

2 Modelos Constitutivos Elásticos

A abordagem mais tradicional para a representação do comportamento tensão-deformação de materiais sólidos, dentre estes os de origem geológica, faz uso da teoria da elasticidade clássica, onde os gradientes de deslocamento são considerados infinitesimais, portanto resultando em deformações e rotações também infinitesimais. É usual definir-se material elástico como aquele que recupera seu estado inicial depois de submetido a um ciclo completo de carregamento e descarregamento sem sofrer deformações permanentes (Timoshenko, 1970), mas no contexto de modelos constitutivos é mais precisa a definição clássica de Cauchy pela qual em um material elástico o estado de tensão é função apenas do estado de deformação, ou vice-versa, compreendendo-se, portanto, que as trajetórias de carregamento, descarregamento ou recarregamento são todas coincidentes neste tipo de material. Ou, em outras palavras, materiais elásticos são conservativos, liberando no descarregamento toda a energia interna armazenada durante a fase de carregamento.

Embora o comportamento de solos seja fundamentalmente afetado pela trajetória de tensões, modelos elásticos podem, em princípio, ser utilizados na simulação de carregamentos monotônicos. Em particular, a teoria da elasticidade linear é freqüentemente empregada em grande parte dos modelos constitutivos onde o descarregamento e/ou recarregamento são admitidos lineares e em alguns outros modelos constitutivos, chamados de quase-lineares, onde a lei generalizada de Hooke é empregada incrementalmente com parâmetros “elásticos” variáveis a cada incremento.

2.1 Modelos Elásticos

2.1.1 Modelo Elástico Linear

Estado geral de tensões. A relação constitutiva geral num modelo elástico pode ser escrita pela expressão $\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}$, onde \mathbf{s}_{ij} e \mathbf{e}_{ij} são os tensores de tensão e de deformação respectivamente, e C_{ijkl} o tensor constitutivo que os relaciona. No caso de simetria dos tensores de tensão e de deformação, o número

de constantes elásticas para definição do comportamento do material totaliza 21, reduzindo-se para 9 na hipótese de ortotropia do meio elástico, 5 para materiais transversalmente isotrópicos e apenas 2 no caso de isotropia, situação na qual o comportamento do meio é independente da direção em estudo. É também importante lembrar-se que no caso de materiais elásticos lineares e isotrópicos os eixos principais de tensão (ou dos incrementos de tensão) coincidem com os eixos principais de deformação (ou dos incrementos de deformação).

A lei constitutiva para materiais linearmente elásticos e isotrópicos é conhecida como a lei de Hooke generalizada, expressa como

$$\mathbf{s}_{ij} = l \mathbf{e}_{kk} \mathbf{d}_{ij} + 2m \mathbf{e}_{ij} \quad (2.1)$$

onde l e m são as constantes elásticas de Lamé. No contexto de modelos constitutivos, a relação (2.1) é mais vantajosamente expressa em termos do módulo de deformação volumétrica K ($l = K - \frac{2}{3}G$) e do módulo de cisalhamento G ($m = G$),

$$\mathbf{s}_{ij} = K \mathbf{e}_{kk} \mathbf{d}_{ij} + 2G \left(\mathbf{e}_{ij} - \frac{\mathbf{e}_{kk}}{3} \mathbf{d}_{ij} \right) = KI_1 \mathbf{d}_{ij} + 2GE_{ij} \quad (2.2a)$$

onde $I_1 = \mathbf{e}_{kk}$ é o primeiro invariante do tensor das deformações e $E_{ij} = \mathbf{e}_{ij} - \frac{1}{3} \mathbf{e}_{kk} \mathbf{d}_{ij}$ o tensor das deformações de desvio.

Considerando que o tensor das tensões $\mathbf{s}_{ij} = \frac{1}{3} J_1 \mathbf{d}_{ij} + S_{ij}$ pode também ser decomposto nas respectivas parcelas esférica $\frac{1}{3} J_1 \mathbf{d}_{ij}$, onde $J_1 = \mathbf{s}_{kk}$ é o primeiro invariante do tensor das tensões, e de desvio S_{ij} , conclui-se imediatamente da equação (2.2a) que

$$p \mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{3} J_1 \mathbf{d}_{ij} = KI_1 \mathbf{d}_{ij} \quad \text{e} \quad S_{ij} = 2GE_{ij} \quad (2.2b)$$

ou seja, a componente esférica do tensor das tensões causa apenas variação de volume ($\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_{kk} = I_1$) enquanto que o tensor das tensões de desvio provoca apenas distorção. Esta independência entre a resposta esférica e de desvio, ilustrada na figura 2.1, não decorre apenas da linearidade da relação constitutiva, mas deve-se também à hipótese de isotropia; um comportamento acoplado entre as respostas hidrostática e de desvio pode ser observado em materiais linearmente elásticos mas transversalmente anisotrópicos (Gerrard & Harrison, 1970).

Na forma matricial, a relação constitutiva (2.1) pode ser escrita em termos das constantes elásticas K e G como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11} \\ \mathbf{s}_{22} \\ \mathbf{s}_{33} \\ \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

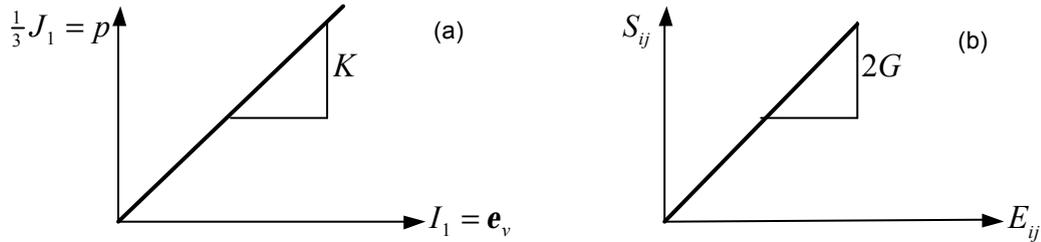


Figura 2.1: Modelo elástico linear e isotrópico: a) módulo de deformação volumétrica K ; b) módulo de cisalhamento G .

Considerando a relação deformação-tensão expressa nas equações (2.2b), e utilizando a relação de K e G com o módulo de Young E e coeficiente de Poisson \mathbf{n} [$K = \frac{1}{3}E/(1-2\mathbf{n})$ e $G = \frac{1}{2}E/(1+\mathbf{n})$], a lei de Hooke generalizada, na forma inversa relacionando deformações com tensões, é expressa de acordo com (2.4):

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{e}_{kk}}{3} \mathbf{d}_{ij} + E_{ij} = \frac{J_1}{9K} \mathbf{d}_{ij} + \frac{S_{ij}}{2G} \quad \text{ou} \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1+\mathbf{n}}{E} \mathbf{s}_{ij} - \frac{\mathbf{n}}{E} \mathbf{s}_{kk} \mathbf{d}_{ij} \quad (2.4b)$$

Alternativamente, sob forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\mathbf{n}/E & -\mathbf{n}/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{n}/E & 1/E & -\mathbf{n}/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{n}/E & -\mathbf{n}/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11} \\ \mathbf{s}_{22} \\ \mathbf{s}_{33} \\ \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.4c)$$

Estado plano de deformação. Idealização muito utilizada para análise de obras geotécnicas (barragens, túneis, fundações corridas, etc.) envolvendo as seguintes hipóteses sobre geometria, carregamento e parâmetros constitutivos:

- Uma das dimensões do corpo é muito maior do que as outras duas, permitindo que uma seção transversal qualquer possa ser considerada como “seção de simetria” e, conseqüentemente, apresentando deformações nulas em seu plano;

- Os parâmetros elásticos não variam ao longo da maior dimensão do corpo;
- O carregamento não varia ao longo da maior dimensão do corpo e tampouco apresenta componente nessa direção.

Admitindo-se a maior dimensão do corpo ao longo do eixo x_3 , tem-se da primeira das hipóteses acima que $\mathbf{e}_{33} = \mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_{32} = 0$, resultando na seguinte forma especial da equação (2.4b),

$$\mathbf{e}_{ab} = \frac{1+n}{E} \mathbf{s}_{ab} - \frac{n(1+n)}{E} \mathbf{s}_{gg} \mathbf{d}_{ab} \quad \text{com } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g} = 1,2 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{s}_{33} = n(\mathbf{s}_{11} + \mathbf{s}_{22}) \quad (2.6)$$

2.1.2 Modelo Elástico Não-Linear

Uma relação tensão-deformação elástica mais geral, não restrita à hipótese de linearidade, pode ser escrita como $\mathbf{s}_{ij} = f_{ij}(\mathbf{e}_{kl})$, onde f_{ij} são funções de resposta do material. O modelo de Cauchy (Eringen, 1962) propõe a seguinte relação funcional para esta equação no caso de um material isotrópico:

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{f}_0 \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{f}_1 \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{f}_2 \mathbf{e}_{im} \mathbf{e}_{mj} \quad (2.7)$$

onde \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 são funções polinomiais de resposta que dependem dos três invariantes do tensor das deformações $I_1 = \mathbf{e}_{kk}$, $I_2 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ji}$, $I_3 = \frac{1}{3} \mathbf{e}_{ik} \mathbf{e}_{kj} \mathbf{e}_{ji}$.

No modelo elástico de Cauchy de primeira ordem as funções de resposta reduzem-se a $\mathbf{f}_2 = 0$, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{a}_2$ (constante) e $\mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 I_1$, uma função linear de I_1 . Adotando um estado de tensões inicial nulo para um estado inicial de deformações nulo, obtém-se

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{a}_1 I_1 \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}_{ij} \quad (2.8)$$

onde os parâmetros do modelo $\mathbf{a}_1 = K - \frac{2}{3}G = \mathbf{l}$ e $\mathbf{a}_2 = 2G = 2\mathbf{m}$ são os mesmos da lei de Hooke generalizada (equação 2.1).

No modelo elástico de Cauchy de segunda ordem, as funções de resposta do material são expressas na forma geral de polinômios $\mathbf{f}_0 = a_1 I_1 + a_2 I_1^2 + a_3 I_2$, $\mathbf{f}_1 = a_4 + a_5 I_1$ e $\mathbf{f}_2 = a_6$, sendo a_1, \dots, a_6 os seis parâmetros do modelo que devem ser determinados mediante ensaios de laboratório sob trajetórias de tensão adequadas. Observando-se que os parâmetros a_1 e a_4

correspondem aos parâmetros $\mathbf{a}_1 = K - \frac{2}{3}G$ e $\mathbf{a}_2 = 2G$ do modelo de primeira ordem, respectivamente, a equação constitutiva resultante pode ser escrita como

$$\mathbf{s}_{ij} = \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) I_1 + a_2 I_1^2 + a_3 I_2 \right] \mathbf{d}_{ij} + (2G + a_5 I_1) \mathbf{e}_{ij} + a_6 \mathbf{e}_{im} \mathbf{e}_{mj} \quad (2.9)$$

De maneira similar, podem ser obtidas as formulações de terceira ou mais alta ordem do modelo elástico de Cauchy, variando-se, em cada caso, a expressão geral dos polinômios de resposta \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 .

O modelo não-linear de Cauchy pode modelar a resposta acoplada de solos, podendo simular a variação de volume do material sob condições de cisalhamento (dilatância). Adicionalmente, as equações não-lineares sob forma incremental podem introduzir uma anisotropia induzida pelo estado de tensões, desde que o estado inicial de tensões não seja hidrostático (Desai e Siriwardane, 1984).

2.1.3 Modelo Hiperelástico

Hiperelasticidade pressupõe que o comportamento de um material conservativo pode ser definido através da função densidade de energia de deformação $U_0 = U_0(\mathbf{e}_{ij})$ - ver figura 2.2 - ou, para materiais isotrópicos $U_0 = U_0(I_1, I_2, I_3)$, tal que

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial U_0}{\partial I_1} \mathbf{d}_{ij} + \frac{\partial U_0}{\partial I_2} \mathbf{e}_{ij} + \frac{\partial U_0}{\partial I_3} \mathbf{e}_{im} \mathbf{e}_{mj} \quad (2.10)$$

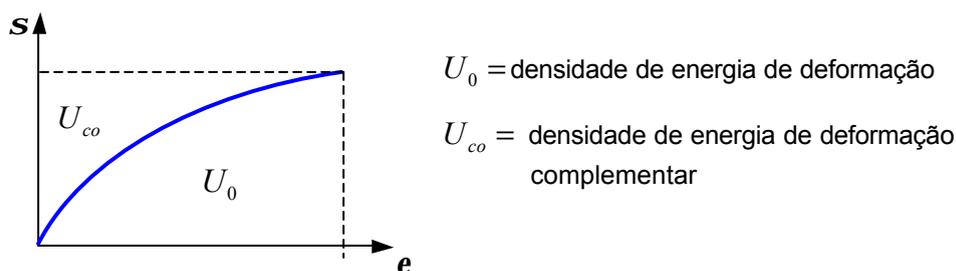


Figura 2.2: Curva tensão-deformação de material conservativo e representações de U_0 e U_{co}

A relação constitutiva (2.10) é conhecida como modelo hiperelástico de Green e tem a mesma forma matemática geral do modelo de Cauchy (equação 2.7). No caso do modelo não-linear de Cauchy, as funções polinomiais de resposta \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 são independentes entre si, enquanto que na formulação não-linear de hiperelasticidade, por serem obtidas através de derivação da função densidade de

energia de deformação U_0 , resultam interdependentes. O modelo de Green pode ser portanto considerado um caso particular do modelo de Cauchy.

O modelo hiperelástico de Green de primeira ordem recupera a lei de Hooke generalizada. A sua versão de segunda ordem pode ser obtida considerando-se que a forma geral da função densidade de energia de deformação possa ser expressa pelo polinômio¹ $U_0 = c_1 I_1^2 + c_2 I_1^3 + c_3 I_1 I_2 + c_4 I_2 + c_5 I_3$, sendo c_1, \dots, c_5 os cinco parâmetros do modelo a serem determinados mediante ensaios de laboratório sob trajetórias de tensão adequadas. Os parâmetros c_1 e c_4 novamente resultam nos parâmetros elásticos do modelo de primeira ordem, permitindo que a equação do modelo não-linear seja escrita como

$$\mathbf{s}_{ij} = \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) I_1 + 3c_2 I_1^2 + c_3 I_2 \right] \mathbf{d}_{ij} + (2G + c_3 I_1) \mathbf{e}_{ij} + c_5 \mathbf{e}_{im} \mathbf{e}_{mj} \quad (2.11)$$

De modo similar, podem ser obtidas as formulações de terceira ou mais alta ordem do modelo hiperelástico de Green, variando-se, em cada caso, a expressão geral da função polinomial que descreve a densidade de energia de deformação $U_0 = U_0(I_1, I_2, I_3)$.

O modelo não-linear de Green pode igualmente modelar a resposta acoplada de solos e simular a ocorrência de anisotropia induzida pelo estado de tensões.

Conclusões. Com relação à formulação não-linear de Cauchy, o modelo de Green apresenta as seguintes características:

- a) A matriz constitutiva dos modelos não lineares de Green resultam simétricas, em virtude da equação 2.10, enquanto que em geral são não-simétricas nos modelos não-lineares de Cauchy;
- b) O número de parâmetros a serem determinados em ensaios de laboratório é menor para os modelos de Green do que para os correspondentes modelos de Cauchy (5 parâmetros para o modelo de Green e 6 para o modelo de Cauchy de segunda ordem; 9 parâmetros para o modelo de Green e 12 para o modelo de Cauchy de terceira ordem, por exemplo).

¹ Também admitindo-se que a um estado de deformações inicial nulo corresponde um estado inicial de tensões nulo.

2.2 Modelos Hipoelásticos

Os modelos elásticos e hiperelásticos descritos no item anterior são conservativos ao longo de toda a sua história de tensões, composta de ciclos de carregamento e/ou de descarregamento. O comportamento elástico de um material pode também ser considerado sob ponto de vista incremental, como nos modelos constitutivos denominados de hipoelásticos.

O conceito de hipoelasticidade é representado através de uma lei constitutiva incremental generalizada que simula o comportamento mecânico do meio através de incrementos com características elásticas (Truesdell, 1955). Os incrementos de tensão são expressos em função de incrementos de deformação e do estado atual de tensão, permitindo assim uma descrição mais adequada de solos cujo comportamento depende fundamentalmente da trajetória de tensões.

Para um material isotrópico, a eq. (2.12) representa a relação constitutiva hipoelástica, escrita em sua forma geral por Truesdell (op. cit.) como:

$$\begin{aligned}
 ds_{ij} = & \mathbf{a}_0 de_{kk} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{a}_1 de_{ij} + \mathbf{a}_2 de_{kk} \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{a}_3 \mathbf{s}_{mn} de_{nm} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{a}_4 (\mathbf{s}_{im} de_{mj} + de_{im} \mathbf{s}_{mj}) + \\
 & \mathbf{a}_5 de_{kk} \mathbf{s}_{im} \mathbf{s}_{mj} + \mathbf{a}_6 \mathbf{s}_{mn} de_{nm} \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{a}_7 \mathbf{s}_{mn} \mathbf{s}_{nk} de_{km} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{a}_8 (\mathbf{s}_{im} \mathbf{s}_{mk} de_{kj} + de_{im} \mathbf{s}_{mk} \mathbf{s}_{kj}) + \\
 & \mathbf{a}_9 \mathbf{s}_{mn} de_{nm} \mathbf{s}_{ik} \mathbf{s}_{kj} + \mathbf{a}_{10} \mathbf{s}_{mn} \mathbf{s}_{nk} de_{km} \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{a}_{11} \mathbf{s}_{mn} \mathbf{s}_{nk} de_{km} \mathbf{s}_{ir} \mathbf{s}_{rj}
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{11}$ são funções polinomiais de resposta do material em termos dos invariantes de tensão. Os coeficientes destes polinômios devem ser determinados com base nos resultados experimentais obtidos em uma adequada campanha de ensaios de laboratório.

No modelo hipoelástico de *grau zero* assume-se que o incremento de tensão é função apenas do incremento de deformação, reduzindo-se portanto à conhecida lei de Hooke generalizada na forma incremental, $ds_{ij} = \mathbf{I} de_{kk} \mathbf{d}_{ij} + 2m \mathbf{I} de_{ij}$.

No modelo hipoelástico de *primeiro grau* admite-se que o incremento de tensão depende do incremento de deformação e é uma função linear do tensor de tensões atual \mathbf{s}_{ij} , permitindo incorporar a influência da trajetória de tensões no comportamento do material. As funções polinomiais de resposta da eq. (2.12) são genericamente expressas por $\mathbf{a}_0 = a_0 + a_2 \mathbf{s}_{nn}$, $\mathbf{a}_1 = a_1 + a_3 \mathbf{s}_{nn}$, $\mathbf{a}_2 = a_4$, $\mathbf{a}_3 = a_6$, $\mathbf{a}_4 = a_5$ e $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_6 = \dots = \mathbf{a}_{11} = 0$, sendo a_0, a_1, \dots, a_6 sete parâmetros do material (constantes) que são geralmente determinados através de um processo de

minimização pelo método dos mínimos quadrados considerando resultados experimentais sob diversas trajetórias de tensão (ver Desai e Siriwardane, 1984).

Para um material hipoeelástico de primeiro grau a equação constitutiva (2.12) especializa-se em

$$d\mathbf{s}_{ij} = a_0 d\mathbf{e}_{kk} \mathbf{d}_{ij} + a_1 d\mathbf{e}_{ij} + a_2 \mathbf{s}_{nn} d\mathbf{e}_{kk} \mathbf{d}_{ij} + a_3 \mathbf{s}_{nn} d\mathbf{e}_{ij} + a_4 d\mathbf{e}_{kk} \mathbf{s}_{ij} + a_5 (\mathbf{s}_{im} d\mathbf{e}_{mj} + \mathbf{e}_{im} \mathbf{s}_{mj}) + a_6 \mathbf{s}_{mn} \mathbf{e}_{nm} \mathbf{d}_{ij} \quad (2.13)$$

que resulta em uma matriz constitutiva não-simétrica que também considera o acoplamento entre as respostas de deformação volumétrica e de cisalhamento.

2.3

Modelos Quase-Lineares

Vários modelos quase-lineares (ou hipoeelásticos de grau zero) foram propostos na literatura da engenharia geotécnica, numa tentativa de simular incrementalmente a relação tensão x deformação observada em ensaios de solos. Esta classe particular de modelos hipoeelásticos também é conhecida como modelos de módulos variáveis, pois em cada incremento linear os parâmetros elásticos K e G (ou E e \mathbf{n}) da lei de Hooke generalizada sob forma incremental são revisados em função do estado de tensões. Estes modelos assumem que o solo não experimenta anisotropia induzida pelo estado de tensão ou de deformação, bastando apenas duas constantes elásticas para caracterizar o seu comportamento sob ponto de vista incremental.

Características do comportamento mecânico de solos. Os diferentes modelos propostos tentam modelar com certas limitações algumas das seguintes características das curvas tensão x deformação:

- a) O módulo de deformação volumétrica K aumenta quando se produz uma compressão volumétrica do solo pela aplicação de tensão esférica $p\mathbf{d}_{ij}$;
- b) O módulo de cisalhamento G cresce com a compressão volumétrica, mas reduz-se significativamente com a distorção;
- c) A relação constitutiva deve satisfazer algum critério de ruptura (Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, etc.) implicando que o módulo de cisalhamento G tende a um valor nulo ou bastante pequeno;
- d) Em descarregamento, ocorre um abrupto incremento na rigidez do solo;

- e) Solos argilosos pré-adensados experimentam abrupta redução na sua rigidez depois de atingida a pressão de pré-adensamento;
- f) Argilas pré-adensadas e areias densas manifestam comportamento dilatante (expansão volumétrica sob cisalhamento) enquanto que argilas normalmente adensadas e areias fofas tendem a contrair de volume, dependendo dos valores da tensão de confinamento.

A seguir, alguns modelos quase-lineares são brevemente descritos (modelo bi-linear, modelo K-G, modelo C-K₀ e modelo hiperbólico) comentando-se as habilidades de cada um em simular adequadamente as características gerais do comportamento mecânico de solos acima mencionadas.

2.3.1 Modelo Bi-Linear

O modelo bi-linear assume comportamento linearmente elástico (módulos K e G) e adota um critério de escoamento em termos de tensões, a partir do qual o solo passa a apresentar escoamento plástico (simulação de material elasto-perfeitamente plástico). Caso o estado de tensões atinja o valor de escoamento, o módulo G é reduzido a um valor muito baixo enquanto que o módulo de deformação volumétrica K é mantido constante (figura 2.3).

O modelo bi-linear não simula a característica de módulo K crescente com a tensão de confinamento (a), não reproduz a variação da rigidez transversal G sob cisalhamento (b), mas satisfaz plenamente as condições de rigidez cisalhante tendendo a zero no escoamento (c) e de descarregamento usando os mesmos parâmetros elásticos (d), o que faz destes últimos aspectos os pontos fortes do modelo.

O modelo necessita do conhecimento de 4 constantes do material: duas para a simulação do comportamento elástico (K , G),

$$p\mathbf{d}_{ij} = K\mathbf{e}_v\mathbf{d}_{ij} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}J_1\mathbf{d}_{ij} = KI_1\mathbf{d}_{ij} \quad (2.14)$$

$$S_{ij} = 2GE_{ij} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{2}{3}J_{2D}} = t_{oct} = 2G\mathbf{g}_{oct} \quad (2.15)$$

e outras duas para determinação da tensão de escoamento, podendo-se utilizar o critério de ruptura de Mohr-Coulomb (c , f), conforme equação 2.16 em termos das tensões principais, ou o critério de ruptura de Drucker-Prager (a , k), de acordo com a equação 2.17:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_3) \sin \mathbf{f} + c \cos \mathbf{f} \quad (2.16)$$

$$\sqrt{J_{2D}} = \mathbf{a}J_1 + k \quad (2.17)$$

É claro que o modelo bi-linear pode ser adicionalmente modificado, considerando-se que o valor de G após o escoamento tende a um valor baixo, porém não nulo, para simular condições de endurecimento do material.

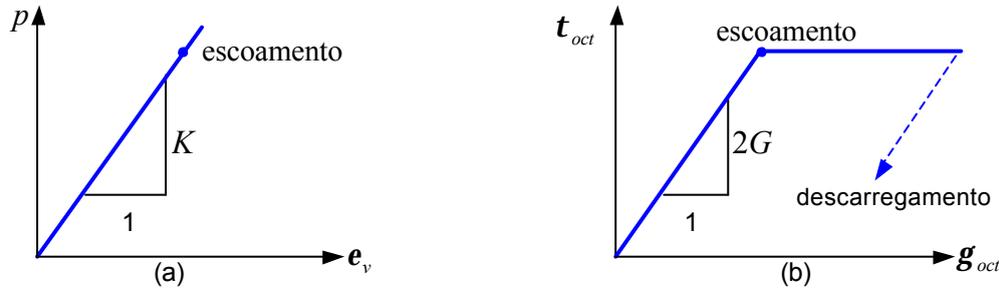


Figura 2.3: Modelo bi-linear: a) Comportamento do módulo de deformação volumétrica; b) Comportamento do módulo cisalhante.

Conclusões. De modo geral, a aplicação deste modelo pode ser considerada nos casos em que a investigação tem como objetivo principal localizar zonas onde ocorrem plastificações do solo e uma estimativa de extensão das mesmas, em uma análise preliminar antecedendo a utilização de um modelo elasto-plástico de formulação mais rigorosa. O número de parâmetros necessários para descrição do modelo é reduzido (4 para simulação de comportamento perfeitamente plástico), facilmente determinados em ensaios de laboratório convencionais da mecânica dos solos.

2.3.2 Modelo K-G

Este modelo descrito por Nelson e Baron (1971) e Naylor *et al* (1981) está baseado na equação constitutiva de Hooke sob forma incremental,

$$d\mathbf{s}_{ij}^m = K_t^m d\mathbf{e}_{kk}^m \mathbf{d}_{ij} + 2G_t^m \left(d\mathbf{e}_{ij}^m - \frac{1}{3} d\mathbf{e}_{nn}^m \mathbf{d}_{ij} \right) \quad (2.18)$$

onde m indica o número do incremento e t que são adotados os valores tangentes dos parâmetros elásticos (K_t e G_t), calculados no início de cada incremento. Estes parâmetros são função do estado de tensões $K_t = K_t(\sqrt{J_{2D}}, J_1)$ e $G_t = G_t(\sqrt{J_{2D}}, J_1)$, e procuram reproduzir as características dos solos previamente citadas no início deste item (ver figura 2.4).

De forma geral, os materiais apresentam um comportamento acoplado na sua resposta, isto é, tensões cisalhantes podem produzir deformações volumétricas e um estado hidrostático de tensão pode gerar deformações cisalhantes. Neste caso admite-se que $\sqrt{J_{2D}} = F_1(\sqrt{I_{2D}}, I_1)$ e $J_1/3 = F_2(\sqrt{I_{2D}}, I_1)$, enquanto que para a condição desacoplada simplificam-se estas relações para $\sqrt{J_{2D}} = F_1(\sqrt{I_{2D}})$ e $J_1/3 = F_2(I_1)$.

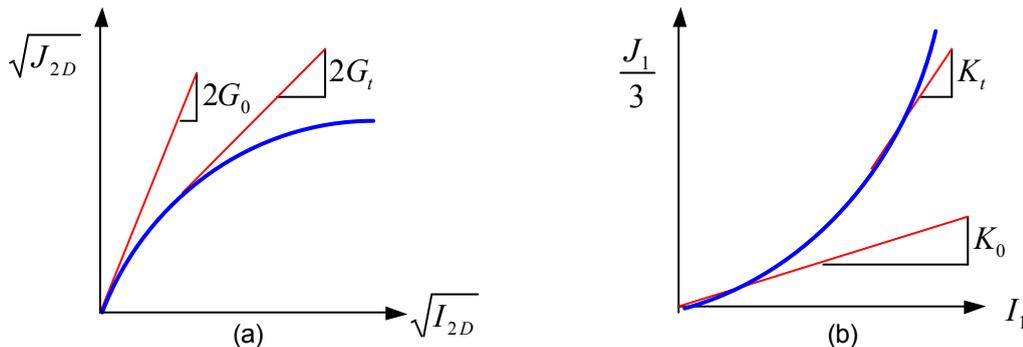


Figura 2.4: Modelo K-G: a) Módulo cisalhante tangente G_t ; b) Módulo de deformação volumétrica tangente K_t .

As equações (2.19), utilizadas por Nelson e Baron (1971) e Naylor et al. (1981), são exemplos de funções F_1 e F_2 que definem G_t e K_t explicitamente em termos de tensões,

$$K_t = K_1 + \frac{1}{3} \mathbf{a}_k J_1 \quad (2.19a)$$

$$G_t = G_1 + \frac{1}{3} \mathbf{a}_G J_1 + \mathbf{b}_G \sqrt{J_{2D}} \quad (2.19b)$$

As 3 constantes da equação (2.19b) – G_1 , \mathbf{a}_G e \mathbf{b}_G – são determinadas considerando-se o critério de Drucker-Prager (eq. 2.17) e a condição de que na ruptura G_t tende a zero, obtendo-se assim as seguintes relações entre os dois parâmetros do critério de ruptura (\mathbf{a} , k) e os três parâmetros do modelo ($G_1, \mathbf{a}_G, \mathbf{b}_G$),

$$k = G_1 / \mathbf{b}_G \text{ e } \mathbf{a} = \mathbf{a}_G / (3\mathbf{b}_G) \text{ com } \mathbf{b}_G < 0 \quad (2.20)$$

A determinação é normalmente feita por tentativa e erro, selecionando-se um valor de \mathbf{b}_G , calculando-se G_1 e \mathbf{a}_G através das equações (2.20) e comparando-se então as previsões da equação (2.19b) com os resultados disponíveis dos ensaios de laboratório.

Alternativamente, o modelo pode também ser associado ao critério de ruptura de Mohr-Coulomb (equação 2.16) expressando-se a variação de G_t através de:

$$G_t = G_1 + \mathbf{a}_G \frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_3}{2} + \mathbf{b}_G \frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3}{2} \quad (2.21)$$

obtendo-se as seguintes relações entre os parâmetros do modelo e os parâmetros de resistência ao cisalhamento c , f

$$c \cos f = G_1 / \mathbf{b}_G \text{ e } \sin f = \mathbf{a}_G / \mathbf{b}_G \text{ com } \mathbf{b}_G < 0 \quad (2.22)$$

No descarregamento, é comum assumir-se $\mathbf{b}_G = 0$, produzindo-se um incremento abrupto no valor de G_t nas equações (2.19b) ou (2.21).

Conclusões. Se comparado com o modelo bi-linear, o modelo $K-G$ representa melhor o comportamento real do solo, especialmente com respeito às condições a) e b) anteriormente listadas, além de apresentar vantagens na aplicação computacional por tratar-se de uma formulação contínua, sem a descontinuidade do modelo bi-linear na tensão de escoamento.

2.3.3 Modelo Hiperbólico

Analisando-se as curvas tensão-deformação de solos submetidos a ensaios de compressão triaxial convencional (CTC), Kondner (1963) observou que estas poderiam ser representadas por uma função hiperbólica com assíntota horizontal, definida pelos parâmetros a e b [eq. (2.23)]. O parâmetro a está relacionado com a inclinação inicial da curva (módulo inicial $E_i = 1/a$) enquanto b com a tensão assintótica ou última ($\bar{s}_u = 1/b$), conforme ilustra a figura 2.5,

$$\bar{s} = \frac{\bar{e}}{a + b\bar{e}} \quad (2.23)$$

onde \bar{s} e \bar{e} são medidas de tensão e de deformação, respectivamente, normalmente a tensão de desvio $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3$ e a deformação axial \mathbf{e}_1 .

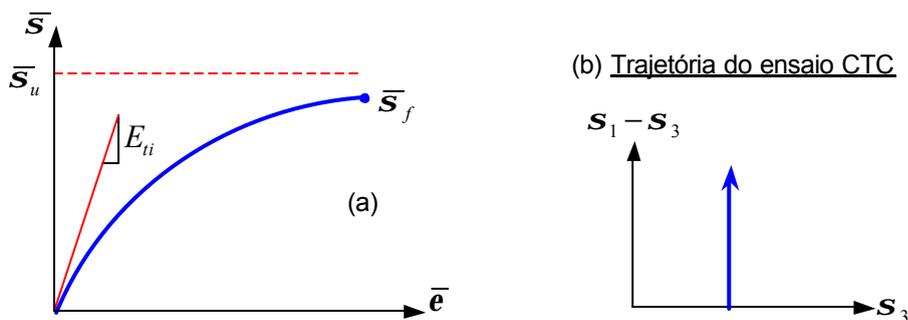


Figura 2.5: Modelo hiperbólico: a) Curva tensão-deformação hiperbólica; b) Trajetória de tensão no ensaio de compressão triaxial convencional CTC.

Considerando \mathbf{s}_3 constante, obtém-se para expressão do módulo tangente:

$$E_t = \frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\bar{\mathbf{e}}} = \frac{a}{(a + b\bar{\mathbf{e}})^2} \quad (2.24a)$$

que, combinada com a eq. (2.23), para eliminar \mathbf{e}_1 da eq. (2.24a), produz então:

$$E_t = \frac{1}{a}(1 - b\bar{\mathbf{s}})^2 \quad \text{ou} \quad E_t = \frac{1}{a}[1 - b(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)]^2 \quad (2.24b)$$

Versões do modelo. Na literatura, a partir do trabalho de Kondner (1963), quatro versões do modelo hiperbólico foram apresentadas por Duncan & Chang (1970), Kulhawy & Duncan (1972), Herrmann (1978) e Duncan (1980).

Versão de Duncan & Chang (1970). A razão de ruptura $R_f = (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f / (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_u < 1$ e a relação proposta por Janbu (1963) para a variação do módulo inicial com a tensão de confinamento \mathbf{s}_3 são incorporadas na formulação básica,

$$E_t = 1/a = K_h p_a (s_3/p_a)^n \quad (2.25)$$

onde p_a é a pressão atmosférica, utilizada para normalização das unidades, e K_h e n parâmetros do material.

A tensão de desvio na ruptura pode ser relacionada com a tensão de confinamento através do critério de ruptura de Mohr-Coulomb,

$$(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f = \frac{2(c \cos f + \mathbf{s}_3 \operatorname{sen} f)}{1 - \operatorname{sen} f} \quad (2.26a)$$

resultando em

$$b = \frac{1}{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_u} = \frac{R_f}{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f} = \frac{R_f(1 - \operatorname{sen} f)}{2(c \cos f + \mathbf{s}_3 \operatorname{sen} f)} \quad (2.26b)$$

Substituindo-se as equações (2.25) e (2.26b) na equação (2.24b) tem-se finalmente a expressão proposta por Duncan & Chang (1970) para o módulo tangente

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1 - \operatorname{sen} f)(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)}{2c \cos f + 2\mathbf{s}_3 \operatorname{sen} f} \right]^2 K_h p_a \left(\frac{\mathbf{s}_3}{p_a} \right)^n \quad (2.27)$$

que necessita de cinco parâmetros K_h , n , c , f e R_f para sua avaliação. A estimativa de R_f é feita com base na média dos resultados experimentais disponíveis para as diversas tensões de confinamento s_3 e os valores de n e K_h correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular e ao valor de E_i / p_a para $s_3 / p_a = 1$ na regressão linear definida pela expressão abaixo:

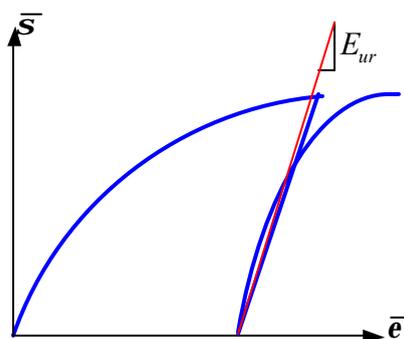
$$\log(E_i / p_a) = \log K_h + n \log(s_3 / p_a) \quad (2.28)$$

Valores dos módulos iniciais e das tensões de desvio últimas podem ser adequadamente obtidos plotando-se os resultados de ensaios CTC no plano $e_1 / (s_1 - s_3)$ versus e_1 , onde a equação da hipérbole (2.23) se reduz a de uma linha reta com intercepto linear $a = 1/E_i$ e coeficiente angular $b = 1/(s_1 - s_3)_u$ (ver ítem 6.3.1.).

Com base em ensaios em areia, foi proposta a seguinte relação para estimativa do módulo de descarregamento-recarregamento E_{ur} , conforme figura 2.6:

$$E_{ur} = K_{ur} p_a (s_3 / p_a)^n \quad (2.29)$$

sendo em geral n o mesmo valor determinado pela equação (2.28) e K_{ur} maior do que K_h . Nesta versão do modelo hiperbólico o coeficiente de Poisson ν é assumido constante.



E_{ur} : valor médio entre as inclinações da curva de descarregamento elástico e recarregamento.

Figura 2.6: Ciclo de descarregamento e recarregamento com módulo de elasticidade E_{ur} .

Versão de Kulhawy & Duncan (1972). Para levar em consideração a diminuição no valor do ângulo de atrito interno com a tensão confinante em solos granulares, Kulhawy *et al* (1969) propuseram uma relação linear (equação 2.30) para descrever a variação de f com base em dois parâmetros adicionais do modelo $f_0, \Delta f$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 - \Delta \mathbf{f} \log(\mathbf{s}_3 / p_a) \quad (2.30)$$

O valor do coeficiente de Poisson, admitido constante na proposta de Duncan & Chang (1970), foi subsequentemente modificado por Kulhawy e Duncan (1972) que consideraram a seguinte relação entre as deformações axial \mathbf{e}_1 e a radial \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_3}{f + d\mathbf{e}_3} \quad (2.31)$$

onde f representa o valor inicial do coeficiente de Poisson \mathbf{n}_t e d sua taxa de variação com o estado de deformação.

Observando experimentalmente que \mathbf{n}_t geralmente decresce com o aumento do confinamento, Kulhawy & Duncan (op. cit.) propuseram a seguinte expressão:

$$\mathbf{n}_t = G - F \log(\mathbf{s}_3 / p_a) = f \quad (2.32)$$

onde G aqui representa o valor do coeficiente de Poisson para $\mathbf{s}_3 = p_a$ e F o decréscimo de \mathbf{n}_t para um aumento de 10 vezes no valor de \mathbf{s}_3 .

Substituindo-se a equação (2.32) na equação (2.31) e considerando-se a definição básica do coeficiente de Poisson tangente como $\mathbf{n}_t = \mathbf{e}_3 / \mathbf{e}_1$, vem

$$\mathbf{n}_t = \frac{f}{(1 - d\mathbf{e}_1)^2} = \frac{G - F \log(\mathbf{s}_3 / p_a)}{(1 - d\mathbf{e}_1)^2} \quad (2.33)$$

Da equação básica do modelo hiperbólico (2.23) segue-se que a deformação principal maior (axial) é dada por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{a(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)}{1 - b(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)} \quad (2.34)$$

e usando-se as equações (2.25) e (2.26b) resulta finalmente que

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)}{\left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \mathbf{f})(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)}{2(c \cos \mathbf{f} + \mathbf{s}_3 \sin \mathbf{f})} \right] K_h p_a \left(\frac{\mathbf{s}_3}{p_a} \right)^n} \quad (2.35)$$

A equação (2.33) com \mathbf{e}_1 determinada por (2.35) é então utilizada para cálculo do coeficiente de Poisson tangente.

Versão de Herrmann (1978). Uma modificação adicional na formulação hiperbólica foi sugerida por Herrmann (op. cit) depois de constatar em várias

análises numéricas pelo método dos elementos finitos a ocorrência de regiões onde a tensão de confinamento era pequena para produzir baixos valores do módulo de elasticidade tangente, mas não suficientemente pequena para produzir um alto valor do coeficiente de Poisson, uma combinação de parâmetros que resultava num decréscimo violento do volume do material nestas regiões (efetivamente desaparecendo), em contradição ao princípio de conservação de massa. Para prevenção deste problema, Herrmann (1978) propôs uma nova relação para cálculo do coeficiente de Poisson assumindo um valor constante para o módulo de deformação volumétrica K :

$$n_t = 0,5(1 - E_t / (3K)) \quad \text{com } 0 \leq n_t \leq 0,49 \quad (2.36)$$

Versão de Duncan (1980). Uma quarta modificação do formulação do modelo hiperbólico foi proposta por Duncan (1980) para previsão do valor do módulo de variação volumétrica do solo com o nível da tensão de confinamento σ_3 , de acordo com

$$K = K_b p_a (s_3 / p_a)^m \quad (2.37)$$

onde K_b e m são definidos como parâmetros do material. A equação acima é utilizada para cálculo do coeficiente de Poisson tangente através da equação (2.36).

Crítérios de descarregamento. O modelo hiperbólico necessita ainda da adoção de algum critério para distinguir situações de carregamento, descarregamento e recarregamento. Alguns dos critérios publicados na literatura são os seguintes:

- a) Associação com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb (equação 2.16),

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_3) \text{sen } \mathbf{f} - c \cos \mathbf{f} \quad (2.38)$$

admitindo-se que ocorre carregamento para estados de tensão com $dF > 0$, descarregamento para $dF < 0$ e condição de carregamento neutro para $dF = 0$.

- b) Definição do nível de tensão SL (Duncan et al., 1980) por:

$$SL = (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3) / (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f \quad (2.39)$$

O solo se encontra em carregamento quando o valor atual de SL for maior do que o valor máximo anterior (SL_{max}); caso contrário, o material se encontra em descarregamento / recarregamento (figura 2.7a). Duncan *et al* (1984) observaram que durante análises numéricas podem ocorrer instabilidades computacionais devido ao fato de pequenas flutuações de tensão, em elementos finitos submetidos a níveis de tensão aproximadamente constantes, poderem resultar em bruscas variações do módulo entre os valores E_t e E_{ur} . Para prevenir esta instabilidade numérica propuseram uma transição gradual entre os valores de E_t e E_{ur} (figura 2.7b), de acordo com o valor do nível de tensão máximo:

- b.1) se $SL \geq SL_{max}$ trata-se de estado de carregamento primário, devendo-se utilizar E_t na formulação numérica;
- b.2) se $SL \leq \frac{3}{4}SL_{max}$ então trata-se de estado de descarregamento/re-carregamento, devendo-se utilizar E_{ur} na formulação numérica;
- b.3) se $\frac{3}{4}SL_{max} < SL < SL_{max}$ utilizar um módulo de elasticidade tangente obtido através de interpolação linear entre os valores de E_t e E_{ur} .

Saboya Jr. & Byrne (1993) sugeriram uma modificação adicional, argumentando que esta transição gradual de módulos somente é efetiva no caso de recarregamento, podendo superestimar o comportamento mecânico do material em situações de descarregamento. Propuseram considerar uma variação brusca de módulo entre E_t e E_{ur} no caso de descarregamento e uma variação gradual de valores, conforme Duncan *et al* (1984), para a situação de recarregamento (figura 2.7c).

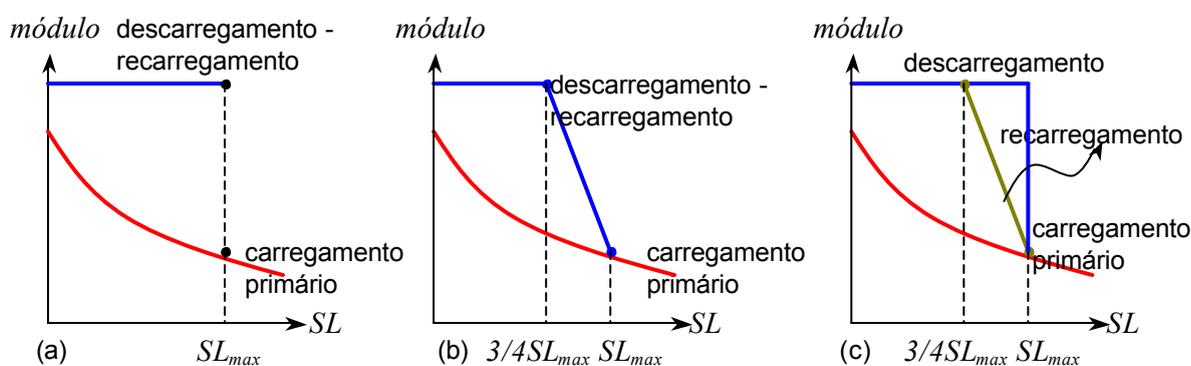


Figura 2.7: Critério de descarregamento do nível de tensões SL : a) Duncan *et al* (1980); b) Duncan *et al* (1984); c) Saboya Jr. & Byrne (1993).

c) Definição do estado de tensão SS (Duncan et al. 1984) como

$$SS = SL \sqrt[4]{\frac{\mathbf{s}_3}{p_a}} \quad \text{com} \quad SL_{\max} = \frac{SS_{\max}}{\sqrt[4]{\mathbf{s}_3 / p_a}} \quad (2.40)$$

O solo se encontra em carregamento primário quando o valor atual de SS for maior do que o valor máximo anterior SS_{\max} . Caso contrário, o material se encontra no estado de descarregamento / recarregamento.

d) Definição da variação da densidade de energia complementar como $dU_{co} = e_{ij} ds_{ij}$, onde d indica variação e a densidade de energia complementar calculada como $U_{co} = \int_0^{\mathbf{s}_{ij}} e_{ij} d\mathbf{s}_{ij}$.

Pode-se definir o estado de carregamento em função da densidade de energia complementar e de sua variação de acordo com:

d.1) Se $U_{co} \geq U_{co}^{\max}$ e $dU_{co} \geq 0$ então trata-se de estado de carregamento primário, devendo-se utilizar E_t na formulação numérica;

d.2) Se $U_{co} < U_{co}^{\max}$ e $dU_{co} < 0$ então trata-se de estado de descarregamento, devendo-se utilizar E_{ur} na formulação numérica;

d.3) Se $U_{co} < U_{co}^{\max}$ e $dU_{co} > 0$ então trata-se de estado de recarregamento, devendo-se também utilizar E_{ur} na formulação numérica.

Conclusões. O modelo quase-linear baseado na relação tensão x deformação hiperbólica tem várias vantagens e algumas limitações. Como vantagens, citam-se a simplicidade matemática de sua formulação, o sucesso de sua aplicação em muitos problemas práticos da engenharia geotécnica, o fato dos parâmetros do modelo terem significado físico e possíveis de serem determinados em laboratório por meio de ensaios triaxiais convencionais, a grande disponibilidade na literatura de valores dos parâmetros para diversos tipos de solo, sob condição drenada e não-drenada, que auxilia na interpretação da coerência dos valores determinados em laboratório no caso de solos similares, modelos quase-lineares são relativamente fáceis de serem incorporados em programas computacionais, etc.

Contudo, por ser baseado em uma idealização do comportamento real dos solos, apresenta significativas restrições, tais como:

- a) não considera a influência da tensão principal intermediária σ_2 ;
- b) baseado na lei de Hooke generalizada sob forma incremental, o modelo é adequado apenas para análise de tensões em maciços de solo estáveis. Em maciços cujo comportamento é globalmente controlado por regiões que já apresentaram ruptura, os resultados previstos podem não ser realistas;
- c) as relações hiperbólicas não conseguem simular o fenômeno de amolecimento do solo na fase pós-pico, nem situações de variação de volume causadas por variações das tensões cisalhantes (dilatância). O uso do modelo é portanto limitado para previsão de deformações em solos dilatantes como areias densas sob baixas tensões de confinamento;
- d) considerações especiais devem ser tomadas de maneira a modelar o descarregamento, necessitando-se a adoção de algum critério para distinguir as situações de carregamento e de descarregamento / recarregamento do material.

2.3.4 Modelo EC-K₀

Este modelo proposto por Veiga Pinto (1983) baseia-se inteiramente em resultados de ensaios de compressão confinada (oedométricos) e pretende modelar o comportamento de solos no estado unidimensional de deformação. A partir da análise das curvas de laboratório é assumida uma relação \mathbf{s}_1 - \mathbf{e}_1 (figura 2.8a), da qual se obtém uma expressão para o módulo confinado E_c e uma relação linear \mathbf{s}_1 - K_0 , envolvendo quatro constantes do material,

$$\mathbf{s}_1 = A_e p_a \mathbf{e}_1^{B_e} \quad (2.43)$$

onde A_e e B_e são constantes adimensionais do material.

Derivando-se a equação (2.43) pode-se calcular o módulo confinado tangente E_c^t (figura 2.8b) por:

$$E_c^t = d\mathbf{s}_1 / d\mathbf{e}_1 = A_e B_e p_a \mathbf{e}_1^{B_e-1} \quad (2.44)$$

Considerando-se novamente a equação (2.43) para eliminar a dependência da deformação axial ε_1 na expressão do módulo confinado tangente, vem:

$$E_c^t = \frac{d\mathbf{s}_1}{d\mathbf{e}_1} = A_e B_e p_a \left(\frac{\mathbf{s}_1}{A_e p_a} \right)^{(B_e-1)/B_e} \quad (2.45)$$

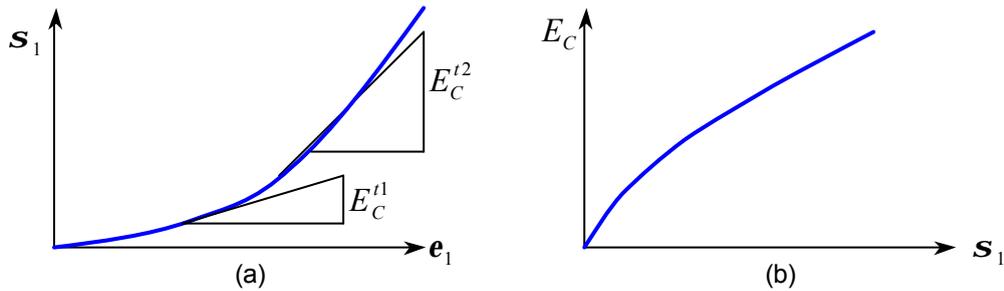


Figura 2.8: Modelo EC-K₀: a) Relação tensão-deformação; b) Variação do módulo confinado E_c .

Por sua vez, o coeficiente de empuxo lateral K_0 é assumido variar linearmente com a tensão axial σ_1 , de acordo com

$$K_0 = s_3 / s_1 = A_0 + B_0 (s_1 / p_a) \quad (2.46)$$

onde A_0 e B_0 são constantes adimensionais.

O valor tangencial de K_0 , obtido pela derivação da equação (2.46), resulta em

$$K_0^t = (ds_3 / ds_1) = A_0 + 2B_0 (s_1 / p_a) \quad (2.47)$$

A partir das estimativas de E_c^t e K_0^t podem ser calculados também os valores tangentes dos módulos de elasticidade E_t e do coeficiente de Poisson n_t através das conhecidas relações da teoria da elasticidade linear para o estado 1D de deformação,

$$n_t = \frac{K_0^t}{1 + K_0^t} \quad \text{e} \quad E_t = \frac{(1 + n_t)(1 - 2n_t)}{1 - n_t} E_c^t \quad (2.48)$$

Caso seja necessário representar o descarregamento, uma nova relação deverá ser assumida, envolvendo parâmetros adicionais para o comportamento do solo nesta condição.

Conclusões. É claro que o modelo poderá apresentar uma reprodução aceitável do comportamento do solo somente para trajetórias de tensão próximas para a qual foi formulado (estado unidimensional de deformação), não sendo aconselhável sua utilização para descrever o comportamento de solos sob trajetórias que dela se afastam. Para estes casos, o emprego da formulação mais geral do modelo hiperbólico parece ser a alternativa mais indicada dentre os modelos quase-lineares apresentados nesta seção.