



José Dinarte Vieira Goulart

**Dinâmica de uma coluna de perfuração
utilizando a teoria de Cosserat**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Rubens Sampaio

Rio de Janeiro
Setembro de 2019



José Dinarte Vieira Goulart

**Dinâmica de uma coluna de perfuração
utilizando a teoria de Cosserat**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Rubens Sampaio

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Roberta de Queiroz Lima

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Thiago Gamboa Ritto

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Rio de Janeiro, 16 de Setembro de 2019

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Dinarte Vieira Goulart

Ficha Catalográfica

Goulart, José Dinarte Vieira

Dinâmica de uma coluna de perfuração utilizando a teoria de Cosserat / José Dinarte Vieira Goulart; orientador: Rubens Sampaio. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2019.

v., 139 f: il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia

1. Coluna de perfuração;. 2. stick-slip;. 3. método de Perturbação Regular;. 4. método de Elementos Finitos;. 5. estrutura de Cosserat;. 6. dinâmica não-linear. I. Sampaio, Rubens. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha mãe, ser humano incrível, apaixonada pelos seus três filhos e a pessoa mais genuinamente altruísta que acredito conhecer. Agradeço a todos meus demais familiares, dentre eles, pai, irmãos, namorada e amigos, pois eles dão sentido à minha vida, sou sinceramente grato por ter vocês.

Agradeço ao meu orientador não só por todo conhecimento acadêmico transmitido mas, principalmente, pela confiança depositada em mim. Devo dizer que, graças a ele, a lição mais valiosa que levo desta experiência é uma lição de vida, que é a de acreditar mais em mim e, por isto, sou muito grato.

Quero agradecer também ao professor Ivan Menezes por ser a pessoa solícita e carismática que é, livre de qualquer vaidade, criando uma relação para além da verticalidade professor-aluno padronizada na metodologia de ensino. Sinceramente acredito que este seja o caminho para a evolução do ensino.

Meus agradecimentos também ao professor Helon Vicente Hultmann Ayala que, além de ter participado da minha proposta de dissertação, foi membro suplente e auxiliou para que determinadas correções fossem feitas para apresentação deste trabalho.

Por fim, agradeço as instituições financeiras que, com toda certeza, foram as responsáveis por tornar este conteúdo possível e que ainda resistem a redução de verbas. Neste período sensível em que vivemos me sinto no dever de deixar registrado a minha opinião de que qualquer país que queira se desenvolver deve, antes de tudo, conhecer e dominar intelectualmente os meios de produção. Qualquer país comprometido com o seu desenvolvimento deve, necessariamente, estar profundamente engajado com a educação pois, do contrário, seguiremos dependentes do preço dos *commodities* no mercado internacional para ter uma economia que nos permita se desenvolver.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Goulart, José Dianarte Vieira; Sampaio, Rubens. **Dinâmica de uma coluna de perfuração utilizando a teoria de Cosserat**. Rio de Janeiro, 2019. 139p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uma fase crítica do processo de obtenção do petróleo é a perfuração do solo para o acesso ao reservatório. Um dos problemas, em particular, é compreender o comportamento dinâmico da coluna de perfuração durante o processo de perfuração diante de diversos fatores como a interação broca-rocha, choques da coluna de perfuração contra a parede do poço, estratégias de controle da velocidade angular de operação e outros fatores. Uma etapa fundamental para lidar com este problema é a representação do sistema dinâmico para caracterizar a coluna de perfuração, isto é, o modelo matemático que representará a resposta dinâmica da estrutura diante dos carregamentos. Neste contexto, este trabalho abordará o problema da dinâmica de uma coluna de perfuração através de um modelo matemático baseado na teoria de Cosserat, que resultará em um sistema de seis equações diferenciais parciais que descrevem a resposta dinâmica de uma estrutura unidimensional, inserida no espaço euclidiano tridimensional, em termos das variáveis de deslocamento linear da curva e angular das seções. O modelo é capaz de descrever uma dinâmica não-linear, incluindo flexão, torsão, extensão e cisalhamento. Inicialmente, o sistema de EDPs é resolvido na forma quase estática, satisfazendo as condições de contorno, utilizando o método de Perturbação Regular. As soluções aproximadas são utilizadas como funções base para implementação no método de Elementos Finitos. Estas funções base são conhecidas como elemento de Cosserat Modificado (*Modified Cosserat Rod Element* - MCRE). Verifica-se a limitação destas funções base para problemas que não envolvam grandes deslocamentos, não sendo adequadas para o problema proposto. Diante deste fato, o sistema de EDPs é escrito na forma fraca e resolvido por um *software* comercial de análise de Elementos Finitos considerando as condições de contorno, o modelo de interação broca-rocha, a estratégia de controle da velocidade angular e eventuais contatos da coluna contra a parede do poço. O modelo proposto produziu resultados que estão de acordo com a literatura e se mostrou capaz de lidar com grandes deslocamentos.

Palavras-chave

Coluna de perfuração; stick-slip; método de Perturbação Regular; método de Elementos Finitos; estrutura de Cosserat; dinâmica não-linear

Abstract

Goulart, José Dinarte Vieira; Sampaio, Rubens (Advisor). **Drill string dynamics using the Cosserat theory**. Rio de Janeiro, 2019. 139p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A critical step in the oil exploration process is drilling the soil for access to the petroleum reservoir. One of the problems is understanding the dynamic behavior of the drill string during the drilling process in the face of various factors such as drill bit-rock interaction, drill string shocks against the well wall, angular velocity control strategies and other factors. A key part of dealing with this problem is the representation of the dynamic system to characterize the drill string, e.g., the mathematical model that will represent the dynamical response of the structure when facing different types of loads. In this context, this work will address the problem of the dynamics of a drill string using a mathematical model based on Cosserat theory that will result in a system of six partial differential equations that describe the dynamic response of a one-dimensional structure, inserted in three-dimensional Euclidean space, in terms of the linear displacement variables of the curve and angular displacement of the cross sections. The model is able to describe nonlinear dynamics, including flexure, torsion, extension and shear. Initially, the system of partial differential equations is solved in a *quasi*-static sense, satisfying the boundary conditions, using the Regular Perturbation method. The approximate solutions are used as shape functions for implementation in the Finite Element method. These shape functions are known as Modified Cosserat Rod Element (MCRE). It is verified that these shape functions are restricted to problems that do not involve large displacements and for this reason they are not suitable for the proposed problem. Given this fact, the system of partial differential equations is written in a weak form and solved by a commercial software based on Finite Element analysis, considering the boundary conditions, the drill bit-rock interaction model, the angular velocity control strategy and for any string contacts against the well wall. The proposed model produced results that are in agreement with the literature and is capable of dealing with large displacements.

Keywords

Drill string; stick-slip; regular Perturbation method; finite Element method; Cosserat rod; nonlinear dynamics

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Objetivo	20
1.2	Organização	21
2	Revisão bibliográfica	22
2.1	Sonda de perfuração	23
2.2	Fenômenos de vibração	26
2.2.1	Vibrações transversais	27
2.2.2	Vibrações torcionais	28
2.2.3	Vibrações longitudinais	29
3	Formulação de Cosserat: equacionamento	31
3.1	Introdução à teoria de Cosserat	31
3.1.1	Base de Frenet	31
3.1.1.1	Base de Frenet e parâmetros geométricos	32
3.1.2	Relações Frenet-Serret	32
3.1.3	Curva material	33
3.1.4	Curva de Cosserat	33
3.2	Equações da cinemática	34
3.2.1	Deformações	36
3.2.1.1	Deformação linear	36
3.2.1.2	Deformação angular	37
3.2.2	Velocidades	37
3.3	Equações da dinâmica	38
3.3.1	Relações constitutivas	39
3.3.2	Matriz de rotação	41
3.3.2.1	Vetor rotacional	41
3.3.2.2	Ângulos de Euler	43
3.3.3	Abordagem Lagrangeana	45
4	Análise do MCRE	47
4.1	Resultados Numéricos	54
5	Simulações da Dinâmica	60
5.1	Benchmarks	64
5.1.1	Viga engastada-livre: teste estático para grandes deslocamentos	64
5.1.2	Viga engastada-livre sob carregamentos harmônicos	67
5.1.3	Pêndulo flexível	69
5.2	Caracterização do problema proposto	71
5.2.1	Modelos de interação broca-rocha	72
5.2.1.1	Modelo 1	73
5.2.1.2	Modelo 2	74
5.2.2	Modelo de contato da coluna com a parede do poço	76
5.2.3	Equação do controlador	77

5.3	Resultados	78
6	Conclusão e trabalhos sugeridos	102
A	Programa em álgebra simbólica para o exemplo do método de Perturbação Regular	104
B	Programa em álgebra simbólica para o equacionamento e o método de Perturbação Regular	106
C	Programa em álgebra simbólica para geração dos termos lineares e não lineares da formulação de Cosserat	115
D	Programa em álgebra simbólica para computação das frequências naturais	122
E	Programa para solução de uma viga de Cosserat estática em elementos finitos	123
E.1	Sub-Rotinas	129
F	Programa para solução de uma viga de Cosserat estática em elementos finitos	133
F.1	Sub-Rotinas	134
	Referências bibliográficas	135

Lista de figuras

Figura 2.1	Esquema de uma sonda de perfuração rotativa. Adaptado de [3].	24
Figura 2.2	Representação da distribuição de tensão axial típica em uma coluna de perfuração. Adaptado de [3].	25
Figura 2.3	Ilustração representando os diferentes modos de vibração em uma coluna de perfuração. Adaptado de [10].	26
Figura 2.4	Imagens ilustrando duas situações de desmoronamento de um poço. Retirado de [22].	27
Figura 3.1	Representação de uma base de Frenet em dois pontos distintos em uma curva espacial. Adaptado de [12].	31
Figura 3.2	Configuração de referência (\mathcal{C}_0) e em um dado instante (\mathcal{C}) da curva material (\mathcal{L}). Retirado de [12].	33
Figura 3.3	A curva $\mathbf{r}(\xi, t)$ e os campos vetoriais $\mathbf{d}_\alpha(\xi, t)$ em um dado ponto ao longo do comprimento. À esquerda, a configuração de referência da curva de Cosserat. Retirado de [12].	34
Figura 3.4	Modelo da curva de Cosserat utilizando a parametrização de comprimento de arco para descrever a curva material. Adaptado de [13].	34
Figura 3.5	Parametrização do problema proposto. Retirado de [2].	36
Figura 3.6	Diagrama de corpo livre de uma estrutura esbelta.	39
Figura 3.7	Esquema das rotações propostas para parametrização da matriz de rotação.	43
Figura 3.8	Sequência de rotações utilizadas para parametrização da matriz de rotação, utilizando Ângulos de Euler.	44
Figura 4.1	Comparação entre as soluções exata, por uma expansão em série e pelo método de perturbação com diferente números de termos da equação 4-6.	50
Figura 4.2	Comparação entre a soluções numérica e analítica de x_3 quando propondo a expansão em série até o termo de sexta ordem (a) e de sétima ordem (b).	52
	4.2(a)	52
	4.2(b)	52
Figura 4.5	Deslocamento $x(s)$ (a) e vista superior da curva material (b) utilizando a solução até a terceira ordem em ε , para $l_e = 10$ [m].	54
Figura 4.6	Comparação da convergência do sexto modo de vibração entre funções base lineares e MCRE.	55
Figura 4.7	Comparação da deflexão de uma viga engastada-livre, utilizando 5 elementos e submetida ao peso próprio, entre funções base lineares, MCRE e funções base baseadas nas equações estáticas de Timoshenko.	56

Figura 4.8	Comparação da deflexão de uma viga engastada-livre, utilizando 300 elementos e submetida ao peso próprio, entre funções base lineares, MCRE e funções base baseadas nas equações estáticas de Timoshenko	57
Figura 4.3	Soluções de x (a), y (b), z (c), θ_x (d), θ_y (e), θ_z (f), considerando diferentes números de termos no método de Perturbação Regular.	58
4.3(a)		58
4.3(b)		58
4.3(c)		58
4.3(d)		58
4.3(e)		58
4.3(f)		58
Figura 4.4	Vista isométrica (a) e superior (b) da configuração da curva material para diferentes ordens em ε .	59
4.4(a)		59
4.4(b)		59
Figura 5.1	Ilustração de uma viga engastada-livre submetida a um carregamento axial e um momento na extremidade livre. Retirada de [39].	65
Figura 5.2	Deflexão de x em função de η para comparação com solução analítica.	65
Figura 5.3	Deslocamento angular θ_y para diferentes valores de η .	66
Figura 5.4	Deflexão de x para $\eta = 1$.	66
Figura 5.5	Respostas dinâmicas de uma viga engastada-livre a partir de excitações harmônicas. Simulações realizadas em COM-SOL.	67
Figura 5.6	Evolução dos deslocamentos de $x(s, t)$, para uma viga engastada-livre, ao longo do tempo e submetida a excitações harmônicas.	68
4.5(a)		68
4.5(b)		68
Figura 5.7	Evolução dos deslocamentos de $y(s, t)$, para uma viga engastada-livre, ao longo do tempo e submetida a excitações harmônicas.	68
Figura 5.8	Velocidade longitudinal, na base material, avaliada em $s = L$.	70
Figura 5.9	Configuração do pêndulo flexível para diferentes instantes de tempo.	70
Figura 5.10	Ilustração do problema de uma coluna de perfuração esquematizada com as forças, torques, restrições e condições nas quais a simulação é realizada.	72
Figura 5.11	Função de regularização para diferentes valores do parâmetro de regularização e .	74
Figura 5.12	Modelo que descreve a torque gerado pela interação broca-rocha para diferentes valores de peso sobre a broca.	75
Figura 5.13	Ilustração da condição de contato no sistema.	76

Figura 5.14 Configuração inicial do sistema (a) e de simulação do problema (b).	79
5.14(a)	79
5.14(b)	79
Figura 5.15 Simulação para determinar a configuração de equilíbrio do sistema.	80
Figura 5.16 Comparação do torque, no topo e na broca, entre a simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha (a) e o trabalho de referência (b) (Retirado de [28]).	81
Figura 5.17 Comparação da velocidade angular, no topo e na broca, entre a simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha (a) e o trabalho de referência (b) (Retirado de [28]).	81
Figura 5.18 Comparação da taxa de penetração entre a simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha (a) e o trabalho de referência (b) (Retirado de [28]).	82
Figura 5.19 Variação do deslocamento axial, avaliado em $s = L$, ao longo do tempo, da simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha.	83
5.16(a)	83
5.16(b)	83
5.17(a)	83
5.17(b)	83
5.18(a)	83
5.18(b)	83
Figura 5.20 Variação do torque (a) e da velocidade angular (b), no topo e na broca, utilizando o modelo 2 de interação broca-rocha.	83
Figura 5.21 Variação da taxa de penetração (ROP) (a) e do deslocamento axial $z(L, t)$ (b), ao longo do tempo, utilizando o modelo 2 de interação broca-rocha.	84
5.20(a)	84
5.20(b)	84
5.21(a)	84
5.21(b)	84
Figura 5.22 Comparação do torque, na broca (a) e no topo (b), entre os modelos 1 e 2 de interação broca-rocha.	84
5.22(a)	84
5.22(b)	84
Figura 5.23 Comparação da velocidade angular, na broca (a) e no topo (b), utilizando os modelos 1 e 2 de interação broca-rocha.	84
Figura 5.24 Comparação da taxa de penetração (ROP) (a) e do deslocamento axial $z(L, t)$ (b) entre os modelos 1 e 2 de interação broca-rocha.	85
Figura 5.25 Representação da coluna de perfuração, inserida em um poço, implementada em COMSOL.	87
Figura 5.26 Velocidade angular, no topo e na broca, sem modelo de controle (a) e plano de fases (b), impondo uma velocidade angular constante no topo de 50 RPM.	88

Figura 5.27 Deslocamento angular, no topo e na broca da coluna de perfuração, impondo uma velocidade angular constante de 50 RPM no topo.	88
Figura 5.28 Variação do torque, no topo e na broca de uma coluna de perfuração, impondo uma velocidade angular constante no topo.	89
Figura 5.29 Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	90
Figura 5.30 Deslocamento angular, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	90
Figura 5.31 Variação do torque, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	91
Figura 5.32 Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	91
Figura 5.33 Deslocamento angular, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	92
Figura 5.34 Variação do torque, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	92
Figura 5.35 Velocidade (a) e deslocamento angular (b), no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad] para 200 segundos de simulação.	93
Figura 5.36 Comparação do torque na broca (a) e do deslocamento angular (b), no topo e na broca, entre modelos de interação broca-rocha.	94
Figura 5.37 Comparação do torque na broca (a) e do deslocamento angular (b), no topo e na broca, entre modelos de interação broca-rocha para WOB = 100 [kN].	94
Figura 5.38 Comparação da velocidade angular, no topo e na broca, entre os modelos de interação broca-rocha, para WOB = 100 [kN].	95
Figura 5.39 Visão lateral (a) e superior (b), da condição inicial do sistema, na configuração pré-tensionada.	96
Figura 5.40 Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) partindo de uma configuração inicial pré-tensionada e sem modelo de controle no topo.	97
Figura 5.41 Deslocamento angular, no topo e na broca, sem modelo de controle no topo, partindo de uma configuração inicial pré-tensionada.	97
Figura 5.42 Evolução do torque na broca, sem modelo de controle no topo, partindo de uma configuração inicial pré-tensionada.	98
Figura 5.43 Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad], partindo de uma configuração inicial pré-tensionada.	98

Figura 5.44 Deslocamento angular, no topo e na broca, partindo de uma configuração inicial pré-tensionada e para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].	99
Figura 5.45 Deslocamento transversal em uma simulação sem controle no topo, avaliado em $x(s = 800, t)$.	99
Figura 5.46 Comparação do deslocamento transversal em uma simulação com controle e outra sem, avaliado em $x(s = 800, t)$.	100
Figura 5.47 Visão lateral (a) e superior (b), da configuração do sistema proposto, no tempo $t = 64.5$ [s].	101

Lista de tabelas

Tabela 4.1	Valores dos parâmetros utilizados em uma solução, na análise do MCRE.	53
Tabela 5.1	Valores do modelo de interação broca-rocha, descrito pela equação 5-27, que se equivalem ao modelo descrito pela equação 5-26.	75
Tabela 5.2	Valores dos parâmetros utilizados nas simulações que reproduzem o trabalho de Tucker e Wang.	80
Tabela 5.3	Valores dos parâmetros utilizados nas simulações com o modelo de coluna proposto.	86

Lista de Abreviaturas

MCRE – *Modified Cosserat Rod Element*

EDOs – Equações diferenciais ordinárias

EDPs – Equações diferenciais parciais

BHA – *Bottom hole assembly*

TOB – *Torque on bit*

ROP – *Rate of penetration*

DOC – *Depth of cut*

Lista dos principais símbolos

Matrizes

\mathbf{R} – Matriz de rotação

\mathbf{S} – Matriz de giro

\mathbf{M} – Matriz de massa

\mathbf{K} – Matriz de rigidez

Tensores

\mathbf{K} – Tensor de rigidez linear

\mathbf{J} – Tensor de rigidez angular

\mathbf{I} – Tensor de inércia

Vetores

- \mathbf{r} – Vetor posição
- \mathbf{v} – Vetor tangente
- \mathbf{v}_0 – Vetor tangente de referência
- \mathbf{u} – Vetor de deformação angular
- \mathbf{u}_0 – Vetor de deformação angular de referência
- $\dot{\mathbf{r}}$ – Vetor de velocidade linear
- \mathbf{w} – Vetor de velocidade angular
- \mathbf{e}_i – Vetores unitários da base inercial
- \mathbf{d}_i – Vetores diretores da base material
- \mathbf{n} – Vetor de força de contato
- \mathbf{m} – Vetor de momento de contato
- \mathbf{h} – Vetor da quantidade de movimento angular por unidade de comprimento
- \mathbf{f} – Vetor de força externa por unidade de comprimento
- \mathbf{l} – Vetor de torque externo por unidade de comprimento

Escalares

- t – Variável independente do tempo
- s – Variável independente do espaço
- x – Deslocamento na direção x
- y – Deslocamento na direção y
- z – Deslocamento na direção z
- θ_x – Deslocamento angular em torno do eixo x
- θ_y – Deslocamento angular em torno do eixo y
- θ_z – Deslocamento angular em torno do eixo z
- r – Raio
- r – Deslocamento na direção radial
- L – Comprimento
- l_e – Comprimento de um elemento
- A – Área da seção transversal
- ρ – Densidade do material
- ν – Coeficiente de Poisson
- E – Módulo de elasticidade
- G – Módulo de cisalhamento
- γ_{ii} – Momento de inércia da seção transversal

Escalares - continuação

Z – Função regularização

g – Aceleração da gravidade

c_p – Parâmetro de ganho proporcional

c_i – Parâmetro de ganho integral

n_i – Componentes da força de contato

m_i – Componentes do momento de contato

h_i – Componentes da quantidade de movimento angular por unidade de comprimento

f_i – Componentes da força externa por unidade de comprimento

l_i – Componentes do torque externo por unidade de comprimento

K_{ii} – Componentes do tensor de rigidez linear

J_{ii} – Componentes do tensor de rigidez angular

ε – Parâmetro de perturbação

ω_n – Frequências naturais

κ – Fator de correção do cisalhamento

\mathcal{L} – Lagrangeano

\mathcal{T} – Energia cinética

\mathcal{U} – Energia potencial

a_1, \dots, a_5 – Parâmetros do 1º modelo de interação broca-rocha

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – Parâmetros do 2º modelo de interação broca-rocha

e – Parâmetro da função regularização

$f_{(.)}$ – Forças

$T_{(.)}$ – Torques

ω_b – Velocidade angular da broca

ω_{target} – Velocidade angular de operação desejada

k_p – Rigidez da parede do poço

δ_p – Penetração da coluna em relação a parede do poço

Índices

bha – Bottom hole assembly

col – Coluna

top – Topo da coluna ($s = 0$)

bit – Broca ($s = L$)

Outras definições

1 – Função que vale 1 caso haja contato e zero caso contrário

\bar{r} – Função do raio da broca

$\text{sign}(a)$ – Função que vale 1 se $a \geq 0$ e vale 0 caso $a < 0$

$\dot{()}$ – Derivada temporal

$()'$ – Derivada espacial

1

Introdução

Estruturas unidimensionais aparecem com frequência como problemas de interesse em diferentes áreas da indústria. Na área da biomedicina, por exemplo, há o interesse em problemas como a simulação da inserção de cateteres [4, 6], suturas [9], dinâmica de determinadas bactérias [8] e filamentos de DNA [7]. Aplicações também na área de computação gráfica na simulação do movimento de cabelo [5] ou estruturas unidimensionais em geral [49]. Outros exemplos clássicos de interesse da indústria são a dinâmica de colunas de perfuração, podendo ser focada em perfurações horizontais [10], verticais [3, 18, 28, 39, 44, 45, 46, 47] e perfurações direcionais [42], cabos de transmissão de rede elétrica e sistemas micro eletromecânicos [2].

Existem diferentes abordagens para lidar com a teoria de estruturas unidimensionais. Podem ser vistas como corpos unidimensionais que podem se mover no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 , como aproximações da teoria de determinados corpos tridimensionais esbeltos ou como uma forma restrita da teoria de corpos tridimensionais [1]. O modelo apresentado neste trabalho utiliza a teoria de uma curva material inserida no espaço euclidiano tridimensional, isto é, a teoria intrínseca unidimensional, conhecida como teoria de Cosserat.

Para resolver estes problemas de corpos unidimensionais, diferentes teorias foram sendo desenvolvidas e aprimoradas, com Bernoulli (1694) tendo dado o primeiro grande passo criando a teoria de vigas. Em seguida Euler (1727) derivou a relação linear clássica entre flexão e variação da curvatura. No ano seguinte a teoria de flexão de Euler-Bernoulli foi obtida por Bernoulli. Kirchhoff (1859), Clebsch (1862), Thomson & Tait (1867) e Love (1893) sucessivamente refinaram a notação de deformação e então uma teoria completa foi estabelecida para estruturas unidimensionais que deformam no espaço. Utilizando caracterização variacional das equações governamentais de equilíbrio, os irmãos Cosserat (1907, 1909) introduziram a teoria de Cosserat, como generalização da teoria de Kirchhoff. Ericksen & Truesdell (1958) reviveram a teoria de Cosserat estendendo-a para teoria com três diretores, dando uma análise precisa e completa das deformações. Finalmente, mais aprimoramentos da teoria de Cosserat foram sendo desenvolvidos relaxando determinadas restrições

em relação aos diretores, desenvolvendo modelos hiperelásticos e para teorias termodinâmicas.

Com a popularização de métodos numéricos para se obter soluções aproximadas e o acesso ao poder computacional, a formulação de problemas utilizando a teoria de Cosserat têm se tornado mais frequente. Trabalhos recentes [11, 13] têm sido desenvolvidos para obter a solução aproximada de equações diferenciais através do método de Elementos Finitos utilizando funções base específicas. Estas funções base fornecem um campo de deslocamento elementar mais representativo pois são obtidas a partir da solução quase estática das equações que estabelecem a dinâmica de uma estrutura unidimensional inserida no espaço euclidiano tridimensional, através da teoria de Cosserat, funções base conhecidas como MCRE. Utilizando estas funções base, as equações da dinâmica são obtidas utilizando o Princípio de Hamilton, permitindo obter os termos que determinam a energia potencial de deformações e a energia cinética do sistema. A rotina para obtenção destes termos, segundo a teoria de Cosserat, encontra-se no Apêndice C. Analisando estas funções base (MCRE) é possível verificar sua limitação para problemas que não envolvem grandes deslocamentos, não sendo apropriada para o problema proposto, deste modo esta estratégia não é utilizada.

Para resolver o sistema de EDPs que descreve a dinâmica de uma estrutura unidimensional inserida no espaço euclidiano tridimensional, segundo a teoria de Cosserat, as equações são escritas na forma fraca e resolvidas por um *software* comercial de análise de Elementos Finitos. Para verificar a *performance* do modelo implementado, alguns *benchmarks* são realizados utilizando exemplos da literatura e os resultados são comparados. Após analisar os resultados dos *benchmarks*, as condições de contorno, a estratégia de controle da velocidade angular adotada, os modelos de interação broca-rocha e o modelo de contato são apresentados para que seja possível simular a dinâmica de uma coluna de perfuração.

1.1

Objetivo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático que descreva uma estrutura unidimensional inserida no espaço euclidiano tridimensional, utilizando a teoria de Cosserat, para simular a dinâmica de uma coluna de perfuração. Este modelo deve ser capaz de descrever todos fenômenos de vibração que podem estar presentes durante uma operação de perfuração.

Para que isto seja possível, o modelo matemático deve ser avaliado em determinados problemas para determinar se está adequado para o problema

proposto. Somente então, deve-se integrar as condições de contorno, estratégias de controle da velocidade angular, modelos de interação broca-rocha e modelo de contato ao modelo matemático para que seja realizada a simulação da dinâmica de uma coluna de perfuração.

1.2

Organização

A presente dissertação está organizada em seis capítulos. O primeiro capítulo consiste desta introdução.

O segundo capítulo tem o objetivo de introduzir as estruturas fundamentais que compõe uma sonda de perfuração, os principais equipamentos utilizados no processo de perfuração do solo e uma descrição dos fenômenos de vibração associados a este tipo de operação.

O terceiro capítulo inicia com uma revisão de alguns conceitos importantes que permitirão definir os parâmetros para a construção do modelo matemático, baseado na teoria de Cosserat. Após a revisão destes conceitos, as equações que definem a cinemática, as relações constitutivas, as parametrizações para a matriz de rotação e o sistema de EDPs, que descrevem a dinâmica de uma estrutura unidimensional inserida no espaço euclidiano tridimensional, segundo a teoria de Cosserat, são apresentadas.

O quarto capítulo dedica-se a apresentar o método utilizado para construção de funções base a partir de uma solução aproximada das equações de Cosserat, na forma quase estática, conhecidas como MCRE. Uma análise à respeito destas funções é feita no sentido de determinar as vantagens e as limitações na sua utilização.

O quinto capítulo inicia com uma demonstração da implementação do sistema de EDPs no ambiente do *software* comercial utilizado para integrar as equações. Em seguida, alguns exemplos da literatura são reproduzidos para testar a *performance* do modelo matemático proposto. Após os *benchmarks*, a caracterização do problema de uma coluna de perfuração é feita através da apresentação das condições iniciais e de contorno, dos modelos de interação broca-rocha, contato e da estratégia de controle da velocidade angular adotada. Por fim, analisa-se a influência de determinados parâmetros sobre os resultados da dinâmica da coluna de perfuração.

No sexto capítulo são feitas as considerações à respeito dos resultados obtidos neste trabalho, incluindo a consistência, *performance* e aplicabilidade do modelo matemático proposto. Por último, algumas sugestões são feitas para trabalhos futuros que permitam modelos cada vez mais eficientes para problemas dinâmicos, utilizando a formulação baseada na teoria de Cosserat.

Uma etapa bastante sensível do processo de obtenção/extração de petróleo é a operação de perfuração do solo para acesso ao poço de petróleo. Os métodos mais utilizados na indústria para o processo de perfuração são o método percussivo e o método rotativo. Este trabalho é dedicado a construir um modelo matemático, através da teoria de Cosserat, para obter a dinâmica de uma coluna de perfuração onde utiliza-se o método rotativo, portanto as estruturas apresentadas são relativas a uma sonda projetada para o método rotativo. Além disto, o processo de perfuração pode ser realizado perfurando-se verticalmente ou de forma direcional, a depender do projeto. Neste trabalho considera-se a perfuração vertical, caracterizada nas equações que estabelecem as relações constitutivas, através da configuração de referência proposta.

Devido aos riscos, altos custos de operação e a grande complexidade da dinâmica do processo de perfuração, compreender os diferentes fenômenos durante o processo de perfuração é fundamental. Naturalmente, o processo de perfuração induz diversos tipos de vibração na coluna e, por este motivo, é fundamental construir um modelo que seja capaz de representar adequadamente estas vibrações para compreender como elas ocorrem e, assim, ter maior controle durante a operação.

Devido a grande importância e a necessidade da humanidade na utilização do petróleo e seus derivados, a indústria sempre investiu muito nos trabalhos de pesquisa deste processo. Os modelos que buscam simular a dinâmica de perfuração evoluíram conforme o poder computacional aumentou, permitindo que a utilização de teorias antes demasiadamente complexas pudessem ser utilizadas, como é o caso da teoria de Cosserat. Inicialmente os modelos mais simples eram baseados na modelagem de um pêndulo torcional [16] que, no caso da coluna de perfuração, é representada como uma mola torcional e o segmento de comandos de perfuração como um corpo rígido. Este modelo é importante pois já permite analisar as vibrações torcionais e como elas se relacionam com os parâmetros de controle como, por exemplo, o torque na broca e a velocidade angular da broca. Mais modelos e variações do pêndulo torcional podem ser encontrados em [18]. Os modelos foram sendo aprimorados para incluir outras fontes de não linearidades tais como o contato da coluna

de perfuração, não linearidades geométricas e outros.

A ideia da utilização da teoria de Cosserat aplicada a problemas de coluna de perfuração surge da compreensão que este é um problema cuja dinâmica é bastante complexa, acoplando diferentes modos de vibração e que demanda modelos capazes de descrever esta dinâmica. Em casos onde a perfuração é direcional este fato é ainda mais agravado, sendo o campo ideal para utilização da teoria de Cosserat. Tucker e Wang [28] foram os primeiros a propor utilizar a teoria de Cosserat no problema de colunas de perfuração, propondo também os modelos necessários para caracterizar a coluna, como o modelo de controle e de interação broca-rocha.

O objetivo deste capítulo é fornecer uma compreensão geral das estruturas e fenômenos envolvidos no processo de perfuração utilizando o método rotativo como é conhecido hoje, apresentando primeiramente as principais estruturas de uma sonda de perfuração e em seguida, discutindo os fenômenos de vibração que ocorrem na coluna de perfuração durante a operação.

2.1

Sonda de perfuração

Para a estudar a dinâmica de uma coluna de perfuração é fundamental conhecer quais são os principais equipamentos que estão relacionados a este processo. A figura 2.1 apresenta um esquema de uma sonda de perfuração rotativa, apresentando os principais equipamentos que a compõe.

Uma breve descrição de alguns dos equipamentos que compõe a sonda de perfuração será apresentado a seguir.

(2) - Catarina e gancho compõe uma parte do sistema no qual a catarina é um conjunto de três a seis polias móveis, montadas em um eixo que se apoia nas extremidades da própria estrutura. O gancho é responsável por fazer a conexão entre o swivel e a catarina, deste modo compõe parte do sistema de movimentação de cargas. Um dos parâmetros de controle utilizados neste tipo de operação é a carga no gancho, permitindo identificar fenômenos de vibração como, por exemplo, o *bit-bouncing*.

(4) - Swivel é o equipamento que separa os elementos rotativos daqueles estacionários na sonda de perfuração e, por isto, exerce a função de uma junta rotativa.

(8) - Kelly, também conhecido como haste quadrada ou haste hexagonal dependendo do perfil utilizado, é o elemento que recebe o torque da mesa rotativa, transmitindo a rotação para toda a coluna e, enfim, para a broca.

(10) - Mesa rotativa é o equipamento que transmite rotação à coluna de perfuração e permite o deslocamento longitudinal do kelly em seu interior.

1. Bloco de coroamento
2. Catarina e gancho
3. Guincho
4. Swivel (Junta rotativa)
5. Mangueira do kelly
6. Tubo
7. Bomba de lama
8. Kelly
9. Acionador rotativo
10. Mesa rotativa
11. Tubos de perfuração
12. Conexão do tubo de perfuração
13. Estabilizadores
14. Comando de perfuração
15. Broca
16. Revestimento
17. Preventor de erupção
18. Torre de perfuração

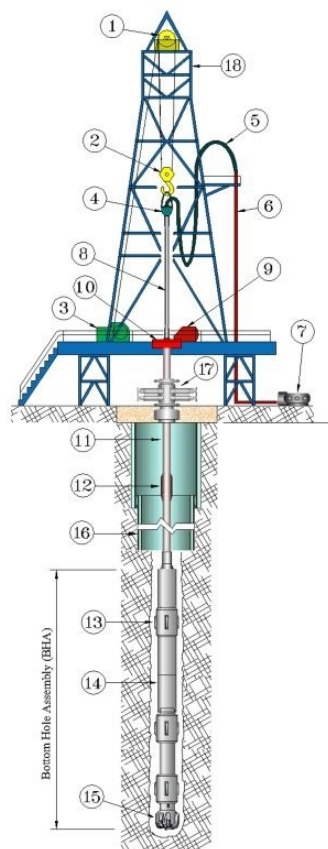


Figura 2.1: Esquema de uma sonda de perfuração rotativa. Adaptado de [3].

(11) - **Tubos de perfuração** é o componente responsável por transferir a rotação da mesa rotativa até a broca, conduzir o fluido de perfuração até a broca, produzir peso sobre a broca para otimizar o processo de perfuração e, em caso de perfuração direcional, fornecer o controle sobre a direção do poço. Além dos tubos de perfuração, tubos de perfuração pesados são utilizados próximo da região do comando de perfuração para permitir uma mudança gradual na rigidez da coluna, diminuindo o risco de falha por fadiga além de adicionar peso sobre a broca, que é um dos parâmetros de controle no processo de perfuração. Uma questão importante à respeito da coluna de perfuração e, portanto, dos tubos de perfuração, é o dimensionamento do comprimento dos comandos. Para evitar a flambagem dos tubos de perfuração em perfurações verticais, o comprimento dos comandos de perfuração são dimensionados de modo que a distribuição de tensão axial seja toda de tração nos tubos de perfuração e majoritariamente compressiva na região do BHA. A figura 2.2 ilustra a distribuição de tensão ao longo de uma coluna de perfuração. É possível notar que o ponto neutro encontra-se dentro da região do BHA e não exatamente na transição entre o segmento de tubos de perfuração e o BHA. Isto ocorre devido ao fator de segurança aplicado no dimensionamento

do comprimento do BHA.

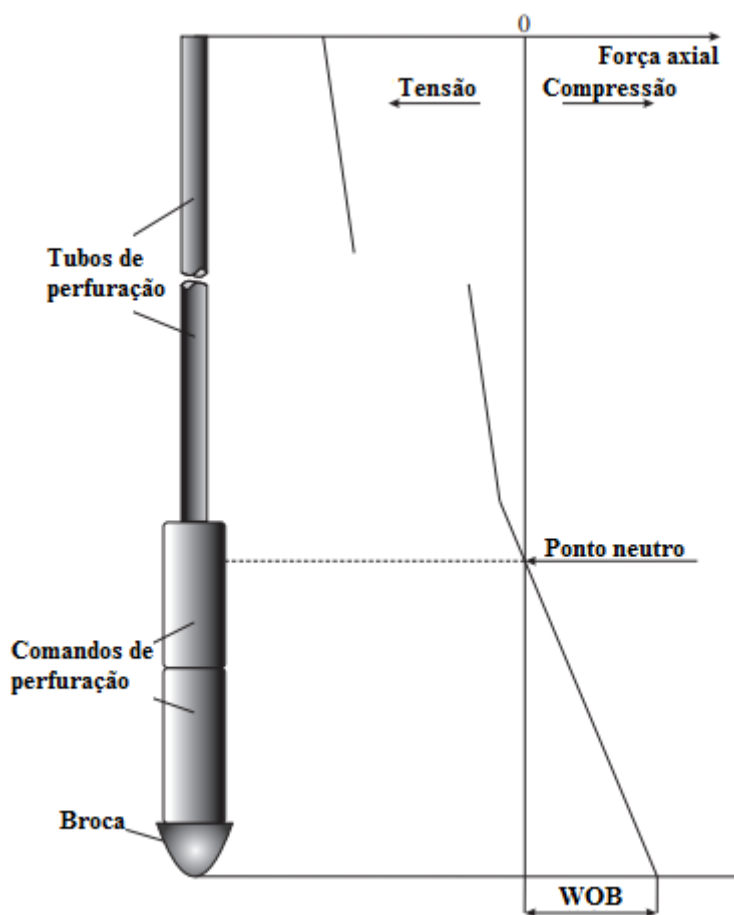


Figura 2.2: Representação da distribuição de tensão axial típica em uma coluna de perfuração. Adaptado de [3].

(13) - **Estabilizadores** são acessórios fundamentais em colunas de perfuração pois são responsáveis por centralizar a coluna de perfuração em relação ao buraco criado pelo processo de perfuração, fornecendo estabilidade para o BHA e reduzindo determinadas vibrações na coluna.

(14) - **Comando de perfuração** têm como principal função fornecer peso sobre a broca. Uma vez que a região do comando de perfuração está sob compressão os tubos devem ter paredes espessas, exercendo grande importância no BHA.

(15) - **Broca** é a ferramenta responsável por realizar as perfurações dos poços de petróleo através da ruptura e a desagregação das rochas. Existem diversos perfis de broca variando de custo, eficiência e tarefa.

Mais detalhes sobre sonda de perfuração e análise de brocas podem ser encontradas em [14, 15, 17]

2.2

Fenômenos de vibração

Como comentado anteriormente, o processo de perfuração induz a diferentes tipos de vibração pois a estrutura está sujeita a diversos tipos de carregamentos. Tipicamente, os tubos de perfuração estão sob tração enquanto todo o segmento do BHA está sob compressão. Além disto, há o torque induzido pelo motor no topo do segmento dos tubos de perfuração, enquanto há a força de reação da broca com o solo mais o torque resultante da interação da broca com as rochas. Outras fontes de carregamentos são os choques dos tubos de perfuração contra a parede do poço e o escoamento do fluido pressurizado, por exemplo. Todas estas fontes de carregamentos induzem diferentes tipos de vibrações no sistema, que podem ser classificadas como vibrações longitudinais, transversais e torcionais, cada uma influenciando de uma maneira na dinâmica. A figura 2.3 ilustra estes fenômenos de vibração.

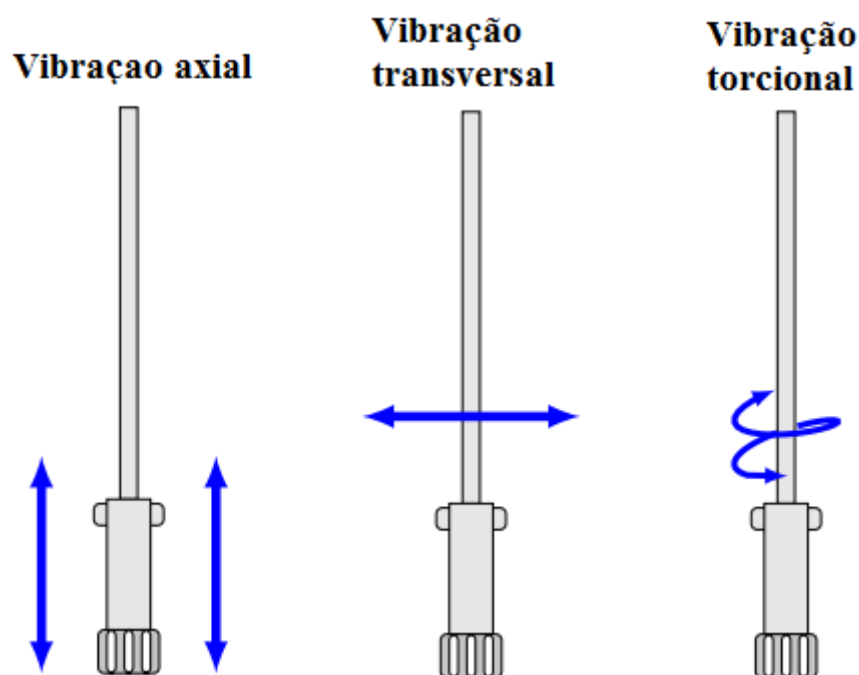


Figura 2.3: Ilustração representando os diferentes modos de vibração em uma coluna de perfuração. Adaptado de [10].

Compreender as diferentes vibrações é fundamental para otimizar o processo de perfuração e prevenir possíveis falhas durante a operação, permitindo também compreender quais parâmetros estão correlacionados aos fenômenos de vibração e então refiná-los para um melhor controle da operação. A seguir, uma explicação mais detalhada é feita para cada tipo de vibração e como cada um induz a alguns fenômenos indesejáveis de vibração.

2.2.1

Vibrações transversais

Apesar de serem as vibrações que mais causam falhas durante a operação [19, 20], as vibrações transversais foram, por muito tempo, desconsideradas pela indústria. O motivo se dá devido ao fato de que estas vibrações ocorrem no segmento de coluna comprimido, isto é, na região do BHA e, portanto, não são transmitidas à superfície, dificultando sua detecção. As causas das vibrações transversais vão desde o tipo de broca utilizado até as interações entre a coluna e o poço. Devido ao BHA operar sob compressão, uma curvatura inicial pode levar a vibrações transversais nesta região. Além disto, oscilações transversais ocorrem por conta de forças centrífugas, induzidas pela rotação imposta, fenômeno classificado como *whirl* [21]. Este fenômeno produz severas consequências para o processo de perfuração, como fadiga das conexões, taxa de penetração da broca (ROP) reduzida e falha completa do equipamento. Outro dano indesejável, causado pelo fenômeno de *whirling*, é o comprometimento da parede do poço que, devido aos repetidos choques dos comandos e estabilizadores contra a parede do poço, começam a alargar e ceder, comprometendo a operação, conforme pode ser observado na figura 2.4.

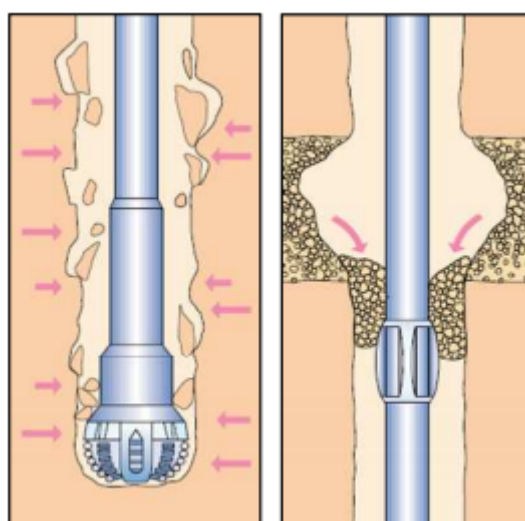


Figura 2.4: Imagens ilustrando duas situações de desmoronamento de um poço. Retirado de [22].

Estudos mais aprofundados à respeito dos modos de vibrações transversais e o fenômeno de *whirling* podem ser encontrados nos trabalhos [23, 24, 25, 26].

2.2.2

Vibrações torcionais

As vibrações torcionais em colunas de perfuração são provocadas pelas oscilações circunferenciais que, por sua vez, são geradas por conta da imposição de uma rotação na coluna de perfuração na superfície da plataforma, através da mesa rotativa ou o top drive, a depender da configuração da sonda. Neste tipo de oscilação, os modos de vibração podem ser transientes ou estacionários a depender das condições nas quais o sistema está submetido. Os modos transientes de oscilação ocorrem quando o sistema está sujeito a variações locais em determinados parâmetros do processo de perfuração como, por exemplo, mudanças nas propriedades geológicas das rochas na qual a broca está perfurando, resultando em flutuações da velocidade angular da broca. A fricção da broca com a parede do poço é outro fator que influencia na flutuação dos parâmetros e quando esta fricção é grande o suficiente para impedir por completo a broca de exercer o movimento rotatório observa-se o modo estacionário de oscilação, fenômeno conhecido como *stick-slip*, estando associado com relação não linear entre o torque induzido pela interação broca-rocha e a velocidade angular da broca.

Durante este período estacionário da broca (*stick*), a frequência de rotação da coluna imposta na superfície da plataforma permanece praticamente a mesma, acarretando na torção da coluna e, portanto, no acúmulo de energia potencial associado a deformação angular da estrutura. No instante em que o torque acumulado na coluna superar o torque gerado pela fricção estática da broca com a parede do poço, a energia potencial acumulada é convertida em energia cinética de rotação, acelerando a broca (*slip*), até então estacionária, para velocidades angulares bem superiores às velocidades normais de operação, chegando a ser até 10 vezes maior que a velocidade regular de operação. Este processo é periódico e pode ser intensificado ou amenizado conforme o valor de determinados parâmetros como, por exemplo, o peso sobre a broca (WOB). Outro fator que influencia na ocorrência de *stick-slip* é a escolha do tipo de broca utilizada no processo de perfuração e seu desgaste. Para maiores detalhes em como o tipo de broca e seu desgaste influenciam na ocorrência de *stick-slip* o leitor é encorajado a consultar [27].

Esta flutuação enorme de torque ao longo da coluna, ocorrendo de forma periódica, acarreta em danos na coluna pelo processo de fadiga, podendo até causar o rompimento de algum segmento de coluna. Outros efeitos indesejáveis que ocorrem por conta do fenômeno de *stick-slip* são a redução do ROP no solo, aumentando o tempo necessário para alcançar o poço e, portanto, aumentando os custos da operação. Além disto, este fenômeno acarreta em um desgaste

premature da broca o que pode levar a necessidade da substituição da mesma, acarretando mais uma vez no aumento do custo da operação devido ao tempo em que a operação tem que estar suspensa para substituição da broca.

Outra questão importante à respeito do fenômeno de vibração *stick-slip* é que existe uma determinada condição crítica para que ele seja observado. Em princípio, o comprimento da coluna deve ser maior que o comprimento crítico que, por sua vez, é função da velocidade angular em que a coluna esta operando, do atrito seco e do coeficiente de amortecimento viscoso do sistema [21]. Supondo que esteja sendo imposta uma velocidade angular constante ao sistema, está bem estabelecido que a intensidade das vibrações torcionais aumentam com o comprimento da coluna de perfuração.

2.2.3

Vibrações longitudinais

A vibração longitudinal é um mecanismo de oscilação na direção axial. Em colunas de perfuração, ocorrem principalmente pela perda momentânea de contato da broca com a rocha que, em seguida, golpe-a bruscamente. Ocorrendo sequencialmente, este processo caracteriza um fenômeno de vibração, também indesejável, conhecido como *bit-bounce*. A principal razão para que ocorra a perda de contato da broca com a rocha se dá por irregularidades na interface broca-rocha, gerando as vibrações ao longo da estrutura conforme a broca é forçada contra o solo. A escolha do tipo de broca também pode influenciar nestas vibrações. Outra possível causa associada a este fenômeno se dá quando a oscilação axial, causada pela força harmônica induzida pela bomba de lama, está superposta com um modo de frequência natural do sistema, entrando em ressonância e fazendo a broca perder o contato com a rocha. Alguns dos problemas gerados por este fenômeno de vibração são oscilações no peso sobre a broca (WOB), diminuição da taxa de penetração da broca (ROP), fadiga de alguns componentes e, inclusive, causar danos ao poço de perfuração, podendo comprometer a operação.

As vibrações axiais estão diretamente relacionadas com a velocidade angular na qual a broca esta operando e isto é um problema pois, em geral, o aumento da velocidade angular contribui no atenuamento do fenômeno de vibração associado às vibrações torcionais, isto é, o *stick-slip*. Deste modo, é necessário cautela para ajustar os parâmetros pois uma velocidade angular muito alta pode atenuar o *stick-slip* mas também pode acarretar em amplitudes cada vez maiores e, assim, um maior potencial de causar danos nas estruturas e, portanto, eventuais prejuízos para operação.

Por fim, apesar da grande quantidade de trabalhos focados no estudo

deste fenômeno, os modelos numéricos têm pouca capacidade de representar bem este fenômeno pois, na prática, este tipo de oscilação está relacionada com as frequências de ressonância da broca enquanto em contato com a rocha e, portanto, relacionada com a rigidez equivalente deste sistema combinado, tornando a tarefa de medição extremamente difícil.

3

Formulação de Cosserat: equacionamento

3.1

Introdução à teoria de Cosserat

A teoria de Cosserat, também conhecida como elasticidade micropolar, incorpora uma rotação de um ponto local juntamente com a translação conhecida da elasticidade clássica.

Usando uma caracterização variacional das equações governamentais de equilíbrio, os irmãos Cosserat introduziram a generalização da teoria de Kirchhoff.

Para melhor compreender a teoria, alguns conceitos fundamentais são apresentados nas seções a seguir para, então, apresentar a curva de Cosserat.

3.1.1

Base de Frenet

A base de Frenet é um triedro que têm o objetivo de definir propriedades geométricas de uma curva espacial, isto é, uma curva inserida no espaço euclidiano tridimensional. O triedro é composto de um vetor tangente (\mathbf{e}_t), um normal (\mathbf{e}_n) e um binormal (\mathbf{e}_b). Uma imagem representativa pode ser vista a seguir,

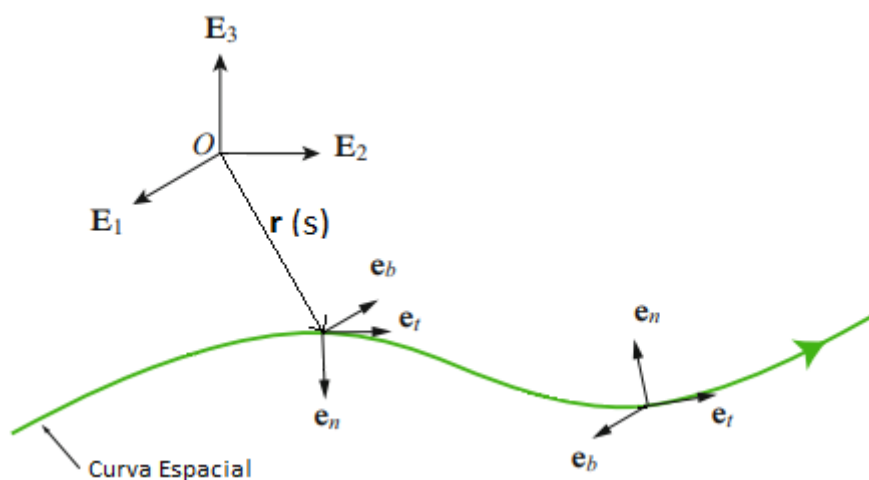


Figura 3.1: Representação de uma base de Frenet em dois pontos distintos em uma curva espacial. Adaptado de [12].

onde $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ é uma base Cartesiana fixa, $\mathbf{r}(s)$ é o vetor que identifica cada ponto da curva espacial e s é a parametrização de comprimento de arco utilizada para descrever a curva.

3.1.1.1

Base de Frenet e parâmetros geométricos

Uma base de Frenet é definida segundos as relações:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_t}{\partial s} = \kappa \mathbf{e}_n, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} = -\kappa \mathbf{e}_t + \tau \mathbf{e}_b, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_b}{\partial s} = -\tau \mathbf{e}_n, \quad (3-1)$$

onde

$$\begin{cases} \tau \rightarrow \text{Torção da curva no espaço.} \\ \kappa \rightarrow \text{Curvatura da curva no espaço.} \\ s \rightarrow \text{Parâmetro de comprimento de arco.} \end{cases}$$

Supondo que a curva é parametrizada pelo comprimento de arco (s), a posição de um ponto em uma curva pode ser definida por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x_1(s)\mathbf{E}_1 + x_2(s)\mathbf{E}_2 + x_3(s)\mathbf{E}_3. \quad (3-2)$$

Deste modo, a base de Frenet pode ser expressa em relação ao vetor posição conforme as equações

$$\mathbf{e}_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \quad \mathbf{e}_n = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \mathbf{e}_t}{\partial s}, \quad \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n. \quad (3-3)$$

3.1.2

Relações Frenet-Serret

As relações Frenet-Serret são expressões compactas que permitem expressar a variação da base de Frenet, isto é, possibilitam identificar a evolução da base de Frenet e, deste modo, identificar a curva por completo.

É possível identificar os vetores da base em uma dada posição ($\mathbf{e}_i(s)$) aplicando uma rotação (\mathbf{Q}_{SF}) sobre os vetores em uma configuração de referência ($\mathbf{e}_i(0)$), segundo

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{Q}_{SF}(s)\mathbf{e}_i(0), \quad (3-4)$$

onde \mathbf{Q}_{SF} é o tensor de rotação e $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_b$.

Em notação compacta

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s} = \omega_{SF} \times \mathbf{e}_i \quad (3-5)$$

onde, $\omega_{SF} = \tau \mathbf{e}_t + \kappa \mathbf{e}_b$.

3.1.3

Curva material

Entende-se por curva material uma curva que representa, de alguma forma, uma estrutura deformável como, por exemplo, a linha de simetria de uma viga. Sendo assim, o tempo torna-se um parâmetro adicional. As notações utilizadas para caracterizar uma curva material são as seguintes: \mathcal{L} define uma curva material inserida no espaço Euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 , \mathcal{C} a configuração da curva material em um dado instante, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t)$ a função vetorial que define \mathcal{C} e $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\xi)$ o campo vetorial que define a curva material em uma configuração fixa de referência \mathcal{C}_0 . Por fim, ξ é a coordenada generalizada ao longo de \mathcal{C} e identifica unicamente pontos materiais de \mathcal{L} . A figura 3.2 ilustra a utilização destas notações através da apresentação de uma curva material em uma configuração de referência e para um dado instante de tempo.

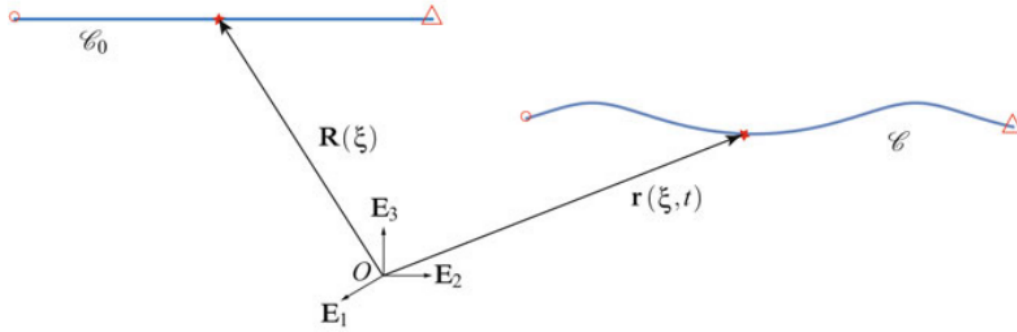


Figura 3.2: Configuração de referência (\mathcal{C}_0) e em um dado instante (\mathcal{C}) da curva material (\mathcal{L}). Retirado de [12].

3.1.4

Curva de Cosserat

Uma curva de Cosserat é a curva material \mathcal{L} à qual, para cada ponto, um triedro é definido. Os vetores que compõem esse triedro são conhecidos como diretores. Os diretores caracterizam e, portanto, representam as quantidades cinemáticas relativas às seções transversais do corpo. Seguindo as notações introduzidas anteriormente, a figura 3.3 ilustra a descrição de duas curvas de Cosserat, uma em uma configuração de referência e outra em um dado instante de tempo.

Tomando a parametrização de comprimento de arco (s) para descrever a curva, um modelo simples da curva de Cosserat pode ser visto na figura 3.4

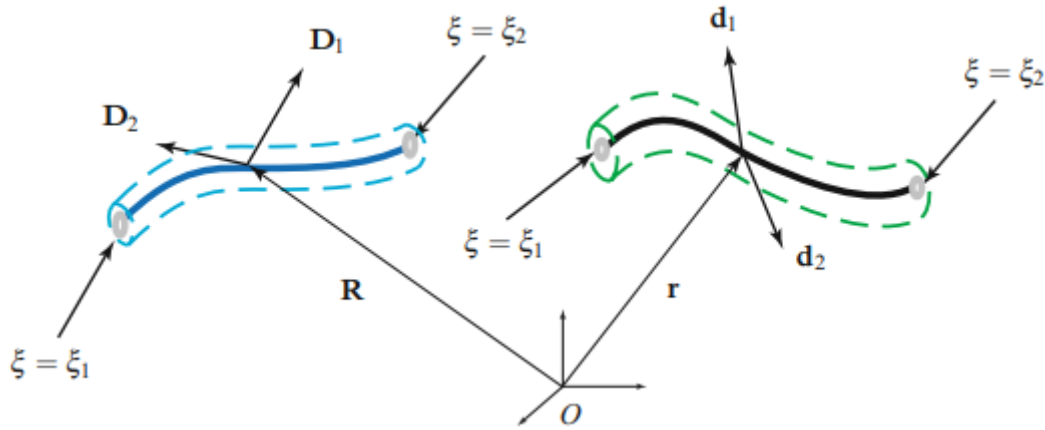


Figura 3.3: A curva $\mathbf{r}(\xi, t)$ e os campos vetoriais $\mathbf{d}_\alpha(\xi, t)$ em um dado ponto ao longo do comprimento. À esquerda, a configuração de referência da curva de Cosserat. Retirado de [12].

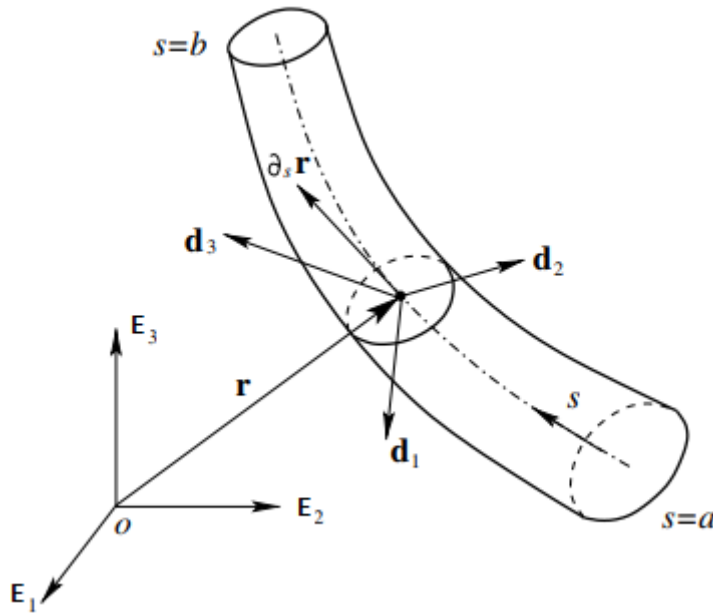


Figura 3.4: Modelo da curva de Cosserat utilizando a parametrização de comprimento de arco para descrever a curva material. Adaptado de [13].

Vale ressaltar a representação do vetor tangente $(\partial_s \mathbf{r})$, definido através da equação 3-3.

3.2

Equações da cinemática

Uma vez apresentada a definição da teoria de Cosserat e os conceitos fundamentais pra compreender a cinemática, este capítulo se dedicará a construir o modelo matemático através das equações que descrevem a dinâmica de uma

estrutura esbelta unidimensional, apresentando todas definições, conforme necessário.

Utilizando a teoria de Cosserat, as equações da dinâmica são equações diferenciais parciais não lineares, nas quais são função do tempo e da variável espacial adotada. Para problemas estáticos, as equações tornam-se equações diferenciais ordinárias não lineares, podendo ser resolvidas utilizando técnicas padrão de aproximações, como o método de Perturbação Regular, para satisfazer as condições de contorno. Por outro lado, para um problema dinâmico, é necessário introduzir uma abordagem numérica que deverá discretizar as equações.

Uma estrutura esbelta, inserida no espaço euclidiano tridimensional, é um corpo com dimensões de comprimento expressivamente maiores quando comparado às suas seções transversais. Tais estruturas, sujeitas a grandes deslocamentos, são encontradas em diversos tipos de problemas, desde colunas de perfuração, robótica e até em filamentos de DNA.

A utilização dos métodos de Elementos Finitos são adequados para abordar este tipo de problema, porém sua aplicação prática é dificultada pelo grande número de elementos necessários, devido aos modos de alta frequência presentes, tornando esse método custoso computacionalmente. Outras abordagens através dos métodos de Elementos Finitos, baseados na teoria de Cosserat, têm sido introduzidas [11, 13] para fornecer um campo de deslocamentos elementar (*Modified Cosserat Rod Element* - MCRE) com deformações gerais, mais representativo, incluindo cisalhamento [11]. O problema fundamental de qualquer problema na formulação de Elementos Finitos é a escolha das funções base. Por este motivo, estas funções são construídas a partir da solução aproximada do sistema de equações não lineares da formulação de Cosserat, na forma quase estática. Para obter uma solução aproximada simbólica do sistema de equações na forma quase estática, primeiramente o método de Perturbação Regular é aplicado ao sistema sob a suposição de que a amplitude dos deslocamentos é pequena e, posteriormente, um método de aproximação por expansão em série é utilizado para obter as soluções do sistema de equações que resultam da aplicação do método de Perturbação Regular.

De modo a estabelecer um padrão para o desenvolvimento das equações, a seguir será apresentada a convenção e a nomenclatura adotada. Em particular, vetores, que são elementos do espaço euclidiano tridimensional, serão representados em negrito e letras minúsculas como, por exemplo, **u**, **v**; tensores serão representados em negrito e com letras maiúsculas como, por exemplo, **I**, **J**; matrizes serão representadas em negrito, com letras maiúsculas e em itálico como, por exemplo, ***K***, ***M***. Os três vetores unitários $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ formam uma

base ortogonal fixa. A convenção de somatório para índices repetidos é utilizada. Os símbolos ∂_s e ∂_t , ou $()'$ e $()\dot{}$, representam a diferenciação com respeito ao parâmetro de comprimento de arco s e ao tempo, respectivamente.

De forma análoga à equação 3-2, em uma base Cartesiana inercial $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e um tempo Newtoniano t , podemos representar a curva de Cosserat descrita por $\mathbf{r}(s, t)$, vetor espacial que define a linha de centroides das seções transversais como

$$\mathbf{r}(s, t) = r_i(s, t)\mathbf{e}_i = x(s, t)\mathbf{e}_1 + y(s, t)\mathbf{e}_2 + (s + z(s, t))\mathbf{e}_3, \quad (3-6)$$

e um conjunto de vetores unitários $\mathbf{d}_i(s, t)$ ($i = 1, 2, 3$) (diretores), válido para o intervalo $a \leq s \leq b$, dado a definição de que o comprimento da coluna é $L = b - a$. A figura 3.4 ilustra esta definição.

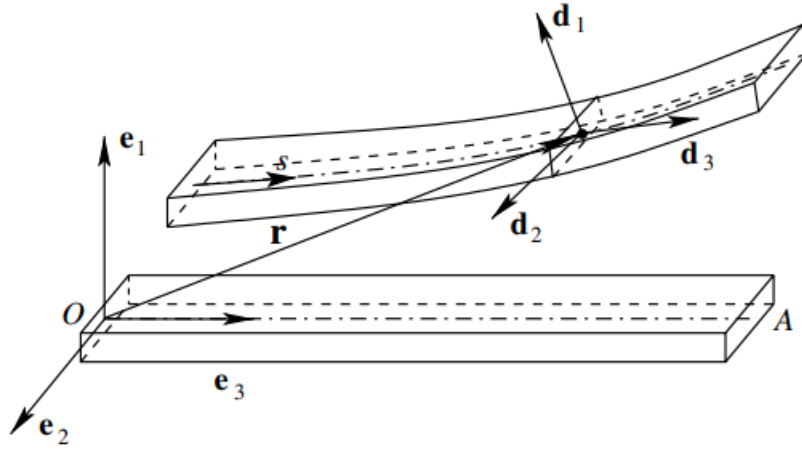


Figura 3.5: Parametrização do problema proposto. Retirado de [2].

3.2.1

Deformações

O movimento da estrutura envolve tanto a velocidade linear da curva ($\partial_t \mathbf{r}$) quanto a velocidade angular ($\mathbf{w} = w_i \mathbf{d}_i$) das seções transversais. De forma similar, as deformações em uma estrutura de Cosserat são classificadas em vetores de deformações lineares ($\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$) e angulares ($\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$). Através da taxa de variação local dos diretores é possível definir as deformações locais, lineares e angulares, como será visto a seguir.

3.2.1.1

Deformação linear

O vetor tangente (\mathbf{v}) é definido segundo a relação

$$\mathbf{v}(s) = \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s}. \quad (3-7)$$

Escrito em termos dos diretores temos

$$\mathbf{v}(s) = v_i(s) \cdot \mathbf{d}_i(s) \quad (3-8)$$

ou

$$v_1(s) = \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{d}_1(s), \quad v_2(s) = \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{d}_2(s), \quad v_3(s) = \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{d}_3(s). \quad (3-9)$$

A deformação linear é definida pela diferença do vetor tangente com relação à uma configuração de referência ($\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$).

3.2.1.2

Deformação angular

O vetor de deformação angular \mathbf{u} é dado, de forma implícita, por

$$\partial_s \mathbf{d}_i(s) = \mathbf{u}(s) \times \mathbf{d}_i(s). \quad (3-10)$$

Para expressar $\mathbf{u}(s)$ na forma explícita, é possível escrever, da equação 3-10, a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i(s) \times \partial_s \mathbf{d}_i(s) &= \mathbf{d}_i(s) \times (\mathbf{u}(s) \times \mathbf{d}_i(s)) \\ &= \mathbf{u}(s)(\mathbf{d}_i(s) \cdot \mathbf{d}_i(s)) - \mathbf{d}_i(s)(\mathbf{d}_i(s) \cdot \mathbf{u}(s)) \\ &= \mathbf{u}(s) - u_i \mathbf{d}_i(s). \end{aligned} \quad (3-11)$$

Escrevendo 3-11 como somatório de todos os três diretores, temos

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{d}_i(s) \times \partial_s \mathbf{d}_i(s)) = 3\mathbf{u}(s) - \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{d}_i(s) = 2\mathbf{u}(s) \quad (3-12)$$

que, na forma explícita, é dado por

$$\mathbf{u}(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i(s) \times \partial_s \mathbf{d}_i(s) \quad (3-13)$$

e na configuração de referência

$$\mathbf{u}_0(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_{0i}(s) \times \partial_s \mathbf{d}_{0i}(s), \quad (3-14)$$

onde $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ define a deformação angular.

Expressando o vetor \mathbf{u} em termos dos diretores, temos

$$u_1(s) = \mathbf{u}(s) \cdot \mathbf{d}_1(s), \quad u_2(s) = \mathbf{u}(s) \cdot \mathbf{d}_2(s), \quad u_3(s) = \mathbf{u}(s) \cdot \mathbf{d}_3(s). \quad (3-15)$$

3.2.2

Velocidades

A velocidade de translação é dada por

$$\partial_t \mathbf{r}(s, t), \quad (3-16)$$

enquanto a velocidade angular das seções transversais são dadas por

$$\mathbf{w}(s, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i(s, t) \times \partial_t \mathbf{d}_i(s, t) \quad (3-17)$$

com as seguintes componentes em termos dos diretores:

$$\begin{aligned} w_1(s, t) &= \mathbf{w}(s, t) \cdot \mathbf{d}_1(s, t), \\ w_2(s, t) &= \mathbf{w}(s, t) \cdot \mathbf{d}_2(s, t), \\ w_3(s, t) &= \mathbf{w}(s, t) \cdot \mathbf{d}_3(s, t). \end{aligned} \quad (3-18)$$

3.3

Equações da dinâmica

É possível obter o modelo matemático que descreve a dinâmica de uma curva de Cosserat a partir da construção da densidade Lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, através de um princípio variacional, ou a partir das leis de Euler.

Como forma de motivação, a figura 3.6 apresenta um diagrama de corpo livre com as forças e momentos de contato atuando na estrutura para ilustrar o balanço da quantidade de movimento linear e angular que é feito em [1], de modo a obter o sistema EDPs que descrevem a dinâmica de uma curva de Cosserat. O diagrama é feito para um segmento $s_1 < a < b < s_2$ e, em um instante t , o material de $(b, s_2]$ exerce uma *força de contato resultante* $\mathbf{n}^+(b, t)$ e um *torque de contato resultante* $\mathbf{r}(b, t) \times \mathbf{n}^+(b, t) + \mathbf{m}^+(b, t)$, com respeito a o , no material de $[a, b]$, onde $\mathbf{m}^+(b, t)$ é *momento acoplado resultante*. Supõe-se que a resultante de todas as outras forças atuando em $[a, b]$ vale

$$\int_a^b \mathbf{f}(s, t) ds \quad (3-19)$$

e que a resultante de todos outros torques vale

$$\int_a^b [\mathbf{r}(s, t) \times \mathbf{f}(s, t) + \mathbf{l}(s, t)] ds, \quad (3-20)$$

onde $\mathbf{f}(s, t)$ e $\mathbf{l}(s, t)$ são as forças e torques externos por unidade de comprimento em (s, t) . Em seguida, para completar as definições, apresenta-se as relações constitutivas, que relacionam as forças e os momentos de contato às deformações e as parametrizações para a matriz de rotação, sendo possível definir os vetores diretores em termos das variáveis de deslocamento angular.

Por fim, as expressões que definem as energias potenciais de deformação e cinéticas do sistema são apresentadas no contexto da abordagem Lagrangeana. Esta metodologia é também apresentada pois alguns trabalhos [11, 13, 18] a utilizam para implementação no método de Elementos Finitos, metodologia

esta que será utilizada no capítulo 4 deste trabalho.

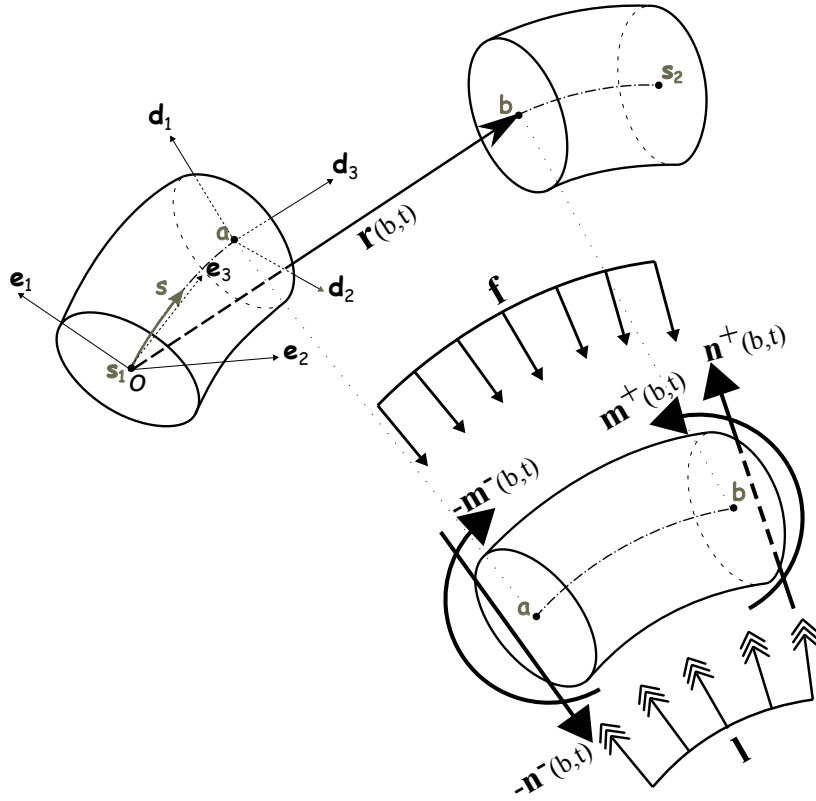


Figura 3.6: Diagrama de corpo livre de uma estrutura esbelta.

A partir do balanço da quantidade de movimento linear e angular de $[a, b]$, em um tempo t , é possível obter as equações da dinâmica para uma estrutura esbelta, segundo a teoria Cosserat, que são

$$\rho A \partial_{tt} \mathbf{r} = \partial_s \mathbf{n} + \mathbf{f}, \quad (3-21)$$

$$\partial_t \mathbf{h} = \partial_s \mathbf{m} + \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \mathbf{l}, \quad (3-22)$$

onde ρ é a densidade do material, A é a área de seção transversal, $\mathbf{h} = \mathbf{I} \mathbf{w}$ é a quantidade de movimento angular por unidade de comprimento, \mathbf{I} é o tensor de inércia e \mathbf{n} e \mathbf{m} são as forças e momentos de contato, respectivamente.

3.3.1

Relações constitutivas

As forças \mathbf{n} e momentos \mathbf{m} de contato estão relacionados com as deformações longitudinais e de cisalhamento \mathbf{v} e com as deformações de flexão e torção \mathbf{u} , a partir de relações constitutivas, respectivamente. Como descrito anteriormente, a quantidade de movimento angular por unidade de comprimento \mathbf{h} está relacionada com um tensor de inércia \mathbf{I} e a velocidade angular \mathbf{w} .

Supondo que o módulo de elasticidade E , o módulo de cisalhamento G , a densidade do material ρ e a área das seções transversais A dependem somente de s , o modelo para propriedades elásticas, baseado nas relações constitutivas de Kirchhoff, é utilizado. Sendo assim, as forças e momentos de contato e a quantidade de movimento angular ficam definidas como $\mathbf{n} = \mathbf{K}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$, $\mathbf{m} = \mathbf{J}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$, $\mathbf{h} = \mathbf{I}(\mathbf{w})$.

Utilizando o sistema de coordenadas descrito na figura 3.4, considerando o problema de uma coluna de perfuração inserida em um poço vertical e desconsiderando configurações pré-deformadas, as relações tornam-se

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{K}(\mathbf{v} - \mathbf{d}_3), \\ \mathbf{m} &= \mathbf{J}(\mathbf{u}), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{I}(\mathbf{w}).\end{aligned}\tag{3-23}$$

No caso geral, as componentes das equações 3-23, em termos dos diretores, são dadas por

$$\begin{aligned}n_1 &= K_{11}v_1 + K_{12}v_2 + K_{13}(v_3 - 1), \\ n_2 &= K_{21}v_1 + K_{22}v_2 + K_{23}(v_3 - 1), \\ n_3 &= K_{31}v_1 + K_{32}v_2 + K_{33}(v_3 - 1), \\ m_1 &= J_{11}u_1 + J_{12}u_2 + J_{13}u_3, \\ m_2 &= J_{21}u_1 + J_{22}u_2 + J_{23}u_3, \\ m_3 &= J_{31}u_1 + J_{32}u_2 + J_{33}u_3, \\ h_1 &= I_{11}w_1 + I_{12}w_2 + I_{13}w_3, \\ h_2 &= I_{21}w_1 + I_{22}w_2 + I_{23}w_3, \\ h_3 &= I_{31}w_1 + I_{32}w_2 + I_{33}w_3.\end{aligned}\tag{3-24}$$

Para fechar as definições das relações constitutivas é necessário conhecer as componentes dos tensores de rigidez e de inércia. Escolhendo os diretores como os eixos principais da inércia da seção transversal em s e centrado no centro de massa da seção transversal, então $K_{ij} = J_{ij} = I_{ij} = 0$, $i \neq j$, para uma coluna uniforme e simétrica, os elementos da diagonal de \mathbf{J} , \mathbf{K} e \mathbf{I} são dados por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa GA & 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} E\gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G\gamma_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \rho\gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \rho\gamma_{33} \end{bmatrix},$$

onde γ_{ij} são os momentos de inércia de uma seção tubular, dados por

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \pi \frac{(r_e^4 - r_i^4)}{4}, \\ \gamma_{22} &= \pi \frac{(r_e^4 - r_i^4)}{4}, \\ \gamma_{33} &= \gamma_{11} + \gamma_{22}, \end{aligned} \tag{3-25}$$

e r_e e r_i são os raios externos e internos, respectivamente, da seção tubular e κ é o fator de correção do cisalhamento.

3.3.2

Matriz de rotação

Finalmente, para completar as definições, é necessário representar os vetores diretores, responsáveis por caracterizar as seções transversais, em termos das variáveis que descrevem as rotações.

As rotações das seções transversais precisam estar relacionadas às deformações de modo a descrever completamente a cinemática da estrutura de Cosserat. Isto é possível utilizando os diferentes meios de parametrização de rotações, como ângulos de Euler, vetor rotacional (vetor de Euler), quaternions e transformação de Cayley.

A parametrização utilizando a definição de vetor rotacional é utilizada no capítulo 4 para construção das funções base e, deste modo, na análise do MCRE, enquanto que a parametrização utilizando Ângulos de Euler é utilizada no capítulo 5 para realizar os *benchmarks* e simular a dinâmica da coluna de perfuração.

3.3.2.1

Vetor rotacional

Para construir o MCRE, a matriz de rotação será escolhida para ser parametrizada pelo vetor rotacional $\boldsymbol{\theta} = \theta_x \mathbf{e}_1 + \theta_y \mathbf{e}_2 + \theta_z \mathbf{e}_3$, com norma rotacional dada por $\theta = \sqrt{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)}$. A figura 3.7 ilustra a esquematização das rotações. Esta parametrização se baseia no fato de que a exponencial de uma matriz antissimétrica é ortogonal e que qualquer matriz de rotação é a exponencial de alguma matriz antissimétrica [48]. A matriz de giro \mathbf{S} está associada à matriz de rotação \mathbf{R} , ao vetor de rotação $\boldsymbol{\theta}$ e é dada por

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-26)$$

A matriz de rotação \mathbf{R} , por sua vez, é determinada a partir da equação

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}_m + \frac{\sin(\theta)}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}), \quad (3-27)$$

onde \mathbf{I}_m é a matriz identidade.

Os três diretores de Cosserat, $\mathbf{d}_i(s, t)$, são obtidos de acordo com a relação

$$\mathbf{R} = (\mathbf{d}_1(s, t)^T, \mathbf{d}_2(s, t)^T, \mathbf{d}_3(s, t)^T) = e^{\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (3-28)$$

A matriz de rotação \mathbf{R} pode ser dada como uma expansão em série de MacLaurin, das funções trigonométricas em 3-27, resultando em

$$\mathbf{R} = \sum_{p=0}^n \frac{\mathbf{S}^p}{p!}. \quad (3-29)$$

Usando esta expansão até os termos de terceira ordem de θ_x , θ_y e θ_z , é possível obter os diretores de Cosserat em termos da base referencial. O procedimento para obtenção dos diretores foi realizado em Maple e encontra-se no Apêndice B.

Utilizando esta parametrização, obtemos as seguintes aproximações dos diretores, expressos na base referencial:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(s, t) \approx & \left(-\frac{1}{2} \theta_y^2 - \frac{1}{2} \theta_z^2 + 1 \right) \mathbf{e}_1 \\ & + \left(\frac{1}{2} \theta_y \theta_x - \frac{1}{6} \theta_z \theta_x^2 - \frac{1}{6} \theta_z^3 - \frac{1}{6} \theta_z \theta_y^2 + \theta_z \right) \mathbf{e}_2 \\ & + \left(\frac{1}{2} \theta_z \theta_x + \frac{1}{6} \theta_z^2 \theta_y + \frac{1}{6} \theta_y \theta_x^2 + \frac{1}{6} \theta_y^3 - \theta_y \right) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (3-30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2(s, t) \approx & \left(\frac{1}{2} \theta_y \theta_x + \frac{1}{6} \theta_z \theta_y^2 + \frac{1}{6} \theta_z^3 + \frac{1}{6} \theta_z \theta_x^2 - \theta_z \right) \mathbf{e}_1 \\ & + \left(-\frac{1}{2} \theta_x^2 - \frac{1}{2} \theta_z^2 + 1 \right) \mathbf{e}_2 \\ & + \left(\frac{1}{2} \theta_z \theta_y - \frac{1}{6} \theta_z^2 \theta_x - \frac{1}{6} \theta_x^3 - \frac{1}{6} \theta_y^2 \theta_x + \theta_x \right) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_3(s, t) \approx & \left(\frac{1}{2} \theta_z \theta_x - \frac{1}{6} \theta_y^3 - \frac{1}{6} \theta_z^2 \theta_y - \frac{1}{6} \theta_y \theta_x^2 + \theta_y \right) \mathbf{e}_1 \\ & + \left(\frac{1}{2} \theta_z \theta_y + \frac{1}{6} \theta_y^2 \theta_x + \frac{1}{6} \theta_x^3 + \frac{1}{6} \theta_z^2 \theta_x - \theta_x \right) \mathbf{e}_2 \\ & + \left(-\frac{1}{2} \theta_x^2 - \frac{1}{2} \theta_y^2 + 1 \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3-32)$$

É possível expressar o vetor rotacional explicitamente segundo a equação

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right). \quad (3-33)$$

A matriz de giro \mathbf{S} é obtida tirando o logaritmo de \mathbf{R}

$$\mathbf{S} = \log(\mathbf{R}) = \frac{\theta}{2 \sin(\theta)} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T). \quad (3-34)$$

Comparando a matriz de giro resultante com a equação 3-26, as componentes do vetor rotacional são dados por:

$$\theta_x = -S_{23}, \quad \theta_y = S_{13}, \quad \theta_z = -S_{12}. \quad (3-35)$$

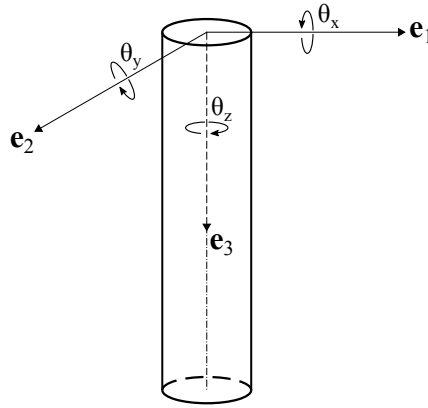


Figura 3.7: Esquema das rotações propostas para parametrização da matriz de rotação.

É importante fazer a colocação de que a proposta de parametrização das rotações apresentadas nesta seção é utilizada para solução das equações na forma quase estática, uma vez que no problema dinâmico a coluna está sob constante rotação no eixo axial e, deste modo, não é prudente fazer a aproximação de pequenas rotações para todos eixos.

3.3.2.2

Ângulos de Euler

Diante das considerações anteriores, a parametrização adotada para as rotações, nas simulações da dinâmica, é a de Ângulos de Euler, utilizando a mesma sequência de rotações proposta em [2]. Desta forma, tomando a figura 3.5 como referencia, primeiramente rotaciona-se a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ por um ângulo $\theta_y(s, t)$ em torno do eixo alinhado com \mathbf{e}_2 . Depois rotaciona-se a base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ por um ângulo $\theta_x(s, t)$ em torno do eixo alinhado com $\hat{\mathbf{e}}_1$. Finalmente, rotaciona-se a base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \mathbf{d}_3\}$ por um ângulo $\theta_z(s, t)$ em torno do eixo alinhado com \mathbf{d}_3 . A figura 3.8 ilustra a sequência de rotações realizada.

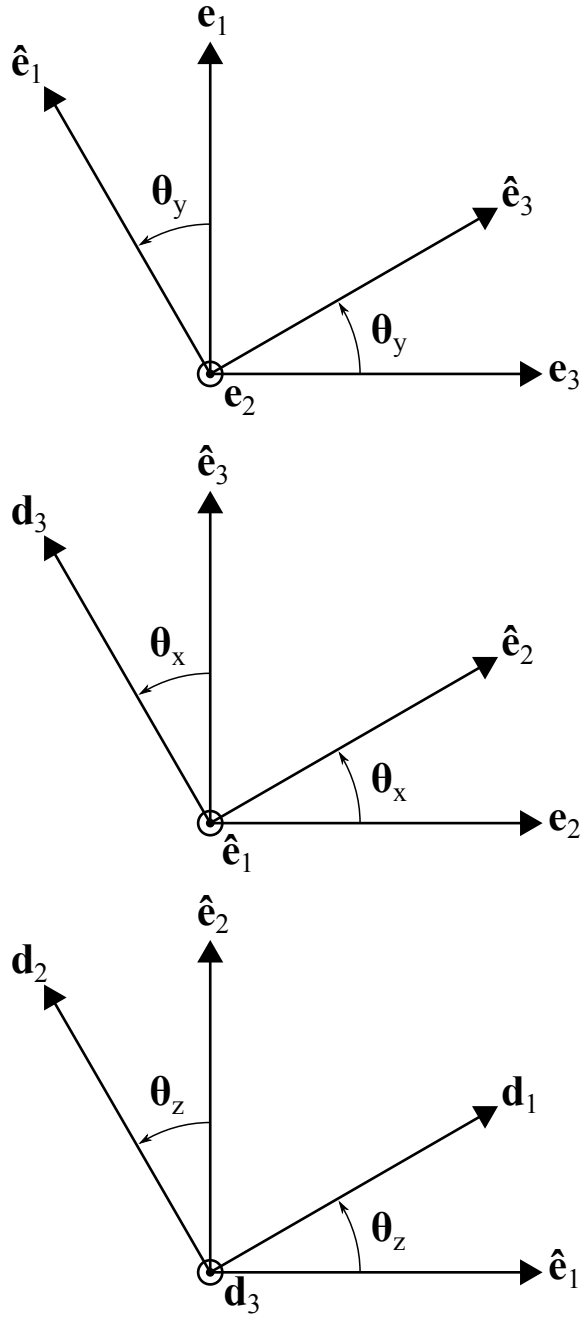


Figura 3.8: Sequência de rotações utilizadas para parametrização da matriz de rotação, utilizando Ângulos de Euler.

Para facilitar a computação da matriz de rotação, uma rotina foi feita em Maple para fornecer a matriz de rotação de acordo com a sequência de rotação desejada do usuário. A rotina encontra-se no Apêndice F.

Para esta sequência de rotações, obtemos a seguinte matriz de rotação, com a notação reduzida de $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$ para $s(\cdot)$ e $c(\cdot)$, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} c(\theta_z)c(\theta_y) + s(\theta_z)s(\theta_x)s(\theta_y) & s(\theta_z)c(\theta_x) & -c(\theta_z)s(\theta_y) + s(\theta_z)s(\theta_x)c(\theta_y) \\ -s(\theta_z)c(\theta_y) + c(\theta_z)s(\theta_x)s(\theta_y) & c(\theta_z)c(\theta_x) & s(\theta_z)s(\theta_y) + c(\theta_z)s(\theta_x)c(\theta_y) \\ c(\theta_x)s(\theta_y) & -s(\theta_x) & c(\theta_x)c(\theta_y) \end{bmatrix},$$

onde os diretores, nesta nova parametrização para as rotações, são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(s, t) = & (\cos(\theta_z) \cos(\theta_y) + \sin(\theta_z) \sin(\theta_x) \sin(\theta_y)) \mathbf{e}_1 \\ & + (\sin(\theta_z) \cos(\theta_x)) \mathbf{e}_2 \\ & + (-\cos(\theta_z) \sin(\theta_y) + \sin(\theta_z) \sin(\theta_x) \cos(\theta_y)) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (3-36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2(s, t) = & (-\sin(\theta_z) \cos(\theta_y) + \cos(\theta_z) \sin(\theta_x) \sin(\theta_y)) \mathbf{e}_1 \\ & + (\cos(\theta_z) \cos(\theta_x)) \mathbf{e}_2 \\ & + (\sin(\theta_z) \sin(\theta_y) + \cos(\theta_z) \sin(\theta_x) \cos(\theta_y)) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_3(s, t) = & (\cos(\theta_x) \sin(\theta_y)) \mathbf{e}_1 \\ & + (-\sin(\theta_x)) \mathbf{e}_2 \\ & + (\cos(\theta_x) \cos(\theta_y)) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3-38)$$

3.3.3

Abordagem Lagrangeana

Além das leis de Euler, também é possível obter as equações que descrevem a dinâmica da curva de Cosserat através de um princípio variacional, onde conhecendo as expressões que definem a energia potencial de deformações e cinética do sistema, constrói-se a densidade Lagrangeana. A partir da densidade Lagrangeana, obtém-se os temas que determinam a dinâmica e, assim, as matrizes que compõe o sistema de equações no contexto de Elementos Finitos.

A abordagem Lagrangeana é utilizada para obter as equações diferenciais ordinárias da dinâmica para um elemento da estrutura. As condições de contorno para um elemento e o deslocamento de um nó, nas duas extremidades $l_e = a$ e $l_e = b$, são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a(t) = & [\varepsilon X_a(t) \quad \varepsilon Y_a(t) \quad \varepsilon Z_a(t) \quad \varepsilon \Theta_{xa}(t) \quad \varepsilon \Theta_{ya}(t) \quad \varepsilon \Theta_{za}(t)]^T, \\ \mathbf{q}_b(t) = & [\varepsilon X_b(t) \quad \varepsilon Y_b(t) \quad \varepsilon Z_b(t) \quad \varepsilon \Theta_{xb}(t) \quad \varepsilon \Theta_{yb}(t) \quad \varepsilon \Theta_{zb}(t)]^T. \end{aligned} \quad (3-39)$$

Desta forma, o vetor de deslocamento generalizado, para um elemento, é escrito como:

$$\mathbf{q}^e(t) = [\mathbf{q}_a^T(t) \quad \mathbf{q}_b^T(t)]^T. \quad (3-40)$$

Considerando a dependência temporal do vetor de deslocamento de um nó, os deslocamentos generalizados, em um dado ponto dentro de um elemento, estão variando com o tempo também. A dependência dos deslocamentos generalizados que, por sua vez, dependem do tempo, são definidas como:

$$\begin{aligned} x &= x(s, \mathbf{q}^e(t)), & y &= z(s, \mathbf{q}^e(t)), & z &= z(s, \mathbf{q}^e(t)), \\ \theta_x &= \theta_x(s, \mathbf{q}^e(t)), & \theta_y &= \theta_y(s, \mathbf{q}^e(t)), & \theta_z &= \theta_z(s, \mathbf{q}^e(t)). \end{aligned} \quad (3-41)$$

Isto torna as funções x , y , z , θ_x , θ_y e θ_z dependentes do vetor de deslocamento nodal que, por sua vez, depende do tempo e são dadas pelas funções base construídas no capítulo 4.

Antes de derivar as equação da dinâmica para um elemento, os tipos de carregamentos precisam ser definidos. Supõe-se que um carregamento atuando em um elemento é composto de três partes aditivas. A primeira parte é a interação dos elementos vizinhos, \mathbf{f}^{ie} . A segunda é o carregamento de um ponto externo (concentrado) atuando sobre os nós, \mathbf{f}^{ce} . A última parte representa um carregamento distribuído com uma direção fixa e de intensidade prescrita, \mathbf{f}^{de} .

O Lagrangeano é obtido da equação

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}^e, \dot{\mathbf{q}}^e) = \int_0^{l_e} (\mathcal{T}(s, \mathbf{q}^e, \dot{\mathbf{q}}^e) - \mathcal{U}(s, \mathbf{q}^e)) ds, \quad (3-42)$$

onde a energia cinética, dada pela translação da curva material e as rotações das seções transversais, é descrita por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left\{ \rho A \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{I}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \right\} \quad (3-43)$$

e a energia potencial, dada pelas deformações angulares e lineares, é descrita por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{J}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{K}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \}. \quad (3-44)$$

Procedendo desta forma, as equações da dinâmica generalizada, utilizando a teoria de Cosserat, são obtidas de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} \right) = f_j^{ie}(t) + f_j^{ce}(t) + f_j^{de}(t, \mathbf{q}^e). \quad (3-45)$$

A partir da equação 3-45 é possível determinar a matriz de massa a partir dos termos da diferenciação da energia cinética, a matriz de rigidez linear e o vetor de rigidez não linear a partir da diferenciação da energia potencial. Utilizando estas definições, as equações diferenciais ordinárias, da dinâmica de um elemento, podem ser escritas na forma compacta segundo:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{g}^e(\mathbf{q}^e) = \mathbf{f}^{ie}(t) + \mathbf{f}^{ce}(t) + \mathbf{f}^{de}(t, \mathbf{q}^e), \quad (3-46)$$

onde \mathbf{M}^e é a matriz de massa, \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez, contendo os termos lineares, $\mathbf{g}^e(\mathbf{q}^e)$ é o vetor não linear contendo os termos quadráticos e cúbicos de rigidez em \mathbf{q}^e .

A rotina para computar os termos relativos as energias potenciais e cinéticas é apresentada no Apêndice C.

Como comentado anteriormente, quando utilizando a abordagem de Elementos Finitos, para buscar uma solução numérica aproximada, é fundamental uma escolha apropriada para as funções base de modo a reduzir o número de elementos no processo geração da malha e, portanto, diminuir o custo computacional. Neste caso, as funções base serão construídas a partir da solução das equações que descrevem uma estrutura esbelta unidimensional inserida no espaço euclidiano tridimensional segundo a teoria de Cosserat, na forma quase estática. Para isto, elimina-se os termos com dependência temporal e os carregamentos externos do sistema de equações 3-21 e 3-22, resultando no seguinte sistema de EDOs:

$$\mathbf{n}_s(s) = 0, \quad \mathbf{m}_s(s) + \mathbf{v}(s) \times \mathbf{n}(s) = 0. \quad (4-1)$$

Para um dado elemento, o vetor de deslocamentos de um nó (deslocamentos do contorno e rotações $X, Y, Z, \Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$), com ε como um pequeno parâmetro, nas duas extremidades da coluna $l_e = a$ e $l_e = b$, são

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a &= [\varepsilon X_a \quad \varepsilon Y_a \quad \varepsilon Z_a \quad \varepsilon \Theta_{xa} \quad \varepsilon \Theta_{ya} \quad \varepsilon \Theta_{za}]^T, \\ \mathbf{q}_b &= [\varepsilon X_b \quad \varepsilon Y_b \quad \varepsilon Z_b \quad \varepsilon \Theta_{xb} \quad \varepsilon \Theta_{yb} \quad \varepsilon \Theta_{zb}]^T, \end{aligned} \quad (4-2)$$

onde l_e é o comprimento do elemento.

As condições de contorno para $x, y, z, \theta_x, \theta_y$ e θ_z em $l_e = a$ e $l_e = b$ são obtidas a partir dos vetores de deslocamentos nodais 4-2 e são dados explicitamente segundo

$$\begin{cases} x(a) = \varepsilon X_a & y(a) = \varepsilon Y_a & z(a) = \varepsilon Z_a \\ x(b) = \varepsilon X_b & y(b) = \varepsilon Y_b & z(b) = s + \varepsilon Z_b \end{cases}, \quad (4-3)$$

e

$$\begin{cases} \theta_x(a) = \varepsilon \Theta_{xa} & \theta_y(a) = \varepsilon \Theta_{ya} & \theta_z(a) = \varepsilon \Theta_{za} \\ \theta_x(b) = \varepsilon \Theta_{xb} & \theta_y(b) = \varepsilon \Theta_{yb} & \theta_z(b) = \varepsilon \Theta_{zb} \end{cases}. \quad (4-4)$$

Com as condições de contorno 4-3 e 4-4 conhecidas, as funções base podem ser obtidas a partir da solução das equações 4-1 segundo estas condições de contorno.

Devido a complexidade e não linearidade das equações 4-1, é natural que estas equações não possuam uma solução analítica exata e, portanto, um

método para obter uma solução analítica aproximada deve ser utilizado. Neste caso, o método de Perturbação Regular é utilizado sob a suposição de que a amplitude dos deslocamentos é pequena, fundamentando a utilização do parâmetro ε como parâmetro de perturbação e a proposição das expansões

$$\begin{aligned}x(s) &= \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \varepsilon^3 x_3(s) + \cdots, \\y(s) &= \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \varepsilon^3 y_3(s) + \cdots, \\z(s) &= \varepsilon z_1(s) + \varepsilon^2 z_2(s) + \varepsilon^3 z_3(s) + \cdots, \\ \theta_x(s) &= \varepsilon \theta_{x1}(s) + \varepsilon^2 \theta_{x2}(s) + \varepsilon^3 \theta_{x3}(s) + \cdots, \\ \theta_y(s) &= \varepsilon \theta_{y1}(s) + \varepsilon^2 \theta_{y2}(s) + \varepsilon^3 \theta_{y3}(s) + \cdots, \\ \theta_z(s) &= \varepsilon \theta_{z1}(s) + \varepsilon^2 \theta_{z2}(s) + \varepsilon^3 \theta_{z3}(s) + \cdots.\end{aligned}\tag{4-5}$$

Substituindo as expansões propostas pelas equações 4-5 no sistema de equações 4-1 e sabendo que x_i , y_i , z_i , θ_{xi} , θ_{yi} e θ_{zi} são independentes de ε , os coeficientes associados aos termos de primeira em ε são coletados e igualados a zero, compondo um sistema de equações lineares que, por sua vez, é resolvido utilizando algum método de expansão em série. Conforme pode ser observado em [11], o método de Frobenius é utilizado. Com a solução do sistema, relativo aos termos de primeira ordem em ε , é feita a substituição dessa solução no sistema dos termos de segunda ordem em ε e então resolve-se este outro sistema. Este processo é realizado até o número de termos desejado na expansão 4-5.

Para melhor ilustrar o método de Perturbação Regular, consideremos o seguinte exemplo, proposto por [36]:

Exemplo 1 - *Perturbação Regular*

Considere o problema de valor inicial

$$y'' = -e^{-x}y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.\tag{4-6}$$

Apesar desta equação diferencial poder ser resolvida em termos de funções de Bessel, este exemplo serve para ilustrar a vantagem do método de perturbação em casos onde soluções de expansão em série não podem fornecer uma boa aproximação sem uma enorme quantidade de termos. Para isto, introduzimos o parâmetro de perturbação ε na equação 4-6, obtendo

$$y'' = -\varepsilon e^{-x}y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.\tag{4-7}$$

Seguindo as etapas fundamentais para aplicar o método de perturbação regular, supomos que a solução perturbada para $y(x)$ têm a forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n(x),\tag{4-8}$$

onde $y_0(0) = 1$, $y'_0 = 1$ e $y_n(0) = 0$, $y'_n(0) = 0$, isto é, as condições iniciais são aplicadas somente ao primeiro termo da perturbação e as demais são nulas. N é o número de termos em que se deseja aproximar $y(x)$.

Substituindo a equação que propõe a solução perturbada 4-8 na equação perturbada 4-7 e computando os coeficientes relativos a ε^0 , obtemos a seguinte equação

$$y_0'' = 0, \quad (4-9)$$

cujas soluções que satisfaz as condições iniciais é

$$y_0 = 1 + x. \quad (4-10)$$

Computando os coeficientes relativos a ε^1 , temos a seguinte equação

$$y_1'' = -\frac{y_0}{e^x}. \quad (4-11)$$

Substituindo a solução encontrada, pela equação 4-10, na equação 4-11, obtemos

$$y_1'' = -\frac{1+x}{e^x}, \quad (4-12)$$

cujas soluções, para condições iniciais nulas, é

$$y_1 = -(x+3)e^{-x} - 2x + 3. \quad (4-13)$$

Este processo é então repetido até o N - ésimo termo da expansão desejado. Pode-se observar na figura 4.1 que, com apenas 4 termos do método de perturbação, já é possível obter uma solução aproximada satisfatória quando comparada com a solução exata, enquanto uma aproximação propondo uma expansão em série apresenta um resultado ruim, mesmo utilizando 11 termos na expansão.

Neste exemplo fica claro como que, para determinados problemas, a utilização do método de perturbação regular aproxima melhor a solução do que simplesmente utilizar os métodos de expansão em série, por exemplo.

A rotina para este problema, feita em Maple, encontra-se no Apêndice A.

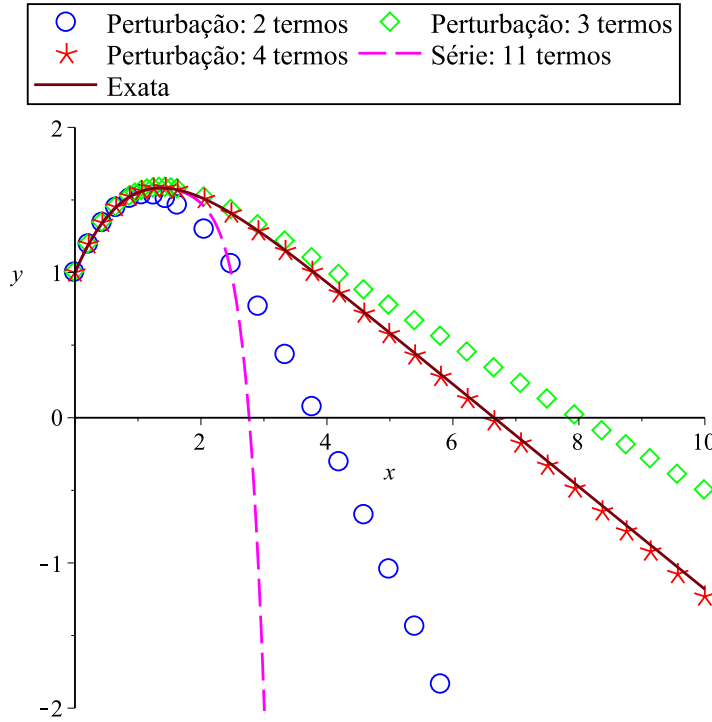


Figura 4.1: Comparação entre as soluções exata, por uma expansão em série e pelo método de perturbação com diferente números de termos da equação 4-6.

Apresentado um exemplo da utilização do método de Perturbação Regular, a seguir podemos observar a solução do primeiro sistema, obtido a partir dos coeficientes da primeira ordem em ε :

$$\begin{aligned}
 x_1(s) = & 2 \frac{((\Theta_{ya}/2 + \Theta_{yb}/2) l_e + X_a - X_b) K_{11} s^3}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} + \\
 & \frac{(-2 (\Theta_{ya} + \Theta_{yb}/2) K_{11} l_e^2 - 3 K_{11} (X_a - X_b) l_e - 6 J_{22} (-\Theta_{yb} + \Theta_{ya})) s^2}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} \\
 & + \frac{(K_{11} l_e^3 \Theta_{ya} + 6 J_{22} (-\Theta_{yb} + \Theta_{ya}) l_e - 12 J_{22} (X_a - X_b)) s}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} + X_a, \\
 y_1(s) = & 2 \frac{((-\Theta_{xa}/2 - \Theta_{xb}/2) l_e + Y_a - Y_b) K_{22} s^3}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} + \\
 & \frac{(2 (\Theta_{xa} + \Theta_{xb}/2) K_{22} l_e^2 - 3 K_{22} (Y_a - Y_b) l_e + 6 J_{11} (-\Theta_{xb} + \Theta_{xa})) s^2}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} \\
 & + \frac{(-K_{22} l_e^3 \Theta_{xa} - 6 J_{11} (-\Theta_{xb} + \Theta_{xa}) l_e - 12 J_{11} (Y_a - Y_b)) s}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} + Y_a,
 \end{aligned}$$

$$z_1(s) = -\frac{s(Z_a - Z_b)}{l_e} + Z_a,$$

$$\begin{aligned} \theta_{x1}(s) = & \frac{(3(\Theta_{xa} + \Theta_{xb})l_e - 6Y_a + 6Y_b)K_{22}s^2}{(K_{22}l_e^2 + 12J_{11})l_e} + \\ & \frac{\left((-4(\Theta_{xa} + \Theta_{xb}/2)l_e^2 + 3(2Y_a - 2Y_b)l_e\right)K_{22} - 12J_{11}(-\Theta_{xb} + \Theta_{xa})s}{(K_{22}l_e^2 + 12J_{11})l_e} \\ & + \Theta_{xa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{y1}(s) = & \frac{(3(\Theta_{ya} + \Theta_{yb})l_e + 6X_a - 6X_b)K_{11}s^2}{(K_{11}l_e^2 + 12J_{22})l_e} + \\ & \frac{\left((-4(\Theta_{ya} + \Theta_{yb}/2)l_e^2 + 3(-2X_a + 2X_b)l_e\right)K_{11} - 12J_{22}(-\Theta_{yb} + \Theta_{ya})s}{(K_{11}l_e^2 + 12J_{22})l_e} \\ & + \Theta_{ya}, \end{aligned}$$

$$\theta_{z1}(s) = -\frac{s(\Theta_{za} - \Theta_{zb})}{l_e} + \Theta_{za}.$$

É importante observar que, conforme a ordem em ε aumenta, o grau dos polinômios, que representam a solução das variáveis, aumenta também. Por exemplo, o grau dos polinômios que representam a solução das variáveis $x_2(s)$, $y_2(s)$, $z_2(s)$ são de quinta ordem em s e $\theta_{x2}(s)$, $\theta_{y2}(s)$, $\theta_{z2}(s)$ são de quarta ordem em s . Por fim, $x_3(s)$, $y_3(s)$, $z_3(s)$, $\theta_{x3}(s)$, $\theta_{y3}(s)$ são de sétima ordem em s e $\theta_{z3}(s)$ é de sexta ordem em s . Por exemplo,

$$x_2(s) = C_1s^5 + C_2s^4 + C_3s^3 + C_4s^2 + C_5s,$$

onde $C_1 = \frac{K_{11}K_{33}(Z_a - Z_b)(l_e\Theta_{ya} + l_e\Theta_{yb} + 2X_a - 2X_b)}{J_{22}l_e^2(K_{11}l_e^2 + 12J_{22})}$, estando de acordo com o resultado reportado em [11]. Apesar do grau dos polinômios das soluções $\theta_{x3}(s)$ e $\theta_{y3}(s)$ serem de sétima ordem, é possível observar que para valores geométricos e de materiais lineares elásticos típicos, o coeficiente de s^7 é aproximadamente da ordem de 10^{-32} e é possível que isto fundamente o fato do artigo [11] reportar estas soluções, em específico, como possuindo polinômios de sexta ordem e não de sétima. Estas informações são importantes porque é fundamental propor o grau apropriado na expansão em série pois, caso contrário, a solução irá divergir consideravelmente da solução numérica, como a figura 4.2 pode mostrar.

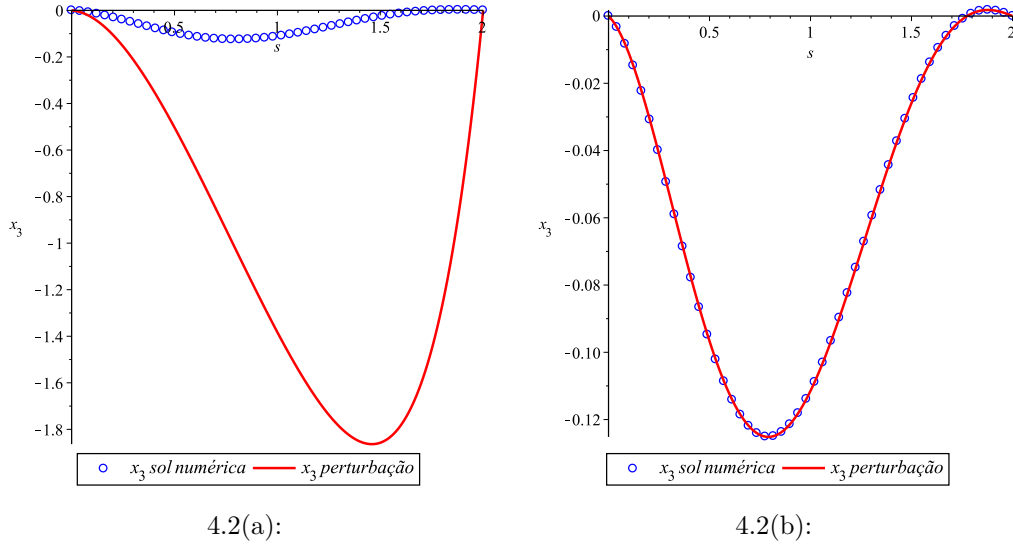


Figura 4.2: Comparação entre a soluções numérica e analítica de x_3 quando propondo a expansão em série até o termo de sexta ordem (a) e de sétima ordem (b).

Com o objetivo de mostrar o processo de construção das funções base e, portanto, de uma solução analítica aproximada para as equações 4-1, é possível observar na figura 4.3 como a solução, através do método de perturbação, evolui conforme aumenta-se o número de termos propostos na expansão da perturbação.

Os resultados apresentados nas figuras 4.3 e 4.4 foram obtidos utilizando os parâmetros descritos na tabela 4.1.

A rotina para construção das funções base e, portanto, da solução simbólica para as equações de Cosserat na forma quase estática, é apresentada no Apêndice B.

A curva material, para diferentes ordens em ε e inserida em uma restrição circular de raio $r = 0.156$ [m], pode ser observada na figura 4.4.

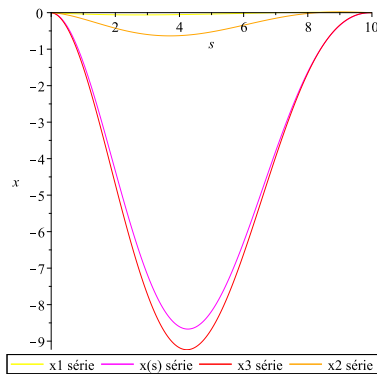
É importante frisar que estes resultados foram obtidos utilizando um tamanho de elemento satisfatório para uma grande variedade de problemas disponíveis na literatura. Conforme diminui-se o tamanho do elemento, teoricamente a solução se aproxima da exata porém aumenta-se o custo computacional. Na contra mão, conforme aumenta-se o tamanho do elemento diminui-se o custo computacional porém a solução irá divergir significativamente da exata.

A experiência adquirida no desenvolvimento deste trabalho pelo autor mostrou que utilizando o MCRE até a expansão de terceira ordem em ε produz soluções com amplitudes demasiadamente grandes, ratificando a colocação à respeito da variação da solução em função do comprimento do elemento utilizado ou dos deslocamentos nas condições de contorno. De fato, este tipo

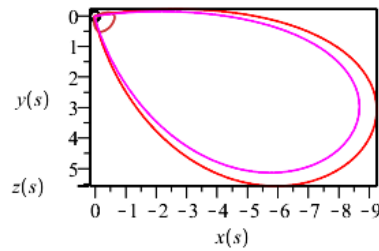
Variável	Valor	Unidade	Descrição
ν	0.29	-	Coefficiente de Poisson
κ	6/7	-	Fator de correção do cisalhamento
E	2.1e11	Pa	Módulo de elasticidade
l_e	2	m	Comprimento do elemento
r_e	0.0635	m	Raio externo
r_i	0.0475	m	Raio interno
X_a	0	m	Deslocamento linear de X no contorno A.
Y_a	0	m	Deslocamento linear de Y no contorno A.
Z_a	0	m	Deslocamento linear de Z no contorno A.
Θ_{xa}	0.04	rad	Deslocamento angular de Θ_x no contorno A.
Θ_{ya}	-0.05	rad	Deslocamento angular de Θ_y no contorno A.
Θ_{za}	0.08	rad	Deslocamento angular de Θ_z no contorno A.
X_b	0	m	Deslocamento linear de X no contorno B.
Y_b	0	m	Deslocamento linear de Y no contorno B.
Z_b	-0.1	m	Deslocamento linear de Z no contorno B.
Θ_{xb}	0.06	rad	Deslocamento angular de Θ_x no contorno B.
Θ_{yb}	-0.02	rad	Deslocamento angular de Θ_y no contorno B.
Θ_{zb}	0	rad	Deslocamento angular de Θ_z no contorno B.

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros utilizados em uma solução, na análise do MCRE.

de resultado faz sentido já que a utilização do método de perturbação parte da suposição de que a amplitude dos deslocamentos é pequena. Isto se soma ao fato de que os diretores são parametrizados com uma expansão de MacLaurin até a terceira ordem, supondo pequenos deslocamentos para as rotações. Outro fator, que também soma, é que mesmo o sistema de equações resultante da aplicação do método de perturbação não têm solução analítica exata, necessitando um método de expansão em série para aproximá-lo. Diante destes fatos, a conclusão que pode ser feita é que deve-se ter precaução na utilização de funções base, baseadas no MCRE, sendo mais indicada para problemas que não envolvam grandes deslocamentos de qualquer natureza. Para ajudar a embasar estas afirmações, a figura 4.5 mostra a solução do MCRE, para o mesmo problema apresentado na figura 4.4, aumentando o comprimento do elemento de $l_e = 2$ [m] para $l_e = 10$ [m]:



4.5(a):



4.5(b):

Figura 4.5: Deslocamento $x(s)$ (a) e vista superior da curva material (b) utilizando a solução até a terceira ordem em ε , para $l_e = 10$ [m].

Claramente é possível observar como a amplitude dos deslocamentos aumenta significativamente quando aumenta-se o tamanho do elemento, embasando a colocação de que o MCRE não é adequado para problemas que envolvam grandes deslocamentos. Nota-se o mesmo fenômeno quando aumenta-se os deslocamentos nas condições de contorno em vez do comprimento do elemento.

4.1

Resultados Numéricos

Utilizando o MCRE proposto, alguns resultados são apresentados para mostrar as vantagens da utilização destas funções base. Os termos que permitem construir as matrizes e vetores que compõe o sistema de equações foram obtidos a partir das expressões que definem as energias cinéticas e potências de deformação do sistema, tendo sido implementado em Maple, podendo ser acessado no Apêndice C.

É possível verificar a eficiência das funções base pelo modelo MCRE, analisando a convergência do sexto modo de flexão, quando comparado com funções base genéricas lineares hermitianas [34, 35] e a solução analítica de uma viga, baseada na teoria de Euler-Bernoulli. Esta comparação é aceitável pois os efeitos de cisalhamentos são desprezíveis quando se trata de uma estrutura esbelta.

É possível computar analiticamente os modos de vibração de uma viga engastada-livre, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, obtendo as soluções da equação

$$\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) + 1 = 0 \quad (4-14)$$

e obtendo as frequências naturais segundo

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (4-15)$$

O programa, feito em Maple, para computação das frequências naturais, encontra-se no Apêndice D.

Para comparar com a solução analítica, a obtenção dos modos de frequência são obtidos a partir da abordagem em Elementos Finitos utilizando a formulação Lagrangeana, explicada no capítulo 3, para construir as matrizes e vetores que compõe o sistema de equações. Vale ressaltar que os códigos básicos de Elementos Finitos foram escritos em Maple utilizando as referências [34, 35] para computar as matrizes elementares e globais do sistema, enquanto os modos de vibração foram obtidos com rotinas feitas em MATLAB, importando as matrizes geradas na rotina em Maple, para diferentes números de elementos. As rotinas, em Maple, para formulação através da abordagem Lagrangeana e da computação das matrizes elementares e globais, encontram-se no Apêndice C.

Os cálculos foram realizados para uma viga engastada-livre com os seguintes parâmetros: $\kappa = 5/6$, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ [Pa], $\nu = 0.29$, $r_e = 0.1$ [m], $r_i = 0.0945$ [m], $L = 1000$ [m].

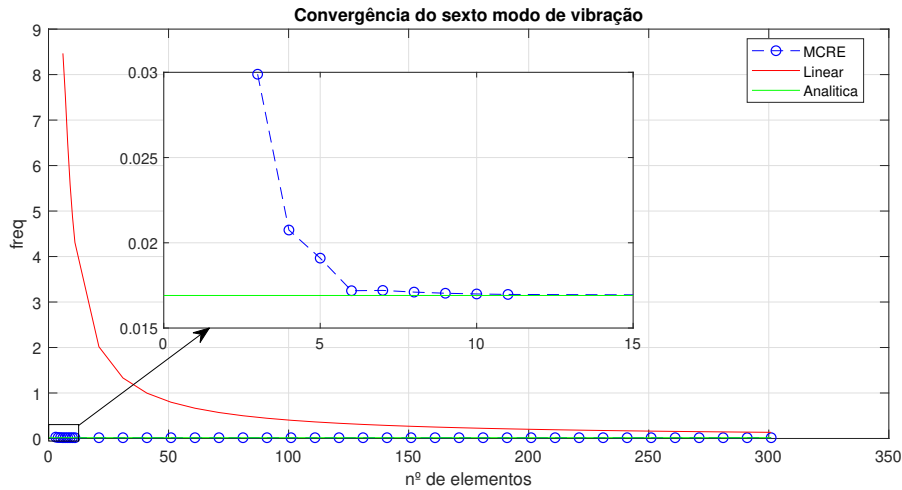


Figura 4.6: Comparação da convergência do sexto modo de vibração entre funções base lineares e MCRE.

É possível observar que para uma estrutura grande, com comprimento de 1000 metros, existe uma demanda significativa de elementos, no caso de se utilizar funções base lineares, para que se alcance um valor próximo do

previsto pela solução analítica, enquanto que o MCRE converge com apenas 10 elementos.

Para testar as funções base em problemas estáticos, na figura 4.7 pode-se observar a solução de uma viga engastada-livre, submetida ao peso próprio como carregamento distribuído, cuja solução analítica pode ser consultada em [34]. A obtenção dos termos que compõe o sistema é feita através da rotina apresentada no Apêndice C. Neste exemplo é realizada a comparação da solução utilizando diferentes funções base, são elas: MCRE até a primeira ordem em ε , funções base lineares e funções base geradas a partir da solução das equações lineares de Timoshenko na forma estática, baseadas em [37]. A rotina para a construção das funções base, baseadas em [37], foram feitas seguindo o mesmo princípio das de Cosserat, apresentadas no Apêndice B. Consiste em propor uma solução analítica aproximada, utilizando o método de Perturbação Regular, para as equações de Timoshenko na forma estática.

Utilizando os parâmetros $\kappa = 5/6$, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ [Pa], $\nu = 0.29$, $r_e = 0.1$ [m], $r_i = 0.0945$ [m], $L = 20$ [m] e o carregamento como peso próprio, é possível observar como as funções base, baseadas na solução estática das equações de Cosserat e Timoshenko, já se aproximam da solução analítica mesmo com somente 5 elementos, enquanto que as funções base lineares demandam mais de 300 elementos para se aproximar da solução analítica.

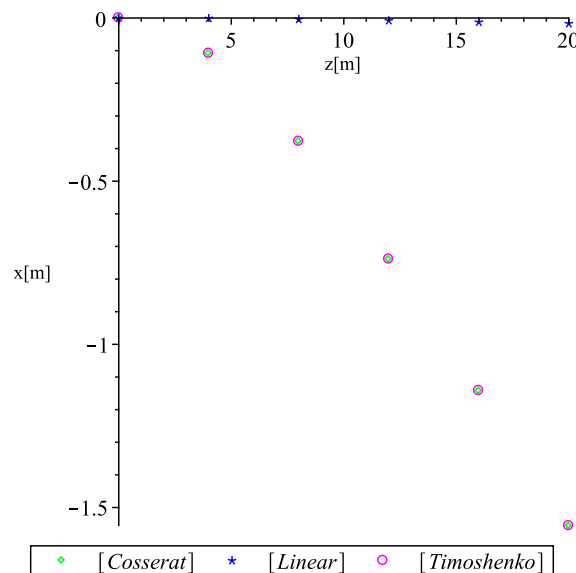


Figura 4.7: Comparação da deflexão de uma viga engastada-livre, utilizando 5 elementos e submetida ao peso próprio, entre funções base lineares, MCRE e funções base baseadas nas equações estáticas de Timoshenko.

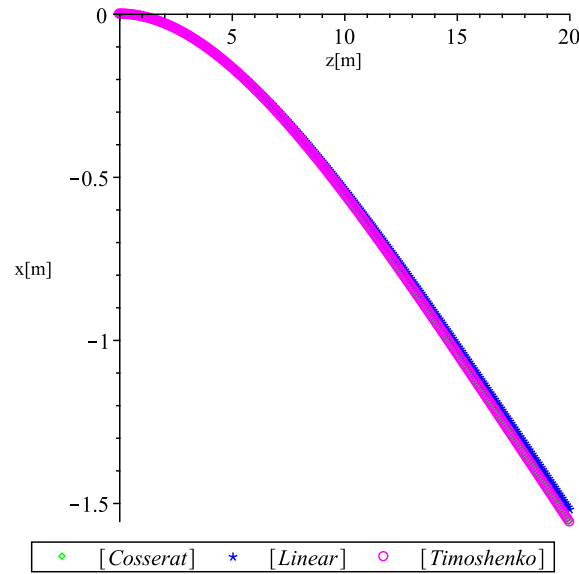
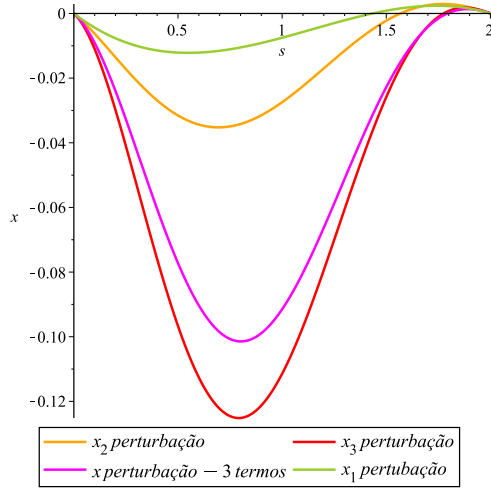


Figura 4.8: Comparação da deflexão de uma viga engastada-livre, utilizando 300 elementos e submetida ao peso próprio, entre funções base lineares, MCRE e funções base baseadas nas equações estáticas de Timoshenko

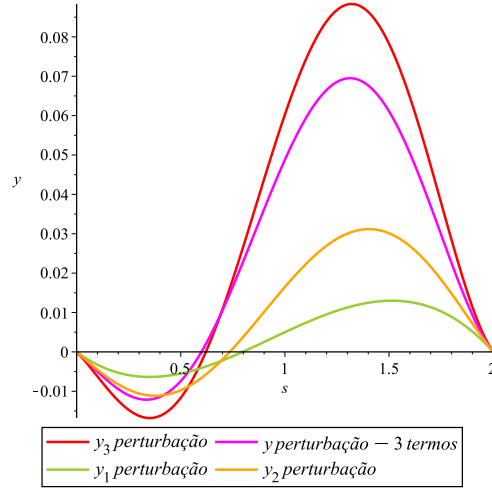
É importante observar que estes resultados indicam que as funções baseadas no MCRE, truncadas na primeira ordem em ε , são basicamente idênticas as funções base construídas a partir das equações de Timoshenko na forma estática. Em outras palavras, a primeira ordem do Método de Perturbação, aplicado as equações de Cosserat, representam uma linearização das equações que, neste caso, representam a particularização da formulação de Cosserat para a formulação de Timoshenko.

Além disto, a utilização dos termos de segunda e terceira ordem em ε resultam em funções base que geram termos não lineares e isto adiciona um custo computacional. Por este exemplo tratar somente do modo de flexão isto não é um problema, porém caso realize-se a implementação para todos os graus de liberdade é importante utilizar a solução completa, tendo precaução na discretização da malha para não gerar elementos muito grandes.

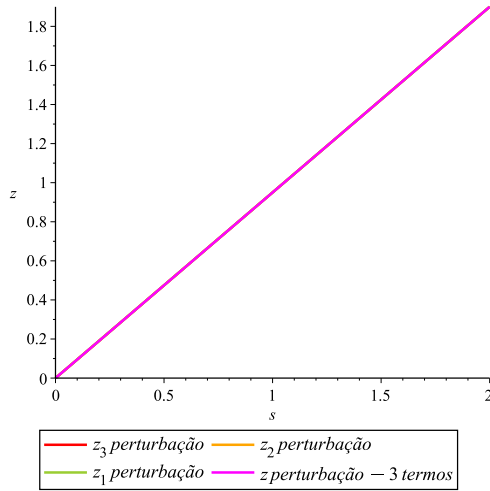
A rotina para obter a solução estática utilizando a formulação de Cosserat, através do método de Elementos Finitos, encontra-se no Apêndice E.



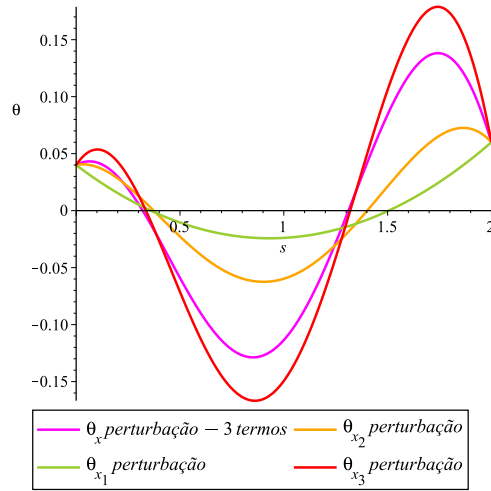
4.3(a):



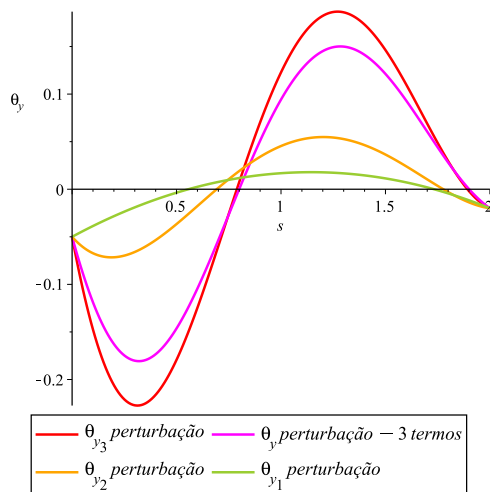
4.3(b):



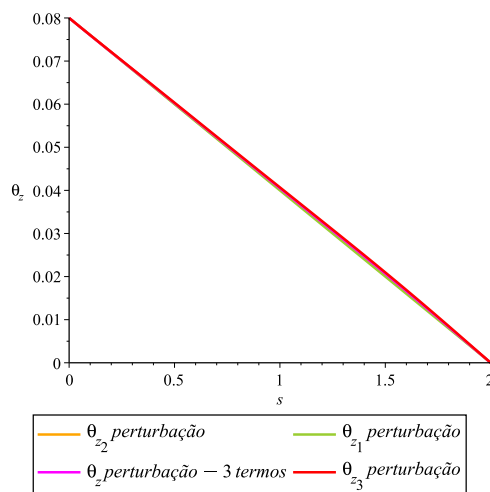
4.3(c):



4.3(d):

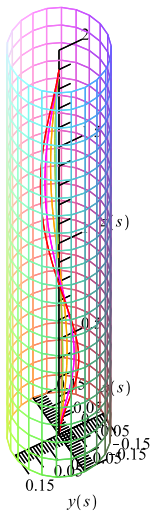


4.3(e):

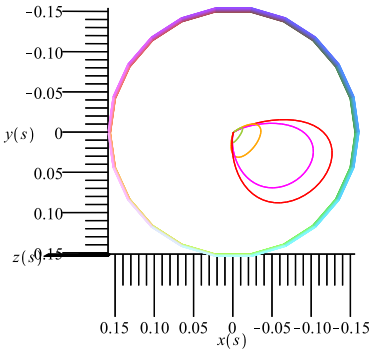


4.3(f):

Figura 4.3: Soluções de x (a), y (b), z (c), θ_x (d), θ_y (e), θ_z (f), considerando diferentes números de termos no método de Perturbação Regular.



4.4(a):



4.4(b):

Figura 4.4: Vista isométrica (a) e superior (b) da configuração da curva material para diferentes ordens em ε .

5

Simulações da Dinâmica

De modo a testar o modelo matemático desenvolvido no Capítulo 3, descrito na forma do sistema de EDPs, realiza-se a simulação da dinâmica através de alguns exemplos que podem ser encontrados na literatura e, deste modo, é possível comparar e analisar a razoabilidade dos resultados.

Pelo fato das funções base desenvolvidas no Capítulo 4 não serem adequadas para o problema proposto e por conta da complexidade de implementar e integrar todas rotinas do método de Elementos Finitos para lidar com a simulação da dinâmica de uma coluna de perfuração, utiliza-se um *software* comercial baseado na análise de Elementos Finitos para integrar o sistema de EDPs. Portanto, os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos através da implementação da formulação apresentada no Capítulo 3 no *software* comercial COMSOL. Por este motivo, a seguir é apresentada uma breve explicação do procedimento para implementação das equações no ambiente de formulação fraca do *software* utilizado.

Diante do sistema de EDPs, composto pelas equações 3-21 e 3-22, deve-se escrevê-las na forma fraca para implementação no *software* utilizado. Existe uma vasta literatura explicando com mais detalhes este procedimento, sendo a referência [34] uma delas, apresentando o método dos Resíduos Ponderados no Capítulo 2 da referência. Uma vantagem do *software* utilizado é que não é necessário escrever a formulação explicitando as variáveis do problema, bastando declarar quem são as variáveis de interesse e escrever a definição de cada um dos termos no ambiente de variáveis.

O processo de escrever as equações na forma fraca consiste, em outras palavras, em admitir uma solução aproximada para as variáveis de interesse, isto é, $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$, $\theta_x(s, t)$, $\theta_y(s, t)$ e $\theta_z(s, t)$. Este processo é feito, resumidamente, buscando a solução destas variáveis em um espaço vetorial (de funções) de dimensão, agora finita. Portanto escreve-se as variáveis de interesse como uma combinação linear das funções base que geram o espaço de dimensão agora finito. Utilizando a notação $(.)_{approx}$, para caracterizar que se trata de uma solução aproximada, temos

$$x_{aprox}(s, t) = \sum_{i=1}^N c_{xi} \phi_{xi}, \quad (5-1)$$

$$y_{aprox}(s, t) = \sum_{i=1}^N c_{yi} \phi_{yi}, \quad (5-2)$$

$$z_{aprox}(s, t) = \sum_{i=1}^N c_{zi} \phi_{zi}, \quad (5-3)$$

$$\theta_{xaprox}(s, t) = \sum_{i=1}^N c_{txi} \phi_{\theta_{xi}}, \quad (5-4)$$

$$\theta_{yaprox}(s, t) = \sum_{i=1}^N c_{tyi} \phi_{\theta_{yi}}, \quad (5-5)$$

$$\theta_{zaprox}(s, t) = \sum_{i=1}^N c_{tzi} \phi_{\theta_{zi}}, \quad (5-6)$$

onde N é a dimensão do espaço vetorial em que se deseja buscar a solução aproximada e $\phi_{(.)_i}$ são as funções base que geram o espaço vetorial, respectivas de cada variável.

Para exemplificar, a primeira equação, do sistema de equações 3-21, é considerada. Passando todos os termos para um só lado do sinal de igualdade e supondo que buscamos a solução aproximada, temos

$$\partial_s n_{1aprox}(s, t) + f_1(s, t) - \rho A \partial_{tt} r_1(s, t) = 0, \quad (5-7)$$

onde n_1 , f_1 e r_1 são a primeira componente dos vetores \mathbf{n} , \mathbf{f} e \mathbf{r} , definidas neste capítulo. Como buscamos uma aproximação para a variável $x(s, t)$ e, portanto, de $n_1(s, t)$ que é definida em termos de $x(s, t)$, chamamos a equação 5-7 de resíduo (R), sendo assim, ocultando a terminologia das variáveis independentes (s, t) e adotando a notação $(*)'$ e $(\dot{*})$ para as derivadas espaciais e temporais, respectivamente, temos

$$R = n'_1 + f_1 - \rho A \ddot{r}_1. \quad (5-8)$$

O método dos Resíduos Ponderados são obtidos através da seguinte integral:

$$\int_0^L w_{(.)_i} R \, ds = 0, \quad (5-9)$$

onde a $w_{(.)_i}$ é conhecida como a função peso e, neste exemplo, pode ser escrita como w_{xi} . A ideia é que integrando o resíduo (R) com a função peso ($w_{(.)_i}$), impõe-se que a média ponderada seja zero. Daí a condição é dita fraca, pois não estamos impondo que $n_1 = n_{1aprox}$ e sim que isto ocorra na média. É válido fazer a colocação de que o método dos Resíduos Ponderados recebe diferentes denominações de acordo com a escolha das funções base $\phi_{(.)_i}$ e peso $w_{(.)_i}$ adotadas no problema. Por exemplo, denomina-se método de Galerkin a escolha de que o espaço das funções peso é idêntico ao espaço das funções base

$$(\phi_{(\cdot)_i} = w_{(\cdot)_i}).$$

Voltando ao exemplo, substituindo a equação 5-8 em 5-9 temos

$$\int_0^L w_{xi} (n'_1 + f_1 - \rho A \ddot{r}_1) ds = 0. \quad (5-10)$$

Para facilitar a compreensão do leitor para os procedimentos seguintes, expandimos a equação 5-10 obtendo

$$\int_0^L w_{xi} n'_1 ds + \int_0^L w_{xi} f_1 ds - \int_0^L w_{xi} \rho A \ddot{r}_1 ds = 0. \quad (5-11)$$

Nesta etapa é de praxe escrever a integral que contém a variável com a derivada espacial utilizando integral por partes pois alivia as restrições impostas à função aproximada, neste caso, n'_1 . É importante ressaltar que a variável de interesse $x(s, t)$, se colocada de forma explícita, se apresenta na segunda derivada. A vantagem do *software* COMSOL é que basta lidarmos com n'_1 e incluirmos as demais definições, sendo assim escreveremos a integral que contém n'_1 por partes.

Da definição de integral por partes, dada por

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (5-12)$$

chamamos $dv = n'_1$ e $u = w_{xi}$, deste modo re-escrevemos a integral que contém n'_1 da equação 5-11 como

$$\int_0^L w_{xi} n'_1 ds = w_{xi} n_1 \Big|_0^L - \int_0^L n_1 w_{xi}' ds. \quad (5-13)$$

Substituindo a equação 5-13 em 5-11, temos

$$w_{xi} n_1 \Big|_0^L - \int_0^L n_1 w_{xi}' ds + \int_0^L w_{xi} f_1 ds - \int_0^L w_{xi} \rho A \ddot{r}_1 ds = 0, \quad (5-14)$$

que pode ser escrito na forma compacta como

$$w_{xi} n_1 \Big|_0^L - \int_0^L n_1 w_{xi}' ds + \int_0^L w_{xi} (f_1 - \rho A \ddot{r}_1) ds = 0. \quad (5-15)$$

O termo que não contém integral ($w_{xi} n_1$) é o fluxo e por definição a função peso deve valer zero no contorno onde a condição é essencial, isto é, para o contorno onde uma condição de Dirichlet é imposta.

Como o programa é feito para tratar o fluxo e as condições de contorno separadamente, deve-se inserir apenas os termos que contém a integral. A parametrização da variável espacial que o *software* utiliza, por padrão, é x e não s como aqui apresentado, portanto a notação apresentada a seguir, para simular a inserção da equação 5-15 no ambiente do COMSOL, leva este fato em consideração. Outra notação importante é que as funções peso, aqui

apresentadas com o símbolo w , são declaradas no programa como $\text{test}(\cdot)$, onde (\cdot) simboliza a variável de interesse que o usuário declarou.

Supondo que o usuário tenha declarado as variáveis do problema como $r1$, $r2$, $r3$ (representando as componentes do vetor posição, isto é, x , y , z , o análogo a função peso, associada a variável x , apresentada aqui como w_{x_i} , seria escrita como $\text{test}(r1)$ no ambiente do COMSOL, isto é, $w_{x_i} \equiv \text{test}(r1)$, $w_{y_i} \equiv \text{test}(r2)$, \dots . Por fim, a notação da derivada espacial é feita adicionando o símbolo que representa a variável espacial independente que, por padrão, é x no *software*. Sendo assim, $w_{x_i}' \equiv \text{test}(r1x)$. Outra notação possível para derivada é $w_{x_i}' \equiv \text{test}(d(r1, x))$. Considerando a notação apresentada, a equação 5-15, inserida no ambiente de formulação fraca do *software*, torna-se

$$-n1 * \text{test}(r1x) + \text{test}(r1) * (f1 - \rho * A * r1tt), \quad (5-16)$$

onde $n1$, $f1$, ρ e A devem estar definidos no ambiente de variáveis/parâmetros do programa. Vale ressaltar que não é necessário a utilização de alguma notação para definir as integrais já que isto já está subentendido para o *software*. O mesmo procedimento é feito para as outras variáveis do problema, seguindo a formulação e equações apresentadas neste capítulo.

Como já mencionado anteriormente, deve-se tomar um cuidado maior com a parametrização das rotações para implementação em problemas dinâmicos e/ou problemas sujeitos a grandes deslocamentos. O trabalho [38] auxilia bastante na compreensão das diferentes formas de parametrizar a matriz de rotação e as vantagens e desvantagens de cada uma delas. Duas parametrizações bastante exploradas são ângulos de Euler e quaternions. Em geral, Ângulos de Euler são mais utilizadas por conta da simplicidade da implementação e da interpretação física dos parâmetros. Em contrapartida têm a desvantagem de possuir singularidades, que irão variar de acordo com a sequência de rotações adotada, como mostrado em [38]. O mesmo trabalho mostra que, por um fundamento topológico, é fato que singularidades não podem ser eliminadas em qualquer tipo de representação de orientação tridimensional. Diante deste fato, a parametrização utilizando quaternions são uma ótima opção para aplicação em problemas que tenham grandes deslocamentos, já que não apresentam nenhum tipo de singularidade. Por outro lado, adicionam uma equação ao problema por necessitar de quatro parâmetros para representar as orientações das rotações.

É possível encontrar diferentes trabalhos sobre colunas de perfuração que utilizam diferentes parametrizações como, por exemplo, quaternions [42], Ângulos de Euler [3, 10] e vetor rotacional [18]. O trabalho [39] propôs fazer a

investigação da dinâmica da coluna de perfuração utilizando o *software* Abaqus pois verificou que o modelo proposto em [18] apresentava singularidade quando o parâmetro de rotação, relacionado a flexão, atingia valores de $\pm\pi$. De fato isto pode ocorrer, porém só é um impedimento para problemas sujeitos a grandes deslocamentos no sentido transversal, isto é, em um plano de flexão. No caso de uma coluna de perfuração vertical, restringida por um poço, para a sequência de rotação $[\theta_y, \theta_x, \theta_z]$, segundo [38], a configuração que ela têm que assumir para que isto ocorra é improvável, necessitando que $\theta_y = \pm\pi/2$ que, outras palavras, significa que em algum segmento do domínio a coluna deve estar horizontal. A reprodução do problema sugerido em [39], que será apresentada como exemplo dos *benchmarks* neste trabalho, utilizando a parametrização de rotações com Ângulos de Euler, para a sequência de rotações $[\theta_y, \theta_x, \theta_z]$, mostrará que nenhuma singularidade é encontrada.

5.1

Benchmarks

Explicada a implementação do modelo matemático, no *software* COM-SOL, é necessário testá-lo para obter a segurança de que a formulação está adequada e correta. Para isto, o modelo matemático é testado em diferentes problemas dinâmicos retirados da literatura e os resultados são comparados.

5.1.1

Viga engastada-livre: teste estático para grandes deslocamentos

Para testar a capacidade do modelo de lidar com grandes deslocamentos e verificar eventuais ocorrências de singularidades, o mesmo exemplo proposto em [39] é realizado.

O exemplo consiste em um problema de flambagem, onde realiza-se uma varredura paramétrica aumentando os carregamentos compressivo axial F_z e o momento $M_y = eF_z$ no final da viga até a carga crítica de flambagem, onde e representa uma excentricidade na força aplicada. A proposta deste problema é feita pois as soluções numéricas podem ser comparadas com a solução analítica de uma viga engastada-livre submetida a um carregamento axial com uma excentricidade, apresentado em [43], que prevê a deflexão no final da viga pela equação

$$\delta = \frac{M_y}{F_z} \left(\sec \left(L \sqrt{\frac{F_z}{EI}} \right) - 1 \right). \quad (5-17)$$

Uma imagem ilustrativa do problema pode ser observada na figura 5.1.



Figura 5.1: Ilustração de uma viga engastada-livre submetida a um carregamento axial e um momento na extremidade livre. Retirada de [39].

A simulação foi realizada para os seguintes parâmetros: $L = 20$ [m], $r = 0.1$ [m], $\rho = 7850$ [kg/m³], $E = 2.1 \times 10^{11}$ [Pa], $\nu = 0.365$, $\kappa = 0.833$ e I é o momento de inércia da seção transversal. A excentricidade considerada vale $e = \frac{L}{100}$ e a força ηF_z , onde $F_z = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$, sendo aplicada incrementalmente através de $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$.

A seguir podemos observar o resultado da deflexão de x em função de η , quando comparada com a solução analítica.

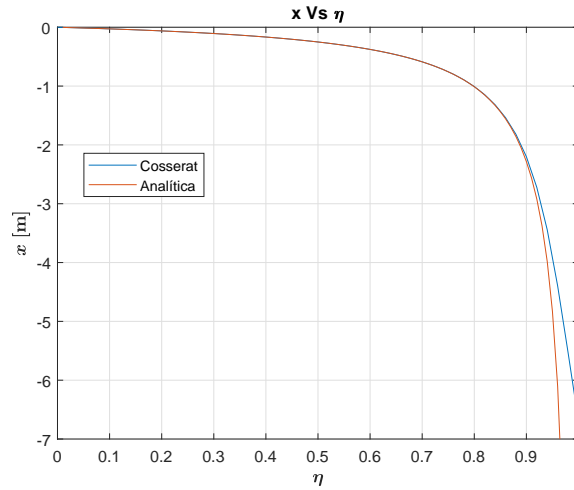


Figura 5.2: Deflexão de x em função de η para comparação com solução analítica.

Como pode-se observar da figura 5.2, a simulação não encontrou nenhum problema em computar a deflexão até $\eta = 1$ que, analiticamente, representa o carregamento crítico de flambagem da viga. Além disto, este resultado está de acordo com o modelo de Cosserat, utilizando parametrização das rotações com quaternions, desenvolvido em [42]. Os resultados de deflexão máxima são ligeiramente diferentes da solução analítica. É possível que a causa desta diferença esteja na proposta feita para as relações constitutivas, visto que supõe-se que as seções deformam rigidamente e assim subestimam as tensões.

Outros resultados interessantes, que podem ser observados nas figuras 5.3 e 5.4, são a configuração final da viga e a variação do ângulo θ_y em função de η . É possível ver que, para o modelo proposto, o deslocamento angular θ_y não chegou a $-\pi/2$, mesmo em $\eta = 1$.

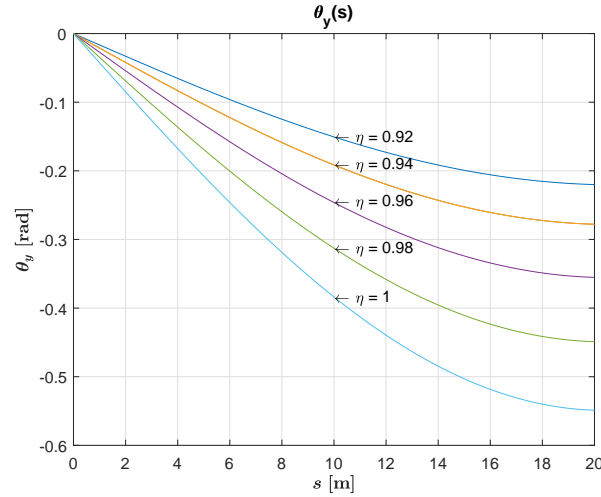


Figura 5.3: Deslocamento angular θ_y para diferentes valores de η .

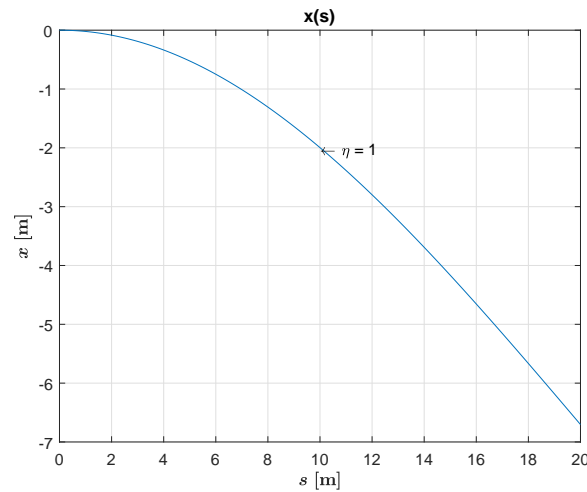


Figura 5.4: Deflexão de x para $\eta = 1$.

Diante destes resultados é possível compreender a influência da forma de parametrizar a matriz de rotação na ocorrência, ou não, de singularidades. O trabalho [18] propõe utilizar a expansão de MacLaurin quando descreve os diretores, podendo ser esta a causa da singularidade encontrada em [39].

5.1.2

Viga engastada-livre sob carregamentos harmônicos

Seguindo com a série de *benchmarks*, as mesmas condições descritas em [2] são aplicadas no ambiente do *software*. O problema consiste em uma viga engastada-livre submetida a carregamentos harmônicos em duas direções, dados por $f_x(t) = 2 \sin(\pi s) \sin(8\omega_0 t)$ [kN · m⁻¹] e $f_y(t) = 2 \sin(\pi s) \sin(8\omega_0 t)$ [kN · m⁻¹], onde ω_0 é uma frequência de referência com valor de $\omega_0 = 207.0236$ [rad · s⁻¹]. Os parâmetros geométricos e de materiais são: $L = 1$ [m], $b = 0.06$ [m], $a = 0.04$ [m], $\rho = 2.73 \times 10^3$ [kg/m³], $E = 7.1 \times 10^{10}$ [Pa], $\nu = 0.32$, $\kappa = 0.833$, onde L é o comprimento da viga, b é a largura e a a altura que caracterizam a seção transversal retangular, κ é o fator de correção do cisalhamento.

Os resultados da resposta dinâmica da viga, avaliada em $s = L$, podem ser observados na figura 5.5.

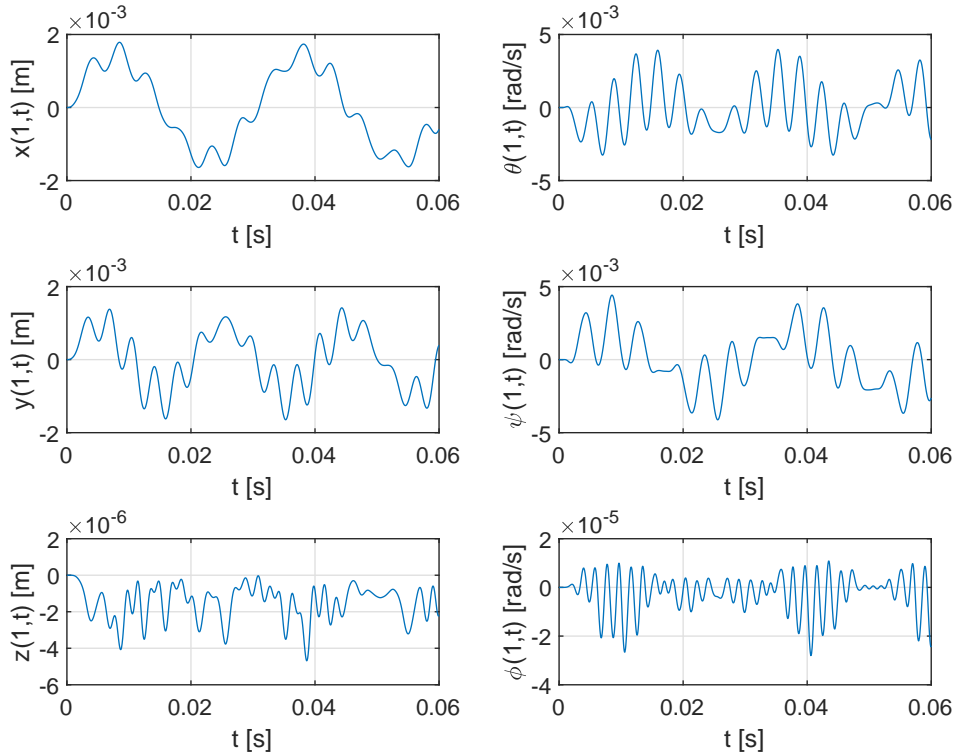


Figura 5.5: Respostas dinâmicas de uma viga engastada-livre a partir de excitações harmônicas. Simulações realizadas em COMSOL.

As variáveis $\theta(s, t)$, $\psi(s, t)$ e $\phi(s, t)$ são equivalentes a $\theta_x(s, t)$, $\theta_y(s, t)$ e $\theta_z(s, t)$, respectivamente.

A evolução dos deslocamentos de $x(s, t)$ e $y(s, t)$ ao longo do tempo, diante do problema proposto, são apresentados nas figuras 5.6 e 5.7.

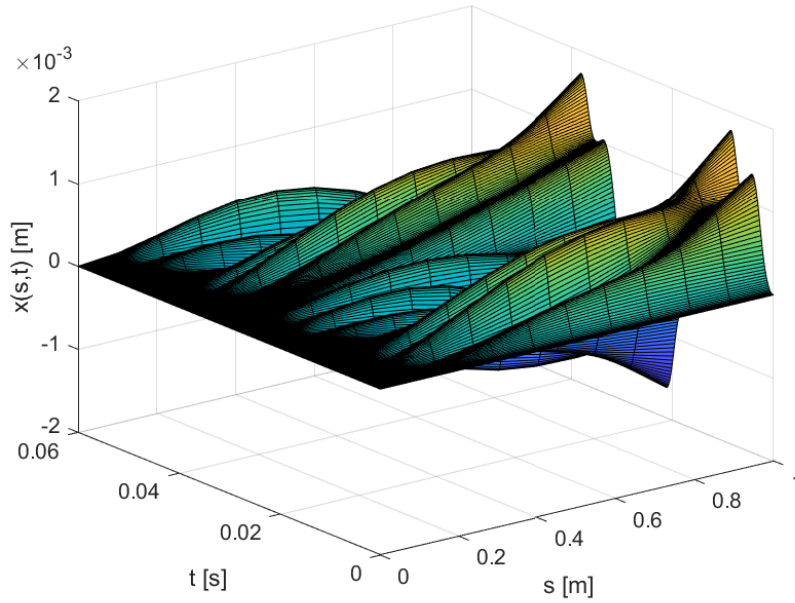


Figura 5.6: Evolução dos deslocamentos de $x(s, t)$, para uma viga engastada-livre, ao longo do tempo e submetida a excitações harmônicas.

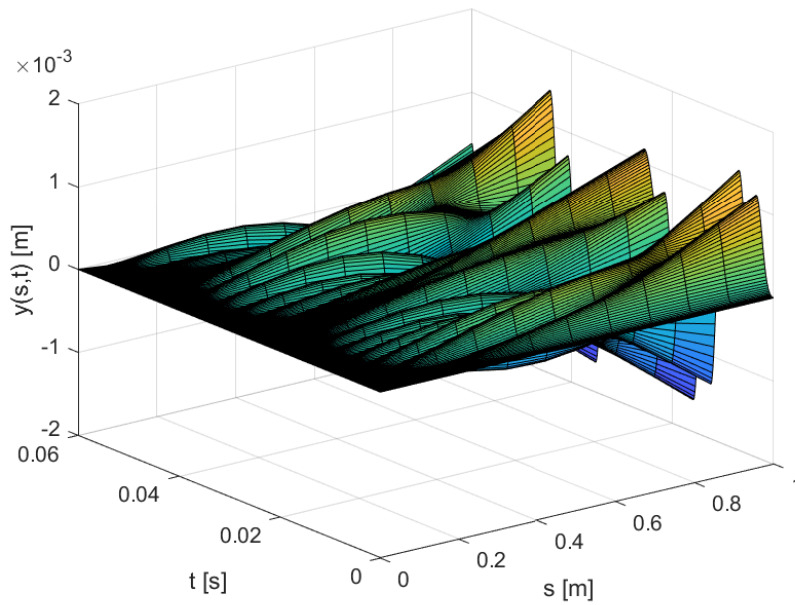


Figura 5.7: Evolução dos deslocamentos de $y(s, t)$, para uma viga engastada-livre, ao longo do tempo e submetida a excitações harmônicas.

Comparando os resultados obtidos com o trabalho de referência proposto em [2], o modelo aqui desenvolvido produziu resultados muito semelhantes com

uma pequena diferença na amplitude dos deslocamentos, estando um pouco maior, sendo a diferença na ordem de 10^{-4} , o que pode ser atribuído ao tipo de integrador numérico utilizado, parâmetros de tolerância, tamanho máximo de passo de tempo permitido, etc.

5.1.3

Pêndulo flexível

Um problema bastante interessante e explorado da literatura é o problema de um pêndulo flexível. O problema consiste na utilização de uma teoria de viga ou de uma estrutura unidimensional para submetê-la às condições de contorno que irão caracterizar o movimento pendular característico, isto é, em uma extremidade com os deslocamentos lineares restritos e estando livre para rotacionar e a outra extremidade completamente livre. Tipicamente, o único carregamento presente deve ser o peso próprio, portanto deve estar na forma de um carregamento distribuído que irá caracterizar a força peso da estrutura. O interessante neste problema é analisar como a configuração da estrutura muda para diferentes instantes de tempo, parâmetros geométricos e de materiais, isto é, como que, conforme a estrutura passa a ser mais esbelta e/ou têm modo de elasticidade menor, as deformações passam a ser mais acentuadas, dando aspecto do movimento de um macarrão cozido, por exemplo.

Como o propósito desta seção é testar o modelo para um determinado problema para então validá-lo, os resultados apresentados aqui serão restritos aos parâmetros de materiais que demandam mais do modelo, em outras palavras, aos parâmetros que irão proporcionar maiores deformações, sendo assim, menor módulo de elasticidade proposto pelo trabalho [33], que será utilizado como referência para comparação dos resultados. Os parâmetros geométricos e de materiais são: $L = 1$ [m], $r = 0.005$ [m], $\rho = 1500$ [kg/m³], $E = 0.05$ [GPa], $\nu = 0.25$, $\kappa = 0.833$, onde L é o comprimento da viga, r é o raio que caracteriza a seção transversal circular da viga, κ é o fator de correção do cisalhamento. O valor da aceleração gravitacional utilizado na simulação foi de $g = 9.8$ [m/s²].

A seguir são apresentados os resultados da simulação. É possível observar na figura 5.8 como a velocidade longitudinal (v_2), avaliada na extremidade livre da viga ($s = L$), variou com o tempo e, na figura 5.9, a configuração do pêndulo em diferentes instantes de tempo.

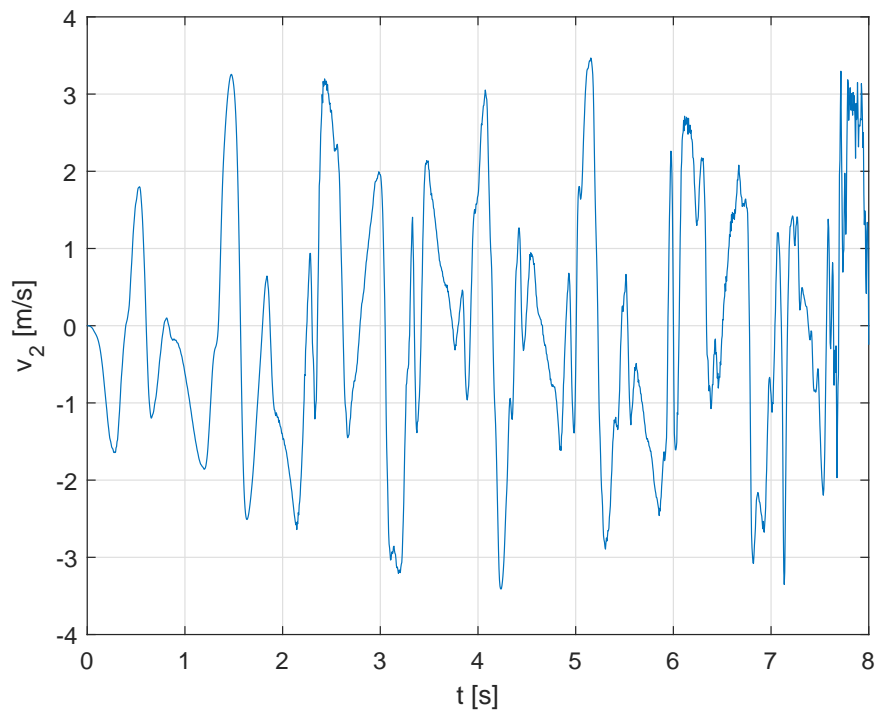


Figura 5.8: Velocidade longitudinal, na base material, avaliada em $s = L$.

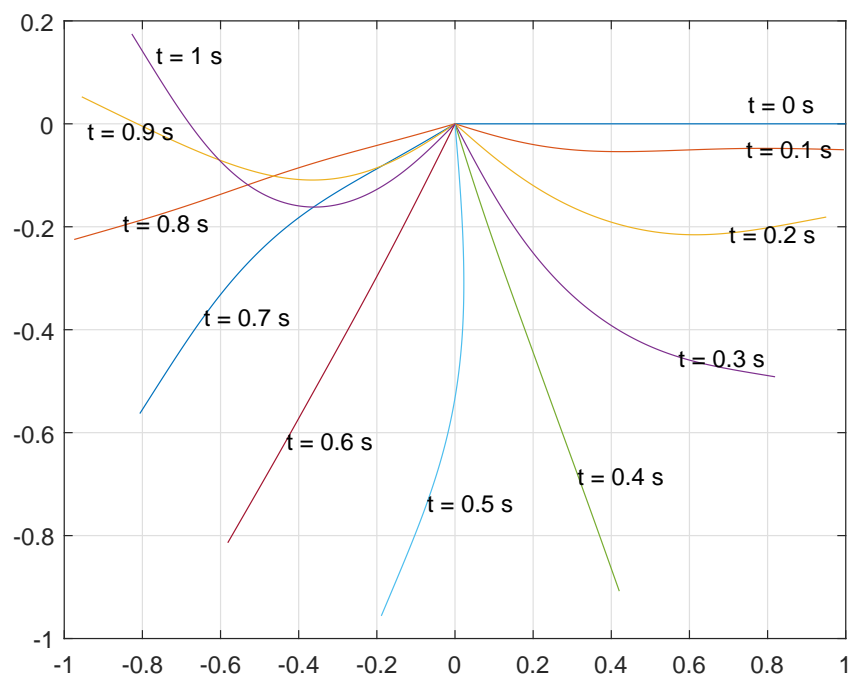


Figura 5.9: Configuração do pêndulo flexível para diferentes instantes de tempo.

Os resultados obtidos da simulação estão consistentes com a literatura de referência.

5.2

Caracterização do problema proposto

Uma vez tendo testado o modelo matemático que irá descrever a dinâmica da curva de Cosserat, é necessário caracterizar o problema de uma coluna de perfuração. Para isto alguns elementos são fundamentais, tais como adotar uma estratégia de controle para velocidade angular na parte superior da coluna, um modelo de contato para descrever os choques da coluna contra a parede do poço e um modelo de interação broca-rocha. Esta seção se dedica a caracterizar o problema de uma coluna de perfuração, apresentando os métodos e abordagens utilizadas para simular algumas condições nas quais uma coluna de perfuração está sujeita.

Para introduzir estes diferentes fenômenos a figura 5.2 ilustra, de forma geral, a caracterização do problema de perfuração, apresentando de forma esquemática as forças, torques e condições nas quais a coluna está sujeita. Na figura 5.2 é possível observar um torque aplicado no topo da coluna de perfuração (T_{top}), tipicamente pela mesa giratória ou top drive, a força no gancho (f_{top}), que sustenta uma parte do peso sistema, o sentido de ação da gravidade, a força de reação da rocha contra a broca (f_{br}), decorrente de parte da força peso, o torque gerado por conta da interação broca-rocha (T_{br}), a restrição da parede do poço, modelada como elástica, e o sistema de coordenadas adotado.

A seguir, as condições nas quais uma coluna de perfuração está sujeita serão discutidas com mais detalhes e os modelos que permitirão descrevê-las serão formulados.

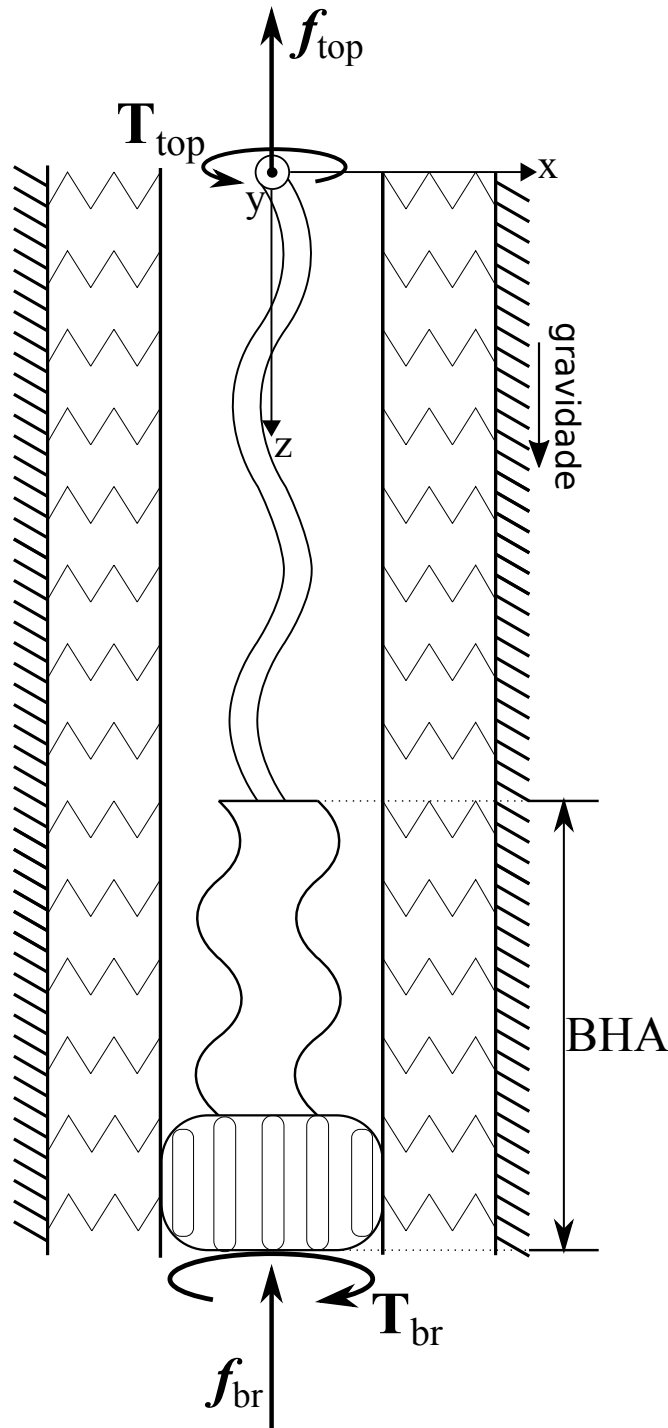


Figura 5.10: Ilustração do problema de uma coluna de perfuração esquematizada com as forças, torques, restrições e condições nas quais a simulação é realizada.

5.2.1

Modelos de interação broca-rocha

Um dos fatores que influenciam na dinâmica de uma coluna de perfuração, durante a operação, é a presença de forças e torques atuando na broca.

Estes carregamentos surgem como uma reação frente a interação entre a broca e a rocha.

Para caracterizar as forças e torques, resultantes da interação entre broca e rocha, este trabalho apresentará dois modelos, um utilizado em [28] e outro em [47]. A adoção destes modelos se dá pelo fato deles representarem bem a maneira como a broca penetra a rocha.

5.2.1.1 Modelo 1

O modelo [28] foi baseado em medidas reais, sob condições estáveis, de uma operação de perfuração. Baseado nestas medidas, o modelo propõe uma correlação entre o torque na broca (TOB), a velocidade angular da broca (Ω), o peso sobre a broca (WOB), a profundidade do corte (DOC) e a taxa de penetração (ROP), da seguinte maneira:

$$\text{ROP} = -a_1 + a_2 \cdot \text{WOB} + a_3 \Omega, \quad (5-18)$$

$$\text{TOB} = a_4 \cdot \text{DOC} + a_5, \quad (5-19)$$

$$\text{DOC} = \frac{\text{ROP}}{\Omega}. \quad (5-20)$$

É importante notar que alguns destes parâmetros estão relacionados com as variáveis de interesse do problema, isto é, a taxa de penetração (ROP) está relacionada com o avanço na direção longitudinal (\dot{z}) avaliada no ultimo nó da malha (representando a broca) e que terá a notação de \dot{z}_b . O torque na broca (TOB) descreve o torque resultante da interação broca-rocha que, seguindo a notação utilizada na figura 5.2, é dado por T_{br} . Ainda seguindo a notação da figura 5.2, o peso sobre a broca (WOB) é representado pela força de reação da rocha contra a broca f_{br} . Além disto, a velocidade angular da broca (Ω) é a velocidade angular em torno do eixo z ($\dot{\theta}_z$), avaliada ultimo nó, que será representada por ω_b . Por último, a profundidade do corte (DOC) será representada por $\mathcal{D}(t)$. Reescrevendo os parâmetros temos

$$\dot{z}_b(t) = -a_1 + a_2 \cdot f_{br}(t) + a_3 \omega_b(t), \quad (5-21)$$

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\dot{z}_b(t)}{\omega_b(t)}, \quad (5-22)$$

$$T_{br}(t) = a_4 \cdot \mathcal{D}(t) + a_5. \quad (5-23)$$

Para descrever os efeitos de fricção, uma função de regularização deve ser introduzida nas equações 5-23, dada por

$$Z(\omega_b(t)) = \frac{\omega_b(t)}{\sqrt{\omega_b(t)^2 + e^2}}, \quad (5-24)$$

resultando nas equações

$$\mathcal{D}_Z(t) = \frac{Z(\omega_b(t))^2(-a_1 + a_2 f_{br}(t))}{\omega_b(t)} + a_3 Z(\omega_b(t)), \quad (5-25)$$

$$T_{brZ}(t) = -a_4 Z(\omega_b(t))^2 \mathcal{D}_Z(t) - a_5 Z(\omega_b(t)), \quad (5-26)$$

onde e é o parâmetro de regularização. O gráfico da função de regularização, para diferentes valores de e , pode ser observado na figura 5.11.

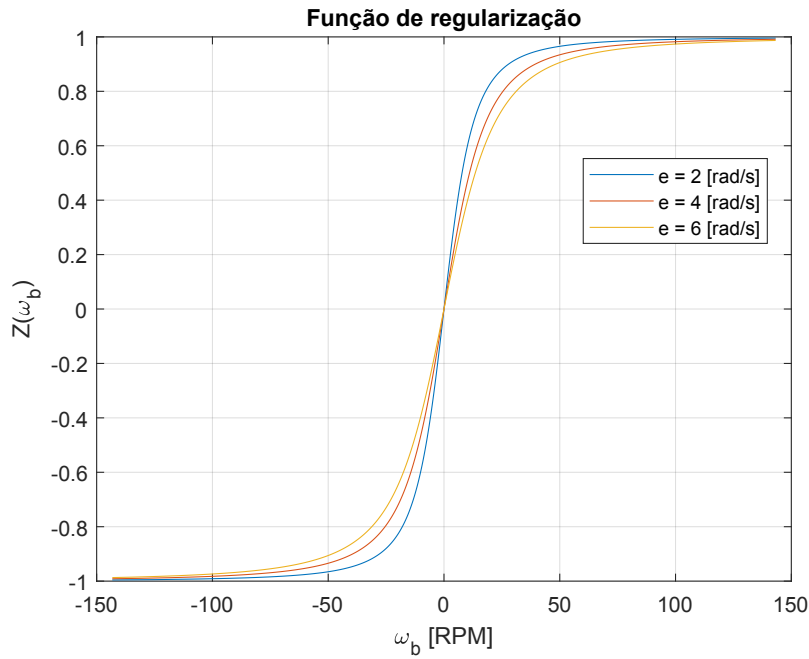


Figura 5.11: Função de regularização para diferentes valores do parâmetro de regularização e .

5.2.1.2 Modelo 2

Como os parâmetros (a_1, a_2, \dots) , que compõe o modelo anterior, foram propostos diante de uma operação de perfuração controlada, para um domínio de operação particular ($\Omega \approx 100$ RPM e WOB ≈ 100 kN), é interessante apresentar outros modelos para caracterizar a interação broca-rocha, permitindo uma maior liberdade na escolha dos parâmetros de operação.

O modelo alternativo, para descrever a interação broca-rocha, é retirado de [47], que descreve o torque ($T_{br}(t)$), gerado por conta desta interação, a partir da equação

$$T_{br}(t) = \bar{r} \mu_{fb} f_{br} \left[\tanh(\alpha_1 \omega_b(t)) + \frac{\alpha_2 \omega_b(t)}{1 + \alpha_3 \omega_b(t)^2} \right], \quad (5-27)$$

onde μ_{fb} é um coeficiente de fricção (equivalente ao coeficiente cinético de fricção), α_1 , α_2 e α_3 são constantes que dependem das propriedades das rochas que estão sendo penetradas e $\bar{r} \simeq 0.6667 r_{bit}$ é uma função que depende do raio da broca (r_{bit}). O gráfico do modelo de interação broca-rocha, para diferentes valores de f_{br} , pode ser observado na figura 5.12.

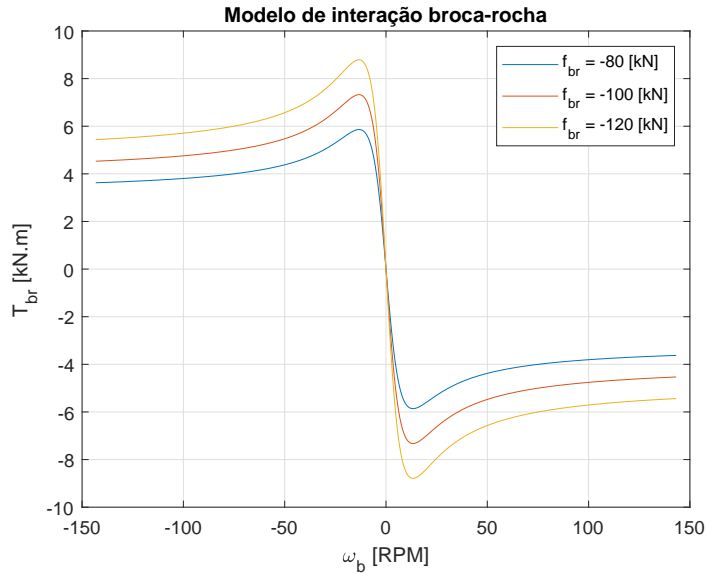


Figura 5.12: Modelo que descreve a torque gerado pela interação broca-rocha para diferentes valores de peso sobre a broca.

Os dados utilizados neste modelo de interação broca-rocha, que se equivalem a simulação do modelo anterior, são apresentados na tabela 5.1.

Variável	Valor	Unidade	Descrição
μ_{fb}	0.06	-	Coeficiente de fricção
r_{bit}	1	m	Raio equivalente da broca
α_1	1	s	Primeira constante do modelo de interação broca-rocha
α_2	2	s	Segunda constante do modelo de interação broca-rocha
α_3	1	s ²	Terceira constante do modelo de interação broca-rocha

Tabela 5.1: Valores do modelo de interação broca-rocha, descrito pela equação 5-27, que se equivalem ao modelo descrito pela equação 5-26.

Os resultados apresentados neste capítulo comparam os dois modelos de interação broca-rocha apresentados.

5.2.2

Modelo de contato da coluna com a parede do poço

Como apresentado no Capítulo 2, a coluna de perfuração pode vibrar lateralmente e, desta maneira, eventualmente colidir com a parede do poço na qual está confinada. Estas colisões representam um contato mecânico entre a coluna de perfuração e a parede do poço, gerando efeitos de choque e fricção.

A modelagem do choque deve partir de um modelo que permita identificar se, em um dado instante de tempo, a condição de contato está presente ou não. Deste modo, é necessário compreender geometricamente que configuração deve ocorrer para que haja contato e, então, propor um modelo para descrever esta condição.

Se tratando de um poço vertical, que é o caso do modelo proposto, o contato irá ocorrer caso a distância radial da linha neutra ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), em relação à origem, somada ao raio externo do segmento de coluna (r_e) for igual ao raio do poço ($r_{poço}$). Deste modo, a função que descreve a condição de contato ($1_c(r)$) será uma função que deve retornar o valor 1 caso $\sqrt{x^2 + y^2} + r_e > r_{poço}$ e 0, caso contrário. É importante notar que o sinal de maior é utilizado pois a força de reação devido ao contato é baseada na penetração da coluna em relação à parede do poço, portanto a condição de igualdade não adiciona nenhuma força ao sistema. A figura 5.13 ilustra a condição de contato.

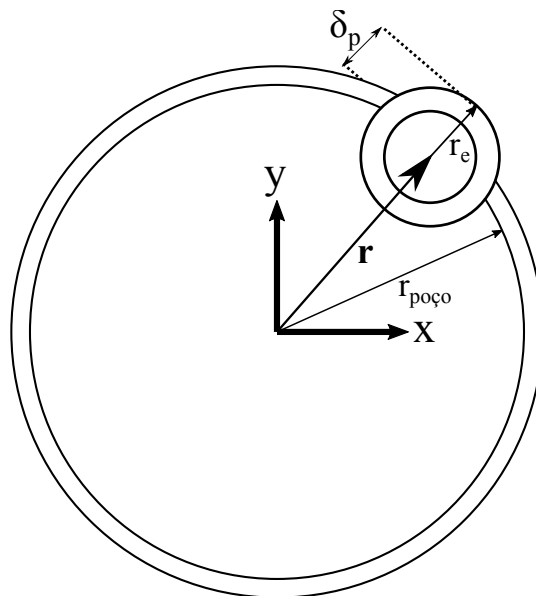


Figura 5.13: Ilustração da condição de contato no sistema.

Uma vez tendo a função que identifica a condição de contato, é preciso propor o modelo que descreverá a força de reação na condição de contato. Este trabalho irá considerar que a força de reação é uma força elástica, portanto

dependerá do parâmetro de rigidez atribuído à parede do poço (k_p) e o quanto a coluna irá penetrar em relação à parede do poço, isto é, $\delta_p = r + r_e - r_{\text{poço}}$. Finalmente, a direção normal deve ser computada, isto é, $-\frac{x}{r}$ e $-\frac{y}{r}$. Sendo assim, as forças de reação, relativas ao impacto da coluna de perfuração contra parede do poço, são

$$\begin{aligned} F_{xc} &= -\mathbb{1}_c(r)k_p\delta_p\frac{x}{r}, \\ F_{yc} &= -\mathbb{1}_c(r)k_p\delta_p\frac{y}{r}. \end{aligned} \quad (5-28)$$

Além de transladar, a coluna também está girando, portanto no momento do contato irá surgir uma fricção entre a coluna e a parede do poço, gerando um torque cujo modelo para descrevê-lo é dado por

$$T_{zc} = -\mu_c F_n r_e \text{sign}(\dot{\theta}_z), \quad (5-29)$$

onde $F_n = \sqrt{F_{xc}^2 + F_{yc}^2}$, μ_c é o coeficiente de fricção e $\text{sign}(a)$ é uma função que retorna 1 se $a \geq 0$ e retorna -1 se $a < 0$.

5.2.3

Equação do controlador

Para simular o motor que impõe a rotação na mesa rotativa e, portanto, na coluna de perfuração, supõe-se que este motor utiliza os mecanismos típicos de controle. Existem diversas abordagens que podem ser utilizadas para propor um modelo de controle, sendo uma das mais simples a do modelo de controlador proporcional-integral (PI).

O modelo proposto neste trabalho é o mesmo apresentado por Tucker e Wang em [28]. O controlador PI busca manter uma velocidade angular constante ω_{target} através da imposição de um torque da forma

$$T_{\text{top}}(t) = c_p \dot{\Delta}_\omega(t) + c_i \Delta_\omega(t), \quad (5-30)$$

onde

$$\dot{\Delta}_\omega(t) = \omega_{\text{target}} - \dot{\theta}_z(0, t). \quad (5-31)$$

Os parâmetros c_p e c_i são o ganho proporcional e o ganho integral, respectivamente. A velocidade angular de operação desejada (ω_{target}) é imposta pelo usuário e, evidentemente, $\dot{\theta}_z(0, t)$ é a velocidade angular do sistema avaliada no primeiro nó ($s = 0$).

A escolha dos parâmetros de ganho proporcional e integral afetam significativamente a estabilidade torcional do sistema, principalmente na condição onde ocorre *stick-slip*. Tucker e Wang propõe modelos de controle mais sofis-

ticados [28] com objetivo de melhorar a absorção de ondas torcionais no topo, dentro de um domínio espectral.

5.3

Resultados

Um vez tendo analisado que o modelo está de acordo com outras teorias e que as soluções apresentadas na seção anterior são compatíveis com a teoria de Cosserat, o modelo é aplicado ao problema da coluna de perfuração, que é o objeto de interesse deste trabalho. Para caracterizar o problema de uma coluna de perfuração, as condições iniciais, de contorno e a condição de contato são impostas nas equações. Deste modo, as equações estão sujeitas a um torque aplicado no topo ($s = 0$), que é regulado a partir da estratégia de controle proposta, a um torque na broca ($s = L$) que, por sua vez, é descrito pelo modelo de interação broca-rocha, aos carregamentos que caracterizam a condição inicial, isto é, as forças axiais no topo e na broca que configuram o equilíbrio e, por fim, as eventuais forças e torques que devem ser introduzidas no sistema quando a condição de impacto estiver ativa.

Por se tratar de um problema bastante complexo, as primeiras simulações serão realizadas com o objetivo de reproduzir os resultados reportados em [28]. Neste caso, a coluna está acoplada a dois corpos rígidos de massas M_{top} e M_b e com momentos de inércia J_{top} e J_b , caracterizando o conjunto de equipamentos no topo do sistema ($s = 0$) e, na outra extremidade ($s = L$), o segmento do BHA mais a broca. Como condição inicial, a parte superior da coluna é engastada e apenas o peso do sistema e a força de reação da rocha contra a broca (f_{br}) são aplicados. Uma vez conhecida a configuração de equilíbrio, a condição de engaste é retirada e os torques e a força no topo são introduzidos. A figura 5.14 ilustra estas condições. Deste modo, a simulação é realizada de acordo com as seguintes condições de contorno:

$$M_{top} \cdot \ddot{z}(0, t) = n_3(0, t) + M_{top} \cdot g - f_{top}, \quad (5-32)$$

$$J_{top} \cdot \ddot{\theta}_z(0, t) = m_3(0, t) - T_{top}, \quad (5-33)$$

no topo e

$$M_b \cdot \ddot{z}(L, t) = n_3(L, t) + M_b \cdot g - f_{br}, \quad (5-34)$$

$$J_b \cdot \ddot{\theta}_z(L, t) = m_3(L, t) + T_{fb}, \quad (5-35)$$

na broca. As condições de contorno são implementadas no *software* aplicando

as forças e torques descritos nas equações 5-32, 5-33, 5-34 e 5-35, nas respectivas extremidades. A força peso por unidade de comprimento, dos segmentos de

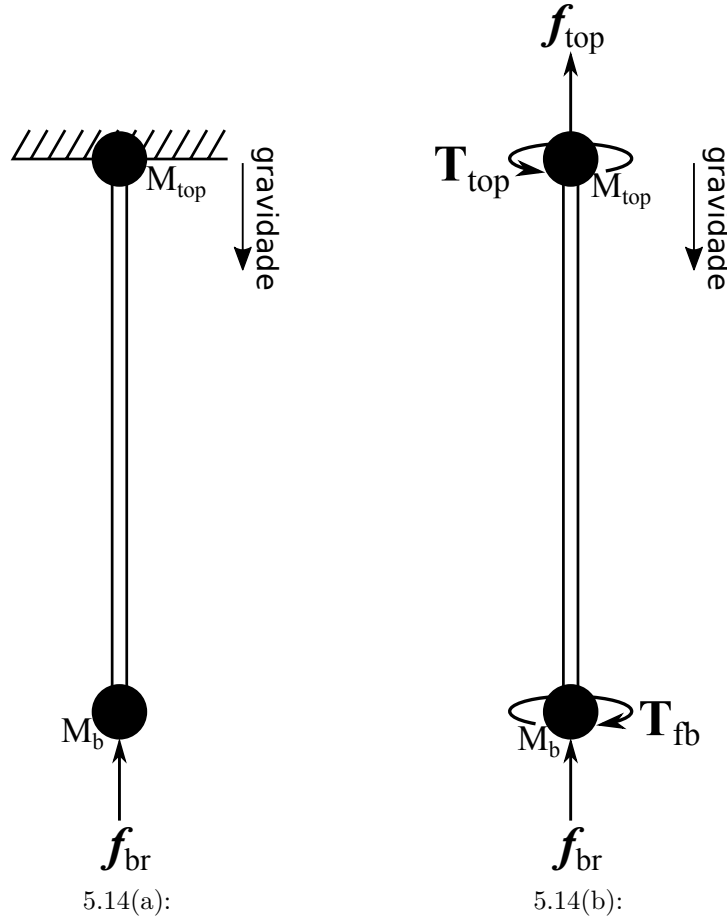


Figura 5.14: Configuração inicial do sistema (a) e de simulação do problema (b).

coluna, é dada pela componente do vetor de força distribuída (\mathbf{f}), apresentada na equação 3-21, segundo $f_3 = \rho Ag$. O peso de todo sistema é dado por $f_{sis} = (\rho AL + M_{top} + M_b)g$ e, portanto, a força no topo (f_{top}) será a força peso de todo sistema menos o peso sobre a broca (f_{br}), isto é, $f_{top} = f_{sis} - f_{br}$. Conhecida as forças e torques que caracterizam o problema, as simulações são realizadas com os valores de parâmetros descritos na tabela 5.2.

Na figura 5.15, pode-se observar o resultado da simulação que define a configuração de equilíbrio. É possível notar que houve um deslocamento axial de aproximadamente 1.4 metros.

Variável	Valor	Unidade	Descrição
L	$3.00 \cdot 10^{+03}$	m	Comprimento total da coluna
r_e	$6.35 \cdot 10^{-02}$	m	Raio externo da coluna
r_i	$5.43 \cdot 10^{-02}$	m	Raio interno da coluna
ρ	$8.01 \cdot 10^{+03}$	kg.m ⁻³	Densidade da coluna
E	$2.07 \cdot 10^{+11}$	Pa	Módulo de elasticidade
G	$7.96 \cdot 10^{+10}$	Pa	Módulo de cisalhamento
M_{top}	$5.08 \cdot 10^{+04}$	kg	Massa concentrada em $s = 0$
M_b	$5.00 \cdot 10^{+03}$	kg	Massa concentrada em $s = L$
J_{top}	$5.00 \cdot 10^{+02}$	kg.m ²	Momento de inércia em $s = 0$
J_b	$3.94 \cdot 10^{+02}$	kg.m ²	Momento de inércia em $s = L$
g	$9.81 \cdot 10^{+00}$	m.s ⁻²	Aceleração gravitacional
ω_{target}	$1.00 \cdot 10^{+02}$	RPM	Velocidade angular de operação desejada
f_{br}	$1.20 \cdot 10^{+02}$	kN	Peso sobre a broca
c_p	$2.00 \cdot 10^{+02}$	N.m.s.rad ⁻¹	Parâmetro de ganho proporcional
c_i	$1.00 \cdot 10^{+02}$	N.m.rad ⁻¹	Parâmetro de ganho integral
a_1	$3.429 \cdot 10^{-03}$	m.s ⁻¹	1º parâmetro do modelo 1 de interação broca-rocha
a_2	$5.672 \cdot 10^{-08}$	m.N ⁻¹ .s ⁻¹	2º parâmetro do modelo 1 de interação broca-rocha
a_3	$1.374 \cdot 10^{-04}$	m.rad ⁻¹	3º parâmetro do modelo 1 de interação broca-rocha
a_4	$9.537 \cdot 10^{+06}$	N.rad	4º parâmetro do modelo 1 de interação broca-rocha
a_5	$1.475 \cdot 10^{+03}$	N.m	5º parâmetro do modelo 1 de interação broca-rocha

Tabela 5.2: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações que reproduzem o trabalho de Tucker e Wang.

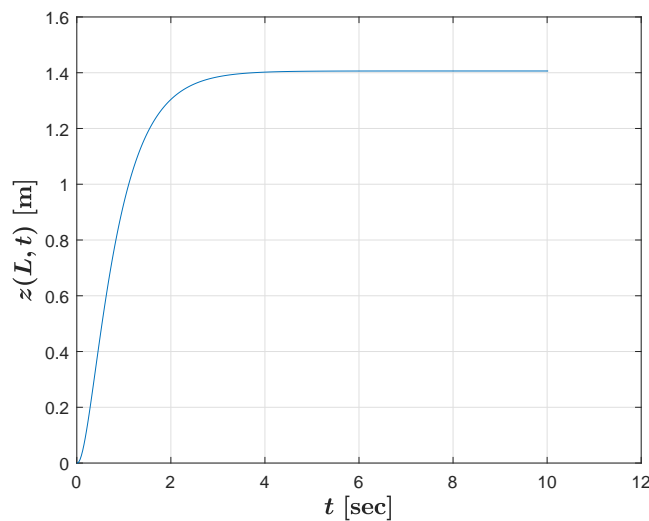
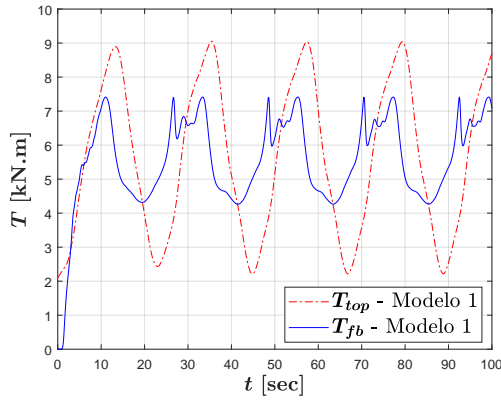
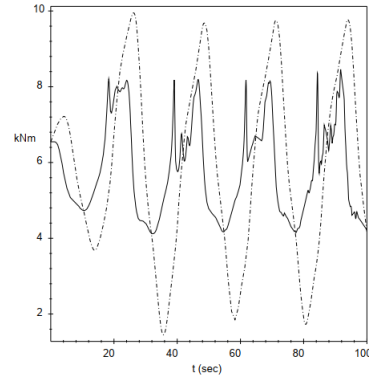


Figura 5.15: Simulação para determinar a configuração de equilíbrio do sistema.

Conhecida a configuração de equilíbrio, deseja-se comparar os resultados da simulação realizada neste trabalho com o de referência [28]. Na figura 5.16, é possível comparar os resultados relativos aos torques no topo e na broca.



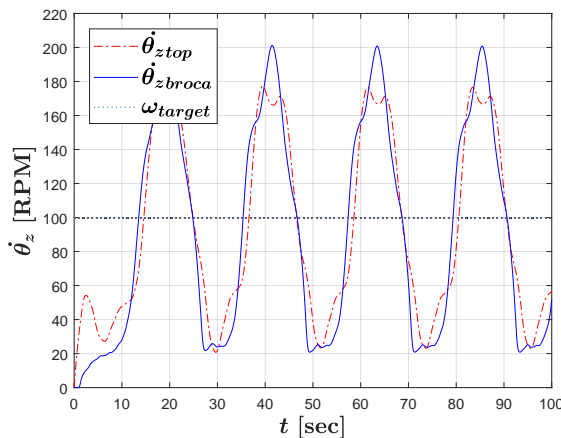
5.16(a):



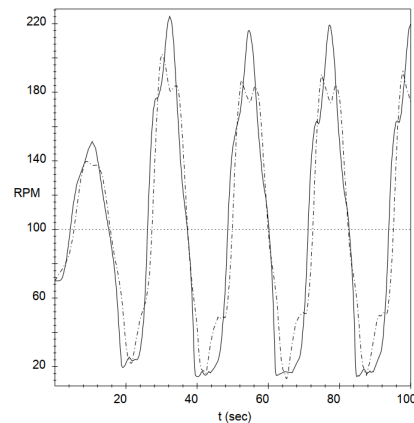
5.16(b):

Figura 5.16: Comparação do torque, no topo e na broca, entre a simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha (a) e o trabalho de referência (b) (Retirado de [28]).

A diferença no início da simulação se dá pelo fato de que o trabalho de referência utiliza como velocidade angular inicial do sistema 70 RPM. Além disto, nota-se uma pequena diferença na amplitude dos torques, porém a frequência das oscilações está de acordo. Com a diferença na amplitude dos torques, sendo pouco menor na simulação realizada, é possível notar que a amplitude das velocidades angulares também apresenta uma pequena diferença na simulação realizada, como é possível observar na figura 5.17.



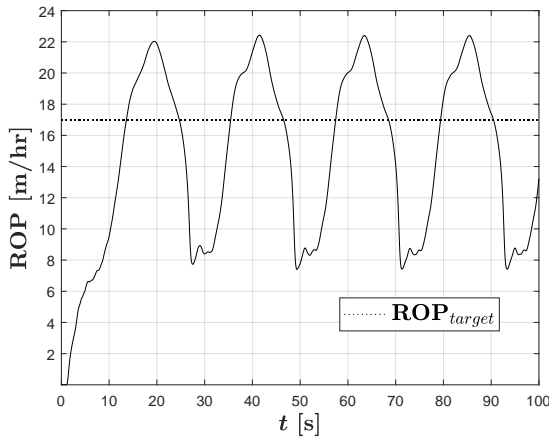
5.17(a):



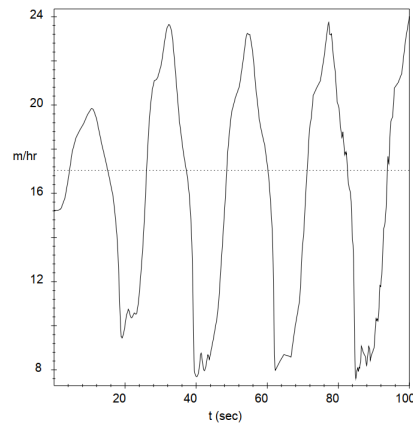
5.17(b):

Figura 5.17: Comparação da velocidade angular, no topo e na broca, entre a simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha (a) e o trabalho de referência (b) (Retirado de [28]).

Outro parâmetro interessante de ser observado é a taxa de penetração da broca (ROP). Uma vez definido o valor de ω_{target} , podemos determinar o valor do ROP_{target} a partir da equação 5-18. Como a amplitude do torque, obtido na simulação, é um pouco menor, isto afetou os demais parâmetros. Na figura 5.18 é possível observar como a taxa de penetração obtida na simulação foi afetada, sendo a amplitude pouco menor. Por último, a figura 5.19 mostra a variação do deslocamento axial, avaliado em $s = L$, em função do tempo. Contabilizando a variação do deslocamento axial sobre a variação do tempo chega-se em uma velocidade média de aproximadamente 14.4 [m/hr], valor próximo ao $ROP_{target} = 17$ [m/hr]. A diferença dos valores é esperada uma vez que constatou-se uma diferença na amplitude dos torques, sendo menor na simulação realizada em comparação com o trabalho de referência.



5.18(a):



5.18(b):

Figura 5.18: Comparação da taxa de penetração entre a simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha (a) e o trabalho de referência (b) (Retirado de [28]).

Como já comentado, é importante utilizar outros modelos de interação broca-rocha, portanto o modelo 2, dado pela equação 5-27, é implementado no trabalho de referência e os resultados comparados. Os dados utilizados no modelo 2 são os mesmos descritos na tabela 5.1. Conforme pode ser observado na figura 5.22, é possível notar que, para os valores de parâmetros propostos para o modelo 2 de interação broca-rocha, o torque na broca apresenta maior intensidade, afetando os demais parâmetros. Um exemplo de como a maior intensidade do torque na broca afeta os demais parâmetros pode ser observado na figura 5.23, onde nota-se um aumento significativo na amplitude das velocidades angulares. Apesar de aumentar o pico máximo da velocidade angular, o pico mínimo também diminuiu, em comparação com o modelo 1, afetando o deslocamento axial e, portanto, a velocidade média em que a coluna

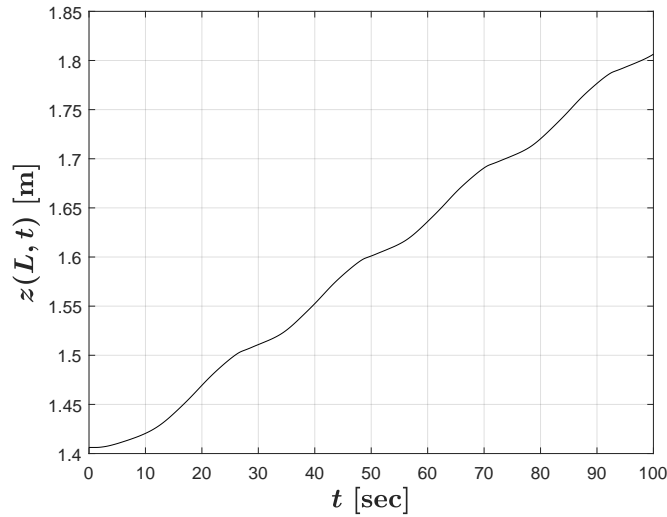
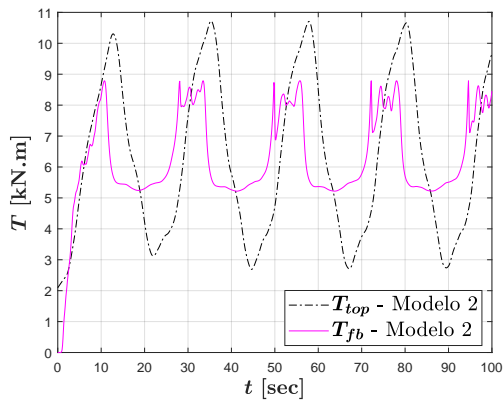
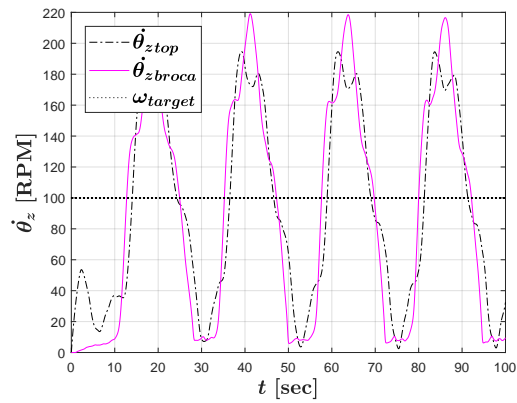


Figura 5.19: Variação do deslocamento axial, avaliado em $s = L$, ao longo do tempo, da simulação realizada com o modelo 1 de interação broca-rocha.

avança, diminuindo para, aproximadamente, 12.6 [m/hr] em comparação com a velocidade média de, aproximadamente, 14.4 [m/hr] encontrada utilizando o modelo 1. Na figura 5.24 fica claro como a taxa de penetração é afetada com o modelo 2, oscilando de forma mais acentuada, fazendo a taxa variar entre valores mais baixos, afetando negativamente a velocidade média em que a coluna avança.

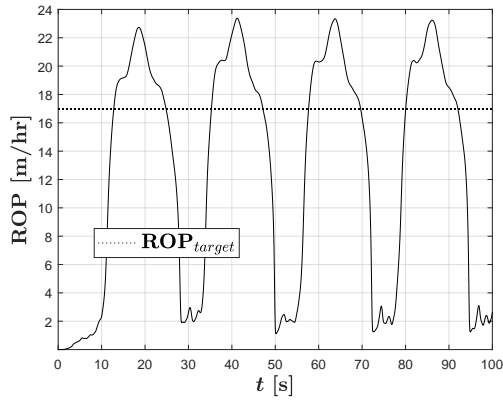


5.20(a):

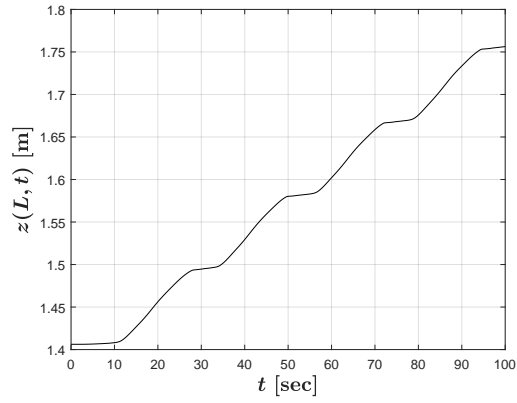


5.20(b):

Figura 5.20: Variação do torque (a) e da velocidade angular (b), no topo e na broca, utilizando o modelo 2 de interação broca-rocha.

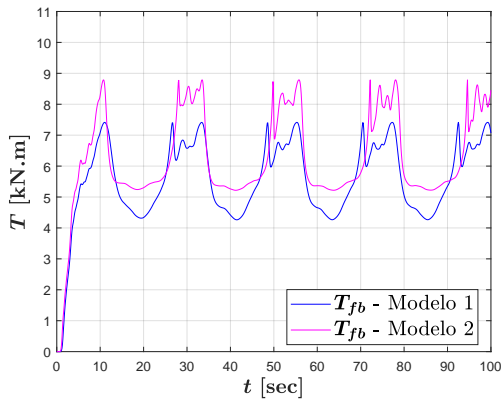


5.21(a):

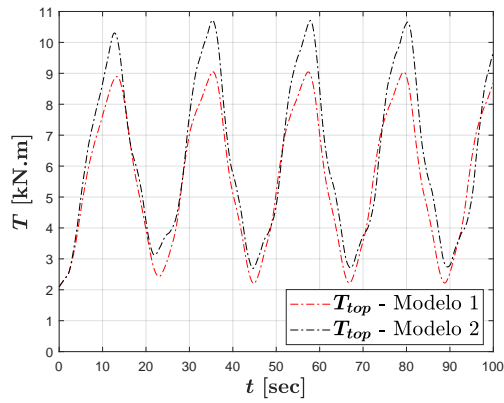


5.21(b):

Figura 5.21: Variação da taxa de penetração (ROP) (a) e do deslocamento axial $z(L, t)$ (b), ao longo do tempo, utilizando o modelo 2 de interação broca-rocha.

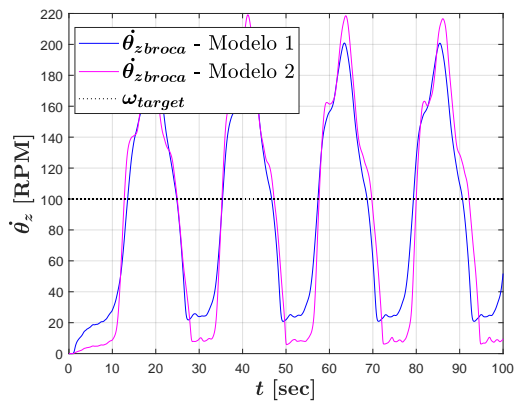


5.22(a):

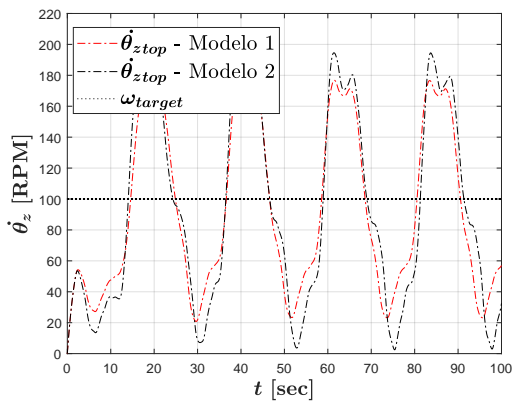


5.22(b):

Figura 5.22: Comparação do torque, na broca (a) e no topo (b), entre os modelos 1 e 2 de interação broca-rocha.

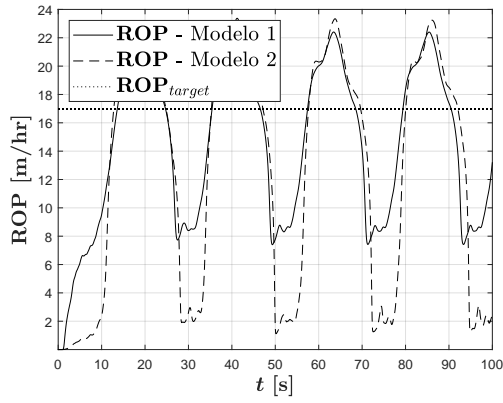


5.23(a):

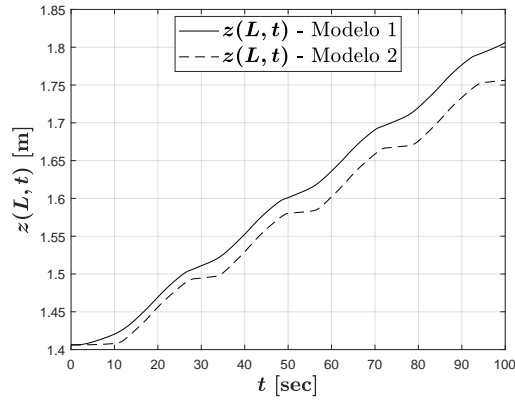


5.23(b):

Figura 5.23: Comparação da velocidade angular, na broca (a) e no topo (b), utilizando os modelos 1 e 2 de interação broca-rocha.



5.24(a):



5.24(b):

Figura 5.24: Comparação da taxa de penetração (ROP) (a) e do deslocamento axial $z(L, t)$ (b) entre os modelos 1 e 2 de interação broca-rocha.

Uma vez tendo analisado ambos modelos de interação broca-rocha no problema proposto por Tucker e Wang, confirmando que estão compatíveis com a literatura de referência, outro modelo de coluna de perfuração é gerado. Retira-se as massas das extremidades do domínio e gera-se um novo com seção transversal variável, caracterizando uma região composta de tubos de perfuração e outra com comandos, caracterizando o BHA. A figura 5.25 ilustra a nova geometria da estrutura sendo analisada, tendo amplificado os raios externos em um fator de 200, para ficar mais evidente. Os resultados das simulações apresentadas a seguir têm os valores dos parâmetros apresentados na tabela 5.3. Os parâmetros materiais são os mesmos tanto no segmento composto de tubos de perfuração quanto no BHA. As condições de contorno são similares as que foram propostas no trabalho de Tucker e Wang, porém há uma restrição dos deslocamentos transversais nas extremidades da região do BHA. Deste modo as simulações são realizadas com as seguintes restrições: $x(0, t) = y(0, t) = \theta_x(0, t) = \theta_y(0, t) = x(1400, t) = y(1400, t) = x(1600, t) = y(1600, t) = 0$.

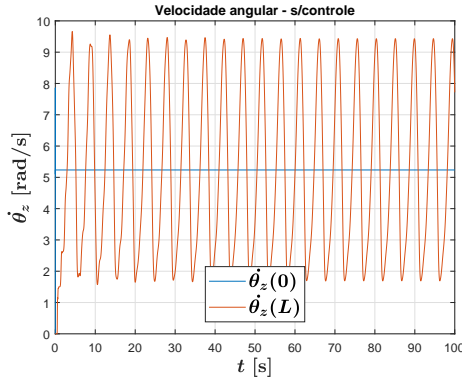
Variável	Valor	Unidade	Descrição
L_{col}	$1.40 \cdot 10^{+03}$	m	Comprimento da região composta de tubos de perfuração
L_{bha}	$2.00 \cdot 10^{+02}$	m	Comprimento da região composta de comandos de perfuração
r_{ecol}	$6.35 \cdot 10^{-02}$	m	Raio externo dos tubos de perfuração
r_{icol}	$5.43 \cdot 10^{-02}$	m	Raio interno dos tubos de perfuração
r_{ebha}	$1.143 \cdot 10^{-01}$	m	Raio externo dos comandos de perfuração
r_{ibha}	$3.81 \cdot 10^{-02}$	m	Raio interno dos comandos de perfuração
ρ	$7.85 \cdot 10^{+03}$	kg.m ⁻³	Densidade da coluna
E	$2.10 \cdot 10^{+11}$	Pa	Módulo de elasticidade
G	$8.14 \cdot 10^{+10}$	Pa	Módulo de cisalhamento
g	$9.81 \cdot 10^{+00}$	m.s ⁻²	Aceleração gravitacional
ω_{target}	$0.50 \cdot 10^{+02}$	RPM	Velocidade angular de operação desejada
f_{br}	$1.20 \cdot 10^{+02}$	kN	Peso sobre a broca
κ	6/7	-	Fator de correção do cisalhamento

Tabela 5.3: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações com o modelo de coluna proposto.

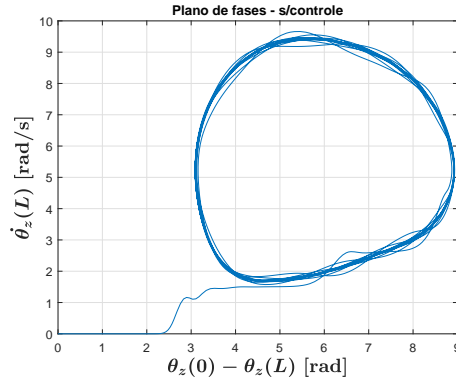


Figura 5.25: Representação da coluna de perfuração, inserida em um poço, implementada em COMSOL.

Inicialmente utiliza-se o modelo 1 de interação broca-rocha, proposto por Tucker e Wang, e realiza-se as simulações retirando a equação de controle e impondo uma rotação no topo como condição de contorno, segundo o valor da tabela 5.3. Na figura 5.26, pode-se observar o resultado da simulação para a velocidade angular no topo ($s = 0$) e na broca ($s = L$) e o respectivo plano de fases.



5.26(a):



5.26(b):

Figura 5.26: Velocidade angular, no topo e na broca, sem modelo de controle (a) e plano de fases (b), impondo uma velocidade angular constante no topo de 50 RPM.

Ainda nos resultados da simulação com uma rotação sendo imposta incondicionalmente no topo, é possível observar na figura 5.27 como o deslocamento angular, no topo e na broca, variam com o tempo. Nota-se a oscilação do deslocamento angular na região da broca, gerado pelo torque que origina-se da interação broca-rocha.

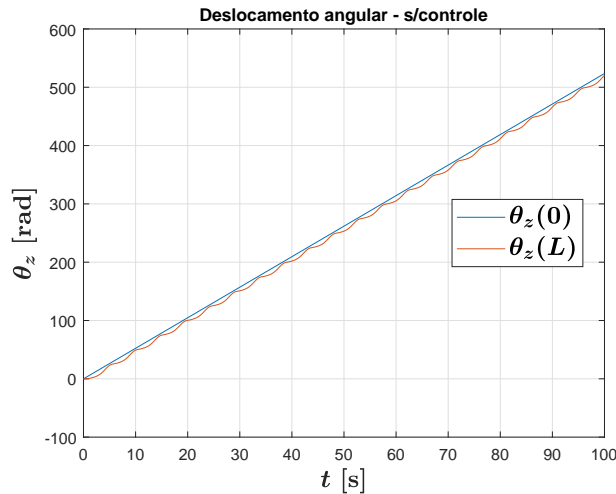


Figura 5.27: Deslocamento angular, no topo e na broca da coluna de perfuração, impondo uma velocidade angular constante de 50 RPM no topo.

Outro parâmetro de interesse é visualizar como o torque, gerado pela interação da broca com a rocha, varia com o tempo. O gráfico da variação do torque, no topo e na broca, pode ser observado na figura 5.28. Como o modelo de controle está desativado, o torque imposto pela equação de controle (T_{top}) vale zero. Na broca podemos observar uma natureza periódica, típica de um problema de coluna de perfuração.

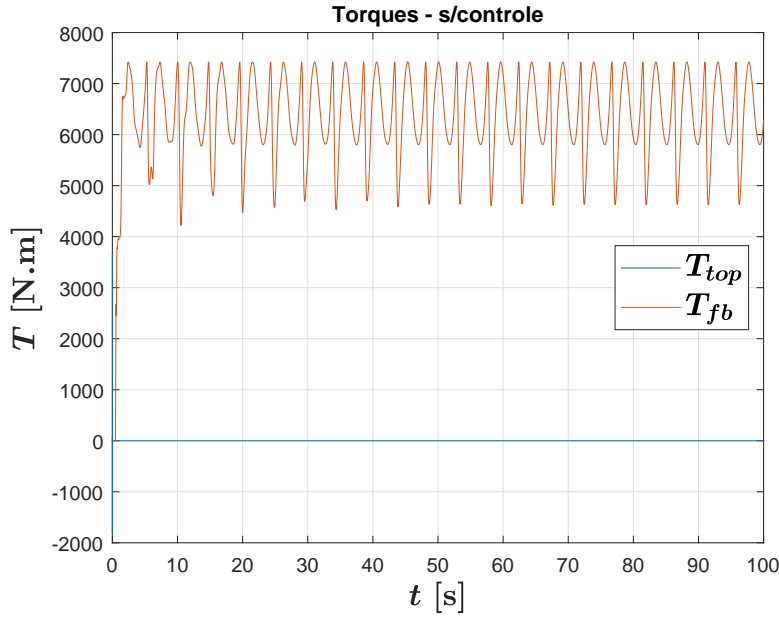
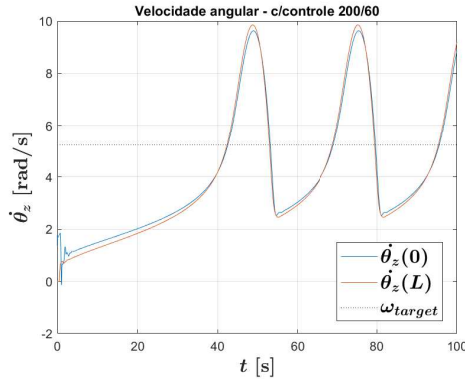


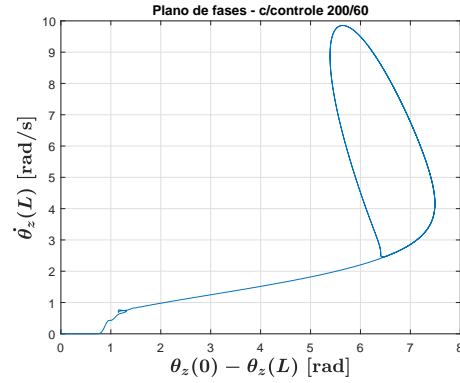
Figura 5.28: Variação do torque, no topo e na broca de uma coluna de perfuração, impondo uma velocidade angular constante no topo.

Apesar de ser possível realizar as simulações com a imposição de uma determinada velocidade angular no topo, é razoável considerar que esta estratégia não é muito adequada nem do ponto de vista numérico e nem da prática da indústria, que utiliza uma estratégia de controle da velocidade angular no topo. Do ponto de vista numérico, impor um deslocamento angular de forma invariável no topo é uma condição que demanda mais do integrador numérico durante a simulação, por diferentes motivos. Dentre eles está a ocorrência de torques e forças que restringem localmente o movimento da coluna como, por exemplo, eventos de impacto que, na condição invariável da imposição de um deslocamento angular no topo, leva a um acúmulo de energia potencial (por conta das deformações torcionais) muito grande no sistema.

Diante destes fatos, os resultados a seguir foram gerados utilizando a estratégia de controle proposta pela equação 5-30. É importante realizar um ajuste nos parâmetros de ganho pois eles influenciam na dinâmica do sistema. Para melhor ajustar os parâmetros, a simulação da dinâmica foi realizada para diferentes valores de ganhos. A seguir, é possível observar como a dinâmica é afetada quando se introduz o modelo de controle no topo para o conjunto de parâmetros de $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad], para os parâmetros de ganho proporcional e integral, respectivamente.



5.29(a):



5.29(b):

Figura 5.29: Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

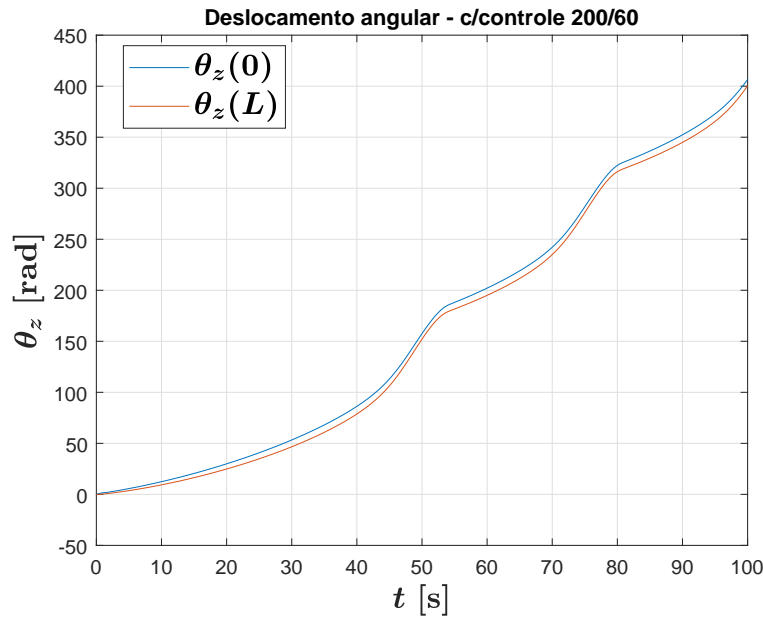


Figura 5.30: Deslocamento angular, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

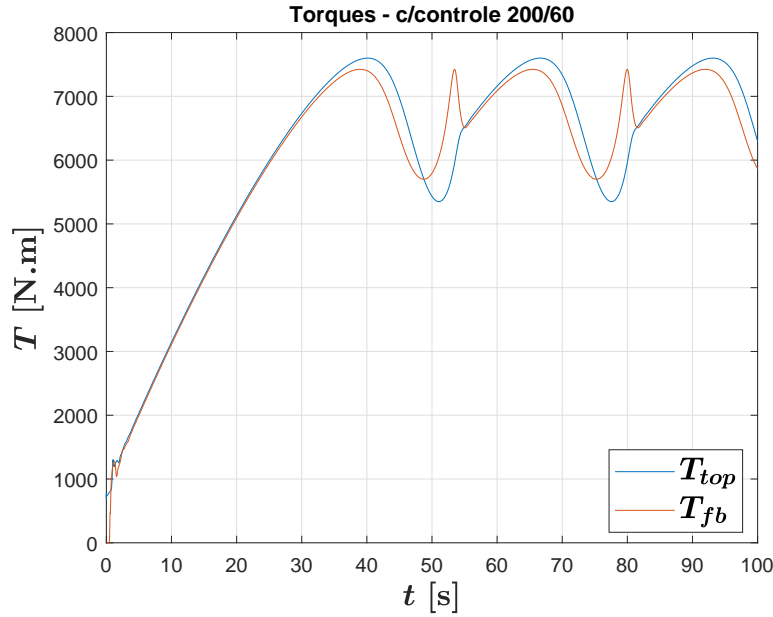
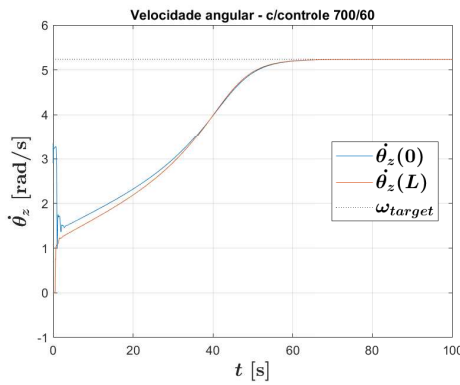
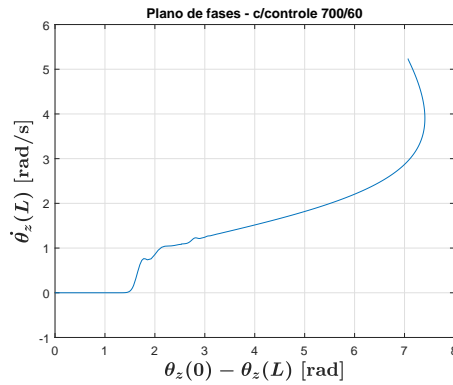


Figura 5.31: Variação do torque, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

Claramente é possível notar a atuação do controlador no sentido de diminuir a frequência das oscilações da velocidade angular avaliada na broca, ajudando a diminuir o processo de fadiga. De modo a investigar a influência dos parâmetros de controle, aumenta-se o parâmetro do ganho proporcional (c_p) de 200 [N.m.s/rad] para 700 [N.m.s/rad], mantendo o mesmo valor no ganho integral. Os resultados são apresentados nas figuras 5.32, 5.33, 5.34, 5.35.



5.32(a):



5.32(b):

Figura 5.32: Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

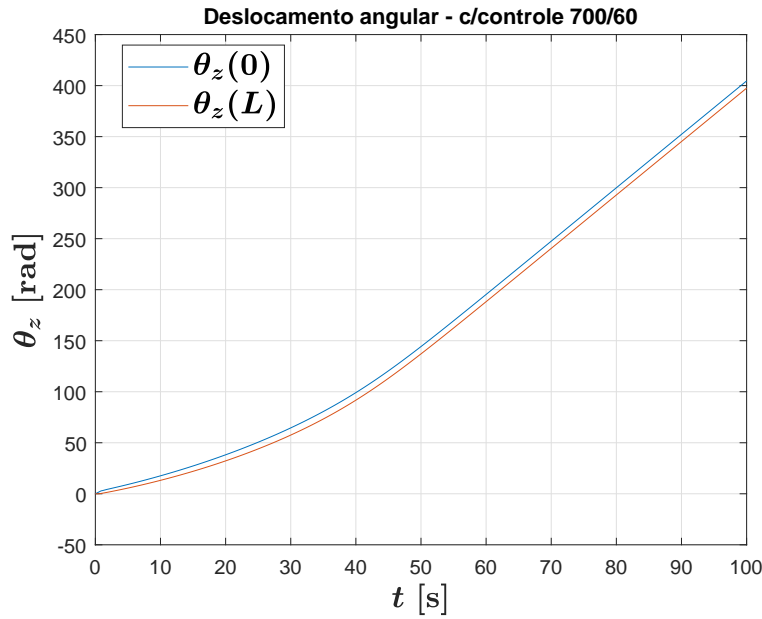


Figura 5.33: Deslocamento angular, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

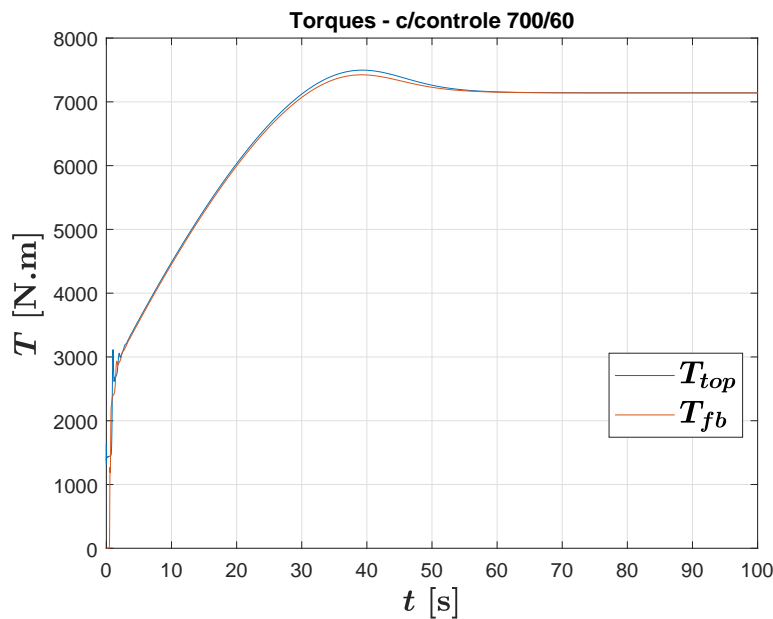
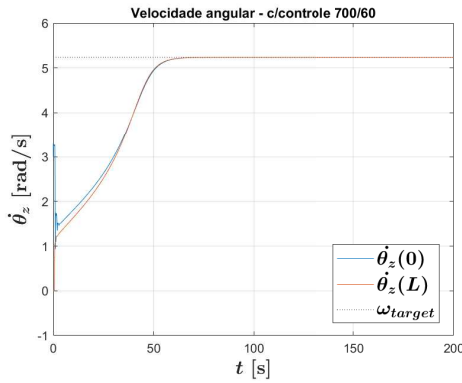


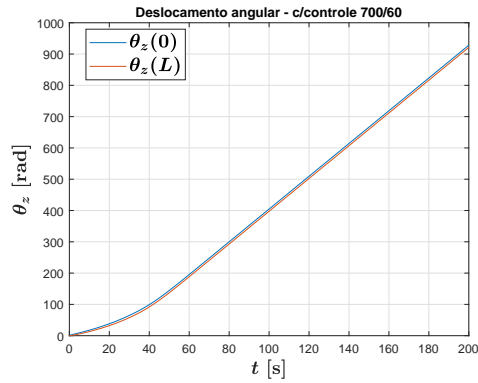
Figura 5.34: Variação do torque, no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

Seguindo a tendência anterior, o incremento no ganho proporcional de $c_p = 200$ [N.m.s/rad] para $c_p = 700$ [N.m.s/rad] estabilizou completamente o sistema, fazendo com que não ocorresse oscilações na velocidade angular, tanto na broca quanto no topo. Para confirmar esta constatação, o tempo de simu-

lação foi estendido para 200 segundos. Os resultados podem ser observados na figura 5.35.



5.35(a):

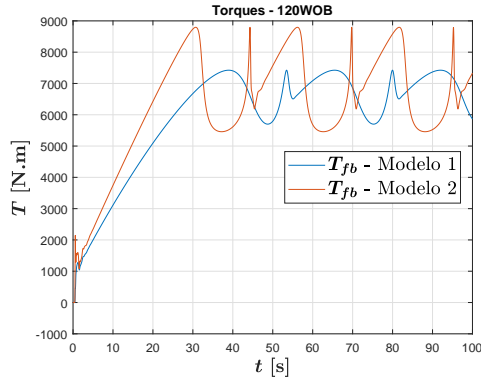


5.35(b):

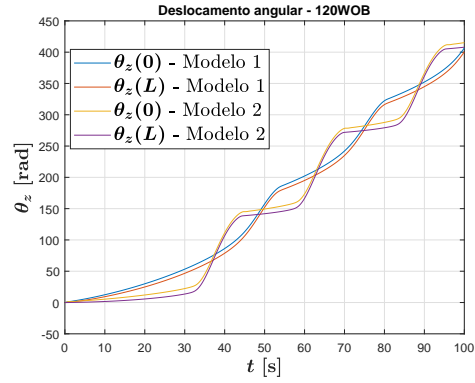
Figura 5.35: Velocidade (a) e deslocamento angular (b), no topo e na broca, para o conjunto de parâmetros $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad] para 200 segundos de simulação.

Diante destes resultados é possível afirmar que, de fato, houve uma estabilização do sistema para os valores de ganho proporcional e integral de $c_p = 700$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad], respectivamente.

Tendo analisado de que maneira os parâmetros na equação de controle 5-30 afetam a dinâmica do sistema, é interessante analisar como o modelo 1 de interação broca-rocha, dado pela equação 5-26, se compara com o modelo 2, dado pela equação 5-27. Para comparação, as simulações foram realizadas utilizando o conjunto de parâmetros de ganho proporcional e integral valendo $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad], respectivamente e os parâmetros dados na tabela 5.1, no modelo 2 de interação broca-rocha. Alguns resultados da simulação podem ser observados a seguir.



5.36(a):

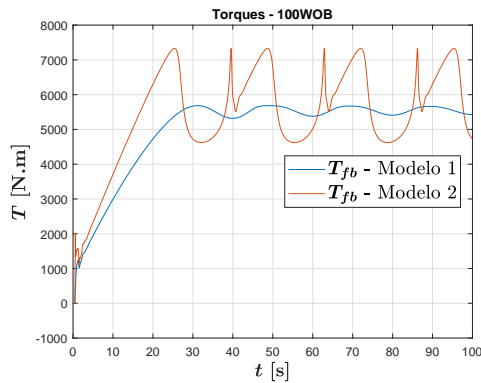


5.36(b):

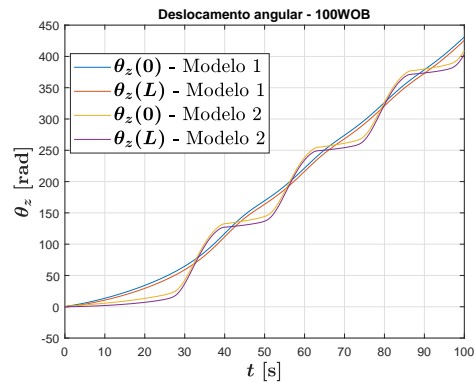
Figura 5.36: Comparação do torque na broca (a) e do deslocamento angular (b), no topo e na broca, entre modelos de interação broca-rocha.

É possível concluir, da figura 5.36(b), que o modelo 2, de interação broca-rocha, apresenta uma frequência um pouco maior nas oscilações entre os deslocamentos angulares, no topo e na broca, quando comparado com o modelo 1.

Para continuar comparando os modelos de interação broca-rocha, uma redução do peso sobre a broca é feita para analisar a influência deste parâmetro no modelo de interação broca-rocha. A redução é feita de $WOB = 120$ [kN] para $WOB = 100$ [kN].



5.37(a):



5.37(b):

Figura 5.37: Comparação do torque na broca (a) e do deslocamento angular (b), no topo e na broca, entre modelos de interação broca-rocha para $WOB = 100$ [kN].

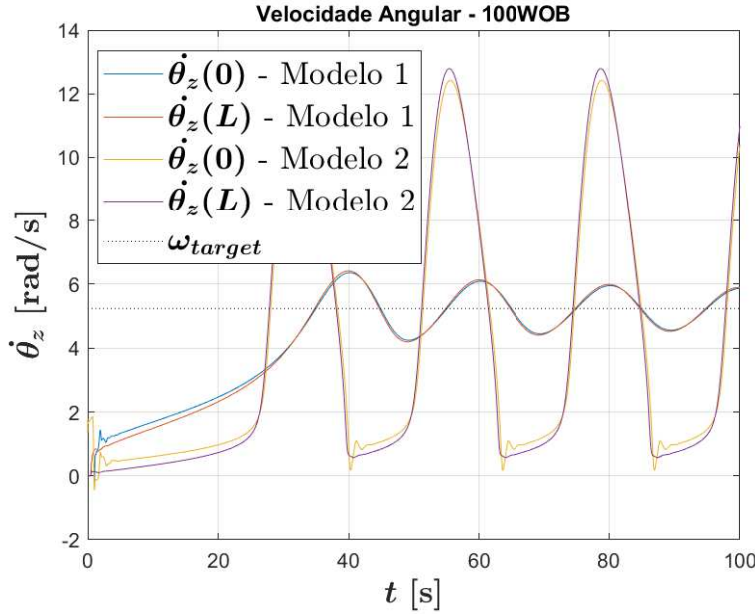


Figura 5.38: Comparação da velocidade angular, no topo e na broca, entre os modelos de interação broca-rocha, para WOB = 100 [kN].

A partir destes resultados, pode-se observar que a amplitude das oscilações do modelo 1, proposto por Tucker e Wang, são significativamente menores em comparação com o modelo 2, de modo que os resultados passam a divergir daqueles reportados em [28]. Isto se deve ao fato de que os parâmetros de operação utilizados não são exatamente iguais aos utilizados na literatura de referência, justificando a proposta de um modelo alternativo. Neste sentido, o modelo 2, de interação broca-rocha, apresentou uma resposta mais compatível com trabalhos similares da literatura, com a vantagem de não ter uma grande limitação na escolha dos parâmetros de operação.

Diante destas considerações, o modelo 2, de interação broca-rocha, é utilizado para as simulações seguintes. Além disto, os parâmetros de controle, utilizados para simular a dinâmica considerando todos graus de liberdade, são $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad]. Para considerar todos graus de liberdade, uma configuração pré-tensionada é gerada de modo que haja uma excitação para os deslocamentos transversais. Em geral, bastaria colocar um deslocamento inicial transversal em algum nó do sistema, porém não fica claro se isso é possível dentro do ambiente do COMSOL. Para lidar com este problema, a condição inicial das simulações é a solução do sistema em equilíbrio com a gravidade atuando transversalmente. A partir daí, um novo estudo é feito com a orientação da gravidade atuando de forma longitudinal em relação ao sistema, como deve ser para um problema de coluna de perfuração vertical. Este novo estudo apenas utiliza como solução inicial a configuração do estudo

anterior. A figura 5.3 mostra a configuração em que o sistema se encontra para que ao estudo dinâmico seja iniciado. Os raios, da coluna e do BHA, estão multiplicados por um fator de 100 para que fique mais evidente a visualização das seções transversais.



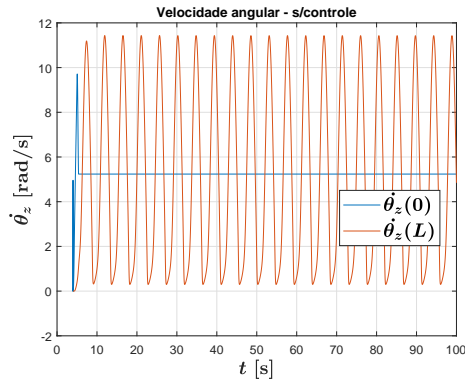
5.39(a):

5.39(b):

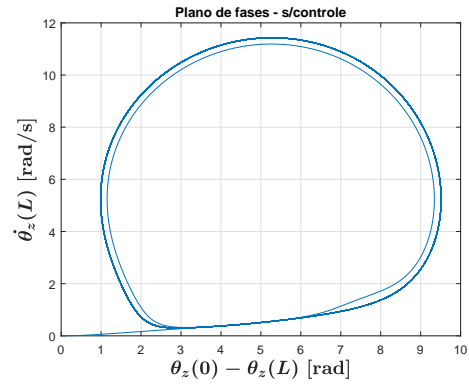
Figura 5.39: Visão lateral (a) e superior (b), da condição inicial do sistema, na configuração pré-tensionada.

Outra consideração importante é a introdução de amortecimento para descrever o atrito interno do material. Isto é feito através da adição de um termo de velocidade nas relações constitutivas descritas pelas equações 3-23 como, por exemplo, $\mathbf{m} = \mathbf{J}(\mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}})$. Isto é importante pois, de fato, o atrito interno é uma fonte de dissipação de energia do sistema. A última consideração é que todas simulações partem da mesma condição inicial.

A seguir são comparados alguns resultados da simulação da dinâmica de uma coluna de perfuração, para o valor de $\text{WOB} = 100$ [kN], com e sem a abordagem de um controle no topo. As figuras 5.40, 5.41 e 5.42 apresentam alguns resultados da simulação sem a abordagem de controle no topo.



5.40(a):



5.40(b):

Figura 5.40: Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) partindo de uma configuração inicial pré-tensionada e sem modelo de controle no topo.

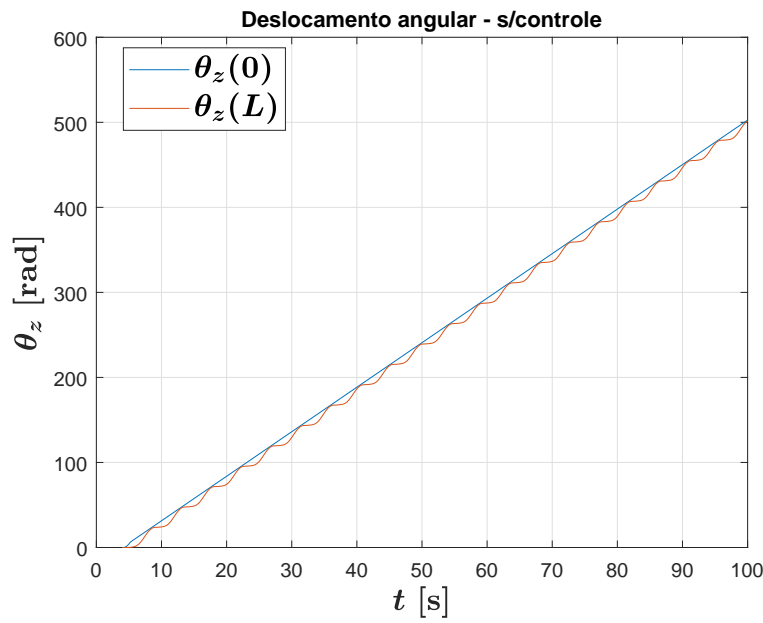


Figura 5.41: Deslocamento angular, no topo e na broca, sem modelo de controle no topo, partindo de uma configuração inicial pré-tensionada.

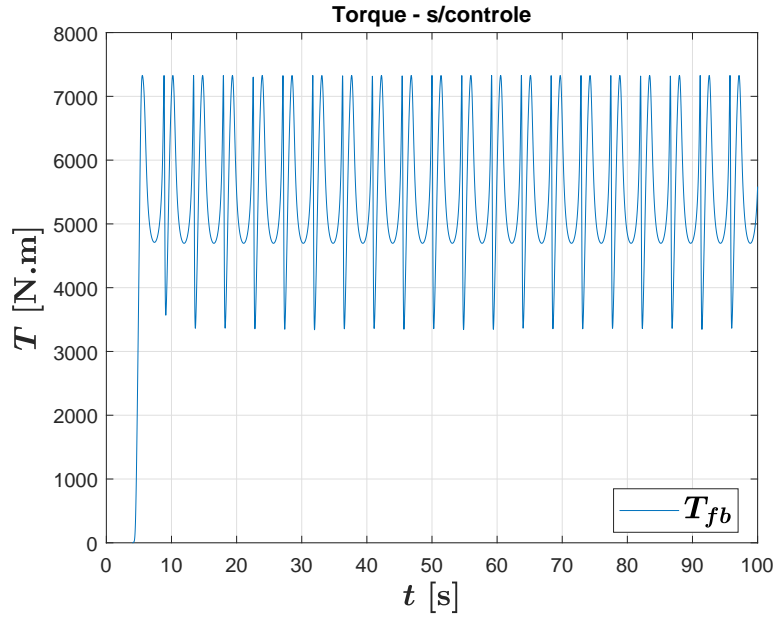
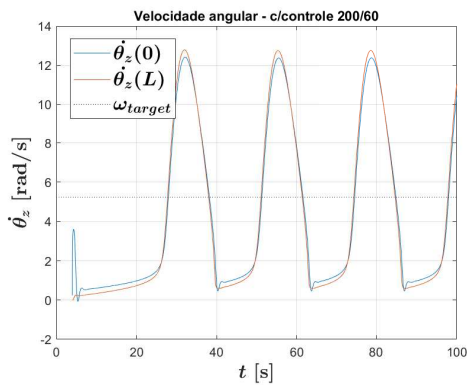


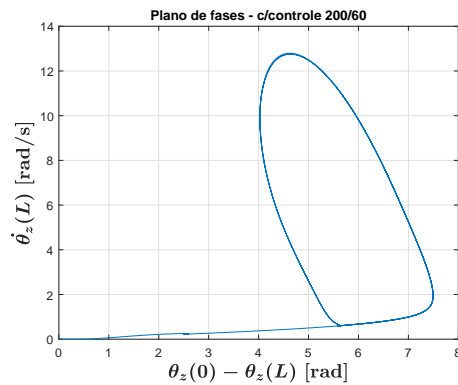
Figura 5.42: Evolução do torque na broca, sem modelo de controle no topo, partindo de uma configuração inicial pré-tensionada.

É possível observar que a amplitude da velocidade angular na broca aumentou em comparação com a simulação limitada no acoplamento torcional-axial. Isto decorre do fato do sistema partir de uma configuração pré-tensionada e é provável que a interferência decorrente dos eventos de contato possa influenciar também. De forma consistente, a amplitude do torque também aumentou.

A seguir, estão os resultados para a simulação utilizando o modelo de controle:



5.43(a):



5.43(b):

Figura 5.43: Velocidade angular (a), no topo e na broca, e plano de fases (b) para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad], partindo de uma configuração inicial pré-tensionada.

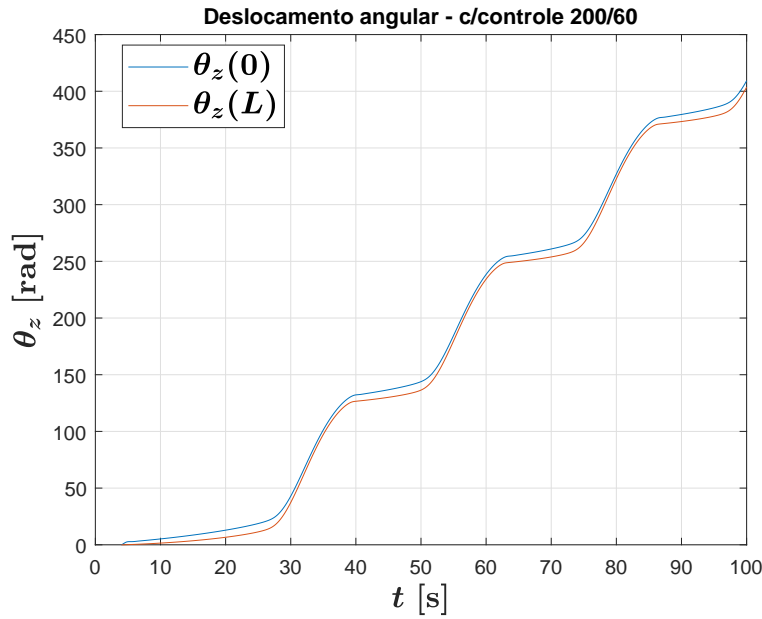


Figura 5.44: Deslocamento angular, no topo e na broca, partindo de uma configuração inicial pré-tensionada e para o conjunto de parâmetros $c_p = 200$ [N.m.s/rad] e $c_i = 60$ [N.m/rad].

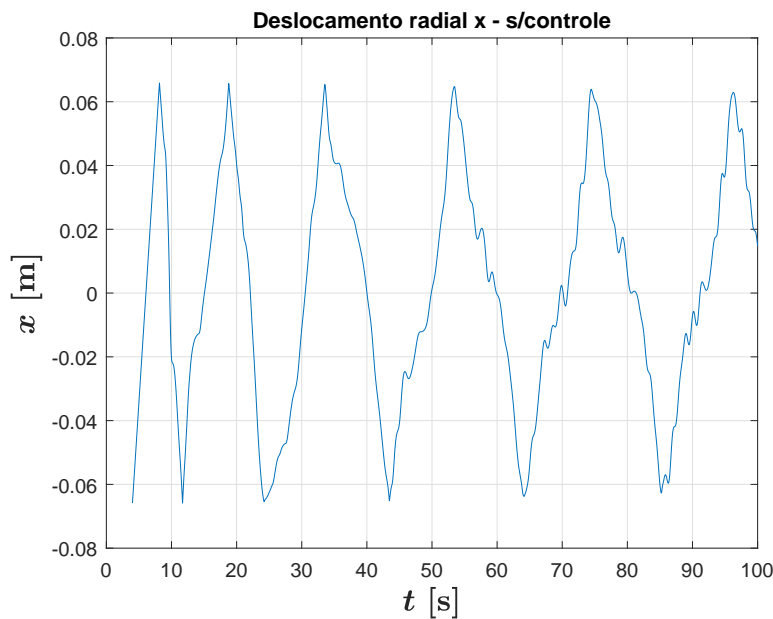


Figura 5.45: Deslocamento transversal em uma simulação sem controle no topo, avaliado em $x(s = 800, t)$.

Não é possível encontrar nenhuma diferença significativa nos resultados entre esta simulação partindo de uma configuração inicial pré-tensionada e a simulação limitada ao acoplamento torcional-axial. O fato do sistema partir de

uma configuração pré-tensionada não refletir na amplitude dos deslocamentos pode ser atribuída a atuação do controlador.

Por último, a figura 5.46 compara como o deslocamento transversal x , avaliado em $s = L/2 = 800$ [m], variou com o tempo:

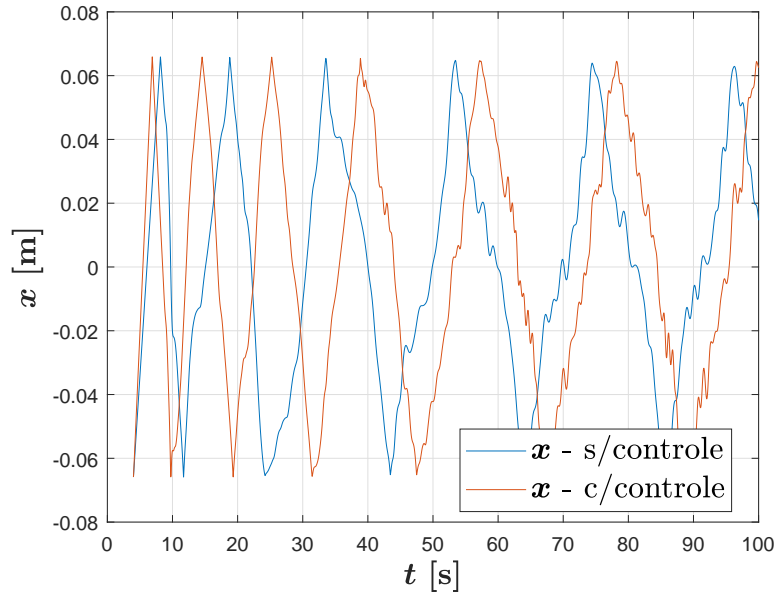


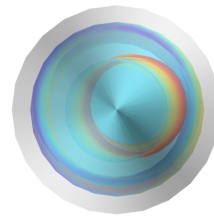
Figura 5.46: Comparação do deslocamento transversal em uma simulação com controle e outra sem, avaliado em $x(s = 800, t)$.

É possível notar que no início da simulação a coluna se choca contra a parede do poço com maior frequência e com o passar do tempo estes eventos passam a se estabilizar. Também é possível observar como o modelo de controle atua no sentido de diminuir a frequência das oscilações ao longo do tempo, caracterizado pela translação horizontal da curva vermelha.

Para ilustrar a dinâmica simulada, a seguir pode-se observar a configuração do sistema no instante $t = 64.5$ [s].



5.47(a):



5.47(b):

Figura 5.47: Visão lateral (a) e superior (b), da configuração do sistema proposto, no tempo $t = 64.5$ [s].

A partir dos resultados apresentados neste capítulo é possível afirmar que o modelo desenvolvido neste trabalho é inteiramente adequado para colunas de perfuração verticais. O modelo permitiu a análise da dinâmica envolvendo todos graus de liberdade, utilizando diferentes modelos de interação broca-rocha, utilizando uma estratégia de controle e também impondo uma rotação constante no topo, se mostrando completamente estável durante todo o processo de integração numérica, não havendo nenhum tipo de problema. Desta forma, o objetivo deste trabalho foi alcançado e a utilização do modelo para realizar maiores investigações na dinâmica de uma coluna de perfuração fica como recomendações para trabalhos futuros. Uma simulação utilizando os modelos de interação broca-rocha e controle propostos por Tucker e Wang, para $WOB = 100$ [kN] e operando a 100 [RPM], pode ser acessado em: <https://youtu.be/VOaNLY0dGuo>.

As simulações apresentadas neste trabalho foram realizadas em um computador de mesa com sistema operacional Windows 7 Ultimate, processador Intel i7-2700k e 8Gb de memória RAM. Para simular um tempo de $t = 100$ [s], este mesmo computador levou de 10 a 15 minutos nas simulações limitadas ao acoplamento torcional-axial e de 15 a 30 minutos para as simulações considerando todos graus de liberdade.

A teoria de Cosserat e suas equações foram apresentadas pela abordagem do equilíbrio de forças e também pela abordagem variacional, sendo verificadas e validadas de ambas formas através de diferentes exemplos e implementações.

Como parte complementar deste trabalho, foram desenvolvidas funções base a partir da solução das equações de Cosserat na forma quase estática, modelo conhecido como MCRE. Estas funções base foram testadas em problemas estáticos e através da convergência de um determinado modo de vibração para verificar sua *performance*. A utilização de funções base baseadas no MCRE foi considerada inapropriada para problemas que envolvem grandes deslocamentos.

As EDPs apresentadas foram implementadas dentro do ambiente de um *software* comercial baseado em Elementos Finitos para que as simulações de problemas dinâmicos pudessem ser realizadas. Discussões à respeito de diferentes parametrizações para as rotações foram trazidas e consideradas. Uma vez tendo validado a teoria, os modelos que caracterizam a interação da broca com a rocha, o controle da velocidade angular no topo e o modelo de contato foram apresentados e integrados ao problema.

As simulações do problema da coluna de perfuração foram realizadas inicialmente limitadas no acoplamento torcional-axial, permitindo fazer a investigação de como a dinâmica é afetada para diferentes valores nos parâmetros de controle e do modelo de interação broca-rocha. Os resultados da dinâmica para os dois tipos de modelos de interação broca-rocha foram comparados e discutidos.

Utilizando todos graus de liberdade, o modelo se mostrou igualmente estável, permitindo uma análise completa da dinâmica de uma coluna de perfuração para diferentes condições de contorno, sendo possível visualizar diferentes fenômenos de vibração no modelo, dentre eles o *stick-slip* e o fenômeno de *whirling*. Desta forma, conclui-se que o objetivo deste trabalho foi alcançado com êxito, tendo esclarecido alguns pontos menos abordados em trabalhos que utilizam a teoria de Cosserat como, por exemplo, cuidados e singularidades que determinadas parametrizações para as rotações podem trazer.

É válido deixar registrado que houve um esforço por parte do autor em trazer o conteúdo de maneira mais didática e apresentando as formas de implementação para o modelo proposto, de modo que sirva de motivação para os leitores interessados neste tipo de conteúdo.

Como sugestão de novos trabalhos, é totalmente válido explorar o modelo para realizar investigações mais específicas como, por exemplo, como determinados parâmetros influenciam no ROP, parâmetro de interesse da indústria. Outro problema a ser explorado é o problema de colunas de perfuração direcionais, de modo que este é um problema bastante interessante para explorar os limites da parametrização de rotações proposta, analisando se singularidades inerentes a este tipo de parametrização são encontradas. Além disto, existem diversos aprimoramentos que podem ser implementados para tornar o problema menos restritivo do ponto de vista numérico, permitindo simulações que consumam cada vez menos tempo. Linearizações locais, malhas dinâmicas, diferentes parametrizações das rotações e outras fontes de amortecimento são algumas das sugestões. Para quem deseja trabalhar com as próprias rotinas de Elementos Finitos, existe um campo a ser explorado em torno da aplicação das funções base aqui apresentadas e da implementação de integradores numéricos baseados nas equações de Cosserat, como trabalhos recentes [40, 41] demonstraram.

A

Programa em álgebra simbólica para o exemplo do método de Perturbação Regular

Rotina para demonstração da implementação do método de perturbação regular.

```

> restart;
> with(plots) :
> with(PDETools) :
> declare(y(x), prime=x, quiet)
> EDO := diff(y(x), x$2) = -epsilon·exp(-x)·y(x)
                                EDO := y'' = -ε e-x y
> CIs := y(0) = Y0, D(y)(0) = V0 :
> Y0 := 1 :
> V0 := 1 :
> an_sol := dsolve({eval(EDO, epsilon = 1), CIs}) :
> plotA := plot(rhs(an_sol), x = 0..10, legend = ["Exata"]):
> N := 3 :
> y_pert := y(x) = add(εi·y[i](x), i = 0..N) :
> EDO_pert := expand(subs(y_pert, EDO))
                                EDO_pert := y'' + ε y1' + ε2 y2' + ε3 y3' = -ε y0 - ε2 y1 - ε3 y2 - ε4 y3
> Order := 11 :
> for i from 0 to N do
    eq[i] := coeff(lhs(EDO_pert), epsilon, i) = coeff(rhs(EDO_pert), epsilon, i) :
    if i = 0 then
        # Soluciona apenas a primeira equação com a condição inicial:
        sol_pert[i] := dsolve({eq[0], y[i](0) = Y0, D(y[i])(0) = V0})
    else
        # Faz a retrosubstituição das soluções anteriores na atual equação a ser resolvida:
        eq_subs[i] := eval(subs({seq(sol_pert[k], k = 0..i-1)}, eq[i])) :
        # Soluciona as demais equações com condições iniciais nulas
        sol_pert[i] := dsolve({eq_subs[i], y[i](0) = 0, D(y[i])(0) = 0})
    end if
od:
> # Gera soluções aproximadas para diferentes termos de 0..N
> for i from 0 to N do
    y_o[i] := eval(add(εi·rhs(sol_pert[i]), i = 0..i), epsilon = 1)

```

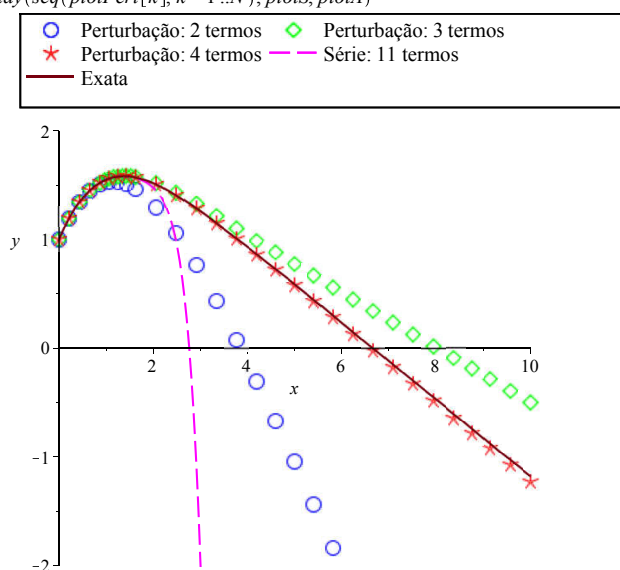
```

od:
> coloropts := {blue, green, black, red} :
> lineopts := {dashdot, longdash, spacedash, spacedot} :
> symbolopts := {asterisk, box, circle, diamond} :
> for i from 0 to N do

  plotPert[i] := plot(y_o[i], x=0..10, y=-2..2, color = coloropts[i + 1], style = point, symbol
    = symbolopts[i + 1], symbolsize = 20, legend = [typeset("Perturbação: %1 termos", i + 1)],
    numpoints = 13) :

od:
> solS := eval(convert(dsolve({EDO, CIs}, y(x), series), polynomial), epsilon = 1) :
> plotS := plot(rhs(solS), x=0..10, y=-2..2, linestyle = dash, color = magenta, legend
  = [typeset("Série: %1 termos", 11)], legendstyle = [location = top]) :
> display(seq(plotPert[k], k = 1..N), plotS, plotA)

```



```
> eq[1]
```

$$y_1'' = -\frac{y_0}{e^x} \quad (3)$$

```
> sol_pert[1]
```

$$y_1 = -(x + 3) e^{-x} - 2x + 3 \quad (4)$$

```
>
```

B

Programa em álgebra simbólica para o equacionamento e o método de Perturbação Regular

Rotina para o desenvolvimento das equações, segundo a teoria de Cosserat na forma quase estática, e sua solução analítica através do método de Perturbação regular.

```
[> restart;

[> SaveAll := proc( fileName :: string )
    subs( _NAMES = anames( '-user' ),
    proc( ) save _NAMES, fileName end proc ) ( )
end proc:

[> with(LinearAlgebra, [Transpose, MatrixVectorMultiply, GenerateMatrix, Multiply,
    MatrixInverse]) :
[> with(VectorCalculus, [DotProduct, CrossProduct]) :
[> with(PDEtools, [declare, dchange]) :
[> with(plots, [odeplot, display, spacecurve, pointplot]) :
[> with(LargeExpressions) :
[> interface(displayprecision = 8) :
[>
[> Digits := 30 :
[> read "coeffs_limpo_dissertacao.m"
[> #SaveAll("coeffs_limpo_dissertacao.m")

[> macro( p1 = x, p2 = y, p3 = z, p4 =  $\theta_x$ , p5 =  $\theta_y$ , p6 =  $\theta_z$ , P1 = x, P2 = y, P3 = z, P4 =  $\theta_x$ , P5 =  $\theta_y$ , P6
    =  $\theta_z$  )
[>
[> p1, p2, p3, p4, p5, p6, P1, P2, P3, P4, P5, P6
(1)
[> declare( ( p1, p2, p3, p4, p5, p6 ) (s), prime = s, quiet)
[> ON:
[> k := 3 :
[> Order := k + 5 :
[> prms_vals := { K11 = 1.6 · 109, K22 = 1.6 · 109, K33 = 4.3 · 109, le = 2, J11 = 7.862 · 106, J22 = 6.862
    · 106, J33 = 5.896 · 106, Xa = 0, Xb = 0, Ya = 0, Yb = 0, Za = 0, Zb = -0.1,  $\Theta_{xa}$  = 0.04,  $\Theta_{xb}$  = 0.06,
     $\Theta_{ya}$  = -0.05,  $\Theta_{yb}$  = -0.02,  $\Theta_{za}$  = 0.08,  $\Theta_{zb}$  = 0 } :
[> prms1 := { kappa =  $\frac{6}{7}$ , E = 2.1e11, nu = 0.29, rext =  $\frac{0.127}{2}$ , rint =  $\frac{0.095}{2}$ , q0 = -100, h = 0.06,
    P0 = -100 } :
[> prms2 := subs( prms1, { G =  $\frac{E}{2 \cdot (1 + \text{nu})}$ , A = evalf(Pi) · (rext2 - rint2),  $\gamma_{11}$ 
    =  $\frac{\text{evalf}(\text{Pi}) \cdot (\text{rext}^4 - \text{rint}^4)}{4}$ ,  $\gamma_{22}$  =  $\frac{\text{evalf}(\text{Pi}) \cdot (\text{rext}^4 - \text{rint}^4)}{4}$ ,  $\gamma_{33}$  = 2
    ·  $\frac{\text{evalf}(\text{Pi}) \cdot (\text{rext}^4 - \text{rint}^4)}{4}$  } ) :
[>
[> prms := prms1 union prms2 :
```

```

>
> prms_vals1 := {K11=kappa·G·A, K22=kappa·G·A, K33=E·A, J11=E·γ11, J22=E·γ22, J33=G
>               ·γ33}:
> prms_vals2 := eval(prms_vals1, prms):
> #-----#
>
> r := Vector[column]([p1(s), p2(s), p3(s)]:
> ve := VectorCalculus[diff](r, s):

> S := Matrix([ [0, -p6(s), p5(s)], [p6(s), 0, -p4(s)], [-p5(s), p4(s), 0] ]):
> R := simplify(∑p=03 Sp/p!):
> d1 := Vector[column](Transpose(R(1..3, 1))):
> d2 := Vector[column](Transpose(R(1..3, 2))):
> d3 := Vector[column](Transpose(R(1..3, 3))):
> v1 := DotProduct(ve, d1):
> v2 := DotProduct(ve, d2):
> v3 := DotProduct(ve, d3):
> v := Vector[column]([v1, v2, v3]):

> ue := 1/2 · add( CrossProduct(d[i], VectorCalculus[diff](d[i], s)), i=1..3):
> u1 := DotProduct(ue, d1):
> u2 := DotProduct(ue, d2):
> u3 := DotProduct(ue, d3):
> u := simplify(Vector[column]([u1, u2, u3]), size):

> K := ⎡ K11  0  0 ⎤:
>      ⎣  0  K22  0 ⎦
>      ⎣  0  0  K33 ⎦
>
> J := ⎡ J11  0  0 ⎤:
>      ⎣  0  J22  0 ⎦
>      ⎣  0  0  J33 ⎦
>
> n1 := K[1, 1]·v1:
> n2 := K[2, 2]·v2:
> n3 := K[3, 3]·(v3 - 1):
> n := MatrixVectorMultiply(K, Vector[column]([v1, v2, v3 - 1])):
> nd := add(n[i]·d[i], i=1..3):

```

```
[> m1 := J[1, 1]·u1 :
=> m2 := J[2, 2]·u2 :
=> m3 := J[3, 3]·u3 :
=> m := MatrixVectorMultiply(J, Vector[column]([u1, u2, u3])) :
=> md := add(m[i]·d[i], i = 1 .. 3) :
```

```
[> vxn := CrossProduct(v, n) :
```

```
[> uxm := CrossProduct(u, m) :
```

```
[> sist1 := VectorCalculus[diff](nd, s) :
=> sist2 := VectorCalculus[diff](m, s) + uxm + vxn :
=> VectorCalculus[diff](m, s) + uxm + vxn :
```

EDOS

```
[> EDO1 := simplify(diff(nd[1], s), size) :
=> EDO2 := simplify(diff(nd[2], s), size) :
=> EDO3 := simplify(diff(nd[3], s), size) :
=> EDO4 := simplify((diff(m[1], s) + uxm[1] + vxn[1]), size) :
=> EDO5 := simplify((diff(m[2], s) + uxm[2] + vxn[2]), size) :
=> EDO6 := simplify((diff(m[3], s) + uxm[3] + vxn[3]), size) :
=> mEDO1 := diff(d1[1]·K[1, 1]·v1 + d2[1]·K[2, 2]·v2 + d3[1]·K[3, 3]·(v3 - 1), s) :
=> mEDO2 := diff(d1[2]·K[1, 1]·v1 + d2[2]·K[2, 2]·v2 + d3[2]·K[3, 3]·(v3 - 1), s) :
=> mEDO3 := diff(d1[3]·K[1, 1]·v1 + d2[3]·K[2, 2]·v2 + d3[3]·K[3, 3]·(v3 - 1), s) :
=> mEDO4 := diff(m1, s) - m2·u3 + m3·u2 + v2·n3 - v3·n2 :
=> mEDO5 := diff(m2, s) - m3·u1 + m1·u3 + v3·n1 - v1·n3 :
=> mEDO6 := diff(m3, s) - m1·u2 + m2·u1 + v1·n2 - v2·n1 :
=>
=>
=> nEDO1 := evalf(subs(prms_vals, EDO1)) :
=> nEDO2 := evalf(subs(prms_vals, EDO2)) :
=> nEDO3 := evalf(subs(prms_vals, EDO3)) :
=> nEDO4 := evalf(subs(prms_vals, EDO4)) :
=> nEDO5 := evalf(subs(prms_vals, EDO5)) :
=> nEDO6 := evalf(subs(prms_vals, EDO6)) :
```

Confirmação EDOS

```
[> Testzero(EDO1 - simplify(mEDO1, size));
true (2.1)
```

```
[> Testzero(EDO2 - simplify(mEDO2, size));
true (2.2)
```



```

> Testzero(EDO3 - simplify(mEDO3, size))
true (2.3)
> Testzero(EDO4 - simplify(mEDO4, size))
true (2.4)
> Testzero(EDO5 - simplify(mEDO5, size))
true (2.5)
> Testzero(EDO6 - simplify(mEDO6, size))
true (2.6)
> Testzero(sist1[1] - EDO1);
true (2.7)
> Testzero(sist1[2] - EDO2);
true (2.8)
> Testzero(sist1[3] - EDO3);
true (2.9)
> Testzero(sist2[1] - EDO4);
true (2.10)
> Testzero(sist2[2] - EDO5);
true (2.11)
> Testzero(sist2[3] - EDO6);
true (2.12)

```

▼ Perturbação Regular

```

>
> tr1 := p1(s) = add(P1[i](s)·εi, i = 1..k) :
> tr2 := p2(s) = add(P2[i](s)·εi, i = 1..k) :
> tr3 := p3(s) = s + add(P3[i](s)·εi, i = 1..k) :
> tr4 := p4(s) = add(P4[i](s)·εi, i = 1..k) :
> tr5 := p5(s) = add(P5[i](s)·εi, i = 1..k) :
> tr6 := p6(s) = add(P6[i](s)·εi, i = 1..k) :
>
> neqs := 6 : # n. de equações
> for i from 1 to neqs do
  EDO||i||pr := subs( {seq(tr||n, n = 1..neqs)}, EDO||i) :
  od:
>
> for i from 1 to k do
  eq1[i] := coeff(EDO1pr, epsilon, i) = 0 :
  eq2[i] := coeff(EDO2pr, epsilon, i) = 0 :
  eq3[i] := coeff(EDO3pr, epsilon, i) = 0 :
  eq4[i] := coeff(EDO4pr, epsilon, i) = 0 :
  eq5[i] := coeff(EDO5pr, epsilon, i) = 0 :
  eq6[i] := coeff(EDO6pr, epsilon, i) = 0 :

```

od:
>

▼ Solução sistema de epsilon 1

▼ Solução simbólica

```
> bcs1 := {PI[1](0) = X_a, P2[1](0) = Y_a, P3[1](0) = Z_a, P4[1](0) = Theta_xa, P5[1](0)
= Theta_ya, P6[1](0) = Theta_za, PI[1](l_e) = X_b, P2[1](l_e) = Y_b, P3[1](l_e) = l_e + Z_b,
P4[1](l_e) = Theta_xb, P5[1](l_e) = Theta_yb, P6[1](l_e) = Theta_zb} :
> bcs1d := {PI[1](0) = X_a, P2[1](0) = Y_a, P3[1](0) = Z_a, P4[1](0) = Theta_xa, P5[1](0) =
Theta_ya, P6[1](0) = Theta_za, PI[1](l_e) = X_b, P2[1](l_e) = Y_b, P3[1](l_e) = Z_b, P4[1](l_e)
= Theta_xb, P5[1](l_e) = Theta_yb, P6[1](l_e) = Theta_zb} :
>
> sis1 := simplify( {seq(eq[i][1], i = 1..6)}, size)
sis1 := {J_33 * theta_1'' = 0, K_11 * (x_1'' - theta_1') = 0, K_22 * (y_1'' + theta_1') = 0, K_33 * z_1'' = 0, J_22 * theta_1'' - K_11 * (theta_1'
- x_1') = 0, theta_1'' * J_11 - K_22 * (theta_1' + y_1') = 0} (4.1.1)
> vars1 := {PI[1](s), P2[1](s), P3[1](s), P4[1](s), P5[1](s), P6[1](s)} :
> ans1 := dsolve(sis1, vars1, series) :
> ans1d := dsolve(sis1 union bcs1d) :
>
> ans1_bc1 := subs(s=0, ans1) :
> bc1_1 := rhs(ans1_bc1[1]) = X_a :
> bc1_2 := rhs(ans1_bc1[2]) = Y_a :
> bc1_3 := rhs(ans1_bc1[3]) = Z_a :
> bc1_4 := rhs(ans1_bc1[4]) = Theta_xa :
> bc1_5 := rhs(ans1_bc1[5]) = Theta_ya :
> bc1_6 := rhs(ans1_bc1[6]) = Theta_za :
>
> ans1_bc2 := subs(s=l_e, ans1) :
> bc2_1 := rhs(ans1_bc2[1]) = X_b :
> bc2_2 := rhs(ans1_bc2[2]) = Y_b :
> bc2_3 := rhs(ans1_bc2[3]) = Z_b :
> bc2_4 := rhs(ans1_bc2[4]) = Theta_xb :
> bc2_5 := rhs(ans1_bc2[5]) = Theta_yb :
> bc2_6 := rhs(ans1_bc2[6]) = Theta_zb :
```

```

> bc_sol1 := simplify(solve( {seq(bc1_||i, i=1..6), seq(bc2_||i, i=1..6)}, {PI[1](0),
    P2[1](0), P3[1](0), P4[1](0), P5[1](0), P6[1](0), D(PI[1])(0), D(P2[1])(0),
    D(P3[1])(0), D(P4[1])(0), D(P5[1])(0), D(P6[1])(0)}), size) :
> sol_sis1 := collect(simplify(subs(seq(bc_sol1[i], i=1..12), ans1), size), s) :
> collect(simplify(sol_sis1[6], size), s)

```

$$\theta_{z_1} = \theta_{za} + \frac{(-\theta_{za} + \theta_{zb})s}{l_e} \quad (4.1.2)$$

▼ Solução numérica

```

> nsis1 := subs(prms_vals, sis1) :
> nbcs1 := subs(prms_vals, bcs1) :
> nsol1 := dsolve(nsis1 union nbcs1, vars1, numeric) :

```

► Gráficos

▼ Solução sistema de epsilon 2

```

> bcs2 := {PI[2](0) = Xa, P2[2](0) = Ya, P3[2](0) = Za, P4[2](0) = Θxa, P5[2](0) = Θya,
    P6[2](0) = Θza, PI[2](le) = Xb, P2[2](le) = Yb, P3[2](le) = le + Zb, P4[2](le) = Θxb,
    P5[2](le) = Θyb, P6[2](le) = Θzb} :
>
> dsis2 := {seq(eq||i[2], i=1..6)} :
> sis2 := eval(subs(seq(sol_sis1[i], i=1..6), dsis2)) :
> csis2 := eval(subs(seq(sol1_compact[i], i=1..6), dsis2)) :
>
> vars2 := {PI[2](s), P2[2](s), P3[2](s), P4[2](s), P5[2](s), P6[2](s)} :
> ans2 := convert(dsolve(sis2, vars2, series), polynom) :
> cans2 := convert(dsolve(csis2, vars2, series), polynom) :
>
> #ans2_bc1 é resolvi da segundo às mesmas condições de contorno
da solução do sistema 1 somente para visualizarmos como as
soluções "evoluent" conforme a ordem ie, eps1, eps2, eps3:
> ans2_bc1 := subs(s=0, ans2) :
> s2_bc1_1 := rhs(ans2_bc1[1]) = Xa :
> s2_bc1_2 := rhs(ans2_bc1[2]) = Ya :
> s2_bc1_3 := rhs(ans2_bc1[3]) = Za :
> s2_bc1_4 := rhs(ans2_bc1[4]) = Θxa :

```

```

> s2_bc1_5 := rhs(ans2_bc1[5]) =  $\Theta_{ya}$  :
> s2_bc1_6 := rhs(ans2_bc1[6]) =  $\Theta_{za}$  :
>
> ans2_bc2 := subs(s=l_e, ans2) :
> s2_bc2_1 := rhs(ans2_bc2[1]) =  $X_b$  :
> s2_bc2_2 := rhs(ans2_bc2[2]) =  $Y_b$  :
> s2_bc2_3 := rhs(ans2_bc2[3]) =  $Z_b$  :
> s2_bc2_4 := rhs(ans2_bc2[4]) =  $\Theta_{xb}$  :
> s2_bc2_5 := rhs(ans2_bc2[5]) =  $\Theta_{yb}$  :
> s2_bc2_6 := rhs(ans2_bc2[6]) =  $\Theta_{zb}$  :
>
> #Aqui anulamos todas condições de contorno pois aqui no método
de perturbação resolvemos as c.c. somente para o sistema de
primeira ordem. As c.c. das ordens seguintes são todas nulas
pois iremos somar as soluções, ex.:  $x(s) = x_1(s) + x_2(s) +$ 
 $x_3(s)$ , onde  $x_2$  e  $x_3$  são as soluções de  $x$  para os termos de
segunda e terceira ordem e somente  $x_1$  deve ser resolvido
considerando as condições de contorno!
> ans2c_bc1 := subs(s=0, cans2) :
> cs2_bc1_1 := rhs(ans2c_bc1[1]) = 0 :
> cs2_bc1_2 := rhs(ans2c_bc1[2]) = 0 :
> cs2_bc1_3 := rhs(ans2c_bc1[3]) = 0 :
> cs2_bc1_4 := rhs(ans2c_bc1[4]) = 0 :
> cs2_bc1_5 := rhs(ans2c_bc1[5]) = 0 :
> cs2_bc1_6 := rhs(ans2c_bc1[6]) = 0 :
>
> ans2c_bc2 := subs(s=l_e, cans2) :
> cs2_bc2_1 := rhs(ans2c_bc2[1]) = 0 :
> cs2_bc2_2 := rhs(ans2c_bc2[2]) = 0 :
> cs2_bc2_3 := rhs(ans2c_bc2[3]) = 0 :
> cs2_bc2_4 := rhs(ans2c_bc2[4]) = 0 :
> cs2_bc2_5 := rhs(ans2c_bc2[5]) = 0 :
> cs2_bc2_6 := rhs(ans2c_bc2[6]) = 0 :
>
> bc_sol2 := solve({seq(s2_bc1_||i, i=1..6), seq(s2_bc2_||i, i=1..6)}, {PI[2](0),
P2[2](0), P3[2](0), P4[2](0), P5[2](0), P6[2](0), D(PI[2])(0), D(P2[2])(0),
D(P3[2])(0), D(P4[2])(0), D(P5[2])(0), D(P6[2])(0)}):
> cbc_sol2 := solve({seq(cs2_bc1_||i, i=1..6), seq(cs2_bc2_||i, i=1..6)}, {PI[2](0),
P2[2](0), P3[2](0), P4[2](0), P5[2](0), P6[2](0), D(PI[2])(0), D(P2[2])(0),
D(P3[2])(0), D(P4[2])(0), D(P5[2])(0), D(P6[2])(0)}):
>
>

```

```

> sol_sis2 := subs(seq(bc_sol2[i], i = 1 .. 12), ans2) :
> sol_csis2 := subs(seq(cbc_sol2[i], i = 1 .. 12), cans2) :

> sol2_compact := {seq(P||i[2](s) = collect(rhs(sol_sis2[i]), s, Veil[C]), i = 1 .. 6)} :
> csol2_compact := {seq(P||i[2](s) = collect(rhs(sol_csis2[i]), s, Veil[C]), i = 1 .. 6)} :

>
> 
$$-\frac{1}{20} \frac{K_{33} K_{11} (-Z_b + Z_a) ((\Theta_{ya} + \Theta_{yb}) L + 2 X_a - 2 X_b)}{L^2 (K_{11} L^2 + 12 J_{22}) J_{22}} \#$$

Referenci a
>
> simplify(coeff(rhs(sol_sis2[1]), s, 5), size)
> 
$$-\frac{1}{20} \frac{K_{33} (l_e \Theta_{ya} + l_e \Theta_{yb} + 2 X_a - 2 X_b) K_{11} (Z_a - Z_b)}{J_{22} l_e^2 (K_{11} l_e^2 + 12 J_{22})} \quad (5.1)$$

>
> nsis2 := subs(prms_vals, sis2) :
> nbcs2 := subs(prms_vals, bcs2) :
> nsol2 := dsolve(nsis2 union nbcs2, vars2, numeric) :
>

```

Gráficos

Solução sistema de epsilon 3

```

>
> bcs3 := {P1[3](0) = X_a, P2[3](0) = Y_a, P3[3](0) = Z_a, P4[3](0) = \Theta_{xa}, P5[3](0) = \Theta_{ya},
>          P6[3](0) = \Theta_{za}, P1[3](l_e) = X_b, P2[3](l_e) = Y_b, P3[3](l_e) = l_e + Z_b, P4[3](l_e) = \Theta_{xb},
>          P5[3](l_e) = \Theta_{yb}, P6[3](l_e) = \Theta_{zb}} :
>
> dsis3 := {seq(eq||i[3], i = 1 .. 6)} :
> sis3 := eval(subs(seq(sol1_compact[i], i = 1 .. 6), seq(sol2_compact[i], i = 1 .. 6), dsis3)) :
> csis3 := eval(subs(seq(sol1_compact[i], i = 1 .. 6), seq(csol2_compact[i], i = 1 .. 6),
>          dsis3)) :
>
> vars3 := {seq(P||i[3](s), i = 1 .. 6)} :
> ans3 := convert(dsolve(sis3, vars3, series), polynom) :
> cans3 := convert(dsolve(csis3, vars3, series), polynom) :
>
> ans3_bc1 := subs(s=0, ans3) :
> s3_bc1_1 := rhs(ans3_bc1[1]) = X_a :
> s3_bc1_2 := rhs(ans3_bc1[2]) = Y_a :
> s3_bc1_3 := rhs(ans3_bc1[3]) = Z_a :
>

```

```

> s3_bc1_4 := rhs(ans3_bc1[4]) =  $\Theta_{xa}$  :
> s3_bc1_5 := rhs(ans3_bc1[5]) =  $\Theta_{ya}$  :
> s3_bc1_6 := rhs(ans3_bc1[6]) =  $\Theta_{za}$  :
>
> ans3_bc2 := subs(s=l_e, ans3) :
> s3_bc2_1 := rhs(ans3_bc2[1]) =  $X_b$  :
> s3_bc2_2 := rhs(ans3_bc2[2]) =  $Y_b$  :
> s3_bc2_3 := rhs(ans3_bc2[3]) =  $Z_b$  :
> s3_bc2_4 := rhs(ans3_bc2[4]) =  $\Theta_{xb}$  :
> s3_bc2_5 := rhs(ans3_bc2[5]) =  $\Theta_{yb}$  :
> s3_bc2_6 := rhs(ans3_bc2[6]) =  $\Theta_{zb}$  :
>
>
> cans3_bc1 := subs(s=0, cans3) :
> cs3_bc1_1 := rhs(cans3_bc1[1]) = 0 :
> cs3_bc1_2 := rhs(cans3_bc1[2]) = 0 :
> cs3_bc1_3 := rhs(cans3_bc1[3]) = 0 :
> cs3_bc1_4 := rhs(cans3_bc1[4]) = 0 :
> cs3_bc1_5 := rhs(cans3_bc1[5]) = 0 :
> cs3_bc1_6 := rhs(cans3_bc1[6]) = 0 :
>
> cans3_bc2 := subs(s=l_e, cans3) :
> cs3_bc2_1 := rhs(cans3_bc2[1]) = 0 :
> cs3_bc2_2 := rhs(cans3_bc2[2]) = 0 :
> cs3_bc2_3 := rhs(cans3_bc2[3]) = 0 :
> cs3_bc2_4 := rhs(cans3_bc2[4]) = 0 :
> cs3_bc2_5 := rhs(cans3_bc2[5]) = 0 :
> cs3_bc2_6 := rhs(cans3_bc2[6]) = 0 :
>
>
> bc_sol3 := solve({seq(s3_bc1_||i, i=1..6), seq(s3_bc2_||i, i=1..6)}, {PI[3](0),
    P2[3](0), P3[3](0), P4[3](0), P5[3](0), P6[3](0), D(PI[3])(0), D(P2[3])(0),
    D(P3[3])(0), D(P4[3])(0), D(P5[3])(0), D(P6[3])(0)}):
> cbc_sol3 := solve({seq(cs3_bc1_||i, i=1..6), seq(cs3_bc2_||i, i=1..6)}, {PI[3](0),
    P2[3](0), P3[3](0), P4[3](0), P5[3](0), P6[3](0), D(PI[3])(0), D(P2[3])(0),
    D(P3[3])(0), D(P4[3])(0), D(P5[3])(0), D(P6[3])(0)}):
>
> dsol_sis3 := subs(seq(bc_sol3[i], i=1..12), ans3) :
> sol_csis3 := subs(seq(cbc_sol3[i], i=1..12), cans3) :
>
> csol3_compact := {seq(P[||i[3](s) = collect(rhs(sol_csis3[i]), s, Veil[C]), i=1..6)} :
>
>
> sol_sis3 := Unveil[C](Unveil[C](dsol_sis3)) :
>
> nsis3 := subs(prms_vals, Unveil[C](sis3)) :
> nbcs3 := subs(prms_vals, bcs3) :
> nsol3 := dsolve(nsis3 union nbcs3, vars3, numeric) :
>
>
> # Soluções simbólicas até terceira ordem em epsilon:
> p1_sol := collect(rhs(sol1_compact[1]) + rhs(csol2_compact[1]) + rhs(csol3_compact[1]),
    s) :
> p2_sol := collect(rhs(sol1_compact[2]) + rhs(csol2_compact[2]) + rhs(csol3_compact[2]),
    s) :
> p3_sol := collect(s + rhs(sol1_compact[3]) + rhs(csol2_compact[3])
    + rhs(csol3_compact[3]), s) :
> p4_sol := collect(rhs(sol1_compact[4]) + rhs(csol2_compact[4]) + rhs(csol3_compact[4]),
    s) :
> p5_sol := collect(rhs(sol1_compact[5]) + rhs(csol2_compact[5]) + rhs(csol3_compact[5]),
    s) :
> p6_sol := collect(rhs(sol1_compact[6]) + rhs(csol2_compact[6]) + rhs(csol3_compact[6]),
    s) :
>

```

Programa em álgebra simbólica para geração dos termos lineares e não lineares da formulação de Cosserat

```

> restart;
> N := 3 :
> Order := N + 5 :

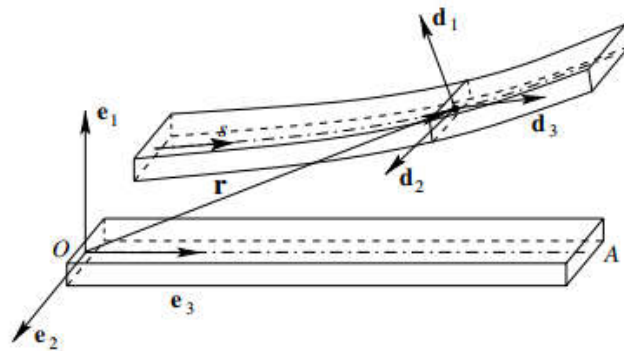
>

```

```

> declare( (x, y, z,  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ )(s, t), prime=s, quiet)
> X := diff_table(x(s, t)) :
> Y := diff_table(y(s, t)) :
> Z := diff_table(z(s, t)) :
> Thx := diff_table( $\theta_x$ (s, t)) :
> Thy := diff_table( $\theta_y$ (s, t)) :
> Thz := diff_table( $\theta_z$ (s, t)) :
>
> e1 := UnitVector(1, 3) :
> e2 := UnitVector(2, 3) :
> e3 := UnitVector(3, 3) :
>
> r := Vector[column]([X[ ], Y[ ], s + Z[ ]]) :
>
> re1 := DotProduct(r, e1) :
> re2 := DotProduct(r, e2) :
> re3 := DotProduct(r, e3) :
> re := Vector[column]([re1, re2, re3]) :
>
> #-----#
> S := Matrix([ [0, -Thz[ ], Thy[ ]], [Thz[ ], 0, -Thx[ ]], [-Thy[ ], Thx[ ], 0] ]) :
>
> R := simplify(  $\sum_{p=0}^3 \frac{S^p}{p!}$  ) :

```



```

> d1 := Vector[column](Transpose(R(1..3, 1))) :
> d2 := Vector[column](Transpose(R(1..3, 2))) :
> d3 := Vector[column](Transpose(R(1..3, 3))) :
> #-----#
> #-----#
> ve := VectorCalculus[diff](r, s) :
> v1 := DotProduct(ve, d1) :
> v2 := DotProduct(ve, d2) :
> v3 := DotProduct(ve, d3) :
> v := simplify(expand(Vector[column]([v1, v2, v3]), size) :
> #-----#
> #-----#
> ue := simplify( $\frac{1}{2} \cdot \text{add}(\text{CrossProduct}(d \parallel i, \text{VectorCalculus[diff]}(d \parallel i, s)), i = 1..3), \text{size})$ ) :
> u1 := DotProduct(ue, d1) :
> u2 := DotProduct(ue, d2) :
> u3 := DotProduct(ue, d3) :
> u := simplify(expand(Vector[column]([u1, u2, u3]), size) :
> #-----#
> #-----#
> we := simplify( $\frac{1}{2} \cdot \text{add}(\text{CrossProduct}(d \parallel i, \text{VectorCalculus[diff]}(d \parallel i, t)), i = 1..3)$ ) :
> w1 := DotProduct(we, d1) :
> w2 := DotProduct(we, d2) :
> w3 := DotProduct(we, d3) :
> w := simplify(expand(Vector[column]([w1, w2, w3]), size) :
> #-----#
> #-----#
> K :=  $\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix}$  :
> J :=  $\begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}$  :

```



```

> II := 
$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix};$$

#-----#
#-----#
> n1 := K[1, 1]·v1 :
> n2 := K[2, 2]·v2 :
> n3 := K[3, 3]·(v3 - 1) :
> n := MatrixVectorMultiply(K, Vector[column]([v1, v2, v3 - 1])) :
> nd := simplify(expand(add(n[i]·d[i], i = 1 .. 3)), size) :

> m1 := J[1, 1]·u1 :
> m2 := J[2, 2]·u2 :
> m3 := J[3, 3]·u3 :
> m := simplify(expand(MatrixVectorMultiply(J, Vector[column]([u1, u2, u3])), size) :

> h1 := II[1, 1]·w1 :
> h2 := II[2, 2]·w2 :
> h3 := II[3, 3]·w3 :
> h := simplify(expand(MatrixVectorMultiply(II, Vector[column]([w1, w2, w3])), size) :

#-----#
#-----#
> vx1 := simplify(simplify(expand(CrossProduct(v, n)), trig), size) :
> ux1 := simplify(simplify(expand(CrossProduct(u, m)), trig), size) :
> wx1 := simplify(simplify(expand(CrossProduct(w, h)), trig), size) :

> wxh1 := simplify(simplify(expand(h3·w2 - h2·w3), trig), size) :
> evalb(wxh[1] = wxh1)
true
#-----#
#-----#
> EDO1 := rho·A·diff(r[1], t$2) = simplify(simplify(expand(diff(nd[1], s)), trig), size) :
> EDO2 := rho·A·diff(r[2], t$2) = simplify(simplify(expand(diff(nd[2], s)), trig), size) :
> EDO3 := rho·A·diff(r[3], t$2) = simplify(combine(expand(diff(nd[3], s)), trig), size) :
> EDO4 := simplify(simplify(expand(diff(h[1], t) + wxh[1] = diff(m[1], s) + ux1[1]
+ vx1[1]), trig), size) :
> EDO5 := simplify(simplify(expand(diff(h[2], t) + wxh[2] = diff(m[2], s) + ux1[2]
+ vx1[2]), trig), size) :
> EDO6 := simplify(simplify(expand(diff(h[3], t) + wxh[3] = diff(m[3], s) + ux1[3]
+ vx1[3]), trig), size) :
> mEDO1 := simplify(simplify(expand(rho·A·diff(r[1], t$2) = diff(d1[1]·K[1, 1]·v1 + d2[1]

```

(1)

```

=      ·K[2,2]·v2 + d3[1]·K[3,3]·(v3 - 1), s), trig), size) :
> mEDO2 := simplify(simplify(expand(rho·A·diff(r[2], t$2) = diff(d1[2]·K[1,1]·v1 + d2[2]
=      ·K[2,2]·v2 + d3[2]·K[3,3]·(v3 - 1), s), trig), size) :
> mEDO3 := simplify(simplify(expand(rho·A·diff(r[3], t$2) = diff(d1[3]·K[1,1]·v1 + d2[3]
=      ·K[2,2]·v2 + d3[3]·K[3,3]·(v3 - 1), s), trig), size) :
> mEDO4 := simplify(simplify(expand(diff(h1, t) - h2·w3 + h3·w2 = diff(m1, s) - m2·u3 + m3
=      ·u2 + v2·n3 - v3·n2), trig), size) :
> mEDO5 := simplify(simplify(expand(diff(h2, t) - h3·w1 + h1·w3 = diff(m2, s) - m3·u1 + m1
=      ·u3 + v3·n1 - v1·n3), trig), size) :
> mEDO6 := simplify(simplify(expand(diff(h3, t) - h1·w2 + h2·w1 = diff(m3, s) - m1·u2 + m2
=      ·u1 + v1·n2 - v2·n1), trig), size) :
> #-----#
> #-----#
> evalb(EDO1 = mEDO1)
=      true
> evalb(EDO2 = mEDO2)
=      true
> evalb(expand(EDO3) = expand(mEDO3))
=      true
> evalb(EDO4 = mEDO4)
=      true
> evalb(EDO5 = mEDO5)
=      true
> evalb(EDO6 = mEDO6)
=      true
> #-----#
> #-----#
>
> V_ang_3d := eval(1/2 · ( expand(Multiply(Multiply(Transpose(u), J), u) ) ) ) :
> V_ang_3d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂s θ_x(s, t), ∂/∂s θ_y(s, t), ∂/∂s θ_z(s, t), θ_x(s, t),
=      θ_y(s, t), θ_z(s, t) ] ) ≤ 3, V_ang_3d), size) :
> V_ang_2d := eval(subs({y(s, t) = 0, θ_x(s, t) = 0, θ_z(s, t) = 0}, 1/2
=      · ( expand(simplify(Multiply(Multiply(Transpose(u), J), u), trig) ) ) ) ) :
> V_ang_2d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂s θ_x(s, t), ∂/∂s θ_y(s, t), ∂/∂s θ_z(s, t), θ_x(s, t),
=      θ_y(s, t), θ_z(s, t) ] ) ≤ 3, V_ang_2d), size) :
> V_lin_3d := eval(1/2 · ( expand(simplify(Multiply(Multiply(Transpose(v
=      - Vector[column]([0, 0, 1])), K), v - Vector[column]([0, 0, 1])), trig) ) ) ) :

```

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

```

> V_lin_3d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂s x(s, t), ∂/∂s y(s, t), ∂/∂s z(s, t), ∂/∂s θx(s, t),
∂/∂s θy(s, t), ∂/∂s θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 3, V_lin_3d),
size):
=
> V_lin_2d := eval(subs({z(s, t) = 0, y(s, t) = 0, θx(s, t) = 0, θz(s, t) = 0}, 1/2
· (expand(Multiply(Multiply(Transpose(v - Vector[column]([0, 0, 1])), K), v
- Vector[column]([0, 0, 1])))) : # z=0 pois modo axial nao interessa nesse momento
=
> V_lin_2d_3o := expand(simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂s x(s, t), ∂/∂s y(s, t), ∂/∂s z(s, t),
∂/∂s θx(s, t), ∂/∂s θy(s, t), ∂/∂s θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 3,
V_lin_2d), size)):
=
> V_2d_3o := simplify(V_lin_2d_3o + V_ang_2d_3o, size)
=
V_2d_3o :=  $\frac{\theta_y^2 K_{11}}{2} + \frac{K_{11} x_s^2}{2} - K_{11} x_s \theta_y + \frac{J_{22} \theta_{y_s}^2}{2}$  (8)
=
> V_3d_3o := simplify(V_lin_3d_3o + V_ang_3d_3o, size):
=
> T_ang_3d := eval(1/2 · (expand(Multiply(Multiply(Transpose(w), II), w))))):
=
> T_ang_3d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂t θx(s, t), ∂/∂t θy(s, t), ∂/∂t θz(s, t), θx(s, t),
θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 3, T_ang_3d), size):
=
> T_ang_2d := eval(T_ang_3d, {z(s, t) = 0, y(s, t) = 0, θx(s, t) = 0, θz(s, t) = 0}):
# z=0 pois modo axial nao interessa nesse momento
=
> T_ang_2d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂t θx(s, t), ∂/∂t θy(s, t), ∂/∂t θz(s, t), θx(s, t),
θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 3, T_ang_2d), size):
=
> T_lin_3d := eval(expand(1/2 · (rho · A · (DotProduct(VectorCalculus[diff](r, t),
VectorCalculus[diff](r, t))))):
=
> T_lin_3d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂t x(s, t), ∂/∂t y(s, t), ∂/∂t z(s, t), ∂/∂t θx(s, t),
∂/∂t θy(s, t), ∂/∂t θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 3, T_lin_3d),
size):
=
> T_lin_2d := eval(T_lin_3d, {z(s, t) = 0, y(s, t) = 0, theta(s, t) = 0, phi(s, t) = 0}):
# z=0 pois modo axial nao interessa nesse momento

```

```

> T_lin_2d_3o := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂t x(s, t), ∂/∂t y(s, t), ∂/∂t z(s, t), ∂/∂t θx(s, t),
    ∂/∂t θy(s, t), ∂/∂t θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 3, T_lin_2d),
    size) :
=
> T_2d_3o := T_lin_2d_3o + T_ang_2d_3o
    T_2d_3o :=  $\frac{\rho A x_l^2}{2} + \frac{I_{22} \theta_{y_l}^2}{2}$ 
=
> T_3d_3o := T_lin_3d_3o + T_ang_3d_3o :
=
> # Termos potenciais e cinéticos incluindo todos modos de vibração separados nos que levarão à
    matriz linear e aos que levarão ao vetor de termos não lineares:
=
> V_lin := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂s x(s, t), ∂/∂s y(s, t), ∂/∂s z(s, t), ∂/∂s θx(s, t),
    ∂/∂s θy(s, t), ∂/∂s θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 2,
    expand(V_3d_3o), size) :
=
> V_nlin := simplify(remove(p → degree(p, [ ∂/∂s x(s, t), ∂/∂s y(s, t), ∂/∂s z(s, t), ∂/∂s θx(s, t),
    ∂/∂s θy(s, t), ∂/∂s θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 2,
    expand(V_3d_3o), size) :
=
> T_lin := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂t x(s, t), ∂/∂t y(s, t), ∂/∂t z(s, t), ∂/∂t θx(s, t),
    ∂/∂t θy(s, t), ∂/∂t θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 2,
    expand(T_3d_3o), size) :
=
> T_nlin := simplify(remove(p → degree(p, [ ∂/∂t x(s, t), ∂/∂t y(s, t), ∂/∂t z(s, t), ∂/∂t θx(s, t),
    ∂/∂t θy(s, t), ∂/∂t θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 2,
    expand(T_3d_3o), size) :
=
>
> # Termos potenciais e cinéticos só para o modo de flexão separados nos que levarão à matriz
    linear e aos que levarão ao vetor de termos não lineares:
=
> V_2d_lin := simplify(select(p → degree(p, [ ∂/∂s x(s, t), ∂/∂s y(s, t), ∂/∂s z(s, t), ∂/∂s θx(s, t),
    ∂/∂s θy(s, t), ∂/∂s θz(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), θx(s, t), θy(s, t), θz(s, t) ])) ≤ 2,
    expand(V_2d_3o), size)

```

(9)

$$\begin{aligned}
 & V_2d_lin := \frac{\theta_y^2 K_{11}}{2} + \frac{K_{11} x_s^2}{2} - K_{11} x_s \theta_y + \frac{J_{22} \theta_s^2}{2} \quad (10) \\
 & \text{--} \\
 & > V_2d_nlin := \text{simplify}\left(\text{remove}\left(p \rightarrow \text{degree}\left(p, \left[\frac{\partial}{\partial s} x(s, t), \frac{\partial}{\partial s} y(s, t), \frac{\partial}{\partial s} z(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \theta_x(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \theta_y(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \theta_z(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), \theta_x(s, t), \theta_y(s, t), \theta_z(s, t)\right]\right) \leq 2, \right. \\
 & \quad \left. \text{expand}(V_2d_3o)\right), \text{size}\right) \\
 & \quad V_2d_nlin := 0 \quad (11) \\
 & \text{--} \\
 & > T_2d_lin := \text{simplify}\left(\text{select}\left(p \rightarrow \text{degree}\left(p, \left[\frac{\partial}{\partial t} x(s, t), \frac{\partial}{\partial t} y(s, t), \frac{\partial}{\partial t} z(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \theta_x(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \theta_y(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \theta_z(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), \theta_x(s, t), \theta_y(s, t), \theta_z(s, t)\right]\right) \leq 2, \right. \\
 & \quad \left. \text{expand}(T_2d_3o)\right), \text{size}\right) \\
 & \quad T_2d_lin := \frac{\rho A x_t^2}{2} + \frac{I_{22} \theta_t^2}{2} \quad (12) \\
 & \text{--} \\
 & > T_2d_nlin := \text{simplify}\left(\text{remove}\left(p \rightarrow \text{degree}\left(p, \left[\frac{\partial}{\partial t} x(s, t), \frac{\partial}{\partial t} y(s, t), \frac{\partial}{\partial t} z(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \theta_x(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \theta_y(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \theta_z(s, t), x(s, t), y(s, t), z(s, t), \theta_x(s, t), \theta_y(s, t), \theta_z(s, t)\right]\right) \leq 2, \right. \\
 & \quad \left. \text{expand}(T_2d_3o)\right), \text{size}\right) \\
 & \quad T_2d_nlin := 0 \quad (13) \\
 & \text{--} \\
 & >
 \end{aligned}$$

D

Programa em álgebra simbólica para computação das frequências naturais

```

> restart :
>
> re := 0.1 :
> ri := 0.0945 :
> L := 1000 :
> Iy := evalf( Pi * ( re^4 - ri^4 ) / 4 ) :
> A := evalf( Pi * ( re^2 - ri^2 ) ) :
> rho := 7850 :
> E := 2.1e11 :
>
> nm := 6 :
>
> f := beta -> cosh(beta) * cos(beta) + 1 :
> Nm := 3 * nm :
> j := 1 :
> i := 1 :
>
> while j <= Nm do
>
>   sol[i] := fsolve( f(beta), beta=j..j+3 ) :
>   j := j + 3 :
>   i := i + 1 :
>
> end do:
>
> for k from 1 to nm do
>
>   wn[k] := ( sol[k] / L )^2 * sqrt( E * Iy / rho * A ) :
>   fn[k] := evalf( wn[k] / ( 2 * Pi ) ) :
>
> od:
>
> fn[6]

```

0.01690706612

(1)

E

Programa para solução de uma viga de Cosserat estática em elementos finitos

```

> restart;
> with(LinearAlgebra) :
> with(VectorCalculus, [DotProduct, CrossProduct]) :
> with(PDEtools, [declare, dchange, diff_table]) :
> with(plots, [odeplot, display, spacecurve, pointplot]) :
> with(LargeExpressions) :
> with(ArrayTools) :
> Digits := 32 :
> interface(displayprecision = 8) :
>
> alias( $X_a = X_a(t), Y_a = Y_a(t), Z_a = Z_a(t), \Theta_{xa} = \Theta_{xa}(t), \Theta_{ya} = \Theta_{ya}(t), \Theta_{za} = \Theta_{za}(t), X_b = X_b(t), Y_b = Y_b(t), Z_b = Z_b(t), \Theta_{xb} = \Theta_{xb}(t), \Theta_{yb} = \Theta_{yb}(t), \Theta_{zb} = \Theta_{zb}(t), \theta_y(s, t) = ty(s, t)$ ) :
>
>  $V_{imp} := \frac{\theta_y(s, t)^2 K_{11}}{2} + \frac{K_{11} \text{diff}(x(s, t), s)^2}{2} - K_{11} \text{diff}(x(s, t), s) \theta_y(s, t)$ 
>  $+ \frac{J_{22} \text{diff}(\theta_y(s, t), s)^2}{2} :$  # Termos retirados do apêndice C
>
>  $T := \frac{\rho A \text{diff}(x(s, t), t)^2}{2} + \frac{I_{22} \text{diff}(\theta_y(s, t), t)^2}{2} :$ 
>
> vars := [x(s, t),  $\theta_y(s, t)$ ] :
>
> qe := [ $X_a, \Theta_{ya}, X_b, \Theta_{yb}$ ] :
>
> qepp := VectorCalculus[diff](qe, t$2) :
```

Parâmetros geométricos, materiais, etc

```

> prms1 := {rho = 7850, kappa =  $\frac{5}{6}$ , E = 2.1e11, nu = 0.29, q0 = -260, P0 = -260, re = 0.1, ri = 0.0945} :
>
> prms2 := subs( $\left\{ G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \text{nu})}, A = \text{evalf}(\text{Pi} \cdot (re^2 - ri^2)), \gamma_{11} = \text{evalf}\left(\frac{\text{Pi} \cdot (re^4 - ri^4)}{4}\right), \gamma_{22} = \text{evalf}\left(\frac{\text{Pi} \cdot (re^4 - ri^4)}{4}\right), \gamma_{33} = 2 \cdot \text{evalf}\left(\frac{\text{Pi} \cdot (re^4 - ri^4)}{4}\right) \right\}$ ) :
>
> prms := prms1 union prms2 :
>
> prms_vals1 := { $K_{11} = \text{kappa} \cdot G \cdot A, K_{22} = \text{kappa} \cdot G \cdot A, K_{33} = E \cdot A, J_{11} = E \cdot \gamma_{11}, J_{22} = E \cdot \gamma_{22}, J_{33} = G \cdot \gamma_{33}, I_{11} = \text{rho} \cdot \gamma_{11}, I_{22} = \text{rho} \cdot \gamma_{22}, I_{33} = \text{rho} \cdot \gamma_{33}$ } :
>
> prms_vals2 := eval(prms_vals1, prms) :
```

`> eval(rho·A·9.81, prms) # peso próprio`
258.80390918 (1.1)

Funções base Cosserat

$$\begin{aligned}
 > \text{xs} := \frac{2 K_{11} \left(\left(\frac{1}{2} \Theta_{ya} + \frac{1}{2} \Theta_{yb} \right) l_e + X_a - X_b \right) s^3}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} \\
 &+ \frac{\left(-2 K_{11} \left(\Theta_{ya} + \frac{1}{2} \Theta_{yb} \right) l_e^2 - 3 K_{11} (X_a - X_b) l_e - 6 J_{22} (\Theta_{ya} - \Theta_{yb}) \right) s^2}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} \\
 &+ \frac{(K_{11} l_e^3 \Theta_{ya} + 6 J_{22} (\Theta_{ya} - \Theta_{yb}) l_e - 12 J_{22} (X_a - X_b)) s}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} + X_a : \\
 > \text{ys} := \frac{2 \left(\left(-\frac{1}{2} \Theta_{xa} - \frac{1}{2} \Theta_{xb} \right) l_e + Y_a - Y_b \right) K_{22} s^3}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} \\
 &+ \frac{\left(2 K_{22} \left(\Theta_{xa} + \frac{1}{2} \Theta_{xb} \right) l_e^2 - 3 K_{22} (Y_a - Y_b) l_e + 6 J_{11} (\Theta_{xa} - \Theta_{xb}) \right) s^2}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} \\
 &+ \frac{(-K_{22} l_e^3 \Theta_{xa} - 6 J_{11} (\Theta_{xa} - \Theta_{xb}) l_e - 12 J_{11} (Y_a - Y_b)) s}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} + Y_a : \\
 > \text{zs} := Z_a + \frac{(-Z_a + Z_b) s}{l_e} : \\
 > \text{txs} := \frac{(3 (\Theta_{xa} + \Theta_{xb}) l_e - 6 Y_a + 6 Y_b) K_{22} s^2}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} \\
 &+ \frac{\left(\left(-4 \left(\Theta_{xa} + \frac{1}{2} \Theta_{xb} \right) l_e^2 + 3 (2 Y_a - 2 Y_b) l_e \right) K_{22} - 12 J_{11} (\Theta_{xa} - \Theta_{xb}) \right) s}{(K_{22} l_e^2 + 12 J_{11}) l_e} \\
 &+ \Theta_{xa} : \\
 > \text{txs} := \frac{(3 (\Theta_{ya} + \Theta_{yb}) l_e + 6 X_a - 6 X_b) K_{11} s^2}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} \\
 &+ \frac{\left(\left(-4 \left(\Theta_{ya} + \frac{1}{2} \Theta_{yb} \right) l_e^2 + 3 (-2 X_a + 2 X_b) l_e \right) K_{11} - 12 J_{22} (\Theta_{ya} - \Theta_{yb}) \right) s}{(K_{11} l_e^2 + 12 J_{22}) l_e} \\
 &+ \Theta_{ya} : \\
 > \text{tzs} := \Theta_{za} + \frac{(-\Theta_{za} + \Theta_{zb}) s}{l_e} :
 \end{aligned}$$


```

> Ncx := simplify(Vector[row]([coeff(xs, Za), coeff(xs, Xa), coeff(xs, Θya), coeff(xs, Ya),
    coeff(xs, Θxa), coeff(xs, Θza), coeff(xs, Zb), coeff(xs, Xb), coeff(xs, Θyb), coeff(xs,
    Yb), coeff(xs, Θxb), coeff(xs, Θzb) ]), size) :
> Ncy := simplify(Vector[row]([coeff(ys, Za), coeff(ys, Xa), coeff(ys, Θya), coeff(ys, Ya),
    coeff(ys, Θxa), coeff(ys, Θza), coeff(ys, Zb), coeff(ys, Xb), coeff(ys, Θyb), coeff(ys,
    Yb), coeff(ys, Θxb), coeff(ys, Θzb) ]), size) :
> Ncz := simplify(Vector[row]([coeff(zs, Za), coeff(zs, Xa), coeff(zs, Θya), coeff(zs, Ya),
    coeff(zs, Θxa), coeff(zs, Θza), coeff(zs, Zb), coeff(zs, Xb), coeff(zs, Θyb), coeff(zs,
    Yb), coeff(zs, Θxb), coeff(zs, Θzb) ]), size) :
> Nctx := simplify(Vector[row]([coeff(txs, Za), coeff(txs, Xa), coeff(txs, Θya), coeff(txs,
    Ya), coeff(txs, Θxa), coeff(txs, Θza), coeff(txs, Zb), coeff(txs, Xb), coeff(txs, Θyb),
    coeff(txs, Yb), coeff(txs, Θxb), coeff(txs, Θzb) ]), size) :
> Ncty := simplify(Vector[row]([coeff(tys, Za), coeff(tys, Xa), coeff(tys, Θya), coeff(tys,
    Ya), coeff(tys, Θxa), coeff(tys, Θza), coeff(tys, Zb), coeff(tys, Xb), coeff(tys, Θyb),
    coeff(tys, Yb), coeff(tys, Θxb), coeff(tys, Θzb) ]), size) :
> Nctz := simplify(Vector[row]([coeff(tzs, Za), coeff(tzs, Xa), coeff(tzs, Θya), coeff(tzs,
    Ya), coeff(tzs, Θxa), coeff(tzs, Θza), coeff(tzs, Zb), coeff(tzs, Xb), coeff(tzs, Θyb),
    coeff(tzs, Yb), coeff(tzs, Θxb), coeff(tzs, Θzb) ]), size) :
>
> fcs_base_coss := [xs, tys] :
> sisC := [eqsLag(T, V_imp, vars, fcs_base_coss, qe)] :
> (Kc, qKc) := GenerateMatrix(sisC, qe) :
> (Mc, qMc) := GenerateMatrix(sisC, qepp) :
> Fcd := map(int, q0·Transpose(Ncx([2, 3, 8, 9])), s=0..le) :

```

Funções base lineares

```

>
> NI := FunBase(2) :
> xl := LinearAlgebra[Multiply](NI[1], convert(qe, Vector[column])) :
> tl := LinearAlgebra[Multiply](NI[2], convert(qe, Vector[column])) :
> fcs_base_lins := [xl, tl] :
>
> sisL := [eqsLag(T, V_imp, vars, fcs_base_lins, qe)] :
> (Kl, qKl) := GenerateMatrix(sisL, qe) :
> (Ml, qMl) := GenerateMatrix(sisL, qepp) :
> Fld := map(int, q0·Transpose(NI[1]), s=0..le) :

```

Funções base Timoshenko

```

>
> Nt := FunBase(3) :
> xt := LinearAlgebra[Multiply](Nt[1], convert(qe, Vector[column])) :
> tt := LinearAlgebra[Multiply](Nt[2], convert(qe, Vector[column])) :
> fcs_base_timo := [xt, tt] :
>
> sisT := [eqsLag(T, V_imp, vars, fcs_base_timo, qe)] :
> (Kt, qKt) := GenerateMatrix(sisT, qe) :
> (Mt, qMt) := GenerateMatrix(sisT, qepp) :
> Ftd := map(int, q0, Transpose(Nt[1]), s=0..le) :
>
> rho := 7850 :
> L := 20 :
>
> nele := 5 :
> nmos := nele + 1 : # unidimensional
> nnele := 2 :
> nGDLn := 2 :
> nGDLele := nnele·nGDLn :
> nGDL := nGDLn·nmos : # Número de graus de liberdade total
>
> Mi := GeraMatrizIncid(nele) :
> (cx, dx) := GeraMalha1D(L, nele, Mi) :
>
> Kcini := Matrix(nGDL, nGDL) :
> Mcini := Matrix(nGDL, nGDL) :
> Fcini := Vector(nGDL) :
> Fcc := Vector(nGDL) :
> Fcc[nGDL - 1] := eval(P0 prms) :
>
> Klini := Matrix(nGDL, nGDL) :
> Mlini := Matrix(nGDL, nGDL) :
> Flini := Vector(nGDL) :
> Flc := Vector(nGDL) :
> Flc[nGDL - 1] := eval(P0 prms) :
>
> Ktini := Matrix(nGDL, nGDL) :
> Mtini := Matrix(nGDL, nGDL) :
> Ftini := Vector(nGDL) :
> Ftc := Vector(nGDL) :
> Ftc[nGDL - 1] := eval(P0 prms) :
>
> Kcele := eval(Kc, prms_vals2 union {le=dx[1]}) :

```

```

> Mcele := eval(Mc, prms union prms_vals2 union {le = dx[1]}) :
> Fcele := eval(Fcd, prms_vals2 union prms union {le = dx[1]}) :
>
> Klele := eval(Kl, prms_vals2 union {le = dx[1]}) :
> Mlele := eval(Ml, prms union prms_vals2 union {le = dx[1]}) :
> Flele := eval(Fld, prms_vals2 union prms union {le = dx[1]}) :
>
> Ktele := eval(Kt, prms union prms_vals2 union {le = dx[1]} union {Iy = rhs(prms2[4])}) :
> Mtele := eval(Mt, prms union prms_vals2 union {le = dx[1]} union {Iy = rhs(prms2[4])}) :
> Ftele := eval(Ftd, prms_vals2 union prms union {le = dx[1]} union {Iy = rhs(prms2[4])}) :
>
> for iele from 1 to nele do
    indice := DetGdlEle(iele, nnele, nGDLn) :
    Mcg := MontaMatrizGlob(Mcini, Mcele, indice) :
    Kcg := MontaMatrizGlob(Kcini, Kcele, indice) :
    Fcg := MontaForcaGlob(Fcini, Fcele, indice) :
    Mlg := MontaMatrizGlob(Mlini, Mlele, indice) :
    Klg := MontaMatrizGlob(Klini, Klele, indice) :
    Flg := MontaForcaGlob(Flini, Flele, indice) :
    Mtg := MontaMatrizGlob(Mtini, Mtele, indice) :
    Ktg := MontaMatrizGlob(Ktini, Ktele, indice) :
    Ftg := MontaForcaGlob(Ftini, Ftele, indice) :
  od:
>
> v_GDL := {seq(igdl, igdl = 1 .. nGDL)} :
> v_GDLc := {seq(igdl, igdl = 1 .. nnos*3)} :
> # Bi-apoiada (CC=1):
> GDLrest1 := {1, nGDL - 1} :
>
> # Engastada-Engastada (CC=2):
> GDLrest2 := {1, 2, nGDL - 1, nGDL} :
>
> # Engastada-Livre (CC=3):
> GDLrest3 := {1, 2} :
>
> CC := 3 :
>
> if CC = 1 then v_GDL_ativ := v_GDL\GDLrest1 elif
  CC = 2 then v_GDL_ativ := v_GDL\GDLrest2 elif
  CC = 3 then v_GDL_ativ := v_GDL\GDLrest3 end if:

```

```

> # a função \ irá pegar todos valores que estão em v_GDL que NÃO estão em GDLrest, portanto,
    somente os valores de GDL ativos (sem restrição).
> # Agora basta achar a solução somente nos GDL ativos:
> GDL_ativos := convert(v_GDL_ativ, list) :
    # convertendo em lista para poder entrar como índice na matrix global
>
> Uc := Multiply(MatrixInverse(Kcg[GDL_ativos, GDL_ativos]), Fcg[GDL_ativos]) :
> Ul := Multiply(MatrixInverse(Klg[GDL_ativos, GDL_ativos]), Flg[GDL_ativos]) :
> Ut := Multiply(MatrixInverse(Ktg[GDL_ativos, GDL_ativos]), Ftg[GDL_ativos]) :
>
> Uvc := Vector[column](nnos) :
> Uvl := Vector[column](nnos) :
> Uvt := Vector[column](nnos) :
>

```

▼ Vetores de deslocamento transversal

```

> if CC = 1 then
    j := 2 :
    for i from 2 to nnos - 1 do
        Uvc[i] := Uc[j] :
        Uvl[i] := Ul[j] :
        Uvt[i] := Ut[j] :
    j := j + 2 :
    od:
    elif CC = 2 then
        j := 1 :
        for i from 2 to nnos - 1 do
            Uvc[i] := Uc[j] :
            Uvl[i] := Ul[j] :
            Uvt[i] := Ut[j] :
        j := j + 2 :
        od:
        elif CC = 3 then
            j := 1 :
            for i from 2 to nnos do
                Uvc[i] := Uc[j] :
                Uvl[i] := Ul[j] :
            j := j + 2 :
            od:
        end if
    end if

```

```

    Uvt[i] := Ut[j]:
    j := j + 2:
od:
end if:

```

▼ Pós-processamento

```

> Pc := pointplot([seq([cx[i], Uvc[i]], i = 1 ..nnos)], color = green, legend = [Cosserat]):
> min(Uvc)
-1.55710949 (6.1)
> Pl := pointplot([seq([cx[i], Uvl[i]], i = 1 ..nnos)], symbol = asterisk, color = blue, legend
= [Linear]):
> min(Uvl)
-0.01715074 (6.2)
>
> Pt := pointplot([seq([cx[i], Uvt[i]], i = 1 ..nnos)], symbol = circle, symbolsize = 15, color
= magenta, legend = [Timoshenko]):
> min(Uvt)
-1.55620695 (6.3)
> display(Pc, Pl, Pt, labels = ["z[m]", "x[m]"]):
>
> UthinCC3q := eval( $\frac{q_0 \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot \gamma_{22}}$ , prms)
UthinCC3q := -1.55688137 (1)
>

```

E.1 Sub-Rotinas

Aqui encontram-se as sub rotinas implementadas no ambiente de inicialização do Maple para auxílio no problema de elementos finitos.

```

DetGdlEle:=proc(iele::integer, nnele::integer, nGDLn::integer)

#-----DESCRIÇÃO DA FUNÇÃO-----#
# A função têm o objetivo de computar o grau de liberdade do sistema associado
# à cada elemento para um problema unidimensional.
#
# PARÂMETROS DE ENTRADA:
#
# iele    -> i-ésimo elemento a se computar o GDL do sistema associado a ele.
# nnele   -> Número de nós por elemento ( poderíamos dispensar pois o problema é
# unidimensional portanto sempre será 2 ).
# nGDLn   -> Número de GDL de um nó
#-----#

local nGDLele, start, index, i;

nGDLele:=nnele*nGDLn;
index:=Vector(nGDLele);
start:=(iele-1)*(nnele-1)*nGDLn;

for i from 1 to nGDLele do

    index[i]:=start+i;

od:

return index;

end proc:

```

```
GeraMalha1D:=proc(L::nonnegative, nele::integer, MatrizIncidencia::Matrix)

#-----DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ENTRADA-----#
# L          -> Comprimento do domínio [0,L]
# nele       -> Número de elementos desejados no domínio
# MatrizIncidencia -> Matriz contendo a correlação entre o indexamento global
#                  e o indexamento elementar, de cada elemento.
#
# Obs1.:      Indexamento elementar padrão: #1 0-----i-esimo elemento-----o #2
#
# Obs2.:      Por construção, a matriz de incidência deverá conter os elementos em suas linhas
#                  e o indexamento elementar em suas colunas.
#-----#

local v_coord, v_dL, ino, iele, nnos;

nnos:=nele+1;

v_coord:=Vector(nnos); # Inicializa vetor que contém as coordenadas de cada nó do domínio.
v_dL:=Vector(nele);    # Inicializa vetor que contém o comprimento de cada elemento do domínio.

# Construção do vetor de coordenadas de cada nó do domínio:
for ino from 1 to nnos do
    # Equação que determina a coordenada do i-ésimo nó
    v_coord[ino]:=L*((ino-1)/(nnos-1)) # distando da origem (i=1) dividindo o domínio [0,L]
    # de forma homogênea.
od:

# Construção do vetor que determina o comprimento de cada elemento do domínio:
for iele from 1 to nele do

    v_dL[iele]:=v_coord[MatrizIncidencia[iele,2]] - v_coord[MatrizIncidencia[iele,1]];

od:

return evalf(v_coord),evalf(v_dL);

end proc;
```



```

MontaMatrizGlob:=proc(K::Matrix, Ke::Matrix, indice::Vector)
    local i, j, iind, jind;
    nGDLele:=numelems(indice):
    for i from 1 to nGDLele do
        iind:=indice[i];
        for j from 1 to nGDLele do
            jind:=indice[j];
            K[iind,jind]:= K[iind,jind] + Ke[i,j];
        od:
    od:
    return K;
end proc:

MontaForcaGlob:=proc(F::Vector, Fe::Vector, indice::Vector)
    local i, j, iind, jind;
    nGDLele:=numelems(indice):
    for i from 1 to nGDLele do
        iind:=indice[i];
        F[iind]:= F[iind] + Fe[i];
        #for j from 1 to nGDLele do
            # jind:=indice[j];
            # K[iind,jind]:= K[iind,jind] + Ke[i,j];
        #od:
    od:
    return F;
end proc:

eqsLag:=proc(T,U,vars,fcs_base,qe)
    local nvars, eqs, dL, Lag, ivar, nq;

    nvars:=numelems(vars):
    nq:=numelems(qe):
    dL:=eval(T-U):
    Lag:=int(subs({seq(vars[i] = fcs_base[i],i=1..nvars)}, dL), s = 0 .. 1__e):

    for ivar from 1 to nq do
        eqs[ivar]:=Physics[diff](Physics[diff](Lag, diff(qe[ivar], t)),t)-Physics[diff](Lag,qe[ivar])=0:
    od:

    return seq(eqs[i],i=1..nq);
end proc:

```

eqsLag realiza a formulação Lagrangeana utilizando como parâmetros de entrada os termos potenciais, cinéticos, as funções base e o vetor de deslocamento generalizado elementar.

F

Programa para solução de uma viga de Cosserat estática em elementos finitos

```

> restart;
>
> rot := [2, 1, 3]:
> rot_name := [theta_y, theta_x, theta_z]:
> rot_name2 := [psi, theta, phi]:
> seq_rot := cat(seq(rot[i], i = 1 .. 3))
                                seq_rot := 213

```

(1)

```

> C||seq_rot := MatrizAtitude(rot, rot_name)
C213 := [[cos(theta_z) cos(theta_y) + sin(theta_z) sin(theta_x) sin(theta_y), sin(theta_z) cos(theta_x), -cos(theta_z) sin(theta_y)
+ sin(theta_z) sin(theta_x) cos(theta_y)],
[-sin(theta_z) cos(theta_y) + cos(theta_z) sin(theta_x) sin(theta_y), cos(theta_z) cos(theta_x), sin(theta_z) sin(theta_y)
+ cos(theta_z) sin(theta_x) cos(theta_y)],
[cos(theta_x) sin(theta_y), -sin(theta_x), cos(theta_x) cos(theta_y)]]

```

(2)

```

> C||seq_rot||MaS := MatrizAtitude(rot, rot_name2)
C213MaS := [[cos(phi) cos(psi) + sin(phi) sin(theta) sin(psi), sin(phi) cos(theta), -cos(phi) sin(psi)
+ sin(phi) sin(theta) cos(psi)],
[-sin(phi) cos(psi) + cos(phi) sin(theta) sin(psi), cos(phi) cos(theta), sin(phi) sin(psi)
+ cos(phi) sin(theta) cos(psi)],
[cos(theta) sin(psi), -sin(theta), cos(theta) cos(psi)]]

```

(3)

```

> for i from 1 to 3 do
d||i := add(C213[i, j] * UnitVector(j, 3), j = 1 .. 3)

```

od:

```

> d1

```

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_z) \cos(\theta_y) + \sin(\theta_z) \sin(\theta_x) \sin(\theta_y) \\ \sin(\theta_z) \cos(\theta_x) \\ -\cos(\theta_z) \sin(\theta_y) + \sin(\theta_z) \sin(\theta_x) \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

(4)

```

> d2

```

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta_z) \cos(\theta_y) + \cos(\theta_z) \sin(\theta_x) \sin(\theta_y) \\ \cos(\theta_z) \cos(\theta_x) \\ \sin(\theta_z) \sin(\theta_y) + \cos(\theta_z) \sin(\theta_x) \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

(5)

```

> d3

```

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_x) \sin(\theta_y) \\ -\sin(\theta_x) \\ \cos(\theta_x) \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

(6)

F.1 Sub-Rotinas

```
with(LinearAlgebra,[MatrixMatrixMultiply,DotProduct,UnitVector]):

MatrizAtitude:=proc(seq_rot::list, nome_rot::list)

.....local M, ang, theta, rot1, rot2, rot3, nome_rot1, nome_rot2, nome_rot3;

    rot1:=seq_rot[1]:
    rot2:=seq_rot[2]:
    rot3:=seq_rot[3]:

    M[1]:= Matrix(3, 3, [[1, 0, 0], [0, cos(ang), sin(ang)], [0, -sin(ang), cos(ang)]]):
    M[2]:= Matrix(3, 3, [[cos(ang), 0, -sin(ang)], [0, 1, 0], [sin(ang), 0, cos(ang)]]):
    M[3]:= Matrix(3, 3, [[cos(ang), sin(ang), 0], [-sin(ang), cos(ang), 0], [0, 0, 1]]):

    if _params['nome_rot'] = NULL then

.....    return MatrixMatrixMultiply( eval( M[seq_rot[3]], ang=theta__||rot3),
        MatrixMatrixMultiply( eval( M[seq_rot[2]], ang=theta__||rot2), eval( M[seq_rot[1]], ang=theta__||rot1 ) ) );
    else
        nome_rot1:=nome_rot[1]:
        nome_rot2:=nome_rot[2]:
        nome_rot3:=nome_rot[3]:
        return MatrixMatrixMultiply( eval( M[seq_rot[3]], ang=nome_rot3),
            MatrixMatrixMultiply( eval( M[seq_rot[2]], ang=nome_rot2), eval( M[seq_rot[1]], ang=nome_rot1 ) ) );
    end if

end proc:
```

Referências bibliográficas

- [1] ANTMAN, S. S.. **Nonlinear Problems of Elasticity**. 2nd ed. Springer-Verlag New York, Inc., 2005.
- [2] CAO, D.; TUCKER, R. W.. **Nonlinear dynamics of elastic rods using the cosserat theory: Modelling and simulation**. International Journal of Solids and Structures, 45(2):460 – 477, 2008.
- [3] RITTO, T. G.. **Numerical analysis of the nonlinear dynamics of a drill-string with uncertainty modeling**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- [4] KORZENIOWSKI, P.; MARTINEZ-MARTINEZ, F.; HALD, N. ; BELLO, F.. **Simulation of catheters and guidewires for cardiovascular interventions using an inextensible cosserat rod**. In: Bello, F.; Cotin, S., editors, BIOMEDICAL SIMULATION, p. 112–121, Cham, 2014. Springer International Publishing.
- [5] SPILLMANN, J.; TESCHNER, M.. **CORDE: Cosserat Rod Elements for the Dynamic Simulation of One-Dimensional Elastic Objects**. In: Metaxas, D.; Popovic, J., editors, EUROGRAPHICS/SIGGRAPH SYMPOSIUM ON COMPUTER ANIMATION. The Eurographics Association, 2007.
- [6] TANG, W.; WAN, T. R.; GOULD, D. A.; HOW, T. ; JOHN, N. W.. **A stable and real-time nonlinear elastic approach to simulating guidewire and catheter insertions based on cosserat rod**. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 59(8):2211–2218, Aug 2012.
- [7] SEPEHRI, A.. **A mathematical model for DNA**. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(11):1750152–2198, Jan 2017.
- [8] MICHELS, D. L.; LYAKHOV, D. A.; GERDT, V. P.; HOSSAIN, Z.; RIEDEL-KRUSE, I. H. ; WEBER, A. G.. **On the general analytical solution of the kinematic cosserat equations**. In: Gerdt, V. P.; Koepf, W.; Seiler, W. M. ; Vorozhtsov, E. V., editors, COMPUTER ALGEBRA IN SCIENTIFIC COMPUTING, p. 367–380, Cham, 2016. Springer International Publishing.

- [9] PAI, D. K.. **STRANDS: Interactive Simulation of Thin Solids using Cosserat Models**. Computer Graphics Forum, 2002.
- [10] CUNHA, A. J.. **Modeling and uncertainty quantification in the nonlinear stochastic dynamics of horizontal drillstrings**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- [11] LIU, D.; CAO, D.; ROSING, R.; WANG, C. H.-T. ; RICHARDSON, A.. **Finite element formulation of slender structures with shear deformation based on the cosserat theory**. International Journal of Solids and Structures, 44(24):7785 – 7802, 2007.
- [12] O'REILLY, O. M.. **Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods**. Springer, Cham, 2017.
- [13] CAO, D.; LIU, D. ; WANG, C. H.-T.. **Three-dimensional nonlinear dynamics of slender structures: Cosserat rod element approach**. International Journal of Solids and Structures, 43(3):760 – 783, 2006.
- [14] AGOSTINI, C. E.. **Problemas de estabilização de poços petrolíferos: as questões críticas no onshore e no offshore**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.
- [15] SILVA, N. S.. **Avaliação numérico-experimental de modelos analíticos para previsão de fadiga multi-axial de tubos de perfuração de poços de petróleo**. Dissertação de mestrado, Departamento de engenharia naval e oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, 2008.
- [16] JANSEN, J.; VAN DEN STEEN, L.. **Active damping of self-excited torsional vibrations in oil well drillstrings**. Journal of Sound and Vibration, 179(4):647 – 668, 1995.
- [17] SILVA, N. S.; ET AL. **Fundamentos de engenharia de petróleo**. Interciência, 2001.
- [18] SILVEIRA, M.. **A Comprehensive Model of Drill-string Dynamics Using Cosserat Rod Theory**. Aberdeen University, 2011.
- [19] DA COSTA MATTOS, P. A.. **Vibrações em colunas de perfuração em operações na bacia do solimões**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

- [20] MITCHELL, R.; ALLEN, M.. **Case studies of bha vibration failure**. Presented at the SPE 62nd Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, September, 1987.
- [21] D SPANOS, P.; M CHEVALLIER, A.; POLITIS, N. ; L PAYNE, M.. **Oil and gas well drilling: A vibrations perspective**. The Shock and Vibration Digest, 35:85–103, 03 2003.
- [22] TAVARES, R. M.. **Interpretação e análise de dados de perfuração em poços de petróleo**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia de Petróleo, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2006.
- [23] SHYU, R. J.. **Bending vibration of rotating drill strings**. Tese de doutorado, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1989.
- [24] PAYNE, M. L.. **Drilling bottom-hole assembly dynamics**. Tese de doutorado, Rice University, Houston, 1992.
- [25] JANSEN, J. D.. **Nonlinear dynamics of oilwell drillstrings**. Tese de doutorado, Mechanical Maritime and Materials Engineering, Amsterdam, 1993.
- [26] CHEVALLIER, A. M.. **Nonlinear stochastic drilling vibrations**. Tese de doutorado, Rice University, Houston, 2001.
- [27] DOS ANJOS, J. L. R.. **Análise de vibrações torcionais em perfuração de poços de petróleo**. Dissertação de mestrado, Programa de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- [28] TUCKER, R.; WANG, C.. **Torsional vibration control and cosserat dynamics of a drill-rig assembly**. Meccanica, 38(1):145–161, 1 2003.
- [33] ZHAO, X.; VAN DER HEIJDEN, G.. **Planar dynamics of large-deformation rods under moving loads**. Journal of Sound and Vibration, 412:309 – 325, 2018.
- [34] KWON, Y. W.; BANG, H.. **The Finite Element Method Using MATLAB**. CRC Press, Inc., 2nd edition, 2000.
- [35] FERREIRA, A.. **MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures**. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008.

- [36] BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A.. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers: I: Asymptotic methods and perturbation theory**. Springer, 1999.
- [37] LUO, Y.. **An efficient 3d timoshenko beam element with consistent shape functions**. *Advances in Applied Mechanics*, 1:95–106, 10 2008.
- [38] SINGLA, P.; MORTARI, D. ; JUNKINS, J.. **How to avoid singularity when using euler angles?** *Advances in the Astronautical Sciences*, 119:1409–1426, 01 2005.
- [39] KAPITANIAK, M.. **Nonlinear dynamics of drill-strings**. Tese de doutorado, University of Aberdeen, United Kingdom, 2015.
- [40] LYAKHOV, D.; GERDT, V.; WEBER, A. ; MICHELS, D.. **Symbolic-numeric integration of the dynamical cosserat equations**. p. 301–312, 04 2017.
- [41] SOBOTTKA, G.; LAY HERRRERA, T. ; WEBER, A.. **Stable integration of the dynamic cosserat equations with application to hair modeling**. *Journal of WSCG*, 16:73–80, 2008.
- [42] GOICOECHEA, H. E.; BUEZAS, F. S. ; ROSALES, M. B.. **A non-linear Cosserat rod model for drill-string dynamics in arbitrary borehole geometries with contact and friction**. *International Journal of Mechanical Sciences*, 157-158:98–110, jul 2019.
- [43] JAMES M. GERE, B. J. G.. **Mechanics of Materials**. CL Engineering, 8th edition, 2012.
- [44] GOICOECHEA, H. E.; BUEZAS, F. S. ; ROSALES, M. B.. **Stochastic Drill-String Dynamics via Cosserat Rods**. In: Etse, J. G.; Luccioni, B. M.; Pucheta, M. A. ; Storti, M. A., editors, *MECOM*, Santa Fe, 2018. Asociación Argentina de Mecánica Computacional.
- [45] RITTO, T. G.; SAMPAIO, R.. **Stochastic drill-string dynamics with uncertainty on the imposed speed and on the bit-rock parameters**. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2(2):111–124, 2012.
- [46] RITTO, T.; SOIZE, C. ; SAMPAIO, R.. **Nonlinear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit-rock interaction**. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(8):865, Aug. 2009.

- [47] NOGUEIRA, B. F.; RITTO, T. G.. Stochastic torsional stability of an oil drill-string. *Meccanica*, 53(11):3047–3060, Sep 2018.
- [48] STUELPNAGEL, J.. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 6(4):422–430, 1964.
- [49] BARRIENTOS, G.; RIQUELME, R. ; SAMPAIO, R.. *Apuntes de mecánica nolineal de vigas*, 08 2015.