerá fluxo plástico para $dF = 0$ e descarregamento elástico para $dF < 0$.

b) O material apresenta *endurecimento plástico*, i.e., a superfície de escoamento se expande à medida que o fluxo plástico ocorre, variando também o estado de tensões situado sobre a mesma. Neste caso o parâmetro k é definido como *função de endurecimento.* Assim, caracteriza-se carregamento quando $dF > 0$, descarregamento para $dF < 0$ e condição de carregamento neutro quando $dF = 0$.

Hipóteses de endurecimento. Na literatura, para formulações no espaço de tensões, são geralmente consideradas as seguintes duas hipóteses de endurecimento:

a) Trabalho plástico *("work hardening")*. Postula que o endurecimento depende do trabalho plástico realizado $F(s_{ij}) = k_1(W^p)$, independente da trajetória de deformação. O critério de escoamento torna-se agora função de W^p, com $W^p = \int s_{ij} de_{ij}^p$.

b) Deformação plástica *("strain hardening")*. Assume que a função de escoamento depende da deformação plástica ocorrida $e_p = \int de_p$, ou seja, $F(s_{ij}) = k_2(e^p)$.

Características do endurecimento. O material pode ser idealizado como apresentando endurecimento *isotrópico* ou *cinemático*:

a) *Endurecimento isotrópico*: a superfície de escoamento inicial se expande com a história de tensões ou deformações, conservando sua forma e origem no espaço de tensões (figura 3.1a).

b) *Endurecimento cinemático:* a superfície de escoamento inicial se traslada de acordo com sua história de tensões ou deformações, sem apresentar mudança em sua forma e tamanho originais (figura 3.1b). Mantém-se assim constante o domínio elástico, conseguindo-se representar através desta hipótese o chamado *efeito Bauchinger* em metais, onde as tensões de escoamento tendem a diminuir no setor oposto ao que se desloca durante o endurecimento cinemático.

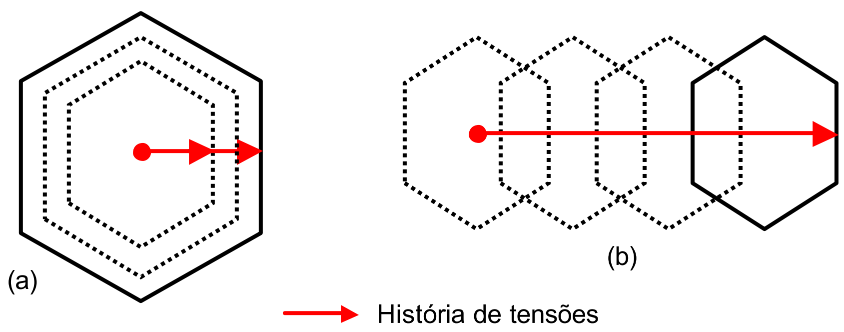


Figura 3.1: Tipos de endurecimento plástico: a) Isotrópico; b) Cinemático.

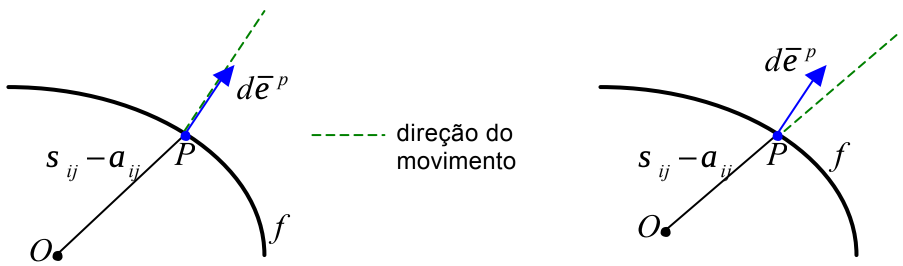
Também é possível combinar-se endurecimentos cinemático e isotrópico, com a superfície de escoamento podendo expandir, trasladar ou apresentar rotações no decorrer do fluxo plástico.

Com respeito à direção da translação, a mesma é definida por uma *lei de endurecimento cinemático*, como as propostas pelos seguintes pesquisadores:

- *Prager (1956).* Assume que o endurecimento cinemático pode ser expresso por $f_1(s_{ij} - a_{ij}) - k^2 = 0$, onde a_{ij} representa a translação total da superfície e pode ser definido como isotrópico ou não (permitindo anisotropia introduzida pelo processo de endurecimento). Considera também que a superfície de escoamento se translada na direção do vetor incremento de deformação plástica (figura 3.2a), segundo a relação $da_{ij} = cde_{ij}^{p}$, onde c é uma constante do material.

- *Shield e Ziegler (1958).* Estes autores demonstraram que no critério de von Mises a superfície de escoamento move-se na direção do raio que conecta o centro O da superfície e o ponto P que indica o estado de tensão do material (figura 3.2b). Logo a lei de endurecimento é redefinida como $da_{ij} = (s_{ij} - a_{ij})dm$, onde o parâmetro $dm > 0$ é obtido da condição de consistência (ver item 3.1.3 a seguir) como

$$dm = \frac{(\partial f / \partial s_{ij})ds_{ij}}{(s_{km} - a_{km})(\partial f / \partial s_{km})} \tag{3.4}$$



(a) Direção da translação da superfície de escoamento segundo Drucker (1956)

(b) Direção da translação da superfície de escoamento segundo Shield e Ziegler (1958)

Figura 3.2: Leis de endurecimento cinemático: a) Drucker (1956); b) Shield e Ziegler (1958).

Porque alguns materiais apresentam uma combinação de características isotrópicas e cinemáticas durante o endurecimento, Mroz (1967) propôs uma modificação adicional incorporando a função $f_2(l)$ que controla a expansão da superfície,

$$f_1(s_{ij} - a_{ij}) - f_2(l) = 0 \tag{3.5}$$

sendo l função monotonicamente crescente dependente das deformações plásticas.

3.1.3
Lei de Fluxo Generalizada

Hipóteses e postulados. Na teoria da plasticidade não se admite, em princípio, uma relação biunívoca entre deformações e tensões, pois as deformações dependem da completa história de tensões através da qual o estado atual foi alcançado. Esta dependência faz então necessário o cálculo dos incrementos de deformação plástica ao longo da história de tensões, obtendo-se as deformações totais por integração ou aproximando-as por somatórios.

Uma formulação de leia constitutivas elasto-plásticas, válidas para qualquer critério de escoamento, foi desenvolvida por Drucker (1952) com base nos seguintes postulados:

a) Trabalho positivo é realizado pelo carregamento externo durante a aplicação do acréscimo de tensões, i.e. $ds_{ij}de_{ij} > 0$ ou $ds_{ij}\left(de_{ij}^{e} + de_{ij}^{p}\right) > 0$.

b) Trabalho total realizado durante um ciclo de aplicação e remoção do acréscimo de tensão ds_{ij} é nulo ou positivo, i.e. $ds_{ij}\left(de_{ij}^{p}\right) \geq 0$.

Além destes postulados básicos, são consideradas válidas as seguintes hipóteses na formulação da teoria da plasticidade infinitesimal:

a) Existência de uma superfície de escoamento, no interior da qual o material encontra-se em regime elástico, acontecendo deformações plásticas para todas as trajetórias de tensão direcionadas para o exterior desta superfície.

b) Relação linear entre acréscimos infinitesimais de tensão e de deformação plástica.

Prager (1949) introduziu ainda as seguintes condições necessárias para descrever adequadamente o processo de escoamento plástico:

a) Condição de continuidade. O carregamento neutro (trajetória tangente à superfície de escoamento) não produz deformações plásticas.

b) Condição de unicidade. Dado um estado de tensões no material, os acréscimos de tensão e deformação (elásticos e plásticos) gerados por um carregamento externo são únicos.

c) Condição de irreversibilidade. Coincide com o segundo postulado de Drucker e estabelece que o trabalho realizado sobre as deformações plásticas é positivo, visto as suas características irreversíveis.

d) Condição de consistência. Carregamento de um estado plástico levará forçosamente a um outro estado plástico, satisfazendo o critério de escoamento enquanto o material permanecer no regime plástico.

Lei de fluxo generalizada. A mesma é expressa vetorialmente segundo (3.6), onde dl é um escalar positivo e Q o potencial plástico anteriormente definido:

$$\{\Delta e\} = dl\{\partial Q / \partial s\} \tag{3.6}$$

O escalar dl este pode ser expresso genericamente por

$$dl = \frac{\{\partial F / \partial s\}^T [D]\{\Delta e\}}{\{\partial F / \partial s\}^T [D]\{\partial Q / \partial s\} + A} \tag{3.7}$$

onde F é a função de escoamento, D representa a matriz elástica e A o módulo plástico ou de endurecimento. Este último, por sua vez é definido por

$$A = -\frac{1}{dl}\left\{\frac{\partial F}{\partial k}\right\}^T \frac{\partial k}{\partial x^p}\{\Delta x^p\} \tag{3.8}$$

onde x^p é a variável que controla o endurecimento e $k(x^p)$ a função que descreve a lei de endurecimento. Assim, caso seja adotada a hipótese de trabalho plástico ("*work hardening*") então $x^p = W^p$, enquanto que se assumida a hipótese das deformações plásticas (*"strain hardening")* teremos $x^p = e^p$.

O módulo A quantifica e incorpora na formulação constitutiva o processo do endurecimento, observando-se que para $A = 0$ o material se comporta como perfeitamente plástico, para $A > 0$ apresenta endurecimento enquanto que na situação $A < 0$ permite simular o amolecimento do material durante fluxo plástico.

Cabe ainda destacar que para obtenção de uma expressão de A independente de dl é preciso adotar uma relação $k(x^p)$ linear, de maneira que a sua derivada seja uma constante $(\partial k / \partial x^p = cte)$ e possa cancelar dl quando da substituição da equação (3.8) em (3.7), tornando a lei de fluxo plenamente estabelecida.

3.1.4
Critérios para escoamento plástico de metais

Os primeiros critérios de escoamento plástico propostos na literatura foram direcionados para o estudo de metais e baseados no comportamento experimental observado em ensaios de tração uniaxial. Ensaios de laboratório indicaram que na maioria dos metais o escoamento depende tão somente das componentes das tensões de desvio, sendo praticamente não influenciado pelos valores usuais das tensões hidrostáticas. Nestas condições, o critério de escoamento pode ser expresso diretamente em termos dos invariantes das tensões de desvio como

$$F(J_{2D}, J_{3D}) = k \qquad (3.9)$$

Critério de Tresca. Assume que o escoamento plástico ocorre quando a máxima tensão cisalhante atinge o valor da máxima tensão cisalhante que ocorre no ensaio de tração uniaxial ($s_1 = s_0$, $s_2 = s_3 = 0$ e $t_{máx} = \frac{1}{2} s_0$) sendo s_0 a tensão de escoamento determinada experimentalmente.

Expressando as tensões cisalhantes máximas em termos das tensões principais, temos $t_{12}^{máx} = \pm\frac{1}{2}(s_1 - s_2)$, $t_{23}^{máx} = \pm\frac{1}{2}(s_2 - s_3)$ e $t_{13}^{máx} = \pm\frac{1}{2}(s_3 - s_1)$. Logo, o critério de Tresca assume iguais tensões de escoamento para compressão e tração, havendo a ocorrência de fluxo plástico quando uma das condições abaixo for satisfeita:

$$s_1 - s_2 = \pm s_0 \quad \text{ou} \quad s_2 - s_3 = \pm s_0 \quad \text{ou} \quad s_3 - s_1 = \pm s_0 \qquad (3.10)$$

Cabe notar que o critério independe da tensão intermediária, o que se constitui em uma das suas limitações. O critério de Tresca é representado no plano p por um hexágono regular (figura 3.3) e no espaço de tensões por um prisma hexagonal regular de eixo definido pelo vetor unitário $\overline{n}$ (paralelo à reta de equação $s_1 = s_2 = s_3$).

Critério de von Mises. De acordo com este critério o escoamento se inicia quando a energia de distorção alcançar o valor da energia de distorção de escoamento observada no ensaio de tração uniaxial.

A energia de distorção U_d é uma parcela da energia de deformação total $U = U_v + U_d = \frac{1}{2} l e_{ii} e_{kk} + m e_{ij} e_{ij}$, onde U_v representa a parcela de energia de deformação volumétrica. Visto que U_d se relaciona com o segundo invariante do tensor de tensões de desvio J_{2D} (eq. 3.12), é possível enunciar-se o critério de von Mises estabelecendo que o escoamento plástico se inicia quando o valor de J_{2D} alcançar aquele correspondente ao escoamento sob condições do ensaio de tração uniaxial, definido por $J_{2D} = \frac{1}{3} s_0^2 = k^2$.

$$U_d = G\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{ij} = \frac{S_{ij}S_{ij}}{4G} = \frac{J_{2D}}{2G} \tag{3.11}$$

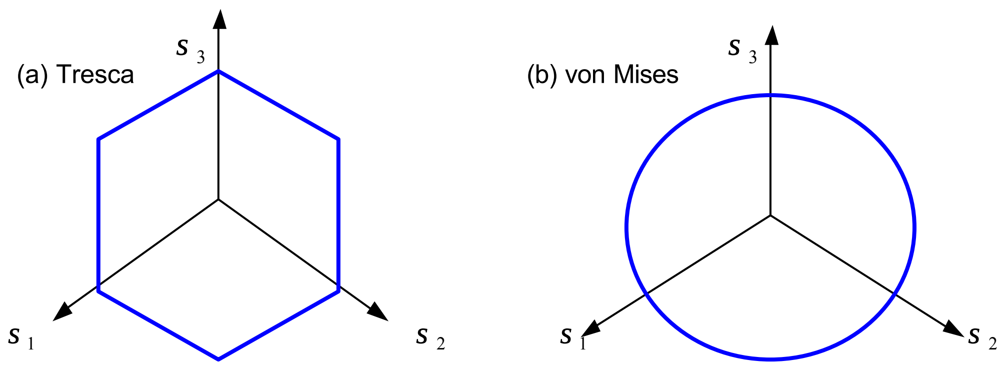


Figura 3.3: Critérios de escoamento plástico no plano p : a) Tresca; b) von Mises.

O critério de von Mises pode ser expresso então como $J_{2D} = k^2$, ou seja:

$$\tfrac{1}{6}\left[(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{11} - s_{33})^2 + (s_{22} - s_{33})^2\right] + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = \frac{s_0^2}{3} \tag{3.12}$$

Este critério é representado no plano p por um circulo de raio $\sqrt{\tfrac{2}{3}}s_0$ (figura 3.3b), e por um cilindro de eixo com direção $\overline{n}$ no espaço de tensões.

Uma vantagem do critério de von Mises em relação ao de Tresca é a independência da formulação em relação às tensões principais, podendo ser aplicado diretamente com as componentes do estado de tensões referidas a 3 planos ortogonais quaisquer que passam pelo ponto.

3.2 Critérios para escoamento plástico de solos

Nos critérios de escoamento plástico desenvolvidos por Tresca e von Mises, orientados para aplicações em metais, tanto o início do escoamento plástico quanto as leis de fluxo correspondentes são independentes da componente de tensão esférica. Em materiais que exibem atrito interno, como solos, o comportamento mecânico é no entanto fundamentalmente controlado pela atuação das tensões hidrostáticas (ou esféricas), à exceção de casos especiais normalmente referenciados como análise $\phi = 0$ (argila saturada sob condição não drenada) onde os critérios de Tresca e Von Mises são aplicáveis, normalmente no contexto de uma particularização de critérios de escoamento plástico mais abrangentes, como o critério de Mohr-Coulomb (também conhecido como critério de Tresca estendido) ou o critério de Drucker & Prager (também denominado critério de von Mises estendido).

3.2.1 Critério de Mohr-Coulomb

De acordo com o critério de Mohr-Coulomb (graficamente representado na figura 3.4), a resistência ao cisalhamento t na iminência da ruptura, no plano de ruptura, é determinada por

$$t = c + s \tan f \tag{3.13}$$

onde c é a coesão e f o ângulo de atrito interno do material.

O conceito do círculo de Mohr pode ser utilizado para expressar a função de escoamento em termos das tensões principais s_1 e s_3, a tensão principal maior e a tensão principal menor, respectivamente.

$$\frac{s_1 - s_3}{2} = \frac{s_1 + s_3}{2} \operatorname{sen} f + c \cos f \qquad \text{ou} \tag{3.14a}$$

$$F = \frac{s_1 - s_3}{2} - \frac{s_1 + s_3}{2} \operatorname{sen} f - c \cos f = 0 \tag{3.14b}$$

A equação 3.14b representa uma pirâmide hexagonal irregular no espaço de tensões, sendo a seção transversal representada em um plano octaédrico como mostra a figura 3.14b. De acordo com o critério, a tensão de escoamento sob compressão é maior do que sob extensão, refletindo portanto a influência do terceiro invariante das tensões de desvio J_{3D}. Cabe ressaltar também que o critério de Mohr-Coulomb não leva em conta os efeitos da tensão principal intermediária s_2. Com o objetivo de definir o critério em termos de invariantes de tensão, é conveniente usar uma definição alternativa do invariante do tensor das tensões (Nayak e Zienkiewicz, 1972), expresso pela equação 3.15 para $-p/6 \le \Theta \le p/6$. Assim, utilizando J_1, J_{2D} e Θ, a função de escoamento pode ser expressa para o estado de tensões tridimensional de segundo a equação 3.16.

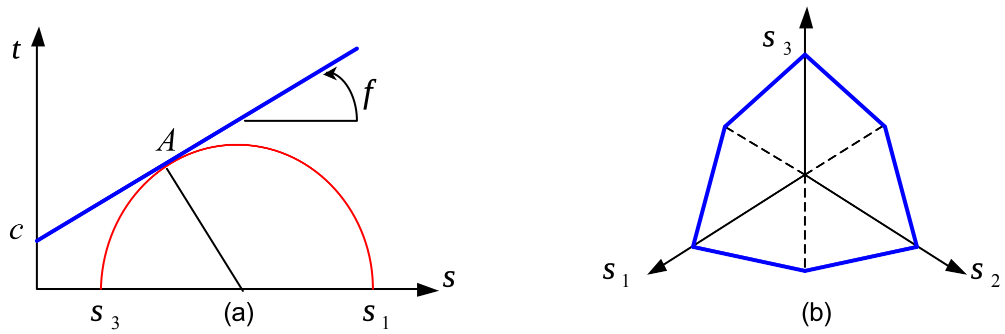


Figura 3.4: Critério de escoamento de Mohr-Coulomb: a) no plano (s ,t); b) em plano octaédrico.

$$\Theta = -\tfrac{1}{3}\,\text{sen}^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}}\right) \tag{3.15}$$

$$F = J_1\,\text{sen}\, f + \sqrt{J_{2D}}\cos\Theta - \frac{\sqrt{J_{2D}}}{3}\text{sen}\, f\,\text{sen}\,\Theta - c\cdot\cos f = 0 \tag{3.16}$$

Os dois parâmetros do material c e f podem ser determinados a partir de ensaios de compressão triaxial convencional (CTC) levando o material até a condição de ruptura.

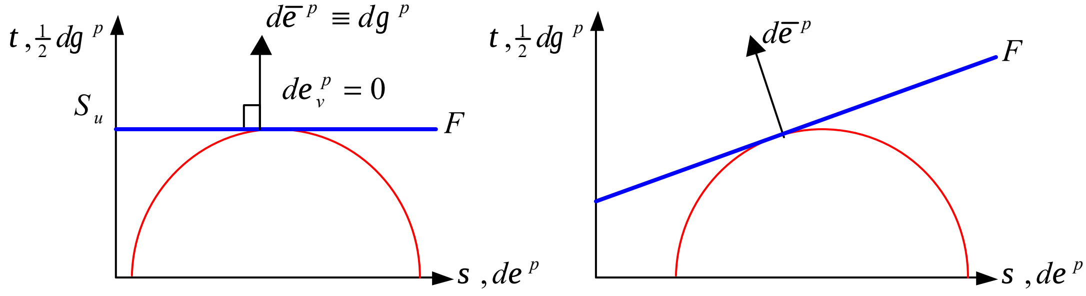
O critério de Mohr-Coulomb também pode ser expresso através dos invariantes J_1, J_{2D} e q, este último identificado como ângulo de Lode e descrito por (Potts & Zdravkovic, 1999):

$$q = \tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2s_2 - s_1 - s_3}{s_1 - s_3}\right] \tag{3.17}$$

$$F = \sqrt{J_{2D}} - \left(\frac{c}{\tan f} + \frac{J_1}{3}\right)g(q) = 0 \quad \text{onde} \tag{3.18a}$$

$$g(q) = \frac{\text{sen}\, f}{\cos q + (\text{sen}\, q\,\text{sen}\, f)/\sqrt{3}} \tag{3.18b}$$

No caso particular de análise $f = 0$, o critério de Mohr-Coulomb coincide com o critério de Tresca (figura 3.5a), resultando em um vetor do incremento das deformações plásticas $d\bar{e}^p$ normal tanto à superfície de escoamento quanto ao eixo das deformações plásticas volumétricas, indicando que estas são nulas ($de_v^p = 0$) durante o fluxo plástico. Esta condição é observada no cisalhamento de argilas normalmente adensadas na condição não drenada, onde a função de escoamento F, dependente somente do parâmetro S_u (resistência não drenada), pode ser escrita então como $F = s_1 - s_3 - 2S_u = 0$.



(a) Critério de Tresca (b) Critério de Mohr-Coulomb

Figura 3.5: Leis de fluxo associadas às superfícies de escoamento: a) critério de Tresca; b) critério de Mohr-Coulomb.

Já no caso geral do modelo de Mohr-Coulomb ($\phi \neq 0$), o vetor $d\bar{e}^p$ apresenta uma inclinação f com respeito à vertical (figura 3.5b), indicando a ocorrência de deformações plásticas negativas que resultam num comportamento dilatante do material. Tal comportamento é típico para areias densas e argilas pré-adensadas cisalhadas na condição drenada.

Definição de dilatância m. A figura 3.6 mostra o circulo de Mohr correspondente ao estado dos incrementos de deformação plástica em um ponto do solo sob escoamento plástico. O ângulo de dilatância m [equação (3.19)] expressa a relação existente entre os incrementos de deformação plástica volumétrica de_v^p e de deformação plástica cisalhante dg^p, ou seja:

$$m = \text{sen}^{-1}\left(\frac{de_v^p}{dg_{\max}^p}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{de_1^p + de_3^p}{de_1^p - de_3^p}\right) \tag{3.19}$$

No caso do critério Mohr-Coulomb com fluxo associado, determina-se facilmente pela lei de fluxo generalizada $de_{ij}^p = dl(\partial F / \partial s_{ij})$ para materiais perfeitamente plásticos que $de_1^p = \frac{1}{2}dl(1 - \text{sen}\, f)$ e $de_3^p = -\frac{1}{2}dl(1 + \text{sen}\, f)$, resultando na seguinte expressão para o ângulo de dilatância m,

$$m = \text{sen}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}dl(1 - \text{sen}\, f - 1 - \text{sen}\, f)}{\frac{1}{2}dl(1 - \text{sen}\, f + 1 + \text{sen}\, f)}\right] = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, f) = f \tag{3.20}$$

que comprova que no caso de lei de fluxo associada o ângulo de dilatância m coincide com o ângulo de resistência ao cisalhamento f.

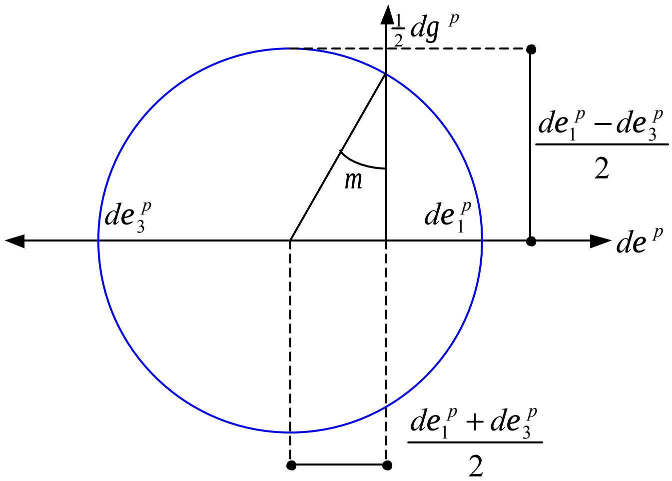


Figura 3.6: Circulo de Mohr para incrementos de deformação plástica e ângulo de dilatância μ.

O modelo elasto-plástico de Mohr-Coulomb requer a definição de 4 parâmetros de solo, sendo dois utilizados para descrição das deformações elásticas (*K, G*) e outros dois diretamente associados com o critério (c, ϕ).

Lei de fluxo não associada. A dilatância plástica prevista pelo modelo de Mohr-Coulomb é geralmente maior do que a observada experimentalmente em ensaios de laboratório. Esta característica intrínseca do modelo pode ser minimizada utilizando-se uma lei de fluxo não associada, por meio do potencial plástico $Q(\sigma_{ij})$, matematicamente semelhante à função de escoamento $F(\sigma_{ij})$, porém substituindo-se o ângulo de atrito ϕ pelo ângulo de dilatância μ, definido pela equação (3.19). De acordo com (Potts & Zdravkovic, 1999), $Q(\sigma_{ij})$ pode ser escrita como:

$$Q = \sqrt{J_{2D}} - \left(a_{pp} + \frac{J_1}{3}\right) g_{pp}(\theta) = 0 \qquad (3.21a)$$

$$g_{pp}(\theta) = \frac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu + (\text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\mu)/\sqrt{3}} \qquad (3.21b)$$

onde pp indica que o ponto pertence à função potencial plástico Q. A função $Q(\sigma_{ij})$ deve passar pelo estado atual de tensão P (figura 3.7), que também pertence à função de escoamento $F(\sigma_{ij})$, ou seja, $Q(\sigma_{ij})_P = f(\sigma_{ij})_P$. Desta condição, é possível determinar-se o valor de a_{pp} através de:

$$a_{pp} = \left[\frac{c}{\tan f} + \left(\frac{J_1}{3}\right)_P\right]\frac{g(q)_P}{g_{pp}(q)_P} - \left(\frac{J_1}{3}\right)_P \tag{3.22}$$

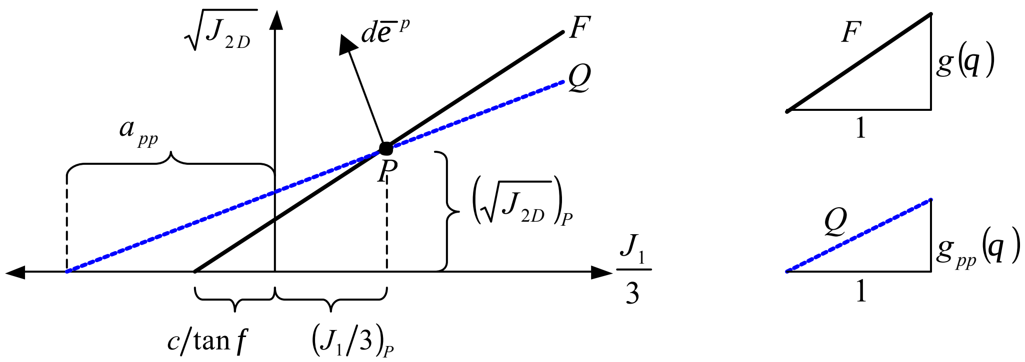


Figura 3.7: Modelo de Mohr-Coulomb com fluxo não associado, incluindo a função de potencial plástico *Q*.

A função F é considerada fixa no espaço de tensões (J_1, J_{2D}, q), enquanto que a função Q movimenta-se para passar através do ponto P. Assim, com o parâmetro adicional m pode-se ajustar o modelo ao comportamento real do solo - $m = f$ para lei de fluxo associada, $m < f$ para fluxo não associado com dilatância reduzida e $m = 0$ para o material perfeitamente plástico, não dilatante ($de_v^p = 0$).

Este procedimento tem a limitação do valor de m ser utilizado como uma constante, o que implica na suposição de que o solo em fluxo plástico vai experimentar continuamente expansão volumétrica, independentemente do nível de cisalhamento a que está submetido. Isto não se verifica no caso real de solos, para os quais grandes deformações plásticas ocorrem sob volume constante (teoria do estado crítico). Uma modificação adicional do modelo seria, portanto, a definição do ângulo de dilatância m como função dos incrementos de deformação plástica.

Modelo de Mohr-Coulomb com endurecimento e amolecimento plásticos. A formulação do modelo de Mohr-Coulomb pode ser aperfeiçoada para incluir a representação dos fenômenos de endurecimento (*hardening*) e amolecimento (*softening*) plásticos permitindo-se que os valores dos parâmetros c e f possam variar com a deformação plástica de desvio acumulada E^p. Igualmente, se considera que o ângulo de dilatância m acompanha à evolução de f durante o cisalhamento, é dizer, $m(E^p) = y\, f(E^p)$, sendo y uma constante.

A variação de c e f durante o cisalhamento pode ser esquematizada em três zonas, indicadas na figura 3.8 e descritas a seguir:

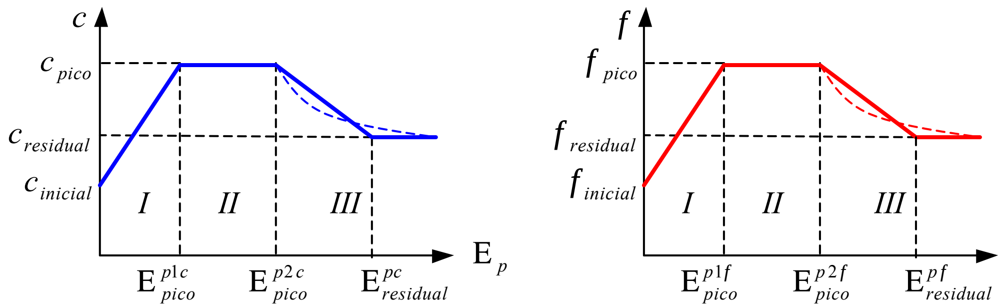


Figura 3.8: Evolução dos parâmetros c e f com a deformação plástica de desvio acumulada (Potts & Zdravkovic, 1999)..

Zona I – endurecimento, onde c e f crescem linearmente dos valores iniciais c_i e f_i até os valores de pico c_{pico} e f_{pico}:

$$c = c_{inicial} + \frac{E^p}{E^p_{pico}}\left(c_{pico} - c_{inicial}\right) \qquad f = f_{inicial} + \frac{E^p}{E^p_{pico}}\left(f_{pico} - f_{inicial}\right) \qquad (3.23)$$

Zona II – perfeitamente plástica, os parâmetros permanecem com seus valores de pico c_{pico} e f_{pico}

Zona III – amolecimento, parâmetros de resistência decrescem gradualmente para valores residuais linear (equações 3.24) ou exponencialmente (equações 3.25).

$$c = c_{pico} - \frac{E^p - E^p_{pico}}{E^p_{residual} - E^p_{pico}}\left(c_{pico} - c_{residual}\right) \qquad (3.24a)$$

$$f = f_{pico} - \frac{E^p - E^p_{pico}}{E^p_{residual} - E^p_{pico}}\left(f_{pico} - f_{residual}\right) \qquad (3.24b)$$

$$c = c_{pico} - \left(c_{pico} - c_{residual}\right)\left[1 - e^{-a_c\left(E^p - E^p_{pico}\right)}\right] \qquad (3.25a)$$

$$f = f_{pico} - \left(f_{pico} - f_{residual}\right)\left[1 - e^{-a_f\left(E^p - E^p_{pico}\right)}\right] \qquad (3.25b)$$

Conclusões. O modelo constitutivo de Mohr-Coulomb é, sem dúvida, o mais conhecido e utilizado atualmente em aplicações da engenharia geotécnica. A sua formulação básica consegue representar aspectos tais como aumento da resistência do solo com as tensões esféricas e as diferenças de comportamento do material sob trajetórias de compressão e de extensão, enquanto que adaptações posteriores permitem a simulação de processos de endurecimento e de amolecimento plásticos e um maior controle da representação da dilatância.

3.2.2
Critério de Drucker-Prager

Este critério de escoamento plástico (Drucker & Prager, 1952) é a generalização do critério de von Mises, incorporando a influência das tensões esféricas no comportamento do material. A função de escoamento pode ser expressa por:

$$F = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - k = 0 \tag{3.26}$$

sendo α e k os parâmetros do modelo. A função de escoamento F descreve um cone de eixo coincidente com o eixo hidrostástico $\overline{n}$ no espaço de tensões e um círculo em um plano octaédrico (figura 3.9).

Alternativamente, o critério pode ser entendido como uma simplificação do critério de Mohr-Coulomb (equação 3.18), através da consideração de que a função $g(\theta)$ torna-se uma constante M (Potts & Zdravkovic, 1999). Logo, F pode ser re-escrita como:

$$F = \sqrt{J_{2D}} - \left(\frac{c}{\tan\phi} + \frac{J_1}{3}\right)M = 0 \tag{3.27}$$

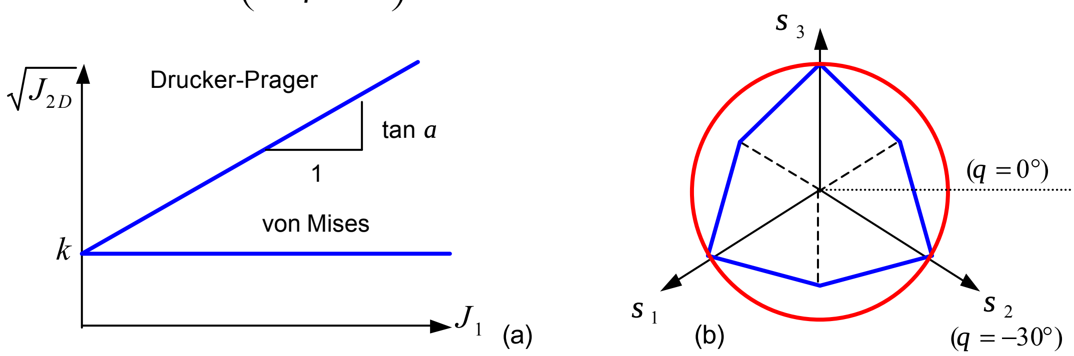


Figura 3.9: a) Critérios de Drucker-Prager e von Mises no plano $J_1 \, x \, \sqrt{J_{2D}}$; b) Critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager em plano octaédrico.

A determinação do parâmetro M é feita igualando-o à função $g(\theta)$ para diferentes valores do ângulo de Lode. No caso do círculo que circunscreve o hexágono irregular de Mohr-Coulomb (trajetória de compressão axial) há correspondência para $\theta = -30°$ (figura 3.9b). Neste caso,

$$M^{-30°} = g(\theta = -30°) = \frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\phi}{3 - \mathrm{sen}\,\phi} \tag{3.28}$$

Comparando-se as equações (3.26) e (3.27) obtém-se o valores dos parâmetros α e k através de c e ϕ como:

$$a = \tfrac{1}{3}M = \frac{2\,\mathrm{sen}\,f}{\sqrt{3}(3-\mathrm{sen}\,f)} \qquad k = \frac{cM}{\tan f} = \frac{6c\cos f}{\sqrt{3}(3-\mathrm{sen}\,f)} \tag{3.29}$$

No caso onde os parâmetros de resistência c e f são determinados nas condições do estado plano de deformação, Desai e Siriwardane (1984) sugerem as seguintes expressões

$$a = \frac{\tan f}{\left(9+12\tan^2 f\right)^{1/2}} \qquad k = \frac{3c}{\left(9+12\tan^2 f\right)^{1/2}} \tag{3.30}$$

Lei de fluxo associada. **Partindo-se da lei de fluxo generalizada,**

$$de_{ij}^{p} = d\,l\,\frac{\partial F}{\partial s_{ij}} = d\,l\left(\frac{\partial F}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial s_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial\sqrt{J_{2D}}}\frac{\partial\sqrt{J_{2D}}}{\partial s_{ij}}\right) \tag{3.31}$$

onde F é definida pela equação (3.26), tem-se

$$de_{ij}^{p} = d\,l\left(-a\,d_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}}\right) \tag{3.32}$$

No caso de material elasto-perfeitamente plástico ($F=0$ e $dF=0$), a relação tensão deformação pode ser escrita como, considerando-se os incrementos de deformação elástica e plástica,

$$de_{ij} = \frac{dJ_1}{9K}d_{ij} + \frac{dS_{ij}}{2G} + d\,l\left[-a\,d_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}}\right] \quad \text{ou} \tag{3.33a}$$

$$ds_{ij} = Kde_{kk}d_{ij} + 2Gd\mathrm{E}_{ij} - d\,l\left[-3Ka\,d_{ij} + \frac{GS_{ij}}{\sqrt{J_{2D}}}\right] \tag{3.33b}$$

onde $d\,l$ é definido por (Chen e Baladi, 1985)

$$d\,l = \frac{-3Kade_{kk} + \dfrac{G}{\sqrt{J_{2D}}}S_{mm}d\mathrm{E}_{mn}}{9Ka^2+G} \tag{3.34}$$

Analisando-se a equação (3.32), e tendo em vista que $S_{ii}=0$, a deformação volumétrica plástica corresponde a $de_v^p = de_{ii}^p = -3a\,d\,l$. Como, por definição, $d\,l > 0$ então o sinal de de_v^p é sempre negativo, o que mostra que neste modelo é sempre previsto uma expansão de volume durante o fluxo plástico. Para certos materiais (argilas moles, areias fofas), sob determinados estados de confinamento, este comportamento não se verifica experimentalmente, necessitando-se a utilização de uma lei de fluxo não associada, através da consideração da função potencial plástico Q, de maneira similar à desenvolvida no modelo de Mohr-Coulomb, anteriormente.

Conclusões. O modelo de Drucker-Prager, se comparado com o modelo Mohr-Coulomb, apresenta a vantagem de não possuir pontos angulosos na superfície de escoamento, facilitando sua implementação computacional. Em contrapartida, prevê o mesmo comportamento do material sob trajetórias de compressão e de extensão, característica que reduz significativamente sua aplicação na modelagem de solos.

3.3
Modelos do estado crítico

Desde os trabalhos de Coulomb (1776) e de Rankine (1857), há uma importante história de aplicações da teoria da plasticidade na análise do comportamento de materiais geológicos. No entanto, durante décadas do século XX, o desenvolvimento de modelos constitutivos para solos foi apenas conseqüência de adaptações de modelos para estudo de metais, como o modelo de Drucker-Prager (conhecido como modelo de von Mises Estendido) e de Mohr-Coulomb (também referenciado na literatura como modelo de Tresca Estendido).

Na década de 1950, com o acúmulo da experiência sobre o comportamento de solos em ensaios de laboratório, foram formulados os primeiros modelos do estado crítico com base na teoria da plasticidade (Roscoe et al., 1958) e postulando-se a existência de uma superfície de estado limite.

No desenvolvimento inicial destes modelos foram utilizadas as variáveis e (índice de vazios) e a dupla p, q que no caso da axissimetria do ensaio CTC - compressão triaxial convencional com ($s_2 = s_3$ e $e_2 = e_3$) são definidas por:

$$p = \tfrac{1}{3}(s_1 + 2s_3) = \tfrac{1}{3}J_1 \qquad \text{(componente de tensão esférica)}$$

$$q = s_1 - s_3 = \sqrt{3J_{2D}} \qquad \text{(componente de tensão de desvio)} \tag{3.35}$$

$$de_v = de_1 + 2de_3 \qquad \text{(deformação volumétrica)}$$

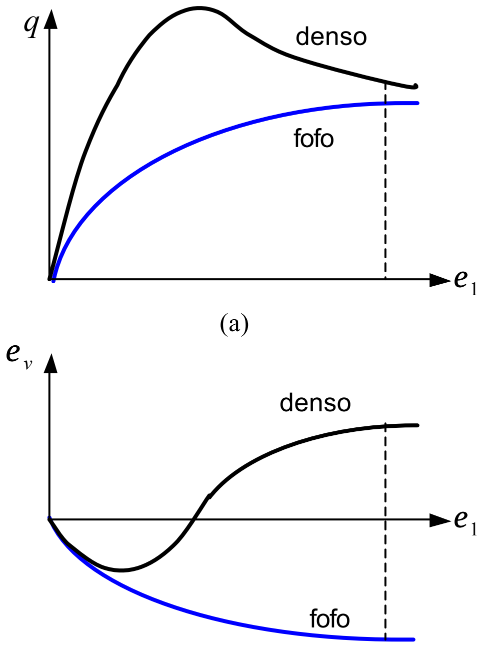
$$de_s = \tfrac{2}{3}(de_1 - de_3) \qquad \text{(deformação de desvio)}$$

Assim, o trabalho dW realizado sobre uma amostra de solo sob carregamento CTC pode ser escrito como:

$$dW = s_1 e_1 + 2s_3 e_3 = p de_v + q de_s \tag{3.36}$$

Teoria de estado crítico *(CST – critical state theory).* Quando uma amostra de solo fofo é cisalhada, esta passa por estados progressivos até atingir o colapso. Em outras palavras, a trajetória de tensões passa através de várias superfícies de escoamento, experimentando deformações plásticas de modo contínuo, diminuindo de volume até chegar a um índice de vazios final, que permanece constante em relação a deformações adicionais (figura 3.10). O material atingiu o estado crítico, onde a disposição das partículas é tal que variações de volume não mais se produzem durante o cisalhamento.

Por outro lado, quando uma amostra de solo denso é cisalhada, a mesma passa por uma tensão desviadora máxima (tensão de pico) para em seguida gradualmente diminuir para um valor residual. Neste processo, o solo inicialmente experimenta diminuição de volume, para depois expandir (comportamento dilatante) e chegar, finalmente, a um volume constante correspondente ao estado crítico (figura 3.10).



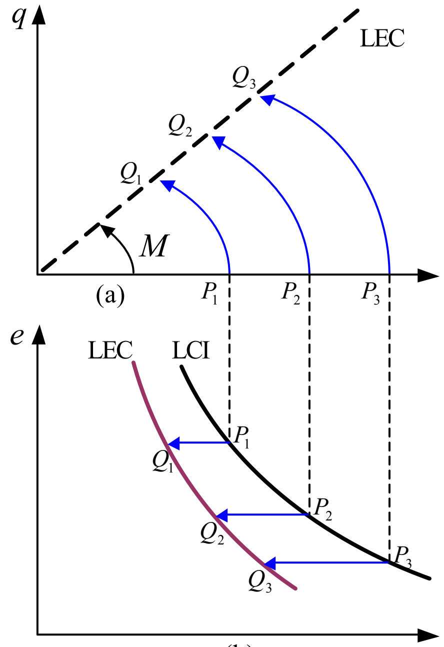


Figura 3.10: Ensaio CTC para solos denso e fofo: a) curva q - ε_1; b) curva ε_v - ε_1.

Figura 3.11: Ensaio CTC não drenado em argila mole: a) curva p - q; b) curva e - p.

Roscoe et al. (1958) analisaram o escoamento de argilas normalmente adensadas (NA) saturadas, através da execução de ensaios triaxiais não drenados. O esquema das trajetórias de tensão da figura 3.11a mostra que elas são geometricamente semelhantes e que os estados de tensão últimos Q_i situam-se aproximadamente sobre uma linha reta de inclinação M no plano p-q. No plano *e-ln(p)* da figura 3.11b os pontos Q_i se situam sobre uma curva similar à curva de consolidação isotrópica (LCI), sendo ambas paralelas no gráfico semi-logarítmico da figura 3.12a. Ensaios triaxiais drenados realizados no mesmo solo comprovaram que os pontos de ruptura correspondentes ao estado último se situavam na mesma linha crítica de índice de vazios crítica anteriormente observada nos ensaios não drenados, a chamada *linha do estado crítico* (LEC) que define duas regiões possíveis para o estado do solo: NA (normalmente adensado) e PA (pré-adensado).

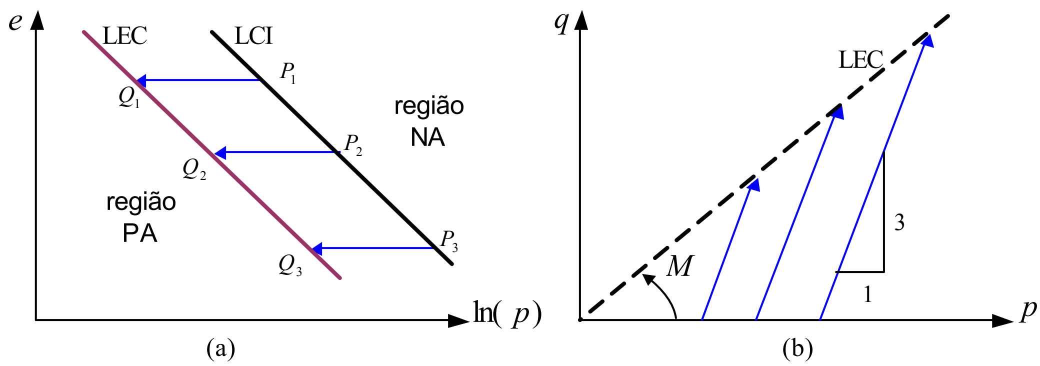


Figura 3.12: a) Resultado de ensaios CTC não drenados no plano *e – ln(p)* b) Ensaios CTC drenados no plano *p - q*.

Superfície de estado crítico. O conceito de estado crítico pode ser melhor compreendido através da construção da superfície de estado crítico (SEC) suposta existente no espaço *p, q, e* (figura 3.13). A mesma está composta de outras duas superfícies, a de Roscoe e a de Hvorslev, que se interceptam no estado crítico para formar a linha de estado crítico (LEC).

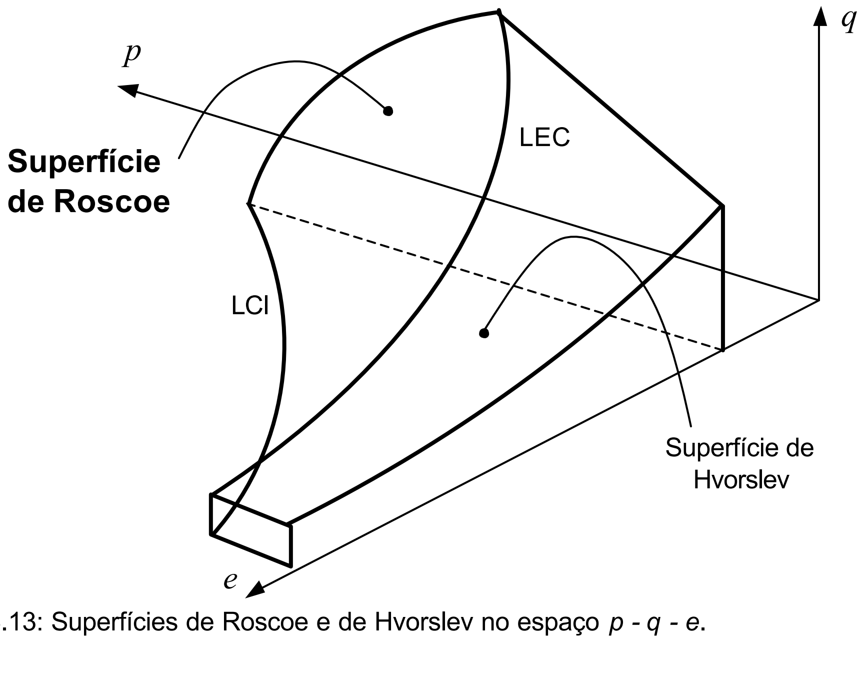


Figura 3.13: Superfícies de Roscoe e de Hvorslev no espaço *p - q - e*.

A representação no espaço $p,\ q,\ e$ permite uma visualização sob ponto de vista da mecânica dos solos clássica, onde o comportamento de solos é normalmente representado no plano p-q, no caso de ensaios triaixiais, ou no plano e-q, para resultados de ensaios de adensamento.

O estado úmido (normalmente adensado) se situa abaixo da superfície de Roscoe ou do estado limite, enquanto que o estado seco (pré-adensado) se situa abaixo da superfície de Hvorslev. O material, pois, pode apresentar-se em qualquer estado situado abaixo ou sobre a superfície de estado crítico.

3.3.1
Modelo Cam Clay Modificado

Os primeiros modelos do estado crítico foram formulações conhecidas na literatura como modelo Cam Clay, desenvolvidas na Universidade de Cambridge, Inglaterra, por Roscoe *et al* (1963) e Schofield e Wroth (1968). O modelo original foi posteriormente aperfeiçoado por Roscoe e Burland (1968) dando origem ao hoje conhecido modelo Cam Clay Modificado.

O modelo Cam Clay faz uso no plano p-q do mesmo conceito de envoltória de ruptura fixa dos modelos convencionais (Mohr-Coulomb, Drucker-Prager), através da projeção da linha de estado crítico (LEC) como reta de inclinação M passando pela origem dos eixos (figura 3.14a). Mas em contraste com os modelos clássicos, superfícies de escoamento adicionais, fechadas, são também utilizadas para representar a ocorrência de deformações plásticas contínuas do solo com a imposição do carregamento. A figura (3.14a) mostra estas superfícies fechadas (SE), admitidas elípticas no modelo Cam Clay modificado, que interceptam a linha do estado crítico em pontos críticos (PC). Para solos NA a superfície de escoamento só é considerada existente na região delimitada pelo eixo p e a reta LEC . O valor p_0 da tensão esférica na interseção da superfície de escoamento com o eixo das abscissas é utilizado no modelo Cam Clay para identificação de cada superfície e, por conseguinte, trata-se de um parâmetro de endurecimento. É importante ressaltar que no ponto crítico (PC) a tangente à superfície de escoamento é horizontal, mostrado que em casos de fluxo associado o incremento de deformação volumétrica plástica no estado crítico é zero ($de_v^p = 0$).

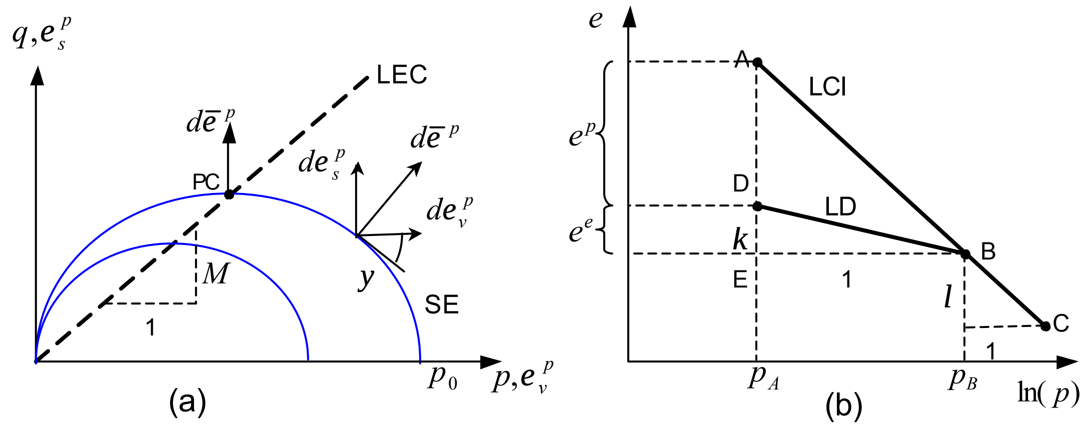


Figura 3.14: a) Superfícies de escoamento e linha de estado crítico no plano $p - q$; b) Consolidação isotrópica (LCI) e de descarregamento/recarregamento (LD).

Formulação básica do modelo. O modelo Cam Clay foi desenvolvido com base nas seguintes hipóteses de comportamento mecânico de solos NA:

- *Comportamento sob compressão isotrópica.* A figura (3.14b) mostra o comportamento de uma argila saturada sob compressão isotrópica, seguindo a trajetória AB definida por,

$$e + l(\ln p) = e_1 \tag{3.37}$$

onde e_1 é o valor do índice de vazios para $p = 1$ e l a inclinação da reta LCI de consolidação isotrópica. No descarregamento do solo de p_B para p_A, o comportamento é admitido elástico e de acordo com a trajetória BD de inclinação k. Portanto, a argila no ponto D já se recuperou as deformações elásticas e^e sofridas durante o carregamento AB, enquanto que as deformações plásticas e^p permanecem irreversíveis. Caso o material seja novamente recarregado até a tensão anterior p_B, o modelo considera que o solo se deformará elasticamente pela mesma trajetória de descarregamento, recuperando novamente as deformações correspondentes ao ponto B.

A variação de volume durante um ciclo carregamento–descarregamento pode ser escrita como $e_A - e_B = l \ln(p_B/p_A)$ e $e_D - e_E = k \ln(p_B/p_A)$. Diferenciando-se estas relações obtém-se:

$$de = -l \frac{dp}{p} \tag{3.38a}$$

$$de^e = -k \frac{dp}{p} \qquad de^p = de - de^e = -(l - k)\frac{dp}{p} \tag{3.38b}$$

$$de^p = de - de^e = -(l - k)\frac{dp}{p} \tag{3.38c}$$

Resultado em incrementos de deformação volumétrica,

$$de_v = -\frac{de}{1+e_0} = \frac{l}{1+e_0}\frac{dp}{p} \tag{3.39a}$$

$$de_v^e = -\frac{de^e}{1+e} = \frac{k}{1+e}\frac{dp}{p} \tag{3.39b}$$

Com respeito às deformações de desvio, assume-se que não parcela elástica recuperável nas distorções por cisalhamento, ou seja, $de_s = de_s^p$.

A condição de normalidade do vetor incremento de deformação plástica, para fluxo associado, impõe adicionalmente que

$$\frac{de_s^p}{de_v^p} = -\frac{dp}{dq} \tag{3.40}$$

- *Superfícies de escoamento.* Considere $h = q/p$ e seja y a inclinação da superfície de escoamento (figura 3.14a) no plano *p-q* ($y = -dq/dp$). Logo, $q = hp$ e $dq = pdh + hdp$, o que conduz à equação diferencial da superfície de escoamento,

$$\frac{dp}{p} + \frac{dh}{h+y} = 0 \tag{3.41}$$

O modelo Cam Clay considera que todas as sucessivas superfícies de escoamento são geometricamente similares, e portanto y é função somente de h. Integrando-se a equação (3.41) obtém-se a equação da superfície SE que passa pelo ponto $(p_0, 0)$:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} + \int_0^h \frac{dh}{h+y} = \ln p - \ln p_0 + \int_0^h \frac{dh}{h+y} = 0 \tag{3.42}$$

onde p_0, conforme já mencionado, é um parâmetro de endurecimento, independente da trajetória de tensão, que identifica a superfície de escoamento. Combinando-se as equações acima com (3.38b), resulta

$$de^p = -(l - k)\frac{dp_0}{p_0} = -(l - k)\left(\frac{dp}{p} + \frac{dh}{y+h}\right) \tag{3.43a}$$

$$de_v^p = \frac{de^p}{1+e} = -\frac{l-k}{1+e}\left(\frac{dp}{p} + \frac{dh}{y+h}\right) \tag{3.43b}$$

A relação y entre as componentes plásticas das deformações cisalhante e volumétrica pode ser determinada considerando que a energia dissipada dW no modelo Cam Clay Modificado (denotando-se por y_{cm}) pode ser expressa por $dW = p\sqrt{\left(de_v^p\right)^2 + M^2\left(de_s^p\right)^2}$, resultando em

$$\frac{de_s^p}{de_v^p} = \frac{2h}{M^2 - h^2} = \frac{1}{y_{cm}} \tag{3.44}$$

Conhecida a expressão para cálculo de y_{cm} pode-se integrar a equação (3.41),

$$\frac{M^2 + h^2}{M^2} = \frac{p_0}{p} \qquad \text{ou} \qquad M^2 p^2 - M^2 p_0 p + q^2 = 0 \tag{3.45}$$

que representa uma elipse no plano p-q, ilustrada na figura 3.15.

Finalmente, substituindo-se o valor de y_{cm} na equação (3.43b) obtém-se as componentes do incremento de deformação plástica volumétrica e de desvio no modelo Cam Clay Modificado:

$$de_v^p = \frac{l - k}{1 + e}\left(\frac{dp}{p} + \frac{2hdh}{M^2 + h^2}\right) \tag{3.46a}$$

$$de_v = \frac{l}{1 + e}\left[\frac{dp}{p} + \left(1 - \frac{k}{l}\right)\frac{2hdh}{M^2 + h^2}\right] \tag{3.46b}$$

$$de_s = de_s^p = \frac{l - k}{1 + e}\left(\frac{dp}{p} + \frac{2hdh}{M^2 + h^2}\right)\frac{2h}{M^2 - h^2} \tag{3.46c}$$

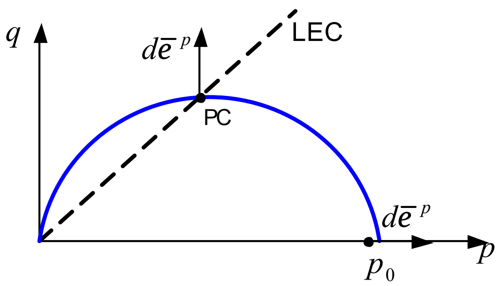


Figura 3.15: Superfície de escoamento SE e direção do fluxo plástico no modelo Cam Clay Modificado.

- *Endurecimento e amolecimento plásticos*. São considerados isotrópicos e governados pelo parâmetro p_0 que se relaciona com a deformação plástica volumétrica através da equação (3.47) que define a lei de endurecimento.

$$\frac{dp_0}{p_0} = de_v^p \frac{1 + e}{l - k} \tag{3.47}$$

- *Comportamento elástico na linha de descarregamento (LD).* O modelo assume comportamento elástico no interior da superfície limite (SE) para trajetórias que caracterizem descarregamento. O módulo de compressibilidade volumétrica K é obtido da seguinte expressão:

$$K = \frac{dp}{de_v^p} = \frac{1+e}{k} p \qquad (3.48)$$

Para uma completa descrição do comportamento elástico do solo requer-se também a determinação do módulo cisalhante G, que constitui um dos cinco parâmetro do modelo (l, k, e_1, M, G).

Características do fluxo plástico associado. No ponto crítico (PC) a tangente à superfície de escoamento é horizontal, indicando, portanto, para a condição de fluxo associado que o incremento da deformação volumétrica plástica torna-se nulo ($de_v^p = 0$). O ponto PC representa o estado final do solo NA levado à ruptura, independentemente das trajetórias de tensão. O modelo Cam Clay Modificado consegue assim compatibilizar a plasticidade associada, superfícies que consideram os efeitos do escoamento contínuo e a condição de dilatância nula no estado crítico.

Formulação generalizada para o espaço de tensões. A formulação original do modelo Cam Clay foi baseada quase exclusivamente em resultados de ensaios triaxiais convencionais, cujas trajetórias de tensão se situam em apenas um plano do espaço das tensões principais.

Roscoe e Burland (1968) propuseram a primeira generalização do modelo, consistindo na substituição da tensão de desvio q pelo segundo invariante das tensões de desvio $\sqrt{J_{2D}}$ e assim estabelecendo superfícies de escoamento nos planos octaédricos de forma circular.

Naturalmente, esta geometria implica que o modelo prevê igual comportamento do solo em situações de compressão ou de extensão, fato que não se verifica nos solos reais, sendo mais adequado, portanto, proceder-se a uma generalização com base no modelo de Mohr-Coulomb. Para isto, na equação (3.45) que descreve as superfícies de escoamento o parâmetro M é substitutído pela função $g(q)$ (Potts & Zdravkovic, 1999),

$$g(q) = \frac{\text{sen}\, f_{cr}}{\cos q + \text{sen}\, q \ \text{sen}\, f_{cr} \big/ \sqrt{3}} \tag{3.49}$$

onde f_{cr} é o ângulo de atrito interno crítico, novo parâmetro do modelo Cam Clay Modificado em lugar de *M*, e q representa o ângulo de Lode. Assim, as superfícies de escoamento podem ser escritas como

$$f_{cm} = \left(\frac{\sqrt{J_{2D}}}{p g(q)} \right)^2 - \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) = 0 \quad \text{generalização do Cam Clay modificado} \tag{3.50}$$

Dificuldades numéricas devidas às descontinuidades para $q = 30°$ e $q = -30°$ podem ser amenizadas pelo arredondamento dos cantos na implementação computacional. Outros modelos poderiam ter sido escolhidos para a generalização do modelo Cam Clay Modificado no espaço das tensões principais, associando-o com funções específicas dos modelos de Matsuoka e Nakai (1977) ou de Lade-Kim (1988), por exemplo.

Outras modificações na formulação básica. Um grande número de modificações e adaptações foram propostas na literatura com o objetivo de aperfeiçoar a correspondência entre o comportamento real de solos e os resultados previstos no modelo Cam Clay Modificado. Dentre estas, merecem ser citadas as seguintes:

- *superfície de escoamento na região supercrítica*. Para o caso de solos que escoam na região supercrítica da curva, constata-se que o modelo prevê resultados superestimados. Hvorslev sugeriu que uma linha reta (figura 3.16) pode aproximar satisfatoriamente a envoltória de ruptura para solos pré-adensados, tendo sido a mesma adotada em diversas aplicações computacionais do modelo, com sucesso. A condição de fluxo associado, no entanto, prevê uma dilatância excessiva, além de gerar um problema de descontinuidade na direção do vetor $d\bar{e}^p$ no ponto crítico. Para superar este problema, Zienkiewicz e Naylor (1973) propõem utilizar fluxo não associado com dilatância variável, sendo esta nula no ponto crítico e aumentando linearmente até um valor fixo para $p = 0$ (figura 3.16).
- *solos adensados na condição* K_0. O modelo Cam Clay Modificado está baseado em resultados experimentais de amostras de solo NA consolidadas isotropicamente. Ensaios realizados por diversos pesquisadores em argilas

normalmente adensadas na condição K_0 mostram que as superfícies de escoamento não são simétricas em relação ao eixo *p*, mas apresentam uma rotação em relação à linha de consolidação unidimensional (linha K_0), como o modelo Melanie (figura 3.17) desenvolvido por Mouratidis e Magnan (1983) para as argilas moles sensíveis do Canadá. É importante destacar que adaptações deste tipo devem também contemplar o desenvolvimento de anisotropias em função das deformações plásticas, acarretando mudanças progressivas da forma da superfície durante o escoamento.

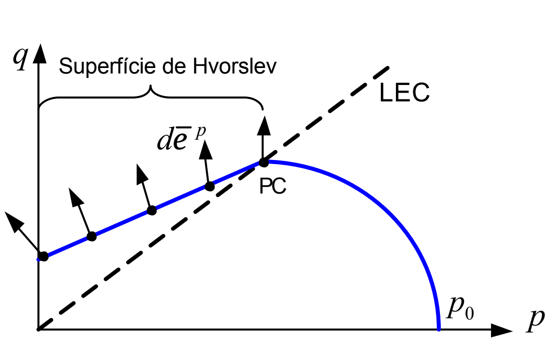


Figura 3.16: Superfície de Hvorslev no plano *p-q*.

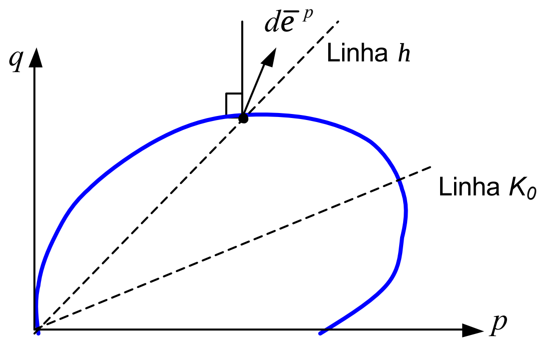


Figura 3.17: Modelo MELANIE.

- *Componente elástica da deformação*. Na formulação básica do modelo Cam Clay Modificado não há indicações a respeito do módulo de cisalhamento G. Inicialmente considerou-se a hipótese de coeficiente de Poisson n constante, o que resultou numa definição de módulo G variável, proporcional a *p*, de acordo com

$$G = \frac{3(1-2n)}{2(1+n)} \frac{(1+e)p}{k} \tag{3.51}$$

Zytinski *et al* (1978) demonstraram que esta formulação pode conduzir a um comportamento não conservativo para carregamentos cíclicos, enquanto que o requisito de G constante satisfaz o requisito de conservação de energia, mas não corresponde com o comportamento real de solos.

Houlsby (1985) analisou, com resultados satisfatórios, as condições de comportamento elástico conservativo para as hipóteses de G proporcional à tensão esférica p e G proporcional ao parâmetro de endurecimento p_0. Mas estas hipóteses também podem ser insuficientes para representar adequadamente o comportamento de determinados tipos de solo, necessitando-se, talvez, de formulações mais complexas da teoria da elasticidade não linear.

Conclusões. A teoria do estado crítico CST constitui um dos principais fundamentos da mecânica dos solos clássica, por oferecer uma ferramenta de análise geral, e ainda simples, para modelagem do comportamento de solos com base em resultados de ensaios convencionais de laboratório. O modelo Cam Clay Modificado é o desenvolvimento matemático de maior sucesso desta teoria, conseguindo reproduzir os fenômenos de escoamento contínuo, estabilização de volume no estado crítico, entre outros aspectos do comportamento de solos NA.
Adaptações posteriores tiveram como objetivo aperfeiçoar o modelo e estender seu sucesso para aplicações envolvendo solos PA, consolidação na condição K_0, considerações sobre o módulo de cisalhamento G, etc.

3.3.2 Modelo Cap

O modelo *Cap*, proposto por DiMaggio e Sandler (1971) e Sandler *et al* (1976), podem ser considerados como modelos do estado crítico com superfícies de escoamento supercríticas modificadas. Em relação ao modelo Cam Clay Modificado as seguintes diferenças podem ser observadas:

- O modelo *cap* foi originalmente formulado no espaço 3D das tensões principais;
- No modelo *cap* a superfície de escoamento f_2 (*cap*) se movimenta em função do aumento da deformação volumétrica plástica enquanto que a superfície de ruptura f_1 permanece fixa (figura 3.18). Ambas as superfícies são usadas para definir o processo de escoamento, porém o comportamento subcrítico é mais controlado pela superfície de escoamento móvel, que descreve o endurecimento plástico do material, enquanto que o comportamento supercrítico é mais afetado pela superfície de ruptura fixa, considerada como superfície de escoamento última. No modelo Cam Clay Modificado as superfícies de escoamento móveis descrevem o escoamento contínuo do solo, enquanto que a fixa é utilizada para essencialmente definir o estado crítico.

Na formulação inicial apresentada por Di Maggio e Sandler (1971) a superfície de ruptura foi admitida como composta (equação 3.52), com o trecho inicial representado por uma envoltória do critério de Drucker-Prager com uma transição suave para a envoltória de von Mises, no trecho final.

$$f_1\left(J_1,\sqrt{J_{2D}}\right)=\sqrt{J_{2D}}+ge^{-bJ_1}-a=0 \tag{3.52}$$

onde a, b e g são parâmetros do material.

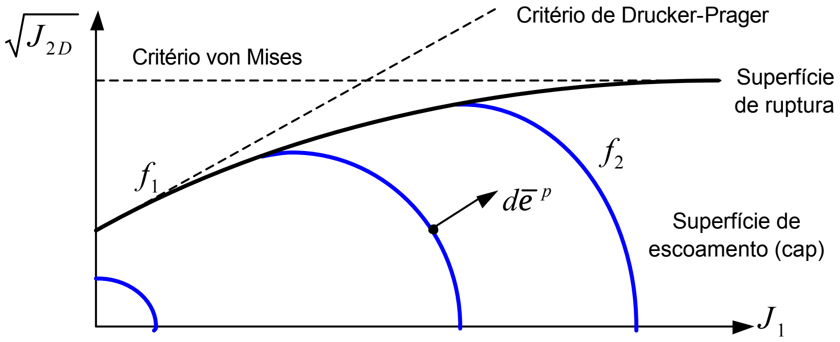


Figura 3.18: Modelo Cap e as superfícies de escoamento f_1 e f_2.

A superfície móvel f_2, correspondente ao *cap*, foi definida em termos dos invariantes de tensão e do parâmetro de endurecimento k relacionado com a história de deformações do material. Usualmente defini-se k como a deformação volumétrica plástica e, conseqüentemente, o *cap* representa os pontos do material sob a mesma deformação volumétrica plástica.

A interseção de ambas as superfícies de escoamento é assumida ocorrer em pontos para os quais a tangente a f_2 é paralela ao eixo J_1 (figura 3.19). Desta forma, com plasticidade associada, o vetor incremento de deformação plástica e paralelo ao eixo $\sqrt{J_{2D}}$, implicando que não ocorre variação de volume quando a superfície f_1 é atingida. Esta característica, comum aos modelos de estado crítico, informa que o material atinge volume constante assim que f_1 for alcançada. É também admitido que a superfície f_2 intercepta ortogonalmente o eixo J_1, indicando que o estado de compressão hidrostática não produzem deformações cisalhantes.

Di Maggio e Sandler (1971) propuseram uma forma elíptica para geometria do *cap* na representação do comportamento de solos não coesivos (figura 3.19):

$$f_2\left(J_1,\sqrt{J_{2D}},k\right)=R^2J_{2D}+\left(J_1-C\right)^2=R^2b^2 \tag{3.53a}$$

$$X=-\frac{1}{D}\ln\left(1-\frac{e_v^p}{W}\right)+Z \tag{3.53b}$$

onde R = relação entre os eixos maior e menor da elipse;
Rb = X – C;
X = valor de f_2 na interseção com o eixo J_1 (parâmetro de endurecimento);

C = valor de f_2 no centro da elipse (interseção com f_1);
D, R, W, Z = parâmetros do material.

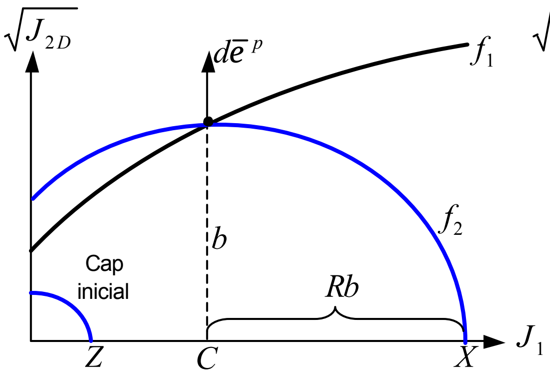


Figura 3.19: Modelo *Cap* e superfície elíptica f_2.

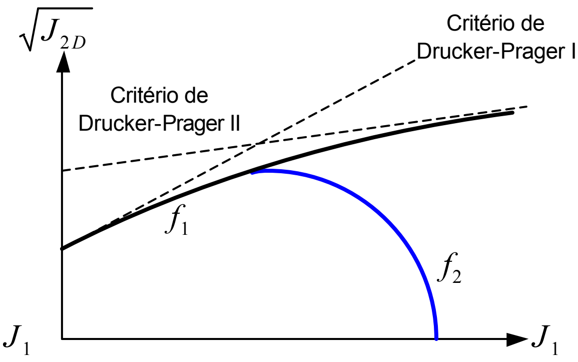


Figura 3.20: Modelo *Cap* e superfície composta f_1.

Para outros tipos de solos, dependendo dos resultados dos ensaios de laboratório, a superfície de escoamento última f_1 pode ser especificamente configurada, como a usada por Desai e Siriwardane (1984), composta por dois trechos de envoltórias de Drucker-Prager (figura 3.20) unidas por um segmento de transição.

$$f_1\left(J_1, \sqrt{J_{2D}}\right) = \sqrt{J_{2D}} + ge^{-bJ_1} - qJ_1 - a = 0 \tag{3.54}$$

onde α, β, γ e q são parâmetros do material, geralmente determinados por processo de minimização pelo método dos mínimos quadrados. Para $q = 0$ a expressão (3.52) é recuperada

A obtenção dos parâmetros do modelo, tanto elásticos (*K, G*) quanto plásticos (a, b, g, q, D, R, W, Z) é feita com base nos resultados de ensaios de compressão isotrópica e ensaios convencionais de compressão triaxial.

Conclusões. O modelo *Cap*, também baseado na teoria do estado crítico, se diferencia do modelo Cam Clay Modificado por ser formulado diretamente no espaço de tensões. Incorpora a definição de uma superfície de escoamento móvel (*cap*), que simula o endurecimento plástico do material, e uma superfície de ruptura (ou de escoamento último) fixa.

3.4 Modelos implementados em programas computacionais comerciais

Além da potencialidade do modelo em representar o comportamento de solos reais e do número de parâmetros a serem determinados através de ensaios de laboratório, outra característica importante que deve ser considerada é a sua disponibilidade em programas computacionais comerciais desenvolvidos com base no método dos elementos finitos. Com relação a este aspecto, são aqui apresentados o *modelo generalizado*, disponível no mundialmente conhecido sistema *Abaqus* para solução de problemas gerais da mecânica dos sólidos e da mecânica dos fluidos, e o modelo *HSM – Hardening Soil Model*, implementado no programa computacional PLAXIS v.7,v.8 (Plaxis, 1998), software orientado especificamente para aplicações da engenharia geotécnica.

3.4.1 Modelo Generalizado

O modelo generalizado foi proposto por Menétrey e Willam (1995) e encontra-se atualmente implementado no programa de elementos finitos *Abaqus*, permitindo o usuário facilmente selecionar alguns dos modelos clássicos da teoria da plasticidade através da escolha de valores particulares dos cinco parâmetros que compõem o modelo.

A formulação combina o critério clássico de Rankine (de resistência à tração máxima) com o critério de Mohr-Coulomb para materiais com atrito interno, conseguindo-se assim uma descrição razoável do comportamento de materiais geológicos. O critério proposto foi formulado no espaço de tensões, incorporando portanto os efeitos das três tensões principais.

Coordenadas de Haigh-Westergaard. Assumindo a hipótese de isotropia do material, o critério é definido como uma função escalar das coordenadas de Haigh-Westergaard (Chen & Han, 1988), a saber, o invariante de tensão hidrostática $x = J_1 / \sqrt{3}$, o invariante de tensão de desvio $r = \sqrt{2J_{2D}}$ e o ângulo polar de desvio q? ($\cos 3q = \frac{3}{2}\sqrt{3}J_{3D} / J_{2D}^{3/2}$). Estas formam um sistema de coordenadas cilíndricas no espaço de tensões, no qual o traço circular do raio polar desviador r (q) é transformado numa tripla elipse simétrica definida pela função elíptica $r(q,e)$ desenvolvida por Klisinski (1985)

$$r(q,e) = \frac{4(1-e^2)\cos^2 q + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos q + (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2 q + 5e^2 - 4e]^{1/2}} \tag{3.55}$$

A excentricidade e descreve a falta de arredondamento do traço desviador (figura 3.21). Ao longo do meridiano de extensão ($q = 0$) tem-se $r = 1 / e$ enquanto que para o meridiano de compressão ($q = \pi/3$) o valor é $r = 1$. Embora a função elíptica seja apenas definida no domínio ($0 < q < p/3$), a mesma é estendida por simetria para o domínio global ($0 < q < 2p$).

As condições de convexidade e de continuidade da função requerem que $0.5 < e < 1$. Como limite superior ($e = 1$) tem-se $r = 1$, descrevendo geometricamente um círculo, e para o limite inferior ($e = 0.5$) resulta em $r = 2cosq$, que representa um triângulo no plano octaédrico. (neste caso a continua de continuidade é violada nos cantos do triângulo, onde o gradiente não é único).

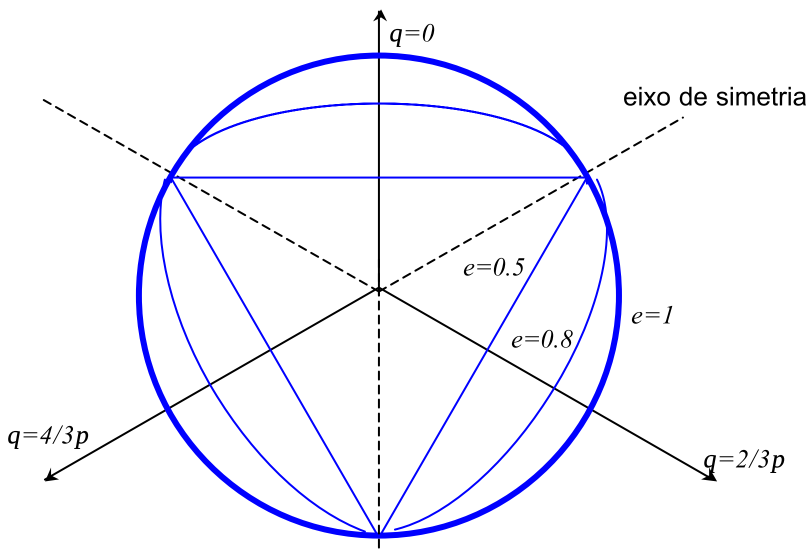


Figura 3.21: Função elíptica *r (q,e)* no modelo generalizado de Menétrey e Willam (1995).

Critério triaxial de ruptura. Está baseado no critério empírico desenvolvido por Hoek & Brown (1980) para rochas,

$$F(s_1, s_3) = \left[\frac{s_1 - s_3}{f_c'}\right]^2 + m\frac{s_1}{f_c'} - c = 0 \tag{3.56}$$

onde os parâmetros c e m se referem à resistência coesiva e de atrito interno, respectivamente, e $f_c{}'$ representa a resistência à compressão uniaxial. As limitações deste critério (não considerar a influência da tensão intermediária s_2 e a existência de cantos na superfície de escoamento) podem ser removidas reformulando-o em função das coordenadas de Haigh-Westergaard.

Considerando a relação expressa pela equação (3.57),

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} x \\ x \\ x \end{Bmatrix} + \sqrt{2/3}\, r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \cos(q - \tfrac{2}{3} p) \\ \cos(q + \tfrac{2}{3} p) \end{Bmatrix} \qquad (3.57)$$

faz com que o critério de Hoek & Brown (1980) possa ser re-escrito como:

$$F(x, r, q) = \left[\sqrt{2} \frac{r}{f'_c} \operatorname{sen}(q + \tfrac{1}{3} p) \right]^2 + m \left[\sqrt{2/3} \frac{r}{f'_c} \cos q + \frac{x}{\sqrt{3} f'_c} \right] - c = 0 \qquad (3.58a)$$

Esta formulação foi estendida por Weihe (1989) com o objetivo de gerar uma superfície de ruptura contínua, que não apresente cantos no plano octaédrico.

$$F(x, r, q) = \left[\sqrt{1{,}5} \frac{r}{f'_c} r(q, e) \right]^2 + m \left[\frac{r}{\sqrt{6} f'_c} r(q, e) + \frac{x}{\sqrt{3} f'_c} \right] - c = 0 \qquad (3.58b)$$

É possível simplificar o critério, em função de apenas três parâmetros, assumindo-se que $\sqrt{2} \operatorname{sen}(q + p/3) \approx \sqrt{1{,}5}$ e $\sqrt{2/3} \cos q \approx (1/\sqrt{6}) r(q, e)$, conforme equação (3.59). Neste caso, para *e = 0,5* são recuperados os meridianos de compressão e extensão do critério de Hoek & Brown (1980).

$$F(x, r, q) = \left[\sqrt{1{,}5} \frac{r}{f'_c} \right]^2 + m \left[\frac{r}{\sqrt{6} f'_c} r(q, e) + \frac{x}{\sqrt{3} f'_c} \right] - c = 0 \qquad (3.59)$$

Além de considerar a tensão principal intermediária, esta formulação tem a vantagem de que a forma da superfície de ruptura no plano octaédrico varia de triangular para circular com o aumento das tensões hidrostáticas, tendência que se verifica experimentalmente em solos. Os meridianos são parabólicos e interceptam o eixo hidrostático somente no ponto de extensão equi-triaxial, único ponto singular da superfície.

A influência da excentricidade *e* encontra-se ilustrada na figura (3.22). A superfície gerada é mais arredondada para valores mais altos da excentricidade.

Modelo generalizado. O critério triaxial de ruptura, anteriormente apresentado, pode ser generalizado para incluir outros critérios de escoamento clássicos em sua formulação, como os de von Mises, Drucker-Prager e de Mohr-Coulomb, o que torna bastante vantajosa sua implementação em programas computacionais desenvolvidos com base no método dos elementos finitos (ver Menétrey 1994).

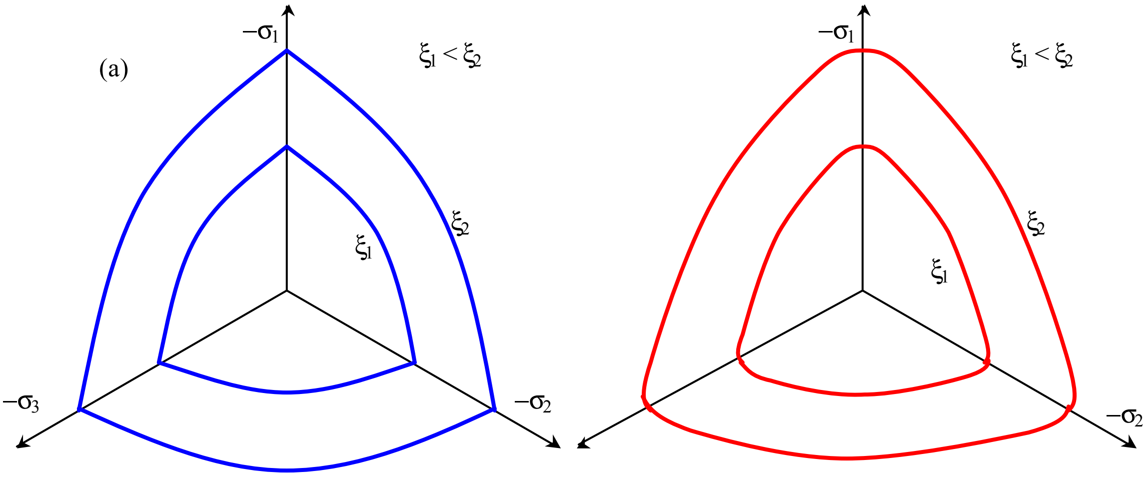


Figura 3.22: Seções no plano de desvio do critério triaxial: a) *e=0.5*; b) *e=0.6*

O formato generalizado do critério, expresso pela equação (3.60), define uma superfície convexa e contínua para $0.5 < e < 1$, exceto no ponto singular localizado no eixo hidrostático. A formulação desacopla os parâmetros de coesão c e de atrito m, permitindo uma descrição dos fenômenos de endurecimento e de amolecimento plásticos.

$$F(x, r, q) = \left[A_f r\right]^2 + m\left[B_f r r(q, e) + C_f x\right] - c = 0 \qquad (3.60)$$

Valores particulares dos parâmetros A_f, B_f e C_f , do atrito m e da excentricidade e, conforme tabela 3.1, são usados para obtenção dos seguintes critérios clássicos:

- *von Mises*

$F(r) = r - \sqrt{2/3} f'_c = 0$ assumindo-se que $f'_c = f'_t$.

- *Drucker-Prager*

$F(r, x) = r + \sqrt{6} a x - \sqrt{2} k = 0$ onde a e k são os dois parâmetros do material.

- *Mohr-Coulomb*

$$F(r, x, q) = \sqrt{2} x \operatorname{sen}(f) + \sqrt{3} r \operatorname{sen}(q + \tfrac{1}{3} p) + r \cos(q + \tfrac{1}{3} p) \operatorname{sen} f - \sqrt{6} c \cos f = 0$$

O critério de Mohr-Coulomb (representado como hexágono irregular no plano octaédrico) é aproximado no modelo generalizado por uma curva contínua. A calibração dos parâmetros pode ser feita de maneira que haja coincidência entre ambos critérios nos meridianos de compressão e de extensão, calculando-se a excentricidade e de acordo com a relação $e = (3 - \text{sen}\, f)/(3 + \text{sen}\, f)$. Desta maneira é possível expressar-se o critério de Mohr-Coulomb de maneira contínua, sem cantos que possam provocar problemas numéricos devido a singularidades.

Tabela 3.1: Definição dos parâmetros do critério generalizado de escoamento plástico.

Parâmetros	A_f	B_f	C_f	m	e
von Mises	0	$\sqrt{3/2}(1/f'_c)$	0	1	1
Drucker-Prager	0	$\sqrt{\frac{3}{8}}\frac{f'_c + f'_t}{f'_c f'_t}$	$\frac{3}{2}\frac{f'_c - f'_t}{f'_c f'_t}$	1	1
Mohr-Coulomb	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{f'_c + 2f'_t}{f'_c f'_t}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{f'_c - f'_t}{f'_c f'_t}$	1	$\frac{f'_c + 2f'_t}{2f'_c + f'_t}$

3.4.2
Modelo HSM – Hardening Soil Model

O modelo HSM (Schanz & Bonnier, 1997) foi desenvolvido para incluir aspectos da conhecida formulação hiperbólica, de ampla utilização no ambiente profissional da engenharia geoténica, levando também em conta a representação do fenômeno da dilatância de solos e tendo uma fundamentação teórica mais consistente baseada na teoria da plasticidade. Procurou-se, desta forma, melhorar as características do tradicional modelo hiperbólico, sem perder a experiência acumulada e o bom desempenho apresentados pela formulação tradicional.

Características do modelo. A característica básica deste modelo é a variação da rigidez do solo com o estado de tensão, através da definição do módulo de carregamento E_{50}, módulo de descarregamento / recarregamento E_{ur} e módulo confinado E_{oed}, com base nas seguintes relações:

$$E_{50} = E_{50}^{ref}\left(\frac{c\cos f + s'_3 \,\text{sen}\, f}{c\cos f + p^{ref}\,\text{sen}\, f}\right)^m \tag{3.61a}$$

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref}\left(\frac{c\cos f + s'_3 \,\text{sen}\, f}{c\cos f + p^{ref}\,\text{sen}\, f}\right)^m \tag{3.61b}$$

$$E_{oed} = E_{oed}^{ref}\left(\frac{c\cos f + s'_1 \,\text{sen}\, f}{c\cos f + p^{ref}\,\text{sen}\, f}\right)^m \tag{3.61c}$$

onde m é o parâmetro que controla a variação com o estado de tensão da rigidez do solo e E_{50}^{ref}, E_{ur}^{ref} e E_{oed}^{ref} são módulos de referência, correspondentes a valores de s_1 (equação 3.61c) ou s_3 (equações 3.61a e 3.61b) iguais à pressão de referência p^{ref}, adotada arbitrariamente (figura 3.23). O valor de m geralmente varia entre 0,5 e 1, podendo-se também utilizar de forma aproximada a relação $E_{ur}^{ref} = 3E_{50}^{ref}$.

Para o caso de ensaios triaxiais drenados, a relação entre a tensão de desvio q e a deformação axial e_1 para o primeiro carregamento é assumida hiperbólica,

$$e_1 = \frac{1}{2E_{50}} \frac{q}{1 - q/q_a} \qquad \text{para } q < q_f \tag{3.62}$$

onde q_a é o valor assintótico da resistência cisalhante e q_f o valor correspondente à ruptura (figura 3.24). Estes valores são definidos a partir do critério de ruptura de Mohr-Coulomb da seguinte forma:

$$q_f = (c \cot f + s_3') \frac{2 \operatorname{sen} f}{1 - \operatorname{sen} f} \qquad \text{com } q_a = q_f / R_f \tag{3.63}$$

sendo R_f a razão de ruptura (como simplificação pode-se adotar R_f = 0,9). Assim que se atingir o valor q_f , o critério de ruptura é satisfeito, ocorrendo fluxo plástico.

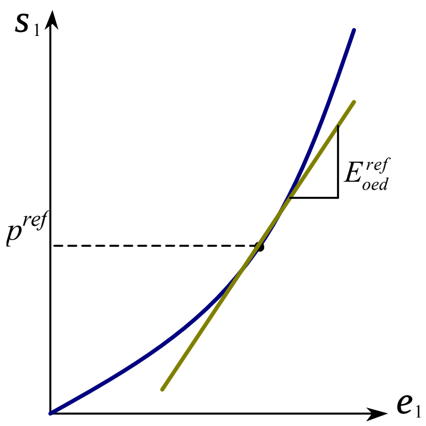


Figura 3.23: Módulo E_{oed}^{ref} obtido a partir do ensaio oedométrico

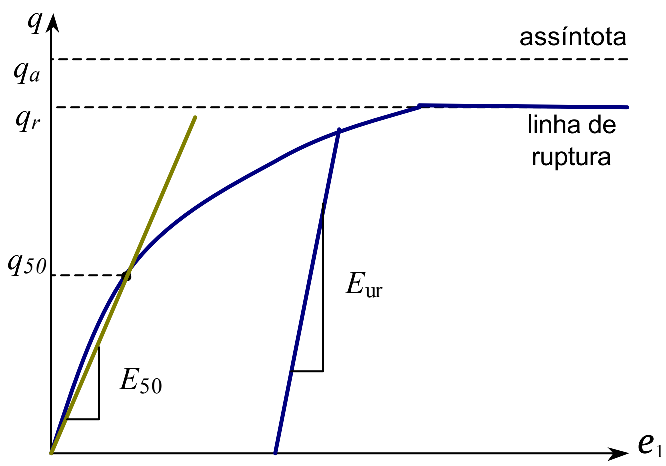


Figura 3.24: Relação tensão-deformação hiperbólica para o primeiro carregamento em ensaio triaxial drenado.

Superfície de escoamento. O modelo incorpora o critério de ruptura de Mohr-Coulomb que tradicionalmente admite um comportamento elasto-perfeitamente plástico do material. Antes de atingir esta envoltória, o solo passa por sucessivas superfícies de escoamento, com ocorrência de endurecimento. As deformações plásticas associadas à trajetória de carregamento são obtidas a partir da função de escoamento F definida como $F = \bar{f} - g^p$, onde g^p é a deformação plástica de desvio ou de distorção.

$$\bar{f} = \frac{1}{E_{50}} \frac{q}{1 - q/q_a} - \frac{2q}{E_{ur}} \qquad (3.64)$$

$$g^p = (2e_1^p - e_v^p) \approx 2e_1^p \qquad (3.65)$$

sendo a aproximação da equação (3.65) válida especialmente para solos de grande rigidez. Desta maneira a deformação axial plástica pode ser expressa por $e_1^p \approx \frac{1}{2}\bar{f}$.

Já as componentes elásticas de deformação são determinadas como

$$e_1^e = q/E_{ur} \qquad (3.66a)$$

$$e_2^e = e_3^e = -n_{ur}\, q/E_{ur} \qquad (3.66b)$$

onde o parâmetro n_{ur} é o coeficiente de Poisson na condição de descarregamento/recarregamento, assumido constante .

Assim, para um dado valor da função de endurecimento g^p, existirá uma superfície de escoamento ($\bar{f}_1 = 0$), a qual descreve uma linha reta no plano p'-q para m = 1 ou linha de baixa curvatura para m < 1 (figura 3.25).

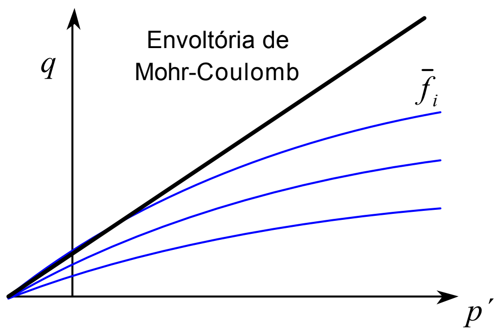


Figura 3.25: Modelo HSM. Superfícies de escoamento para vários valores de g^p.

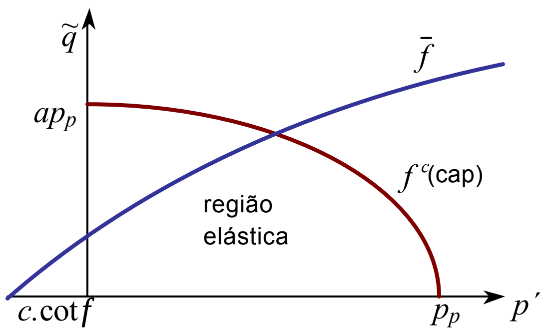


Figura 3.26: Modelo HSM. Superfície "cap" no plano p'-q.

Quanto às deformações plásticas volumétricas, faz-se uso da teoria da dilatância de Rowe (Rowe, 1962) para vinculá-las às deformações plásticas de desvio, através do ângulo de dilatância mobilizado y_m

$$\dot{e}_v^p = -\mathrm{sen}\, y_m \dot{g}^p = -\frac{\mathrm{sen}\, f_m - \mathrm{sen}\, f_{cv}}{1 - \mathrm{sen}\, f_m \,\mathrm{sen}\, f_{cv}} \dot{g}^p \qquad (3.67)$$

onde f_m é o ângulo de atrito interno mobilizado e f_{cv} o ângulo de atrito interno nas condições de estado crítico (fluxo plástico sem variação de volume):

$$\text{sen}\, f_m = \frac{s_1' - s_3'}{s_1' + s_3' - 2c \cot f} \tag{3.68}$$

$$\text{sen}\, f_{cv} = \frac{\text{sen}\, f - \text{sen}\, y}{1 - \text{sen}\, f\ \text{sen}\, y} \tag{3.69}$$

sendo f e y os ângulos de atrito interno e dilatância na ruptura, respectivamente, os parâmetros a serem fornecidos no modelo. Desta forma, o material experimentará contração caso $f_m < f_{cv}$ ou expansão quando $f_m > f_{cv}$.

Superfície cap. Esta segunda superfície de escoamento, que fecha a região elástica na direção do eixo hidrostático p' (figura 3.26), foi introduzida no modelo HSM para descrever as deformações volumétricas plásticas sob compressão isotrópica, sendo controlada pelo módulo oedométrico $E_{\text{oed.}}$

A superfície *cap* é definida como uma elipse no plano *p′-q,* matematicamente descrita por

$$f^c = \frac{\tilde{q}^2}{a^2} + p^2 - p_p^2 \tag{3.60}$$

onde a é um parâmetro auxiliar relacionado com o coeficiente de empuxo no repouso K_0^{NC}, podendo ser adotado, como aproximação, o valor $a = K_0^{NC} = 1 - \text{sen}\, f$. A variável $\tilde{q}$ representa uma medida especial da tensão de desvio,

$$(\tilde{q} = s_1 + (d - 1)s_2 - d s_3) \tag{3.61}$$

onde $d = (3 + \text{sen}\, f)/(3 - \text{sen}\, f)$ e recuperando-se o valor $\tilde{q} = s_1 - s_3 = q$ no caso do ensaio triaxial de compressão convencional.

A pressão de pré-adensamento isotrópico p_p determina o tamanho do *cap*, e se relaciona com as deformações volumétricas plásticas pela seguinte lei de endurecimento:

$$e_v^{pc} = \frac{b}{1 - m}\left(\frac{p_p}{p^{ref}}\right)^{1-m} \tag{3.62}$$

onde b é um segundo parâmetro auxiliar, relacionado com o módulo oedométrico de referência E_{oed}^{ref}.

A superfície *cap* de escoamento é também admitida como um potencial plástico (fluxo associado), possibilitando o cálculo do vetor incremento de deformação plástica pela lei de fluxo

$$de^{pc} = dl\,\frac{\partial f^c}{\partial s} \qquad \text{com} \tag{3.63a}$$

$$dl = \frac{b}{2p}\left(\frac{p_p}{p^{ref}}\right)^m \frac{\dot{p}_p}{p^{ref}} \tag{3.63b}$$

Controle da dilatância. Os solos experimentam, após um cisalhamento prolongado, um estado de densidade crítica (constante) sem variação de volume (estado crítico). O modelo HSM permite reproduzir este fenômeno através de um corte na curva de deformação volumétrica (*cut-off*), quando o índice de vazios atingir um valor máximo e_{max} pré-estabelecido (figura 3.27).

É necessário fornecer-se os valores inicial e máximo do índice de vazios do material, de tal forma que o índice de vazios atual possa ser calculado de acordo com

$$\left(e_v - e_v^{inicial}\right) = \ln\left(\frac{1+e}{1+e_{inicial}}\right) \tag{3.64}$$

Quando e_{max} é atingido, o valor do ângulo de dilatância mobilizado cai para zero a fim de reproduzir a condição de estado crítico ($de_v = 0$).

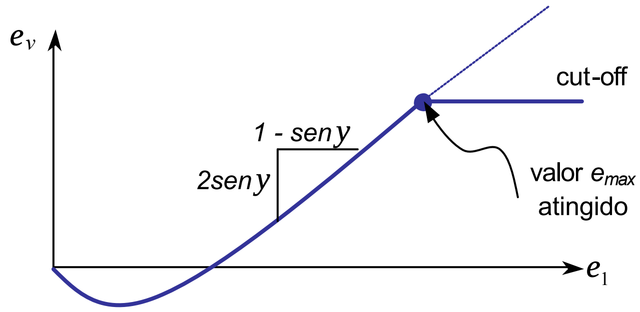


Figura 3.27: Modelo HSM. Curva de deformação volumétrica para ensaio triaxial drenado com indicação de *cut-off*.

Conclusões:

- O modelo HSM pode ser interpretado como um aperfeiçoamento dos modelos hiperbólico e de Mohr-Coulomb, ambos de ampla utilização no meio profissional, desenvolvido com uma formulação baseada na teoria da plasticidade e parâmetros do material obtidos através de ensaios triaxiais convencionais. Desta forma o modelo procura preservar a simplicidade e experiência acumulada no uso daqueles modelos clássicos, porém introduzindo um embasamento teórico mais consistente com os princípios da mecânica do contínuo em sua formulação matemática.

- O modelo consegue reproduzir o endurecimento plástico através de duas superfícies de escoamento desacopladas que controlam o fluxo plástico. Para solicitações isotrópicas faz uso da superfície de escoamento *cap*, com lei de fluxo associado, enquanto que para solicitações de desvio utiliza fluxo não associado com endurecimento do material.
- Assim que a envoltória de Mohr-Coulomb é atingida em determinado ponto, o material passa a comportar-se localmente como perfeitamente plástico, não representando, portanto, situações de amolecimento plástico (*softening*).
- O fenômeno de dilatância de solos pode ser modelado através de um parâmetro adicional, sendo também controlado por um valor de índice de vazios máximo (*cut-off*).