Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Rafael Segadas dos Santos

Cáusticas de Wigner e Conjuntos de Medida de Largura Constante em Planos Normados com Bolas Unitárias Suaves ou Poligonais

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Setembro de 2019

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Rafael Segadas dos Santos

Cáusticas de Wigner e Conjuntos de Medida de Largura Constante em Planos Normados com Bolas Unitárias Suaves ou Poligonais

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Ralph Costa Teixeira
Departamento de Matemática – UFF

Prof. Carlos Hugo Jimenez
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Silvius Klein
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Vitor Balestro
Departamento de Matemática – UFF

Prof. Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva
Departamento de Matemática – Emap-FGV

Rio de Janeiro, 20 de Setembro de 2019

Rafael Segadas dos Santos

Ficha Catalográfica

Santos, Rafael Segadas

Cáusticas de Wigner e Conjuntos de Medida de Largura Constante em Planos Normados com Bolas Unitárias Suaves ou Poligonais / Rafael Segadas dos Santos; orientador: Marcos Craizer. – Rio de janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2019.

v., 94 f: il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Plano de Minkowski;. 3. Cáusticas de Wigner;. 4. Curvas de Largura Constante;. 5. Equações de Sturm-Liouville;. 6. Desigualdades Isoperimétricas;. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por seu amor incondicional, sua direção e força para não desistir.
O amor da minha vida Priscila Carrati, que sempre me apoia e que sem seu suporte esse projeto não seria possível.
Minhas filhas Maria Rafaela e Angelina que me motivam a caminhar e que são minha alegria.
Meus Pais e minha irmã Gisele pelo apoio e orações.
Meu Orientador Marcos Craizer que tanto me ajudou e acreditou em mim.
A PUC, funcionários e professores.
A banca de defesa, pela leitura da tese e sugestões.
Aos meus colegas de doutorado, pelo apoio.
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Santos, Rafael Segadas; Craizer, Marcos. **Cáusticas de Wigner e Conjuntos de Medida de Largura Constante em Planos Normados com Bolas Unitárias Suaves ou Poligonais**. Rio de Janeiro, 2019. 94p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em [23] são apresentadas igualdades e desigualdades isoperimétricas relacionadas à Cáustica de Wigner (CW) e ao Conjunto de Medida de Largura Constante ($CMLC$). Neste trabalho nós estendemos estes resultados para planos normados com bolas unitárias quadraticamente convexas ou bolas unitárias poligonais. Estes conjuntos CW e $CMLC$ estão fortemente relacionados às ciclóides, que são curvas cujas funções suporte generalizam a base de Fourier ([6], [7]). Uma característica importante deste trabalho é a analogia direta entre os casos contínuo e discreto.

Palavras-chave

Plano de Minkowski; Cáusticas de Wigner; Curvas de Largura Constante; Equações de Sturm-Liouville; Desigualdades Isoperimétricas;

Abstract

Santos, Rafael Segadas; Craizer, Marcos (Advisor). **Wigner Caustics and Constant Width Measure Sets in Normed Planes with Smooth or Polygonal Unit Balls**. Rio de Janeiro, 2019. 94p. Tese de doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In [23], some isoperimetric equalities and inequalities related to the Wigner Caustic (WC) and the Constant Width Measure Set ($CWMS$) are proved. In this work, we generalize these results to normed planes with quadratically convex unitary ball or polygonal unitary balls. The WC and $CWMS$ are closely related to cycloids, which are curves whose support functions generalize the Fourier basis ([6], [7]). An important aspect of our work is the direct analogy between the smooth and discrete cases.

Keywords

Minkowski Planes; Wigner Caustics; Constant Width Curves; Sturm-Liouville Equations; Isoperimetric Inequalities;

Sumário

Lista de figuras

1
Introdução

A Desigualdade Isoperimétrica clássica em um plano normado, também chamado plano de Minkowski, diz o seguinte:

Teorema 1.1 (Desigualdade Isoperimétrica)**.** *Seja γ uma curva fechada simples em um plano normado. Então*

$$L_v^2(\gamma) \geq 4A_U A_\gamma \tag{1.1}$$

onde A_U e A_γ indicam respectivamente a área da bola unitária e a área da região limitada por γ e $L_v(\gamma)$ indica o comprimento dual de γ. A igualdade ocorre se, e só se, γ é múltiplo da bola unitária.

Um dos principais problemas em geometria plana é determinar quais curvas têm área máxima para um perímetro dado. Uma das primeiras referências ao problema isoperimétrico, que vem sendo estudado desde a antiguidade, é feita no poema latino Eneida, obra de Virgílio, onde se descreve a história de Dido, rainha de Cartago. Concluímos que, possivelmente, se conhecia a solução do problema isoperimétrico devido a solução em formato de círculo apresentada por Dido. A seguir está uma versão dessa história, conhecida como "A Lenda de Dido".

> "...Dido consegue fugir com alguns amigos e partidários, levando consigo as riquezas do marido. Chegando a Costa do Mediterrâneo, norte da África, Dido resolve ficar e formar sua nova pátria. Ela negocia com o Rei Jarbas a compra de terras e ficou acertado que poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar usando a pele de 1(um) único touro. O pedido é aceito e Dido logo manda cortar o couro de um touro em estreitas tiras com o qual cercou uma imensa área de forma circular onde construiu a cidade com o nome de Birsa (couro). Em torno dessa cidade começa a se formar outra, Cartago, que logo se torna próspera." Retirado de [1].

Uma das primeiras demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica foi obtida por Steiner [20], no século 19. Após, houve muitas outras provas e aplicações desse teorema; por exemplo, [2], [10], [12], [13], [14], [17], [19], [20], [21], [23], [24]. Em 1902, Hurwitz [13], apresentou uma prova para caso euclidiano utilizando análise de Fourier, já para no caso não euclidiano, podemos encontrar uma prova da Desigualdade Isoperimétrica em [21]. Mais recentemente Zwierzyński apresentou em [23], [24], para o caso euclidiano, versões "aprimoradas" da Desigualdade Isoperimétrica, envolvendo a Cáustica de Wigner(CW) e o Conjunto de Medida de Largura Constante ($CMLC$) ver teoremas (1.2) e (1.3). A Cáustica de Wigner pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos médios dos pontos de uma curva γ onde suas tangentes são paralelas, ver figura (1.1). Para mais detalhes sobre Cáustica de Wigner ver [4] e [11]. Já o $CMLC$ é definido, a menos de uma translação, como o conjunto das semi-cordas em pontos de γ onde suas tangentes são paralelas.

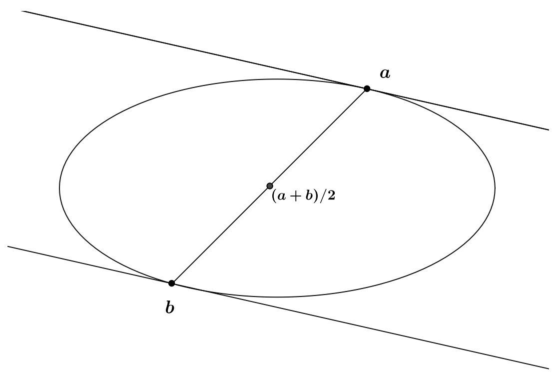

Figura 1.1: Tangentes paralelas em γ.

Teorema 1.2 (Zwierzyński). *Seja γ uma oval. Então*

$$L_\gamma^2(\gamma) \geq 4\pi A_\gamma + 8\pi|\tilde{A}_{CW}| \tag{1.2}$$

onde $\tilde{A}_{CW}$ indica a área com sinal da Cáustica de Wigner, $L_v(\gamma)$ e A_γ indicam respectivamente o comprimento euclidiano e e área de γ. A igualdade ocorre se, e só se γ é múltiplo da bola unitária.

Teorema 1.3 (Zwierzyński)**.** *Seja γ uma oval. Então*

$$L_{\gamma}^{2}(\gamma) = 4\pi A_{\gamma} + 8\pi|\tilde{A}_{CW}| + \pi|\tilde{A}_{CMLC}| \quad (1.3)$$

onde $\tilde{A}_{CW}$ e $\tilde{A}_{CMLC}$ indicam respectivamente a área com sinal da Cáustica de Wigner e do Conjunto de Medida de Largura Constante, $L_v(\gamma)$ e A_{γ} indicam respectivamente o comprimento euclidiano e e área de γ.

Motivados pelos teoremas (1.2) e (1.3) (ver [23], [24]), que são um refinamento da equação (1.1), definimos o $CMLC$ em um plano normado não necessariamente Euclidiano. O estudo deste conjunto levou a uma igualdade isoperimétrica análoga a de [23], porém desta vez em uma norma arbitrária com bola unitária quadraticamente convexa ou poligonal. No caso contínuo trabalhamos com espaço de curvas não necessariamente convexas, parametrizadas pelo ângulo que a reta tangente faz com uma direção fixa. Essas curvas são chamadas de "porco-espinho", "hedghog"em inglês, "hérissons"em francês. Já no caso discreto utilizamos como espaço de "curvas" polígonos fechados cujos lados são paralelos ao da bola unitária. Para métrica de Minkowski utilizamos os artigos de [6] e [7] e fazemos uma conexão entre ciclóides, Cáustica de Wigner e $CMLC$.

Dado um plano normado U, chamamos de $U-$ciclóides as curvas planas que são homotéticas a sua dupla $U-$evoluta. Acontece que o raio de curvatura e a função de suporte da $U-$ciclóide satisfazem uma equação diferencial do tipo Sturm – Liouville. Ao estudar essa equação podemos encontrar uma base ortonormal de $C^0(S^1)$ com uma decomposição natural em funções simétricas e anti-simétricas. Provamos nos teoremas (5.8) e (9.6), que a base ortonormal é na verdade o conjunto de funções suporte de Cáusticas de Wigner e Conjunto de Medida de Largura Constante. De modo análogo definimos ciclóides e evolutas discretas.

Em termos de função suporte, a Cáustica de Wigner e o Conjunto de Medida de Largura Constante podem ser considerados como a projeção nos espaços das funções ímpares e pares, respectivamente no caso de curvas com período 2π. Por outro lado, a série de Fourier é constituída de funções pares e ímpares. Sendo assim, em termos desta base, as operações CW e $CMLC$ correspondem simplesmente a zerar os coeficientes dos termos pares e ímpares, respectivamente. Essa representação se mantém verdadeira em planos normados com bolas unitárias suaves estritamente convexas e também para bolas unitárias poligonais. Para normas não-euclidianas, devemos considerar as bases ortonormais construídas em [6] e [7].

Em [25], as noções de $CMLC$ e CW são estendidas para $m-$rosáceas, que são curvas parametrizadas pelo ângulo que a reta tangente faz com uma direção fixa e dão m voltas. Nesse trabalho estendemos as definições de CW e $CMLC$ para $m-$rosáceas em um plano normado e provamos a correspondente Igualdade Isoperimétrica. Esta igualdade vale tanto para planos normados com bola unitária quadraticamente convexa como com bola poligonal.

No capítulo 2 e 6 apresentamos resultados preliminares. Nos capítulos 3(contínuo) e 7(discreto) apresentamos as definições e propriedades das Cáusticas de Wigner e Conjuntos de Medida de Largura Constante para curvas $2\pi-$periódicas e a decomposição dessa curva em função desses conjuntos. Nos capítulos 4(contínuo) e 8(discreto) demonstramos a Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado para curvas $2\pi-$periódicas. Nos capítulos 5(contínuo) e 9(discreto) apresentamos as ciclóides e bases ortonormais e uma outra prova para a Igualdade Isoperimétrica em Planos Normados para curvas $2\pi-$periódicas. No capítulo 10(contínuo) e 11(discreto) apresentamos curvas rosáceas e Igualdade Isoperimétrica em Planos Normados para $m-$rosáceas.

Notação

Seja $v, w \in \mathbb{R}^2$ vetores. Nós denotamos o determinante cujas colunas são as coordenadas de v e w por $[v, w]$.

2
Resultados Preliminares

2.1
Plano Normado

Chamamos de plano normado ou plano de Minkowski o plano $\mathbb{R}^2$ munido com uma norma qualquer $\|.\|$. Essa norma é chamada de norma de Minkowski.

A partir da norma $\|.\|$ podemos provar que o conjunto $U = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ é convexo e simétrico. Reciprocamente se um conjunto U do plano é convexo e simétrico ele define uma norma $\|.\|_U$, chamada de norma induzida por U. A definição da norma é como segue: para todo $x \in \mathbb{R}^2$ podemos escrever $x = tu$, onde $t \geq 0$ e u está na fronteira de U, então $\|x\|_U = t$.

Lema 2.1.

1. *Se um conjunto U é convexo e simétrico então $\|.\|_U$ é uma norma.*

2. *Se $\|.\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^2$ então o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ é convexo e simétrico.*

Demonstração. (1)(Desigualdade Triangular) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$ não nulos e $\alpha \in [0,1]$. Então $\dfrac{x}{\|x\|_U}$ e $\dfrac{y}{\|y\|_U}$ pertencem à fronteira de U. Como U é convexa

$$\alpha \frac{x}{\|x\|_U} + (1-\alpha)\frac{y}{\|y\|_U} \in U.$$

Se tomarmos $\alpha = \dfrac{\|x\|_U}{\|x\|_U + \|y\|_U}$ teremos $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_U + \|y\|_U} + \dfrac{y}{\|x\|_U + \|y\|_U} \right\|_U \leq 1$

que implica $\|x + y\|_U \leq \|x\|_U + \|y\|_U$.

(2) A simetria vem da própria definição de U. Sejam $x, y \in U$ e $\alpha \in [0,1]$. Então por hipótese

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|_U \leq \alpha\|x\|_U + (1-\alpha)\|y\|_U \leq \alpha + (1-\alpha) = 1$$

ou seja, $\alpha x + (1-\alpha)y \in U$. Portanto U é convexa. ∎

Para mais detalhes ver [21, p.17]. Vale destacar que a norma induzida por U também pode ser definida por $\|x\|_U = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$, chamada de Funcional de Minkowski ou Função "Gauge".

2.2 Exemplos

Exemplo 2.2. *Considere como bola unitária* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x|^3 + |y|^3 \leq 1\}$ *cuja fronteira pode ser parametrizada por* $u(t) = ((\cos t)^{2/3}, (\sin t)^{2/3}), 0 \leq t \leq 2\pi$.

Se $A = \left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ então $\|A\|_U = \dfrac{3}{2}$, onde $u_A = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, $\|u_A\|_U = 1$ e $A = \dfrac{3}{2}u_A$.
Se $B = \left(-(4)^{\frac{1}{3}}, -(4)^{\frac{1}{3}}\right)$ então $\|B\|_U = 2$, onde $u_B = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, $\|u_B\|_U = 1$ e $B = 2u_B$.
Se $C = \left(\left(\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}}, -\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ então $\|C\|_U = \dfrac{1}{2}$, onde $u_C = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, -\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, $\|u_C\|_U = 1$ e $C = \dfrac{1}{2}u_C$.Ver figura 2.1

Exemplo 2.3. *Considere como bola unitária U um hexágono (com interior) regular centrado na origem com um de seus vértices sobre o eixo y. Vale destacar que nesse caso o perímetro da bola é 6 (Teorema de Golab, [21]).*

Considere os pontos A, B, e C, onde $A = 2u_A, B = \frac{3}{2}u_B, C = \frac{1}{2}u_C$ e u_A, u_B, u_C estão sobre o hexágono. Nesse caso teremos $\|A\|_U = 2$, $\|B\|_U = \dfrac{3}{2}$, $\|C\|_U = \dfrac{1}{2}$. Ver figura 2.2

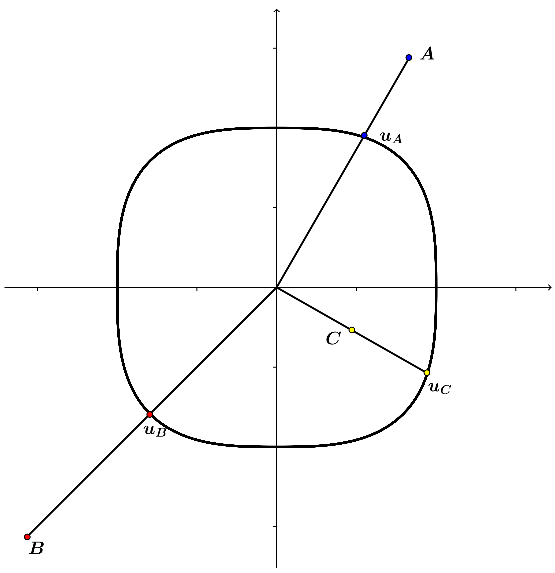

Figura 2.1: Bola unitária $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x|^3 + |y|^3 \leq 1\}$

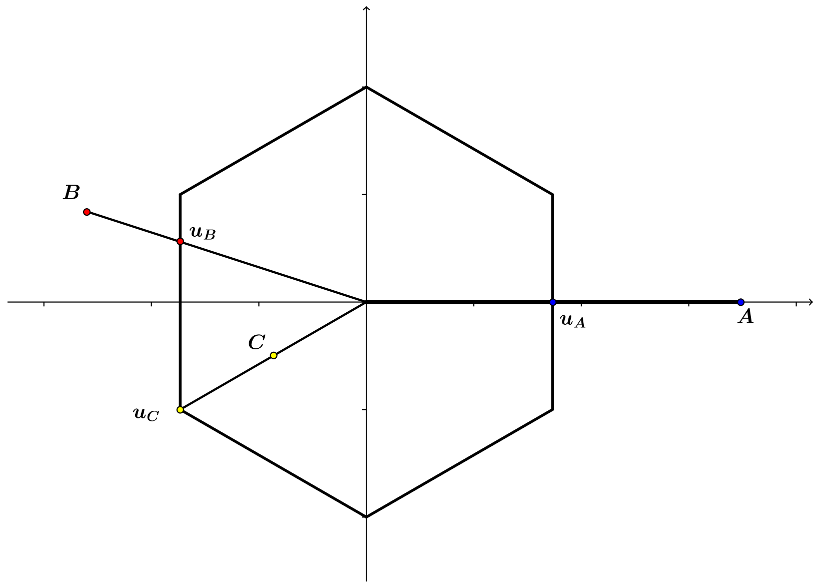

Figura 2.2: Bola unitária U como hexágono regular

2.3 Curvas Legendrianas

Definição 2.4. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma curva suave $\gamma : I \to R^2$ é chamada de Legendriana, se existe um mapa suave $\nu : I \to S^1$ tal que para todo $t \in I$:*

- $[\nu(t), \gamma'(t)] = 0$
- *se $\gamma'(t) = 0$ então $\nu'(t) \neq 0$.*

Exemplo 2.5. *Um típico exemplo de curva Legendriana é $\gamma : I \to R^2$, onde $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Nesse caso basta considerar $\nu : I \to S^1$, $\nu(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.*

Considere agora $\gamma : I \to R^2$ e $\nu : I \to S^1$ tal que $\gamma(t) = (t^m, t^n)$, m, n inteiros, $1 < m < n$ e $\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2t^{2(n-m)}}}(m, nt^{n-m})$. Observe que se $\nu'(0) \neq 0$ então γ é uma curva Legendriana. Por outro lado $\nu'(0) \neq 0$ ocorre se, e somente se, $n = m + 1$. Em particular se $\gamma''(0) \neq 0$ teremos $m = 2$ e $n = 3$, isto é $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, ver figura 2.3. Concluímos que todos os cúspides das curvas Legendrianas são da forma $(n + 1)/n$ e se γ não possuir pontos de inflexão então seus cúspides são da forma $3/2$. Para mais detalhes sobre curvas Legendrianas ver [9] e [6].

Exemplo 2.6. *Considere a curva* $\gamma(t) = (3\cos 3t - \cos 5t)(\cos t, \sin t) + (-9\sin 3t + 5\sin 5t)(-\sin t, \cos t)$. *Observe que* $\gamma'(0) = 0$ *e* $\gamma''(0) = 0$. *Utilizando polinômio de Taylor em* $t = 0$ *vemos que essa singularidade é do tipo* $5/4$. *Ver figura 2.4.*

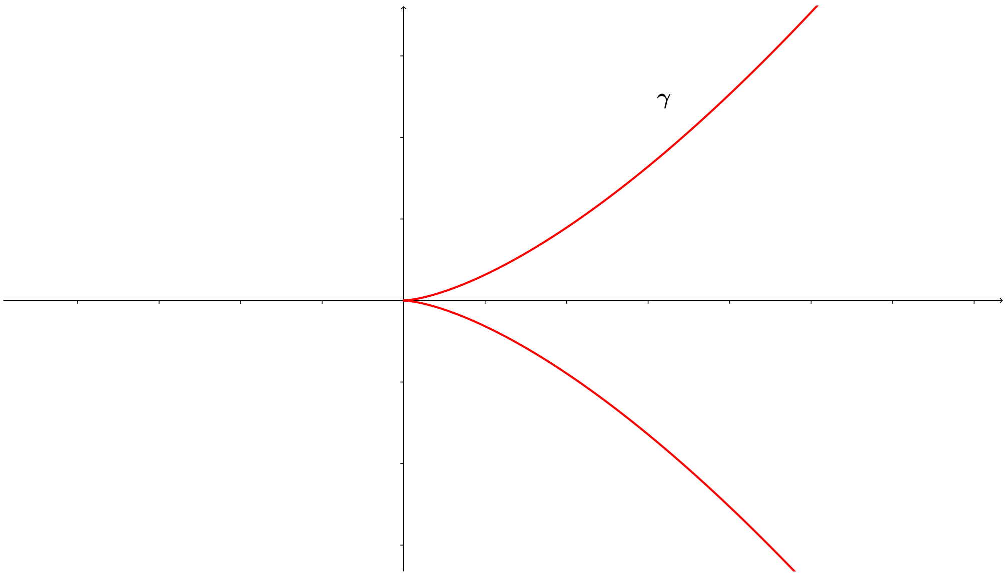

Figura 2.3: Curva $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ com cúspide $3/2$ na origem.

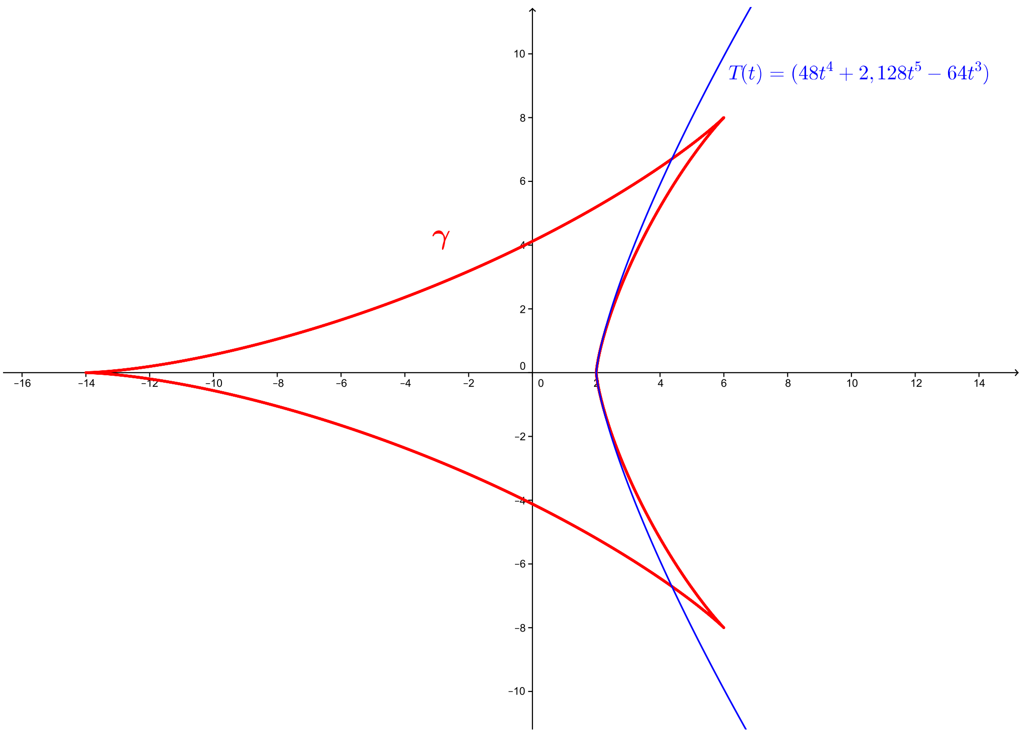

Figura 2.4: Curva $\gamma(t)$ com cúspide $5/4$ em $(2, 0)$ e Taylor.

Lema 2.7. *Seja* $\gamma : I \to R^2$ *uma curva Legendriana. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $\nu'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

2. γ *pode ser parametrizada pelo ângulo* θ *que suas tangentes fazem com uma direção fixa.*

Para uma demonstração, ver [6].

Nesse trabalho iremos considerar curvas Legendrianas com curvatura não nula, que satisfaçam uma das afirmações do Lema (2.7). Se γ é fechada, é chamada de porco espinho, *hedgehog* em inglês. Iremos representar o conjunto de curvas legendrianas fechadas com curvatura não nula que satisfazem o lema (2.7) e possuem período 2π pela letra $\mathscr{H}$.

Definição 2.8 (Rosáceas)**.** *Iremos representar o conjunto de curvas legendrianas fechadas com curvatura não nula que satisfazem o lema* (2.7) *e possuem período* $2m\pi$*,* m *inteiro positivo, pela letra* $\mathscr{H}_m$*. Chamamos essas curvas de* $m-$*rosáceas ou* $m-$*hedghogs.*

Definição 2.9. *Considere* $\gamma \in \mathscr{H}_m$*. Definimos um* $n-$*cúspide ou cúspide não ordinário uma singularidade da forma* $(n+1)/n$.

2.4
Círculo Unitário Dual, Função Suporte e raio de Curvatura

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ bola unitária de Minkowski. Vamos assumir U quadraticamente convexa, isto é, com curvatura estritamente positiva e fronteira u suave. Considere u parametrizada por $u(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $u(\theta+\pi) = -u(\theta)$, onde θ é o ângulo que a tangente em u faz com uma direção fixa. Com essas hipóteses teremos $[u'(\theta), u''(\theta)] > 0$ e $[u(\theta), u'(\theta)] > 0$.

A bola unitária dual U^* pode ser identificada com o conjunto convexo V do plano, onde, a parametrização da fronteira de V é

$$v(\theta) = \frac{u'(\theta)}{[u(\theta), u'(\theta)]}. \tag{2.1}$$

Dessa forma teremos $[u(\theta), v(\theta)] = 1$ e $[u'(\theta), v(\theta)] = 0$. Pode-se mostrar que V é convexa e simétrica, $[v(\theta), v'(\theta)] > 0$,$[v'(\theta), v''(\theta)] > 0$ e $v(\theta+\pi) = -v(\theta)$. Além disso

$$u(\theta) = -\frac{v'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}, \tag{2.2}$$

o que mostra que o dual do dual é ele próprio.

Definição 2.10. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ curva simples, fechada, com curvatura estritamente positiva. A esse tipo de curva chamaremos de oval.*

Definição 2.11. *Para $\gamma \in \mathscr{H}$ definimos a função real $h(\theta) = [\gamma(\theta), v(\theta)]$ que é chamada de $U-função$ $suporte$. Onde v é a parametrização da fronteira de $V = U^*$.*

Diferenciando $h(\theta) = [\gamma(\theta), v(\theta)]$ nós obtemos

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= [\gamma'(\theta), v(\theta)] + [\gamma(\theta), v'(\theta)] \\ &= [\gamma(\theta), v'(\theta)] \\ &= [\gamma(\theta), -u(\theta)[v(\theta), v'(\theta)]] \\ &= [u(\theta), \gamma(\theta)] \cdot [v(\theta), v'(\theta)] \end{aligned}$$

Assim podemos escrever

$$\gamma(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta). \tag{2.3}$$

Diferenciando (2.3) teremos

$$\gamma'(\theta) = \left(h + \frac{1}{[u, u']}\left(\frac{h'}{[v, v']}\right)'\right)(\theta)u'(\theta). \tag{2.4}$$

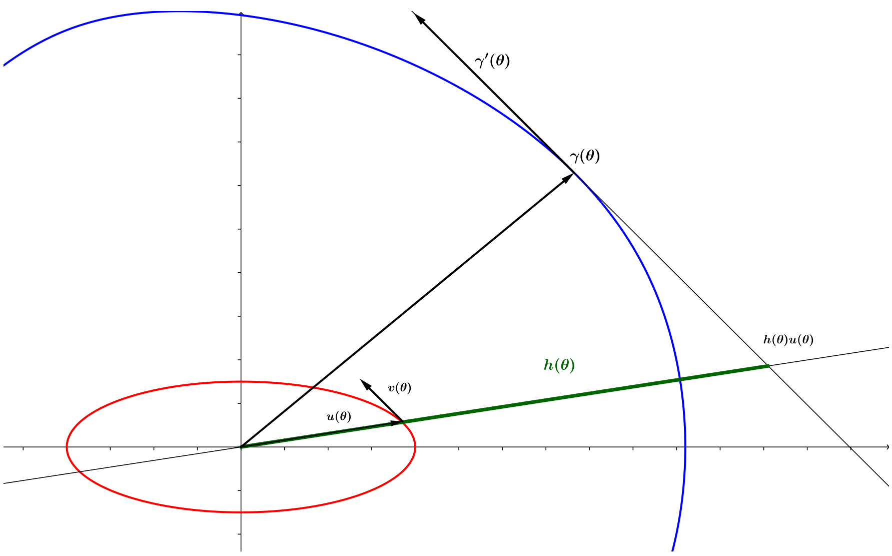

Figura 2.5: Interpretação geométrica da $U-$função suporte

Geometricamente a $U-$função suporte $h(\theta)$ de $\gamma(\theta)$ é obtida pela interseção da reta tangente, em θ, com a reta $\{tu(\theta), t \in \mathbb{R}\}$. Essas retas se interceptam no ponto $h(\theta)u(\theta)$. Ver figura 2.5.

Definição 2.12. *Definimos o raio de curvatura $r(\theta)$ de $\gamma(\theta) \in \mathscr{H}$ pela condição*

$$\gamma'(\theta) = r(\theta)u'(\theta) \tag{2.5}$$

Usando (2.4) teremos

$$r(\theta) = h(\theta) + \frac{1}{[u,u']}\left(\frac{h'}{[v,v']}\right)'(\theta). \tag{2.6}$$

2.5 Exemplo

Exemplo 2.13. *Considere o exemplo* (2.2) *onde* $u(t) = ((\cos t)^{2/3}, (\sin t)^{2/3}), 0 \leq t \leq 2\pi$ *é o círculo unitário.*

Então $[u(t), u'(t)] = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{\sin(2t)}\right)^{1/3}$. Portanto por (2.1) seu dual é

$$v(t) = \frac{u'(t)}{[u(t), u'(t)]} = (-\sin(t)^{4/3}, \cos(t)^{4/3}).$$

Nesse exemplo u não é quadraticamente convexa, porém mesmo assim podemos calcular seu dual pela fórmula (2.1). Ver figura 2.6.

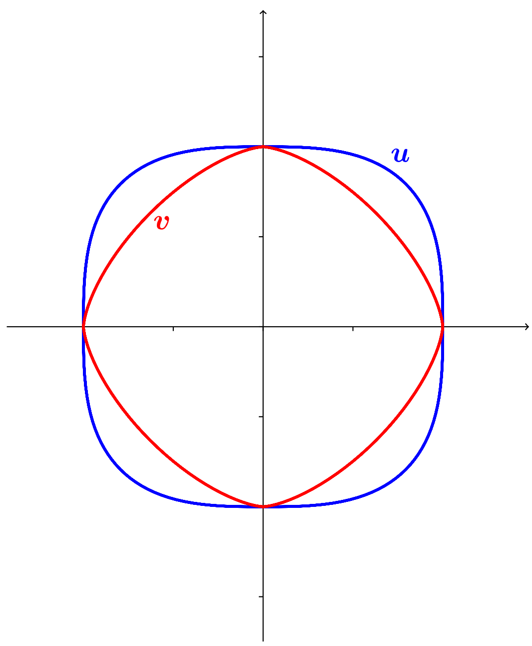

Figura 2.6: Bola unitária U e seu dual V

3
Cáustica de Wigner e Conjunto de Medida de Largura Constante

Seja $\gamma \in \mathscr{H}$, isto é, fechada, suave e parametrizada por $\theta \in [0, 2\pi]$. Considere $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_U)$.

Definição 3.1 (Paralelos)**.** *Chamamos de paralelo de $\gamma(\theta)$ a curva*

$$\gamma_c(\theta) = \gamma(\theta) + cu(\theta); c \in \mathbb{R}.$$

O raio de curvatura de $\gamma_c(\theta)$ é $r(\theta)+c$, pois $\gamma_c'(\theta) = (r(\theta)+c)u'(\theta)$, onde $r(\theta)$ é o raio de curvatura de $\gamma(\theta)$. Os cúspides dos paralelos ocorrem quando $r(\theta)+c$ troca de sinal. Observe que $[\gamma_c'(\theta), \gamma_c''(\theta)] = (r(\theta)+c)^2[u'(\theta), u''(\theta)]$. Assim concluímos que γ_c é convexa fora dos cúspides. Em particular γ_c é estritamente convexa, oval, para $c > \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |r(\theta)|$. A função suporte de um paralelo é

$$h_{\gamma_c}(\theta) = [\gamma_c\theta, v(\theta)] = [\gamma(\theta) + cu(\theta), v(\theta)] = h(\theta) + c. \tag{3.1}$$

Definição 3.2 (Comprimento$-v$ com sinal)**.** *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ curva parametrizada por θ. Como $\gamma'(\theta) = r(\theta)[u, u'](\theta)v(\theta)$, definimos comprimento$-v$ com sinal*

$$L_v(\gamma) = \int_0^{2\pi} r(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta,$$

onde $r(\theta)$ é o raio de curvatura de $\gamma(\theta)$.

A partir dessa definição podemos ter comprimento$-v$ com sinal igual a zero.

Definição 3.3 (Área com sinal)**.** *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ curva parametrizada por θ. Definimos área com sinal de γ como*

$$\tilde{\mathrm{A}}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\gamma(\theta), \gamma'(\theta)]d\theta.$$

A partir dessa definição podemos ter área com sinal com valor negativo. Importante notar que se γ é uma oval centrada na origem e orientada positivamente então a área com sinal é a própria área limitada pela curva.

3.1
Cáustica De Wigner e Curvas de Largura Constante

Definição 3.4. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. Chamamos Evoluta de Área ou Cáustica de Wigner (CW) o conjunto*

$$CW(\gamma)(\theta) = \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi)}{2}; \theta \in [0, 2\pi].$$

Como $CW(\gamma)(\theta) = CW(\gamma)(\theta+\pi)$ temos que $CW(\gamma)(\theta)$ possui périodo π e dá duas voltas no intervalo $[0, 2\pi]$. Seus cúspides ocorrem quando $r(\theta) = r(\theta+\pi)$, pois $CW'(\gamma)(\theta) = \left(\frac{r(\theta)-r(\theta+\pi)}{2}\right) u'(\theta)$. A função suporte de $CW(\gamma)(\theta)$ é

$$h_{CW(\gamma)} = [(\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi))/2, v(\theta)] = \frac{h(\theta)}{2} - \frac{h(\theta + \pi)}{2}. \tag{3.2}$$

Definição 3.5 (Largura Constante)**.** *Dizemos que uma curva $\gamma \in \mathscr{H}$ possui largura constante se, $h(\theta) + h(\theta + \pi) = 2d, d > 0$(d constante real). Nesse caso dizemos que a largura da curva γ é $2d$.*

Geometricamente uma curva tem largura constante se a distância, na $U-$norma, entre as retas tangentes paralelas é sempre a mesma.

Exemplo 3.6. *Considere a curva $\gamma \in \mathscr{H}$ tal que $h(\theta) = \cos(\theta) + \cos(3\theta) + 15$. Ver figura 3.1.*

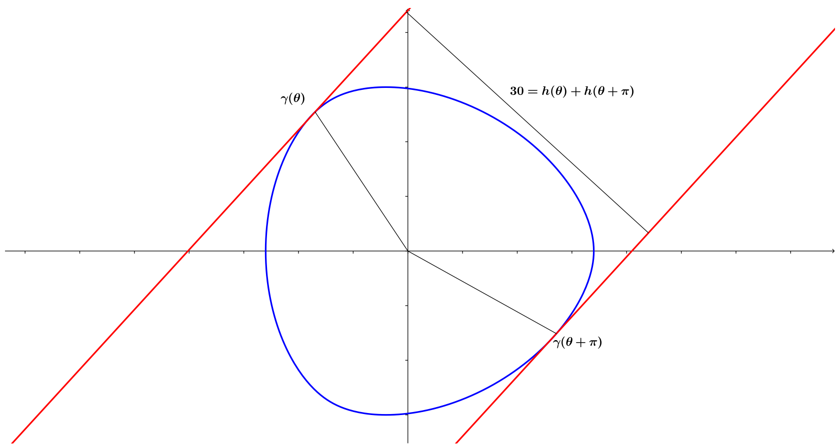

Figura 3.1: Interpretação geométrica de curva γ com largura constante.

Proposição 3.7. *$\gamma \in \mathscr{H}$ tem largura constante $\Leftrightarrow \gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) = 2du(\theta), d$ constante.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Da equação (2.3) temos

$$\gamma(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$

assim teremos

$$\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) = (h(\theta) + h(\theta+\pi))u(\theta) + \frac{(h(\theta) + h(\theta+\pi))'}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$

$$\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) = 2du(\theta)$$

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} h(\theta) + h(\theta+\pi) &= [\gamma(\theta), v(\theta)] + [\gamma(\theta+\pi), v(\theta+\pi)] \\ &= [\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi), v(\theta)] \\ &= [2du(\theta), v(\theta)] \\ &= 2d(constante) \end{aligned}$$

■

Definição 3.8 (Largura Média)**.** *Chamamos de largura média da curva* $\gamma \in \mathscr{H}$ *número* $\overline{w}_\gamma = \dfrac{L_v(\gamma)}{A(U)}$*, onde* $L_v(\gamma)$ *é o comprimento da curva* γ *na norma dual e* $A(U)$ *é a área da bola unitária* U*.*

Teorema 3.9 (Barbier)**.** *Seja* $\gamma \in \mathscr{H}$ *com largura constante* $2d$ *então* $L_v(\gamma) = 2dA(U)$*, onde* U *é a bola unitária.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} L_v(\gamma) &= \int_0^{2\pi} r(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta = \int_0^{2\pi} [u(\theta), \gamma'(\theta)]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\gamma(\theta), u'(\theta)]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\gamma(\theta), u'(\theta)] + [\gamma(\theta+\pi), u'(\theta+\pi)]d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (h(\theta) + h(\theta+\pi))[u(\theta), u'(\theta)]d\theta \\ &= 2d\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [u(\theta), u'(\theta)]d\theta = 2dA(U) \end{aligned}$$

■

Caso a curva γ possua largura constante $2d$ então pelo Teorema de Barbier, $L_v(\gamma) = A(U)2d$ (ver [16] e [18]). Nesse caso a largura média e a largura da curva são iguais.

Proposição 3.10. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. CW é paralelo de $\gamma \Leftrightarrow \gamma$ tem largura constante.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)

$(\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi))/2 = \gamma(\theta) + cu(\theta) \Rightarrow \gamma(\theta) - \gamma(\theta + \pi) = -2cu(\theta)$. Pela proposição (3.7) γ tem largura constante.

($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
CW(\gamma)(\theta) &= \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi)}{2} \\
&= \gamma(\theta) - \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta + \pi)}{2} \\
&= \gamma(\theta) - \frac{c}{2}u(\theta)
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.11. *Considere $\gamma \in \mathscr{H}$ parametrizada por θ. $CW(\gamma) = \{0\} \Leftrightarrow \gamma$ é simétrica com respeito a origem.*

Demonstração.

$$CW(\gamma)(\theta) = \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi)}{2} = \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta)}{2} = 0$$ ■

Proposição 3.12. $CW(CW(\gamma)(\theta)) = CW(\gamma)(\theta)$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
CW(CW(\gamma)(\theta)) &= \frac{CW(\gamma)(\theta) + CW(\gamma)(\theta + \pi)}{2} \\
&= \frac{2CW(\gamma)(\theta)}{2} \\
&= CW(\gamma)(\theta)
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.13. $\gamma \in \mathscr{H}$. $CW(\gamma_c) = CW(\gamma)$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
CW(\gamma_c)(\theta) &= \frac{\gamma(\theta) + cu(\theta) + \gamma(\theta + \pi) + cu(\theta + \pi)}{2} \\
&= \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi)}{2} \\
&= CW(\gamma)
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.14. *$\gamma \in \mathscr{H}$. $CW(\gamma)$ tem comprimento$-v$ com sinal igual a zero.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
L_v(CW(\gamma)) &= \int_0^{2\pi} r_{CW}(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(r(\theta) - r(\theta+\pi))}{2}[u(\theta), u'(\theta)]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} r(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta - \int_0^{2\pi} r(\theta+\pi)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} r(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta - \int_0^{2\pi} r(\theta+\pi)[u(\theta+\pi), u'(\theta+\pi)]d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}[L_v(\gamma) - L_v(\gamma)] = 0
\end{aligned}$$

■

3.2 Conjunto de Medida de Largura Constante e Curvas Simétricas

Definição 3.15. *Considere $\gamma \in \mathscr{H}$. Definimos como Conjunto de Medida de Largura constante, abreviado por CMLC,*

$$CMLC(\gamma)(\theta) = \frac{1}{2}(\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]$$

Ver [23] para versão Euclidiana do CMLC.
A função suporte de $CMLC$ é

$$h_{CMLC(\gamma)}(\theta) = \frac{1}{2}[\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta), v(\theta)] = \frac{1}{2}(h(\theta) + h(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma). \quad (3.3)$$

Proposição 3.16. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. A curva $CMLC(\gamma)(\theta)$ é simétrica.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
CMLC(\gamma)(\theta+\pi) &= \frac{\gamma(\theta+\pi) - \gamma(\theta+2\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta+\pi)}{2} \\
&= \frac{\gamma(\theta+\pi) - \gamma(\theta) + \overline{w}_\gamma u(\theta)}{2} \\
&= -\frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta)}{2} \\
&= -CMLC(\gamma)(\theta).
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.17. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. CMLC é paralelo de $\gamma \Leftrightarrow \gamma$ é simétrica.*

Demonstração.
($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} CMLC(\gamma)(\theta) = \gamma(\theta) + cu(\theta) \Rightarrow \\ \gamma(\theta) = CMLC(\gamma)(\theta) - cu(\theta) \Rightarrow \\ \gamma(\theta+\pi) = CMLC(\gamma)(\theta+\pi) - cu(\theta+\pi) = -\gamma(\theta). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} CMLC(\gamma)(\theta) &= \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta)}{2} \\ &= \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta) - \overline{w}_\gamma u(\theta)}{2} \\ &= \gamma(\theta) - \frac{\overline{w}_\gamma}{2} u(\theta). \end{aligned}$$

Portanto $CMLC$ é paralelo de γ onde $c = -\frac{\overline{w}_\gamma}{2}$ ■

Teorema 3.18. *Considere $\gamma \in \mathscr{H}$ parametrizada por θ. $CMLC(\gamma) = \{0\} \Leftrightarrow$ γ possui largura constante.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese $\gamma(\theta) = \gamma(\theta+\pi) + \overline{w}_\gamma u(\theta)$

$$\begin{aligned} h(\theta) + h(\theta+\pi) = & \\ &= [\gamma(\theta), v(\theta)] + [\gamma(\theta+\pi), v(\theta+\pi)] \\ &= [\gamma(\theta+\pi) + \overline{w}_\gamma u(\theta), v(\theta)] + [\gamma(\theta+\pi), -v(\theta)] \\ &= [\gamma(\theta+\pi), v(\theta)] - [\gamma(\theta+\pi), v(\theta)] + [\overline{w}_\gamma u(\theta), v(\theta)] \\ &= \overline{w}_\gamma [u(\theta), v(\theta)] = \overline{w}_\gamma (constante) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Por hipótese $\overline{w}_\gamma$ é a largura de γ. Utilizando a equação (3.3) teremos

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) = & \\ &= (h(\theta) + h(\theta+\pi))u(\theta) + (h(\theta) + h(\theta+\pi))' \frac{v(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]} \\ &= (h(\theta) + h(\theta+\pi))u(\theta) \\ &= \overline{w}_\gamma u(\theta) \end{aligned}$$

■

Proposição 3.19. *$\gamma \in \mathscr{H}$. $CMLC$ tem comprimento$-v$ zero.*

Demonstração.
Como $(CMLC)'(\gamma)(\theta) = \left(\dfrac{r(\theta)+r(\theta+\pi)-\overline{w}_\gamma}{2}\right)u'(\theta)$ temos

$$\begin{aligned}
L_v(CMLC(\gamma)) &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r(\theta)+r(\theta+\pi)-\overline{w}_\gamma}{2}\right)[u(\theta),u'(\theta)]d\theta \\
&= \frac{1}{2}(2L_v(\gamma)-2\overline{w}_\gamma A(U)) \\
&= L_v(\gamma)-\frac{L_v(\gamma)}{A(U)}A(U)=0
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.20. *$\gamma \in \mathscr{H}$. $CMLC(CMLC(\gamma)) = CMLC(\gamma)$*

Demonstração.
Como CMLC é simétrico e tem comprimento$-v$ zero. temos

$$\begin{aligned}
CMLC(CMLC(\gamma)(\theta)) &= \frac{CMLC(\gamma)(\theta)-CMLC(\gamma)(\theta+\pi)-\overline{w}_{CMLC}u(\theta)}{2} \\
&= \frac{CMLC(\gamma)(\theta)+CMLC(\gamma)(\theta)-0\cdot u(\theta)}{2} \\
&= CMLC(\gamma)(\theta)
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.21. *$\gamma \in \mathscr{H}$. $CMLC(\gamma_c) = CMLC(\gamma)$*

Demonstração. Como $L_v(\gamma_c) = \int_0^{2\pi}(r(\theta)+c)[u(\theta),u'(\theta)]d\theta = L_v(\gamma) + 2cA(U)$. Dessa forma $\overline{w}_{\gamma_c} = \overline{w}_\gamma + 2c$. Assim teremos

$$\begin{aligned}
CMLC(\gamma_c)(\theta) &= \frac{\gamma(\theta)+cu(\theta)-(\gamma(\theta+\pi)+cu(\theta+\pi))-\overline{w}_{\gamma_c}u(\theta))}{2} \\
&= \frac{\gamma(\theta)-\gamma(\theta+\pi)+2cu(\theta)-(\overline{w}_\gamma+2c)u(\theta)}{2} \\
&= \frac{\gamma(\theta)-\gamma(\theta+\pi)-\overline{w}_\gamma u(\theta)}{2} \\
&= CMLC(\gamma)(\theta)
\end{aligned}$$

■

3.3 Decomposição da curva γ como soma de Caústica de Wigner, CMLC e bola unitária.

Proposição 3.22. *$\gamma \in \mathscr{H}$. $\gamma(\theta) = CW(\gamma)(\theta) + CMLC(\gamma)(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}u(\theta)$ e $h_\gamma(\theta) = h_{CW(\gamma)}(\theta) + h_{CMLC(\gamma)}(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}$.*

Corolário 3.23. *$\gamma \in \mathscr{H}$. $\gamma(\theta) = CW(\gamma)(\theta) + CMLC(\gamma)(\theta)$ e $h_\gamma(\theta) = h_{CW(\gamma)}(\theta) + h_{CMLC(\gamma)}(\theta) \Leftrightarrow L_V(\gamma) = 0$*

É simples ver que os resultados acima são consequência do fato que

$$\gamma(\theta) = \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta+\pi)}{2} + \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi)}{2}.$$

3.4 Cuspides CMLC e Cáustica de Wigner

Teorema 3.24. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ curva que possui apenas singularidades ordinárias, isto é, do tipo $2-$cúspide. Então o número de $2-$cúspides de $CMLC(\gamma)$ é múltiplo de quatro.*

Demonstração. O número de cúspides de $CMLC$ é igual ao número de zeros de $r_{CMLC(\gamma)}(\theta) = \frac{1}{2}r(\theta) + r(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma$ no intervalo de 0 até 2π. Como $r_{CMLC(\gamma)}(0) = r_{CMLC(\gamma)}(\pi)$ então o número de cúspides de 0 a π é par. Como $r_{CMLC(\gamma)}(\theta)$ é $\pi-$periódica concluímos que o números de cúspides deve ser múltiplo de quatro. ∎

Teorema 3.25. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ curva que possui apenas singularidades ordinárias, isto é, do tipo $2-$cúspide. Então o número de $2-$cúspides de $CW(\gamma)$ é $2k$, k ímpar.*

Demonstração. Observe que $CW'(\gamma)(\theta) = \frac{r(\theta) - r(\theta+\pi)}{2}u'(\theta)$. Assim, $r_{CW(\gamma)}(\theta) = \frac{r(\theta) - r(\theta+\pi)}{2}$. Como $r_{CW(\gamma)}(\theta) = -r_{CW(\gamma)}(\theta+\pi)$, o número de zeros de θ até $\theta+\pi$ é ímpar. Como CW é $\pi-$periódica temos o desejado.

Os teoremas acimas são falsos se considerarmos singularidades do tipo $n-$cúspides com $n \neq 2$. Basta observar que a curva do exemplo 2.6 é uma Cáustica de Wigner que possui 8 cúspides no intervalo $[0, 2\pi]$.

3.5 Áreas com sinal de CW e CMLC

Definição 3.26. *Sejam γ_0 e γ_1 ovais parametrizadas por θ. Definimos como área mista das curvas γ_0 e γ_1,*

$$A(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\gamma_0, \gamma_1'](\theta)d\theta$$

(para mais detalhes ver [8]).

Teorema 3.27 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam γ_0 e γ_1 ovais parametrizadas por θ. Então*

$$A(\gamma_0, \gamma_1)^2 \geq A(\gamma_0)A(\gamma_1) \tag{3.4}$$

onde $A(\gamma_0), A(\gamma_1)$ e $A(\gamma_0, \gamma_1)$ são respectivamente áreas das curvas e área mista.

Para prova ver [21]. Interessante notar que fazendo $\gamma_0 = \gamma$ e $\gamma_1 = u$, u bola unitária, teremos pela equação 3.4

$$\begin{aligned} A(\gamma, u)^2 &= \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\gamma(\theta), u'(\theta)]d\theta\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta\right]^2 \\ &= \frac{L_v^2(\gamma)}{4} \geq A(u)A(\gamma) \end{aligned}$$

isto é, desigualdade isoperimétrica de Minkowski,

$$L_v^2(\gamma) \geq 4A(u)A(\gamma). \tag{3.5}$$

Proposição 3.28. *Se a curva $\gamma \in \mathscr{H}$ parametrizada por θ então $\tilde{\mathrm{A}}(CW(\gamma)) < 0$, $\tilde{\mathrm{A}}(CMLC(\gamma)) < 0$.*

Demonstração. Ver seção (5.1) áreas e comprimentos.

∎

3.6 Evolutas

Definição 3.29. *Definimos Evoluta de $\gamma \in \mathscr{H}$ como sendo a curva $e_\gamma(\theta) = \gamma(\theta) - r(\theta)u(\theta)$, onde $r(\theta)$ é o raio de curvatura de γ.*

Proposição 3.30. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. Os paralelos de γ e a curva γ possuem a mesma Evoluta.*

Demonstração. Como $\gamma_c'(\theta) = (r(\theta) + c)u'(\theta)$ temos que a Evoluta do paralelo é $e_{\gamma_c}(\theta) = \gamma_c(\theta) - (r(\theta) + c)u(\theta) = \gamma(\theta) + cu(\theta) - (r(\theta) + c)u(\theta) = e_\gamma(\theta)$

■

Proposição 3.31. *A Evoluta possui comprimento$-u$ com sinal igual a zero.*

Demonstração. Basta observar que $e_\gamma'(\theta) = -r'(\theta)u(\theta)$. Assim temos

$$L_u(e_\gamma) = \int_0^{2\pi} -r'(\theta)d\theta = 0$$

■

Proposição 3.32. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. A $v-$função suporte da evoluta de γ é $h_{e_\gamma}(\theta) = -\dfrac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}$, onde $h(\theta)$ é a $u-$função suporte de γ.*

Demonstração. Considere $r(\theta)$ o raio de curvatura de $\gamma(\theta)$. Como $e_\gamma(\theta) = \gamma(\theta) - r(\theta)u(\theta)$ então $e_\gamma'(\theta) = -r'(\theta)u(\theta) = \dfrac{r(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v'(\theta)$.

$$\begin{aligned}
h_{e_\gamma}(\theta) &= [e_\gamma(\theta), u(\theta)] \\
&= [\gamma(\theta) - r(\theta)u(\theta), u(\theta)] \\
&= [\gamma(\theta), u(\theta)] \\
&= \left[h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta), u(\theta)\right] \\
&= -\frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.33. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. A $u-$função suporte da dupla evoluta de γ é*

$$h_{e_{e_\gamma}}(\theta) = -\frac{1}{[u(\theta), u'(\theta)]}\left(\frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}\right)'.$$

Onde $h(\theta)$ é a $u-$função suporte de γ.

Demonstração. Como $e_{e_\gamma}(\theta) = e_\gamma(\theta) - \frac{r(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$ então $e'_{e_\gamma}(\theta) = -\left(\frac{r(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}\right)'\frac{1}{[u(\theta), u(\theta)]}u'(\theta)$.

$$\begin{aligned}
h_{e_{e_\gamma}}(\theta) &= [e_{e_\gamma}(\theta), v(\theta)] \\
&= \left[e_\gamma(\theta) - \frac{r(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta), v(\theta)\right] \\
&= [e_\gamma(\theta), v(\theta)] \\
&= [\gamma(\theta) - r(\theta)u(\theta), v(\theta)] \\
&= h(\theta) - r(\theta) \\
&= h(\theta) - \left(h(\theta) + \frac{1}{[u(\theta), u'(\theta)]}\left(\frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}\right)'\right) \\
&= -\frac{1}{[u(\theta), u'(\theta)]}\left(\frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}\right)'
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.34. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$. Então $e(CW(\gamma)) = CW(e_\gamma)$ e $e(CMLC(\gamma)) = CMLC(e_\gamma)$. Isto é, evolutas comutam com CW e CMLC.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
e_{CW}(\theta) =& CW(\theta) - r_{CW}(\theta)u(\theta) \\
=& \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta + \pi)}{2} - \frac{r(\theta) - r(\theta + \pi)}{2}u(\theta) \\
=& \frac{\gamma(\theta) - r(\theta)u(\theta) + \gamma(\theta + \pi) - r(\theta + \pi)u(\theta + \pi)}{2} \\
=& \frac{e_\gamma(\theta) + e_\gamma(\theta + \pi)}{2} \\
&= CW(e_\gamma)(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{CMLC}(\theta) =& CMLC(\theta) - r_{CMLC}(\theta)u(\theta)\\
=& \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta)}{2} - \frac{r(\theta) + r(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma}{2}u(\theta)\\
=& \frac{\gamma(\theta) - r(\theta)u(\theta) - (\gamma(\theta+\pi) - r(\theta+\pi)u(\theta+\pi)) - \overline{w}_{e_\gamma}u(\theta)}{2}\\
=& \frac{e_\gamma(\theta) - e_\gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_{e_\gamma}u(\theta)}{2}\\
& \frac{e_\gamma(\theta) - e_\gamma(\theta+\pi)}{2}\\
& = CMLC(e_\gamma)(\theta)
\end{aligned}$$

Observe que nesse caso $\overline{w}_{e_\gamma} = \dfrac{L_u(e_\gamma)}{A(u)} = 0.$

■

3.7 Exemplos

Exemplo 3.35. *Seja* $h(\theta) = \cos(3\theta) + 20$ *e* $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. *Como consequência* $v(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. *Como*

$$\gamma(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$

teremos $\gamma(\theta) = (\cos(\theta)\cos(3\theta) + 3\sin(\theta)\sin(3\theta) + 20\cos(\theta), \cos(3\theta)\sin(\theta) - 3\sin(3\theta)\cos(\theta) + 20\sin(\theta))$. *A curva* $\gamma(\theta)$ *tem largura constante pois* $h(\theta) + h(\theta+\pi) = 20$ *dessa forma pelo teorema* (3.16) $CMLC(\theta) = \{0\}$. *Ver figura 3.2.*

Exemplo 3.36. *Seja* $h(\theta) = \cos(4\theta) + 18$ *e* $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. *Como consequência* $v(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. *Como*

$$\gamma(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$

teremos $\gamma(\theta) = (\cos(\theta)\cos(4\theta) + 4\sin(\theta)\sin(4\theta) + 18\cos(\theta), \sin(\theta)\cos(4\theta) - 4\cos(\theta)\sin(4\theta) + 18\sin(\theta))$.

A curva $\gamma(\theta)$ *é simétrica pois* $h(\theta) = h(\theta+\pi)$. *Dessa forma teremos* $CW(\gamma)(\theta) = \{0\}$ *e por proposição* (3.9) $CMLC(\gamma)(\theta) = \gamma(\theta) - 18u(\theta)$. *Ver figura 3.3.*

Exemplo 3.37. *Seja* $h(\theta) = \cos(2\theta) + \sin(3\theta) + 20$ *e* $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. *Como consequência* $v(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. *Como*

$$\gamma(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$

teremos $\gamma(\theta) = (\cos(\theta)\cos(2\theta) + \cos(\theta)\sin(3\theta) + 2\sin(\theta)\sin(2\theta) - 3\cos(3\theta)\sin(\theta) + 20\cos(\theta), \cos(2\theta)\sin(\theta) + \sin(3\theta)\sin(\theta) - 2\sin(2\theta)\cos(\theta) + 3\cos(3\theta)\cos(\theta) + 20\sin(\theta))$.

Nesse caso a oval γ *não é simétrica e nem possui largura constante.*

$CW(\gamma)(\theta) = (\cos(\theta)\sin(3\theta) - 3\sin(\theta)\cos(3\theta), \sin(3\theta)\sin(\theta) + 3\cos(3\theta)\cos(\theta))$.

Como $L_V(\gamma) = 40\pi$ *então*

$CMLC(\gamma)(\theta) = (\cos(\theta)\cos(2\theta) + 2\sin(2\theta)\sin(\theta), \cos(2\theta)\sin(\theta) - 2\sin(2\theta)\cos(\theta))$.

Ver figura 3.4

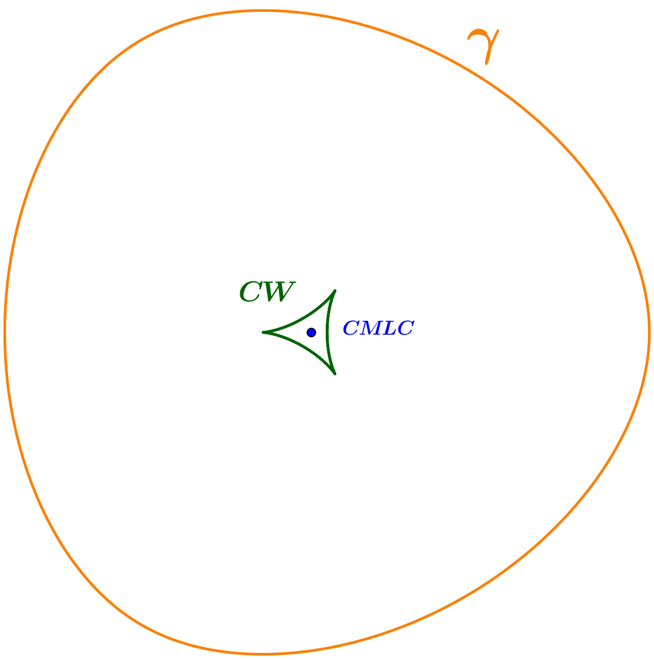

Figura 3.2: Curva γ de largura constante, $CMLC(\gamma)$ e $CW(\gamma)$

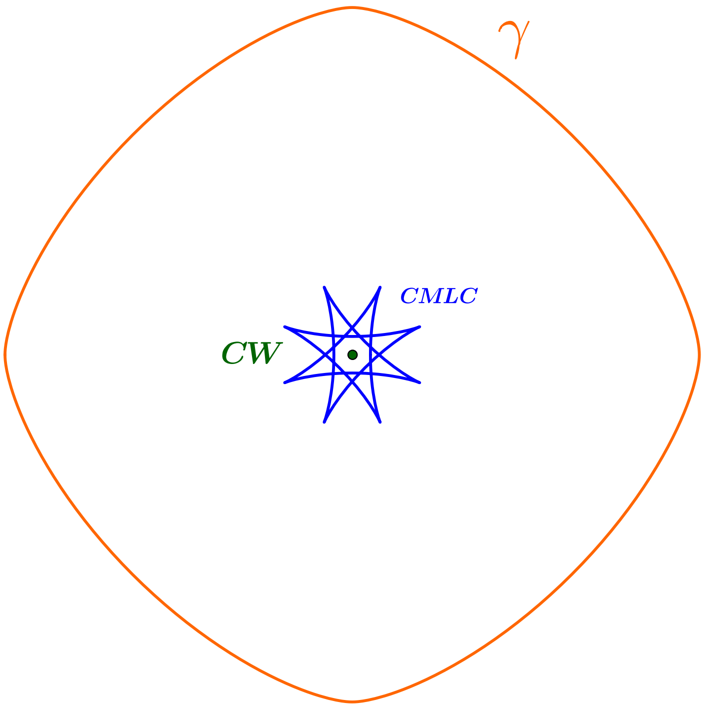

Figura 3.3: Curva γ simétrica, Cáustica $CW(\gamma)$ e $CMLC(\gamma)$

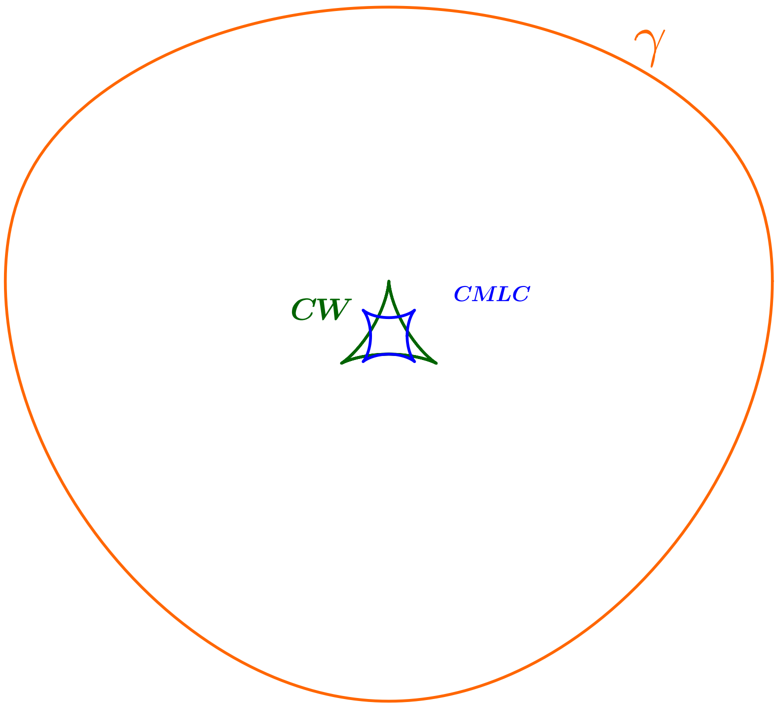

Figura 3.4: Curva γ, Cáustica $CW(\gamma)$ e $CMLC(\gamma)$

4
Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado

Teorema 4.1 (Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado)**.** *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$$L_v^2(\gamma) = 4A_U\tilde{\mathrm{A}}_\gamma - 8A_U\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} - 4A_U\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}, \tag{4.1}$$

onde $L_v(\gamma)$ indica o comprimento$-v$ com sinal da curva γ, A_U indica a área da bola unitária e $\tilde{\mathrm{A}}_\gamma$, $\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)}$,$\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}$ indicam respectivamente as áreas com sinal das curvas γ, $CW(\gamma)$ e $CMLC(\gamma)$.

Demonstração. Pela proposição (3.20) temos

$$\gamma(\theta) = \left(\frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta+\pi)}{2}\right) + \left(\frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta+\pi) - \overline{w}_\gamma u(\theta)}{2}\right) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}u(\theta)$$

isto é,

$$\gamma(\theta) = CW(\gamma)(\theta) + CMLC(\gamma)(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}u(\theta).$$

Vamos proceder da seguinte maneira: calcular a área de $\gamma(\theta)$ utilizando a proposição (3.20) e assim obter a Igualdade Isoperimétrica. Iremos também utilizar um resultado de integração por partes

$$\int_0^{2\pi} [f'(t), g(t)]dt = -\int_0^{2\pi} [f(t), g'(t)]dt,$$

onde f, g são de classe C^1 e que

$$\int_0^{2\pi} [CMLC(\gamma)(\theta), CW'(\gamma)(\theta)]d\theta = 0$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{A}}(\gamma) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\gamma(\theta), \gamma'(\theta)]\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[CW(\theta) + CMLC(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}u(\theta), CW'(\theta) + CMLC'(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}u'(\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CW(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CMLC(\theta), CMLC'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4} [u(\theta), u'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CW(\theta), CMLC'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2} [CW(\theta), u'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2} [CMLC(\theta), u'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2} [u(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2} [u(\theta), CMLC'(\theta)]\, d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta + \int_0^{2} \frac{\overline{w}_\gamma}{2}[u(\theta), CW'(\theta)]d\theta \\
&+ \int_0^{2} \frac{\overline{w}_\gamma}{2}[u(\theta), CMLC'(\theta)]d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}\int_0^{2} [u(\theta), CW'(\theta) + CMLC'(\theta)]d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}\int_0^{2} [u(\theta), \gamma'(\theta) - \frac{\overline{w}_\gamma}{2}u'(\theta)]d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U \\
&+ \frac{\overline{w}_\gamma}{2}\left[\int_0^{2} [u(\theta), \gamma'(\theta)]d\theta - \int_0^{2} \frac{\overline{w}_\gamma}{2}[u(\theta), u'(\theta)]d\theta\right] \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}\left[L_V(\gamma) - \overline{w}_\gamma A_U\right] \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U + \frac{\overline{w}_\gamma}{2}\left[L_V(\gamma) - \frac{L_V(\gamma)}{A_U}A_U\right] \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4}A_U \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{L_V^2(\gamma)}{4A_U} \\
&\Rightarrow L_V^2(\gamma) = 4A_U\tilde{\mathrm{A}}_\gamma - 8A_U\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} - 4A_U\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}
\end{aligned}
$$

■

Observe que se $\gamma \in \mathscr{H}$ é uma oval então $\tilde{A}_\gamma = A_\gamma$, isto é, a área com sinal é a própria área limitada pela curva. Dessa forma temos os seguintes corolários.

Corolário 4.2. *Seja γ oval no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$$L_V^2(\gamma) = 4A_U A_\gamma + 8A_U \left|\tilde{A}_{CW(\gamma)}\right| + 4A_U \left|\tilde{A}_{CMLC(\gamma)}\right|, \tag{4.2}$$

onde $L_V(\gamma)$ indica o comprimento da curva γ na norma dual, A_U e A_γ indicam respectivamente as áreas da bola unitária e da curva γ, $\tilde{A}_{CW(\gamma)}$ e $\tilde{A}_{CMLC(\gamma)}$ indicam respectivamente as áreas com sinal de $CW(\gamma)$ e $CMLC(\gamma)$.

O próximo corolário é uma generalização do resultado de Zwierzyński em [24].

Corolário 4.3. *Seja γ oval no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$$L_V^2(\gamma) \geq 4A_U A_\gamma + 8A_U \left|\tilde{A}_{CW(\gamma)}\right|, \tag{4.3}$$

onde $L_V(\gamma)$ indica o comprimento da curva γ na norma dual, A_U e A_γ indicam respectivamente as áreas da bola unitária e da curva γ, $\tilde{A}_{CW(\gamma)}$ indica a área com sinal de CW. A igualdade ocorre se, e só se, a curva γ tem largura constante.

Corolário 4.4 (Desigualdade Clássica Isoperimétrica no Plano de Minkowski)**.** *Seja γ oval no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$$L_V^2(\gamma) \geq 4A_U A_\gamma, \tag{4.4}$$

onde $L_V(\gamma)$ indica o comprimento da curva γ na norma dual, A_U e A_γ indicam respectivamente as áreas da bola unitária e da curva γ. A igualdade ocorre se, e só se, a curva γ é simétrica e tem largura constante, isto é múltiplo da bola unitária.

Corolário 4.5. *Seja γ oval no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$$L_V^2(\gamma) \geq 4A_U A_\gamma + 4A_U \left|\tilde{A}_{CMLC(\gamma)}\right|, \tag{4.5}$$

onde $L_V(\gamma)$ indica o comprimento da curva γ na norma dual, A_U e A_γ indicam respectivamente as áreas da bola unitária e da curva γ, $\tilde{A}_{CMLC(\gamma)}$ indica a área com sinal de $CMLC(\gamma)$. A igualdade ocorre se, e só se, a curva γ é simétrica.

5
Ciclóides e Base Ortonormal

Ciclóides clássicas têm a propriedade de que sua dupla evoluta é homotética a ela mesma. Considerando esta mesma propriedade em um plano normado qualquer, temos a seguinte definição (proposição (3.31)):

Definição 5.1. *Definimos como ciclóide as curvas $\omega \in \mathscr{H}$, isto é, fechadas, suaves e parametrizadas por $\theta \in [0, 2\pi]$, cuja função suporte $h_\omega(\theta)$ satisfaz a equação*

$$-\frac{1}{[u(\theta), u'(\theta)]}\left(\frac{h'_\omega(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}\right)' = \lambda h_\omega(\theta), \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

que é a equação diferencial de segunda ordem de Sturm-Liouville exibida em [6].

Todos os resultados obtidos em [6] são baseados na equação de Sturm-Liouville.

Definição 5.2. *Dizemos que λ é autovalor da equação* (5.1) *se existe função suporte h periódica de período 2π que satisfaz tal equação. A função h é chamada de autovetor.*

O conjunto $C^0(S^1)$ é o espaço da funções reais contínuas, cujo domínio é a circunferência euclidiana unitária, isto é, $h \in C^0(S^1) \Leftrightarrow h : S^1 \to \mathbb{R}$. De acordo com [6] vamos munir esse conjunto com produto interno

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_0^{2\pi} h_1(\theta) h_2(\theta) [u(\theta), u'(\theta)] d\theta \tag{5.2}$$

onde u é a fronteira da bola unitária U no plano normado.

Lema 5.3. *A transformação linear*

$$Th = -\frac{1}{[u, u']}\left(\frac{h'}{[v, v']}\right)' \tag{5.3}$$

é auto-adjunta com respeito ao produto interno (5.2).

Demonstração.

$$\langle h_1, Th_2\rangle = \int_0^{2\pi} h_1 Th_2[u,u']d\theta = -\int_0^{2\pi} h_1\left(\frac{h_2'}{[v,v']}\right)' d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{h_1'h_2'}{[v,v']}d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} h_2\left(\frac{h_1'}{[v,v']}\right)' d\theta = \int_0^{2\pi} h_2 Th_1[u,u']d\theta = \langle Th_1, h_2\rangle$$

■

Observe que o núcleo K da transformação T é subespaço das funções constantes. Com efeito

$$-\frac{1}{[u,u']}\left(\frac{h'}{[v,v']}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{[v,v']}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{h'}{[v,v']} = c(constante).$$

Suponha sem perda de generalidade $c > 0$. Assim teremos $h' = c[v,v'] > 0$. O que implica h crescente, que é um absurdo pois h é periódica e contínua. Portanto h é constante.

Denote agora $L_0 = K^{\perp}$. Assim temos que para todo h em L_0,

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)[u,u'](\theta)d\theta = 0. \tag{5.4}$$

Seja $S : L_0 \to C^0(S^1)$ a inversa de T.

Lema 5.4. *Para todo $h \in L_0$ seja $g = Sh$. Então*

$$\|g\|_\infty \leq \|[v,v']\|_2\|[u,u']\|_2\|h\|_2$$

e

$$\|g'\|_\infty \leq \|[v,v']\|_\infty\|[u,u']\|_2\|h\|_2.$$

Demonstração. Ver [6]. ■

Proposição 5.5. $S : (L_0, \|\cdot\||\|_2) \to (L_0, \|\cdot\|_2)$ *é operador compacto.*

Demonstração. Seja h_n sequência limitada em $(L_0, \|\cdot\|_2)$. Pelo lema (5.3) a sequência $g_n = Sh_n$ é equicontínua e uniformemente limitada. Assim podemos encontrar subsequência g_{n_j} convergente na norma $\|\cdot\|_2$. ■

Definição 5.6. *Sejam* $\{h_k^i\}, \{\lambda_k^i\}$, $k \in \mathbb{N}, i = 1, 2$ *respectivamente os autovetores e autovalores correspondentes da transformação* T *lema* (5.3).

Utilizando os resultados anteriores temos o seguinte corolário.

Corolário 5.7. *O conjunto* $\{h_k^i\}$, $k \in \mathbb{N}, i = 1, 2$, *forma uma base ortonormal de* $C^0(S^1)$.

No caso Euclidiano a base $\{h_k^i\}$ é

$$\{1, \cos(\theta), \sin(\theta), \cos(2\theta), \sin(2\theta), ..., \cos(k\theta), \sin(k\theta), ...\}$$

chamada de base de Fourier, onde $h_k^1(\theta) = \cos(k\theta)$, $h_k^2 = \sin(k\theta)$ e $\lambda_k^i = k^2$ e $\lambda_k^i \geq 1$, ver [22] e [6].

Suponhamos que o raio de curvatura $r(\theta)$ de $\gamma(\theta)$ satisfaça a equação (5.1) com $\lambda \neq 1$, então $h(\theta) = \dfrac{r(\theta)}{1-\lambda}$ satisfaz (5.1). Reciprocamente se a função suporte h da curva γ satisfaz (5.1) então pela equação (2.6), $r(\theta) = h(\theta)(1-\lambda)$ também satisfaz (5.1). Segundo [6], $\lambda = 1$ indica as ciclóides abertas que, portanto, não podem ser representadas por funções suporte periódicas. Para $\lambda \neq 1$ a curva γ possui tanto para o raio de curvatura como função suporte, na transformação T, mesmos autovalores. Como estamos trabalhando com curvas fechadas fica justificado o uso de h ao invés de r na transformação T, Lema (5.3). As cicloides abertas no plano, não serão consideradas, pois não podemos calcular CW e $CMLC$ dessas curvas.

Vamos assumir agora $C^0(S^1)$ como conjunto das funções suporte h das curvas γ, fechadas suaves em $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_u)$. Portanto teremos que K representa as curvas que são múltiplos da bola unitária U, pois $h(\theta) = [\gamma(\theta), v(\theta)] = [\alpha u(\theta), v(\theta)] = \alpha$(constante). L_0 definido pela equação (5.4) representa todas a curvas γ que possuem comprimento dual com sinal zero. Portanto dada uma função suporte h em $C^0(S^1)$ a menos de uma translação, podemos escrevê-la como segue:

$$h = h_0 + \sum_{k \geq 2} a_k^i h_k^i \tag{5.5}$$

$$h' = \sum_{k \geq 2} a_k^i (h_k^i)' \tag{5.6}$$

onde

$$\langle h_m^i, h_n^j \rangle = 0, se, m \neq n \tag{5.7}$$

e

$$\langle h_m^i, h_n^j \rangle = A(U), se, m = n, i = j. \tag{5.8}$$

Nesse caso $A(U)$ denota a área da bola unitária U em $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_u)$. Por Lemma(4.2) de [6] temos

$$h_k^i(\theta) = -h_k^i(\theta + \pi), k\, ímpar. \tag{5.9}$$

$$h_k^i(\theta) = h_k^i(\theta + \pi), k\, par. \tag{5.10}$$

Consequentemente $(h_k^i)'(\theta) = -(h_k^i)'(\theta + \pi)$ para k ímpar e $(h_k^i)'(\theta) = (h_k^i)'(\theta + \pi)$ para k par.

Teorema 5.8. *Seja* $\{h_0, h_2^1, h_2^2, h_3^1, h_3^2, ..., h_n^1, h_n^2, ...\}$ *base ortonormal de* $C^0(S^1)$, $\omega_k^j \in \mathscr{H}$ *ciclóide associada a função suporte* h_k^j*. Então*

1. $CW(\omega_k^j) = \omega_k^j$ *e* $CMLC(\omega_k^j) = \{0\}$, *k ímpar.*
2. $CW(\omega_k^j) = \{0\}$ *e* $CMLC(\omega_k^j) = \omega_k^j$, *k par.*

Demostração.
Para k ímpar a equação (5.9) e a proposição (3.6) implicam que $\omega_k^j(\theta) = \omega_k^j(\theta + \pi)$, então $CW(\omega_k^j) = \omega_k^j$. Pela a proposição (3.16) $CMLC(\omega_k^j) = \{0\}$. Para k par a equação (5.10) e a proposição (3.9) mostram que ω_k^j é simétrica e portanto $CW(\omega_k^j) = \{0\}$. Pela equação (5.7) temos

$$
\begin{aligned}
L_v(\omega_k^j) &= \int_0^{2\pi} r_{\omega_k^j}(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} h_{k_i}^j (1-\lambda_k^j)[u(\theta), u(\theta)]d\theta \\
&= (1-\lambda_k^j)\int_0^{2\pi} h_{k_i}^j [u(\theta), u(\theta)]d\theta = 0
\end{aligned}
$$

Portanto $\overline{w}_{\omega_k^j} = \dfrac{L_v(\omega_k^j)}{A(u)} = 0$ e simetria implicam $CMLC(\omega_k^j) = \omega_k^j$ ■

Esse resultado indica que podemos utilizar o CW e CMLC como representação geométrica das ciclóides, com k ímpar e k par respectivamente.

5.1 Áreas e Comprimentos

Nessa seção vamos apresentar o cálculo de áreas orientadas e comprimento dual de curvas em $\mathscr{H}$ estudados até o momento, utilizando a base ortonormal de $C^0(S^1)$, corolário (5.6), isto é, a série de Fourier generalizada.

$$
\begin{aligned}
L_V(\gamma)(\theta) &= \int_0^{2\pi} r(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta = \int_0^{2\pi} \left(h[u,u'] + \left(\frac{h'}{[v,v']}\right)' \right)(\theta)[u(\theta), u'(\theta)]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} h(\theta)[u,u'](\theta) + \left(\frac{h'(\theta)}{[v,v'](\theta)}\right)' d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} h(\theta)[u,u'](\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(h_0 + \sum_{\substack{k\geqslant 2 \\ i=1,2}} a_k^i h_k^i \right)[u,u'](\theta)d\theta \\
&= h_0 \int_0^{2\pi} [u,u'](\theta)d\theta + \sum_{\substack{k\geqslant 2 \\ i=1,2}} a_k^i \int_0^{2\pi} h_k^i [u,u'](\theta)d\theta \\
&= 2h_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[u,u'](\theta)d\theta \\
&= 2h_0 A(U)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{A}}(\gamma) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\gamma,\gamma'](\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v,v'](\theta)}v(\theta), \left(h(\theta)[u,u'](\theta) + \left(\frac{h'(\theta)}{[v,v'](\theta)}\right)\right)' v(\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(h^2(\theta)[u,u'](\theta) + h(\theta)\left(\frac{h'(\theta)}{[v,v'](\theta)}\right)'\right)[u,v](\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(h^2(\theta)[u,u'](\theta) + h(\theta)\left(\frac{h'(\theta)}{[v,v'](\theta)}\right)'\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h^2(\theta)[u,u'](\theta) - \frac{(h'(\theta))^2}{[v,v'](\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(h_0 + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i h_k^i\right)^2 [u,u'](\theta) - \frac{1}{[v,v']}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (h_k^i)'\right)^2 (\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(h_0^2 + 2h_0\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i h_k^i + \left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i h_k^i\right)^2\right)[u,u'](\theta) - \frac{1}{[v,v']}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (h_k^i)'\right)^2 (\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}h_0^2\int_0^{2\pi}[u,u'](\theta)d\theta + h_0\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i\int_0^{2\pi} h_k^i[u,u'](\theta)d\theta + \frac{1}{2}\sum_{\substack{m\geqslant 2\\ i=1,2}}(a_m^i)^2\int_0^{2\pi}(h_m^i)^2[u,u'](\theta)d\theta \\
&+ \sum_{\substack{m\neq n\\ i=1,2}} a_m^i a_n^i \int_0^{2\pi} h_m^i h_n^i [u,u'](\theta)d\theta + \sum_{m\neq n} a_m^1 a_n^2\int_0^{2\pi} h_m^1 h_n^2[u,u'](\theta)d\theta \\
&- \frac{1}{2}\sum_{\substack{m\geq 2\\ i=1,2}}(a_m^i)^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{[v,v']}((h_m^i)')^2(\theta)d\theta - \sum_{\substack{m\neq n\\ i=1,2}} a_m^i a_n^i\int_0^{2\pi}\frac{1}{[v,v']}(h_m^i)'(h_n^i)'(\theta)d\theta \\
&- \sum_{m\neq n} a_m^1 a_n^2 \int_0^{2\pi}\frac{1}{[v,v']}(h_m^1)'(h_n^2)'(\theta)d\theta \\
&= h_0^2 A(U) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geq 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2\int_0^{2\pi}(h_k^i)^2[u,u'](\theta) - \frac{1}{[v,v']}((h_k^i)')^2(\theta)d\theta \\
&= h_0^2 A(U) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geq 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2\int_0^{2\pi}(h_k^i)^2[u,u'](\theta + h_k^i\left(\frac{(h_k^i)'}{[v,v']}\right)'(\theta)d\theta \\
&= h_0^2 A(U) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geq 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2\int_0^{2\pi}(h_k^i)^2[u,u'](\theta) - (h_k^i)^2\lambda_k^i[u,u'](\theta)d\theta \\
&= h_0^2 A(U) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geq 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2(1-\lambda_k^i)\int_0^{2\pi}(h_k^i)^2[u,u'](\theta)d\theta \\
&= h_0^2 A(U) - \frac{A(U)}{2}\sum_{\substack{k\geq 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1).
\end{aligned}
$$

Onde $\lambda_k^i > 1$ são autovalores da transformação T, lema (5.3).

$$
\begin{aligned}
2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [CW(\gamma), CW'(\gamma)]\,(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h^2_{CW(\gamma)}(\theta)[u,u'](\theta) - \frac{\left(h'_{CW(\gamma)}(\theta)\right)^2}{[v,v'](\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{h(\theta)-h(\theta+\pi)}{2}\right)^2 [u(\theta),u'(\theta)] - \frac{\left(h'(\theta)-h'(\theta+\pi)\right)^2}{4[v(\theta),v'(\theta)]} d\theta \\
&= \frac{1}{2}A(\gamma) - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} h(\theta)h(\theta+\pi)[u(\theta),u'(\theta)] - \frac{h'(\theta)h'(\theta+\pi)}{[v(\theta),v'(\theta)]} d\theta \\
&= \frac{1}{2}A(\gamma) - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(h_0 + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i h_k^i(\theta)\right)\left(h_0 + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i h_k^i(\theta+\pi)\right)[u(\theta),u'(\theta)] \\
&- \frac{1}{[v(\theta),v'(\theta)]}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (h_k^i)'(\theta)\right)\left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (h_k^i)'(\theta+\pi)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}A(\gamma) - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(h_0 + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i h_k^i(\theta)\right)\left(h_0 + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (-1)^k h_k^i(\theta)\right)[u(\theta),u'(\theta)] \\
&- \frac{1}{[v(\theta),v'(\theta)]}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (h_k^i)'(\theta)\right)\left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} a_k^i (-1)^k (h_k^i)'(\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}A(\gamma) - \frac{1}{4}\left(2h_0^2 A(U) - A(U)\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} (-1)^k (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1)\right)
\end{aligned}
$$

Substituindo $A(\gamma)$ teremos:

$$
\begin{aligned}
2\tilde{\mathrm{A}}_{CW} &= \frac{1}{2}\left(h_0^2 A(U) - \frac{A(U)}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1)\right) - \frac{1}{2}h_0^2 A(U) \\
&+ \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}} (-1)^k (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1) \\
&= -\frac{A(U)}{2}\sum_{\substack{k=\acute{\imath}mpar\\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1)
\end{aligned}
$$

Agora pela definição (3.7) temos $\overline{w}_\gamma = \dfrac{L_V(\gamma)}{A(U)} = \dfrac{2h_0 A(U)}{A(U)} = 2h_0$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}[CMLC(\gamma)(\theta),(CMLC)'(\gamma)(\theta)]d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} h^2_{CMLC(\gamma)(\theta)}[u(\theta),u'(\theta)] - \frac{\left(h'_{CMLC(\gamma)(\theta)}\right)^2}{[v(\theta),v'(\theta)]}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(h(\theta)+h(\theta+\pi)-\overline{w}_\gamma)^2[u(\theta),u'(\theta)] - \frac{(h'(\theta)+h'(\theta+\pi))^2}{[v(\theta),v'(\theta)]}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(h^2(\theta)+2h(\theta)h(\theta+\pi)+h^2(\theta+\pi)-2h(\theta)\overline{w}_\gamma-2h(\theta+\pi)\overline{w}_\gamma\right)[u,u'](\theta) \\
&+ (\overline{w}_\gamma)^2[u,u'](\theta) - \frac{((h'(\theta))^2+2h'(\theta)h'(\theta+\pi)+(h'(\theta+\pi))^2}{[v(\theta),v'(\theta)]}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(2A(\gamma)-4\overline{w}_\gamma h_0 A(U)+(\overline{w}_\gamma)^2 A(U)\right) \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} h(\theta)h(\theta+\pi)[u(\theta),u'(\theta)] - \frac{h'(\theta)h'(\theta+\pi)}{[v(\theta),v'(\theta)]}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(2A(\gamma)-4h_0^2A(U)+\left(2h_0^2A(U)-A(U)\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2(-1)^k(\lambda_k^i-1)\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2A(\gamma)-2h_0^2A(U)-A(U)\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ i=1,2}}(a_k^i)^2(-1)^k(\lambda_k^i-1)\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo $A(\gamma)$ teremos:

$$
\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} = -\frac{1}{2}\left(A(U)\sum_{\substack{k=par\\ i=1,2}}(a_k^i)^2(\lambda_k^i-1)\right),\ \lambda_k^i > 1.
$$

Corolário 5.9. *Toda curva $\gamma \in \mathscr{H}$ com $v-$comprimento zero possui $\tilde{\mathrm{A}}(\gamma) < 0$. Em particular a proposição* (3.26) *está demonstrada.*

5.2
Outra prova - Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado

Teorema 5.10 (Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado)**.** *Seja $\gamma \in \mathscr{H}$ no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$$
L_v^2(\gamma) = 4A_U\tilde{\mathrm{A}}_\gamma - 8A_U\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} - 4A_U\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}, \tag{5.11}
$$

onde $L_V(\gamma)$ indica o comprimento$-v$ com sinal da curva γ, A_U indica a área *da bola unitária e* $\tilde{A}_\gamma$, $\tilde{A}_{CW(\gamma)}$,$\tilde{A}_{CMLC(\gamma)}$ *indicam respectivamente as áreas com sinal das curvas* γ, $CW(\gamma)$ *e* $CMLC(\gamma)$.

Demonstração.
Considere γ oval parametrizada por θ. Com o uso da base ortonormal de $C^0(S^1)$ sabemos que:

$$L_v(\gamma)(\theta) = 2h_0 A(U),$$

$$\tilde{A}(\gamma) = h_0^2 A_U - \frac{A_U}{2} \sum_{\substack{k \geq 2 \\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1),$$

$$\tilde{A}_{CW(\gamma)} = -\frac{A_U}{4} \sum_{\substack{k=\acute{\imath}mpar \\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1),$$

$$\tilde{A}_{CWMS(\gamma)} = -\frac{A_U}{2} \sum_{\substack{k=par \\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1).$$

Observe que $\lambda_k^i > 1$(ver [6]), $\tilde{A}_{CW(\gamma)} \leq 0$ e $\tilde{A}_{CWMS(\gamma)} \leq 0$. Daí temos:

$$4A_U A_\gamma - 8A_U \tilde{A}_{CW(\gamma)} - 4A_U \tilde{A}_{CWMS(\gamma)} = 4A_U \left(h_0^2 A_U - \frac{A_U}{2} \sum_{\substack{k \geq 2 \\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1) \right)$$
$$+ 8A_U \frac{A_U}{4} \sum_{\substack{k=\acute{\imath}mpar \\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1) + 4A_U \frac{A_U}{2} \sum_{\substack{k=par \\ i=1,2}} (a_k^i)^2(\lambda_k^i - 1) = 4h_0^2 \left(A_U\right)^2 = L_V^2(\gamma)$$

■

6
Circulo unitário e dual discretos, Função Suporte e Raio de Curvatura

Vamos utilizar agora como bola unitária de Minkowski o polígono convexo e fechado $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ cujos vértices U_i estão dispostos em sentido anti-horário, $1 \leq i \leq n$ e $n, i \in \mathbb{N}$. Por definição o conjunto convexo U é simétrico e portanto $U_{i+n} = -U_i$. Iremos considerar também que $[U_i, U_{i+1} - U_i] \geq 0$. Por consequência da simetria U possui lados opostos paralelos, isto é, $U_iU_{i+1} \parallel U_{i+n}U_{i+n+1}$.

Para uma lista de números, ou vetores $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, nós definimos operadores diferença Δ tal que $\Delta_i L = L_{i+1} - L_i$ e ∇ tal que $\nabla_i = \Delta_{i-1}$.

De modo análogo ao caso contínuo, a bola unitária dual U^* pode ser identificada, segundo [5] e [7], como único polígono $V = \{V_1, ..., V_{2n}\}$ do plano que satisfaz

$$[U_i, V_i] = 1$$

$$[\Delta_i U, V_i] = [U_{i+1}, \Delta_i V] = 0.$$

Nessas condições definimos

$$V_i = \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]} \Delta_i U \tag{6.1}$$

$$U_{i+1} = -\frac{1}{[V_i, V_{i+1}]} \Delta_i V. \tag{6.2}$$

Podemos provar que V é simétrico, convexo e tem mesma orientação que U. Uma prova que o polígono V é a bola unitária dual pode ser visto em [5][p.6].

Definição 6.1. *Definimos o conjunto C_U como espaço dos polígonos $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$, fechados, cujos lados são paralelos aos lados correspondentes da bola unitária $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$, isto é, $P_iP_{i+1} \parallel U_iU_{i+1}$.*

Definição 6.2 (Rosáceas discretas)**.** *Definimos o conjunto $C_U - m$, m inteiro positivo, como espaço dos polígonos*

$$P = \{P_1, ..., P_{2n}, P_{2n+1}, ..., P_{4n}, ..., P_{2n(m-1)+1}, ..., P_{2mn}\},$$

fechados, cujo número de rotações é m e para cada $j \in \{1, ..., 2mn\}$ temos $P_jP_{j+1} \parallel U_iU_{i+1}$ onde $i \equiv j\, mod(2n)$ e $i \in \{1, ..., 2n\}$.

Definição 6.3. *Definimos a função suporte h de $P \in C_U$ como a $2n - upla$ $h = (h_1, h_2, ..., h_{2n})$ onde*

$$h_i = [P_i, V_i] = [P_{i+1}, V_i]. \tag{6.3}$$

Dessa forma verificamos que $[P_i, V_i] = h_i$ e $[P_i, U_i] = -\dfrac{\Delta_{i-1}h}{[V_{i-1}, V_i]}$. Portanto para todo polígono P em C_U podemos escrever

$$P_i = h_iU_i + (\Delta_{i-1}h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]} \tag{6.4}$$

A partir da equação 6.4 podemos calcular Δ_iP em função de h_i

$$\begin{aligned}
\Delta_iP &= P_{i+1} - P_i \\
&= h_{i+1}U_{i+1} + (\Delta_ih)\frac{V_{i+1}}{[V_i, V_{i+1}]} - h_iU_i - (\Delta_{i-1}h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]} \\
&= h_{i+1}\left(-\frac{V_{i+1} - V_i}{[V_i, V_{i+1}]}\right) + \frac{(h_{i+1} - h_i)V_{i+1}}{[V_i, V_{i+1}]} + h_i\frac{(V_i - V_{i-1})}{[V_{i-1}, V_i]} - \frac{(h_i - h_{i-1})V_i}{[V_{i-1}, V_i]} \\
&= h_i(U_{i+1} - U_i) + V_i\left(\frac{h_{i+1} - h_i}{[V_i, V_{i+1}]} - \frac{h_i - h_{i-1}}{[V_{i-1}, V_i]}\right) \\
&= h_iV_i[U_i, U_{i+1}] + V_i\left(\frac{\Delta_ih}{[V_i, V_{i+1}]} - \frac{\Delta_{i-1}h}{[V_{i-1}, V_i]}\right) \\
&= \left(h_i + \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]}\nabla_i\left(\frac{\Delta_ih}{[V_i, V_{i+1}]}\right)\right)(U_{i+1} - U_i)
\end{aligned}$$

Assim temos a equação

$$\Delta_iP = \left(h_i + \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]}\nabla_i\left(\frac{\Delta_ih}{[V_i, V_{i+1}]}\right)\right)\Delta_iU. \tag{6.5}$$

Definição 6.4. *Definimos o raio de curvatura r do polígono P em C_U como sendo a sequência real $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que*

$$\Delta_iP = r_i \cdot \Delta_iU.$$

Importante destacar que o raio de curvatura r_i está associado ao segmento P_iP_{i+1}, $r_{i+2n} = r_i$ e que dado um polígono P em C_U podemos representá-lo pelo vetor $r = (r_i)_{i=1,2...,2n}$. Podemos também escrever o raio de curvatura em termos da função suporte como segue.

$$r_i = h_i + \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]} \nabla_i \left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]} \right). \tag{6.6}$$

6.1 Exemplos

Exemplo 6.5. *Podemos calcular o dual de U a partir da equação (6.1). Ver figura 6.1.*
Como $U_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $U_2 = (0,1)$, $U_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $U_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $U_5 = (0,-1)$, $U_6 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ teremos $V_1 = (-1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $V_2 = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $V_3 = (0, \frac{-2\sqrt{3}}{3})$, $V_4 = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $V_5 = (1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $V_6 = (0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ou basta observar que $V_i = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Delta_i U$, para todo i. Ou seja, V é um hexágono regular tal que $\|V_i\|_u = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Nesse caso o raio de curvatura de V é $r = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, ..., \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Exemplo 6.6. *Considere como bola unitária U o hexágono descrito no exemplo (2.3). Seja $P \in C_U$ com raio de curvatura $r = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Ver 6.2.*

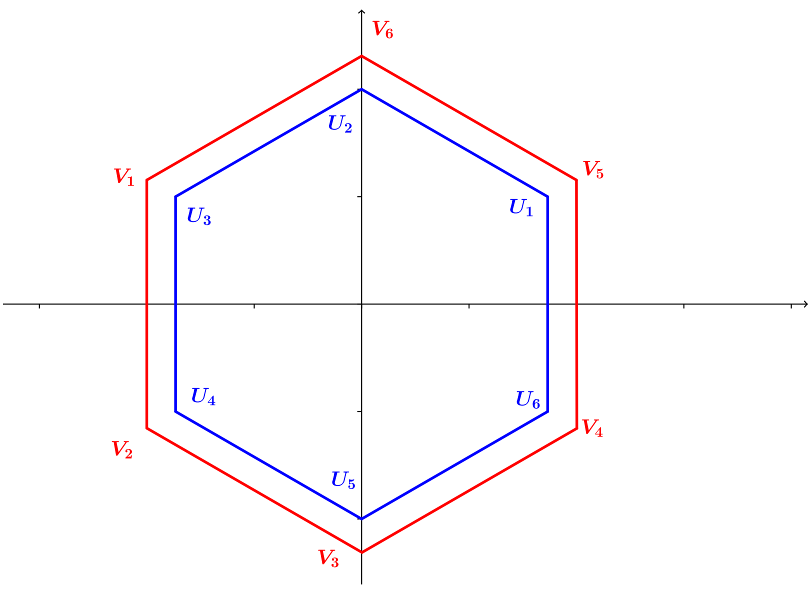

Figura 6.1: Bola unitária U e seu dual V

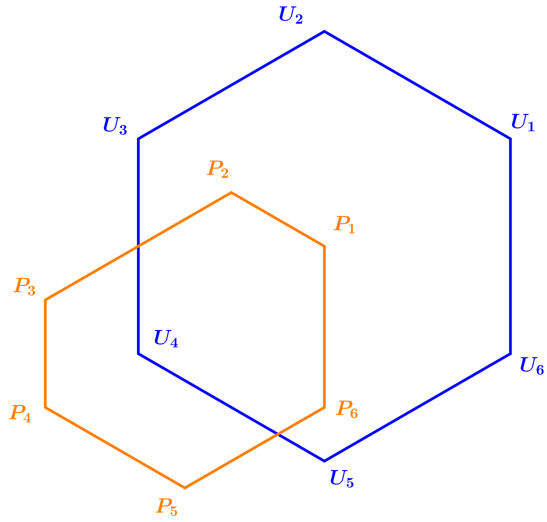

Figura 6.2: Polígono $P \in C_U$ onde $r = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ e bola unitária

7
Cáustica de Wigner e Conjunto de Medida de Largura Constante-Discreto

Considere o polígono $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ em C_U, isto é, fechado e $\Delta_i P = r_i \Delta_i U$ onde U é bola unitária do plano normado.

Definição 7.1 (Paralelos)**.** *Chamamos de $c-$paralelo discreto de P o polígono: $P(c) = \{P_1(c), ..., P_i(c), ..., P_{2n}(c)\}$ onde $i \in \{1, 2..., 2n\}$ e*

$$P_i(c) = \{P_i + cU_i; c \in \mathbb{R}\}.$$

Como consequência da definição teremos que $P(c)$ é fechado, $P(0) = P$ e a convexidade depende do valor de c. A função suporte do paralelo é

$$h_{P_i(c)} = [P_i(c), V_i] = [P_i + cU_i, V_i] = h_i + c \tag{7.1}$$

e seu raio de curvatura dado por $r_i + c$ pois $\Delta_i P(c) = (r_i + c)\Delta_i U$.

Definição 7.2 (Comprimento$-V$ com sinal)**.** *Seja P polígono em C_U. Lembrando que $\Delta_i P = r_i[U_i, U_{i+1}]V_i$, definimos o comprimento$-V$ com sinal como*

$$L_V(P) = \sum_{i=1}^{2n} r_i[U_i, U_{i+1}]$$

Nesse caso podemos ter comprimento$-V$ com sinal igual a zero.

Definição 7.3 (Área com sinal)**.** *Seja P polígono em C_U. Definimos a área com sinal de P como*

$$\tilde{A}(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i P].$$

Podemos ter, com essa definição, área com sinal assumindo valor negativo. Vale destacar que se $P \in C_U$ é polígono convexo, a área com sinal passa a ser a própria área limitada pelo polígono.

7.1 Cáustica de Wigner e Curvas de Largura Constante

Definição 7.4. *Chamamos Evoluta de Área discreta ou Cáustica de Wigner discreta do polígono $P \in C_U$ o conjunto:*

$$CW(P_i) = \frac{P_i + P_{i+n}}{2}$$

Como $CW(P_i) = CW(P_{i+n})$ temos que $CW(P_i)$ dá duas voltas quando i varia de 1 até $2n$.
A função suporte de $CW(P_i)$ é

$$h_{CW(P_i)} = [CW(P_i), V_i] = \left[\frac{P_i + P_{i+n}}{2}, V_i\right] = \frac{h_i}{2} - \frac{h_{i+n}}{2}. \tag{7.2}$$

Definição 7.5 (Largura Constante)**.** *Dizemos que o polígono $P \in C_U$ possui largura constante se, $h_i + h_{i+n} = 2d, d > 0$(d constante). Nesse caso dizemos que a largura do Polígono P é $2d$.*

Na prática o polígono tem largura constante se a distância, na $U-$norma, entre os lados opostos paralelos é constante(2d).

Proposição 7.6. *$P \in C_U$ tem largura constante $2d \Leftrightarrow P_i - P_{i+n} = 2dU_i$, d constante.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Da equação (6.4) temos

$$P_i = h_iU_i + (\Delta_{i-1}h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]}$$

$$P_i - P_{i+n} = (h_iU_i - h_{i+n}U_{i+n}) + \frac{h_i + h_{i+n} - (h_{i-1} + h_{i-1+n})}{[V_{i-1}, V_i]}V_i$$
$$P_i - P_{i+n} = (h_iU_i + h_{i+n}U_i) = (h_i + h_{i+n})U_i = 2dU_i$$

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} h_i + h_{i+n} &= [P_i, V_i] + [P_{i+n}, V_{i+n}] \\ &= [P_i - P_{i+n}, V_i] \\ &= [2dU_i, V_i] \\ &= 2d(constante) \end{aligned}$$

■

Definição 7.7 (Largura Média). *Chamamos de largura média de um polígono P em C_U o número $\overline{w}_P = \dfrac{L_V(P)}{A(U)}$, onde $L_V(P)$ é o comprimento$-V$ com sinal do polígono P na norma dual e $A(U)$ é a área da bola unitária U.*

Teorema 7.8 (Barbier-Discreto). *Seja $P \in C_U$ com largura constante $2d$ então $L_V(\gamma) = 2dA(U)$, onde U é a bola unitária.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
L_V(P) &= \sum_{i=1}^{2n} r_i[U_i, \Delta_i U] = \sum_{i=1}^{2n}[U_i, \Delta_i P] \\
&= \sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i U] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i U] + [P_{i+n}, \Delta_{i+n} U] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(h_i + h_{i+n})[U_i, U_{i+1}] \\
&= 2d\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[U_i, U_{i+1}] = 2dA(U)
\end{aligned}$$

■

Caso o polígono P possua largura constante $2d$ então pelo Teorema de Barbier discreto $L_V(P) = A(U)2d$(ver [5]). Nesse caso a largura média e a largura da curva são iguais.

Proposição 7.9. *A Cáustica de Wigner é um $c-$paralelo de $P \in C_U \Leftrightarrow P$ tem largura constante.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$

$$\frac{P_i + P_{i+n}}{2} = P_i + cU_i \Rightarrow P_i - P_{i+n} = -2cU_i.$$

Pela proposição (8.4) o polígono P tem largura constante.

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}
CW(P_i) &= \frac{P_i + P_{i+n}}{2} \\
&= P_i - \frac{P_i - P_{i+n}}{2} \\
&= P_i - \frac{c}{2}U_i
\end{aligned}$$

■

Proposição 7.10. $P \in C_U$, $CW(P) = \{0\} \Leftrightarrow P$ *é simétrico.*

Demonstração. $CW(P_i) = \dfrac{P_i + P_{i+n}}{2} = \dfrac{P_i - P_i}{2} = 0$ ∎

Proposição 7.11. $P \in C_U$, $CW(CW(P)) = CW(P)$

Demonstração.

$$\begin{aligned} CW(CW(P_i)) &= \frac{CW(P_i) + CW(P_{i+n})}{2} \\ &= \frac{CW(P_i + CW(P_i)}{2} \\ &= \frac{2CW(P_i)}{2} \\ &= CW(P_i) \end{aligned}$$

∎

Proposição 7.12. $P \in C_U$, $CW(P(c)) = CW(P)$

Demonstração.

$$\begin{aligned} CW(P_i(c)) &= \frac{P_i + cU_i + P_{i+n} + cU_{i+n}}{2} \\ &= \frac{P_i + P_{i+n}}{2} \\ &= CW(P_i) \end{aligned}$$

∎

Proposição 7.13. $P \in C_U$, $CW(P)$ *tem comprimento*$-v$ *zero.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} L_V(CW(P)) &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{r_i - r_{i+n}}{2}[U_i, U_{i+1}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2n} r_i[U_i, U_{i+1}] - \sum_{i=1}^{2n} r_{i+n}[U_i, U_{i+1}]\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2n} r_i[U_i, U_{i+1}] - \sum_{i=1}^{2n} r_{i+n}[U_{i+n}, U_{i+1+n}]\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[L_V(P) - L_V(P)\right] = 0 \end{aligned}$$

∎

7.2 Conjunto de Medida de Largura Constante e Curvas Simétricas

Definição 7.14 (CMLC). *Considere o polígono P em C_U. Definimos o Conjunto de Medida de Largura Constante, abreviado por CMLC, discreto como*

$$CMLC(P) = \left\{\frac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2}, i = 1, ..., 2n\right\}$$

O polígono $CMLC(P)$ está bem definido pois é fechado e $\Delta_i(CMLC(P_i))$ é paralelo a $\Delta_i U$.
A função suporte do CMLC e o raio de curvatura são respectivamente:

$$h_{CMLC(P)} = \left[\frac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2}, V_i\right] = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+n} - \overline{w}_P) \tag{7.3}$$

$$\Delta_i CMLC(P) = \frac{1}{2}\{\Delta_i P - \Delta_{i+n} P - \overline{w}_P \Delta_i U\} = \frac{r_i + r_{i+n} - \overline{w}_P}{2}\Delta_i U$$

$$r_{CMLC(P)} = \frac{r_i + r_{i+n} - \overline{w}_P}{2} \tag{7.4}$$

Proposição 7.15. *$P \in C_U$, $CMLC(P)$ é simétrico.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} CMLC(P_{i+n}) &= \frac{P_{i+n} - P_{i+2n} - \overline{w}_P U_{i+n}}{2} \\ &= \frac{P_{i+n} - P_i + \overline{w}_P U_i}{2} \\ &= -\frac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2} \\ &= -CMLC(P_i) \end{aligned}$$

■

Proposição 7.16. *$CMLC(P)$ é paralelo de $P \in C_U \Leftrightarrow P$ é simétrico.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$

$$
\begin{aligned}
CMLC(P_i) &= P_i + cU_i \Rightarrow \\
P_i &= CMLC(P_i) - cU_i \\
P_{i+n} &= CMLC(P_{i+n}) - cU_{i+n} = -P_i
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
CMLC(P_i) &= \frac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2} \\
&= \frac{P_i + P_i - \overline{w}_P U_i}{2} \\
&= P_i - \frac{\overline{w}_P}{2} U_i
\end{aligned}
$$

■

Teorema 7.17. *Considere o polígono P em C_U. $CMLC(P) = \{0\} \Leftrightarrow P$ possui largura constante.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Por hipótese $P_i = P_{i+n} + \overline{w}_P U_i$

$$
\begin{aligned}
h_i + h_{i+n} &= \\
&= [P_i, V_i] + [P_{i+n}, V_{i+n}] \\
&= [P_i - P_{i+n}, V_i] \\
&= [\overline{w}_P U_i, V_i] \\
&= \overline{w}_P [U_i, V_i] = \overline{w}_P (constante)
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Por hipótese $\overline{w}_P$ é a largura de P, isto é $h_i + h_{i+n} = \overline{w}_P$. Utilizando também a equação (7.4) teremos

$$
\begin{aligned}
P_i - P_{i+n} &= h_i U_i + (\Delta_{i-1} h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]} - \left(h_{i+n} U_{i+n} + (\Delta_{i+n-1} h)\frac{V_{i+n}}{[V_{i+n-1}, V_{i+n}]} \right) \\
&= (h_i + h_{i+n}) U_i + (\Delta_{i-1} h + \Delta_{i+n-1} h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]} \\
&= \overline{w}_P U_i
\end{aligned}
$$

■

Proposição 7.18. *$P \in C_U$. $CMLC(P)$ tem comprimento$-v$ zero.*

Demonstração.
Como $r_{CMLC} = \dfrac{r_i + r_{i+n} - \overline{w}_P}{2}$ temos

$$\begin{aligned} L_V(CMLC(P_i)) &= \sum_{i=1}^{2n} r_{CMLC}[U_i, \Delta_i U] \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{r_i + r_{i+n} - \overline{w}_P}{2}[U_i, \Delta_i U] \\ &= \frac{1}{2}\left(2L_V(P) - 2\overline{w}_P A(U)\right) \\ &= L_V(P) - \frac{L_V(P)}{A(U)}A(U) = 0 \end{aligned}$$

■

Proposição 7.19. *$P \in C_U$, $CMLC(CMLC(P)) = CMLC(P)$*

Demonstração. Como CMLC é simétrico e possui comprimento$-v$ zero temos

$$\begin{aligned} CMLC(CMLC(P_i)) &= \frac{CMLC(P_i) - CMLC(P_{i+n}) - \overline{w}_P U_i}{2} \\ &= \frac{CMLC(P_i) + CMLC(P_i) - 0 \cdot U_i}{2} \\ &= \frac{2CMLC(P_i)}{2} \\ &= CMLC(P_i) \end{aligned}$$

■

Proposição 7.20. *$P \in C_U$, $CMLC(P(c)) = CMLC(P)$.*

Demonstração.

Como $L_V(P(c)) = \sum_i^{2n}(r_i + c)[U_i, U_{i+1}] = L_V(P) + 2cA(U)$, teremos portanto $\overline{w}_{P(c)} = \overline{w}_P + 2c$. Assim

$$
\begin{aligned}
CMLC(P_i(c)) &= \frac{P_i(c) - P_{i+n}(c) - \overline{w}_{P(c)}U_i}{2} \\
&= \frac{P_i + cU_i - P_{i+n} - cU_{i+n} - \overline{w}_{P(c)}U_i}{2} \\
&= \frac{P_i + cU_i - P_{i+n} + cU_i - \overline{w}_{P(c)}U_i}{2} \\
&= \frac{P_i - P_{i+n} + 2cU_i - (\overline{w}_P + 2c)U_i}{2} \\
&= \frac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2} \\
&= CMLC(P_i)
\end{aligned}
$$

■

7.3
Decomposição do polígono P como soma de Caústica de Wigner, CMLC e bola unitária.

Proposição 7.21. *$P \in C_U$, $P_i = CW(P_i) + CMLC(P_i) + \frac{\overline{w}_P}{2}U_i$, $\forall i \in \{1, ..., 2n\}$ e $h_P = h_{CW(P)} + h_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P}{2}$*

Corolário 7.22. *$P \in C_U$, $P_i = CW(P_i) + CMLC(P_i)$, $\forall i \in \{1, ..., 2n\}$ e $h_P = h_{CW(P)} + h_{CMLC(P)} \Leftrightarrow L_V(P) = 0$*

É fácil ver que os resultados acima são consequência do fato que

$$P_i = \frac{P_i + P_{i+n}}{2} + \frac{P_i - P_{i+n}}{2}.$$

7.4
Cúspides CMLC e Cáustica de Wigner

Definição 7.23. *Seja P um polígono em C_U. Dizemos que um vértice P_i em P é um cúspide se os seus lado vizinhos(não degenerados) possuem orientação oposta, isto é, os segmentos anterior e posterior a P_i possuem raios de curvatura com sinais contrários.*

Para mais detalhes dessa definição ver [7].

Teorema 7.24. *Considere o polígono P em C_U. Então o número de cúspides de CMLC(P) é múltiplo de quatro.*

Demonstração. O número de cúspides de CMLC(P) é igual ao número de trocas de sinal do raio de curvatura em segmentos consecutivos. Como $r_{CMLC(P_i)} = (r_i + r_{i+n} - \overline{w}_P)/2$ teremos $r_{CMLC(P_i)} = r_{CMLC(P_{i+n})}$. Uma vez que $L_V(CMLC(P)) = 0$ temos

$$r_{CMLC(P_1)}[U_1, U_2] + r_{CMLC(P_2)}[U_2, U_3] + ... + r_{CMLC(P_n)}[U_n, U_{n+1}] = 0$$

e

$$r_{CMLC(P_{n+1})}[U_{n+1}, U_{n+2}] + r_{CMLC(P_{n+2})}[U_{n+2}, U_{n+3}] + ... + r_{CMLC(P_{2n})}[U_{2n}, U_{2n+1}] = 0.$$

Das igualdades anteriores e pelo fato de $[U_i, U_{i+1}] > 0$, $\forall i \in \{1, ..., 2n\}$, concluímos que existe pelo menos um $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $r_{CMLC(P_k)} < 0$ assim o número de trocas de sinal de k até $k + n$ deve ser par e pelo menos 2. O mesmo vale de $k + n$ até $k + 2n$. Temos o desejado.

■

Teorema 7.25. *Considere o polígono P em C_U. Então o número de cúspides de CW(P) é $2k$, k ímpar.*

Demonstração. Observe que $r_{CW(P_i)} = \frac{r_i - r_{i+n}}{2}$. Como $r_{CW(P_i)} = -r_{CW(P_{i+n})}$ então o número de trocas de sinal do raio de curvatura em segmentos consecutivos de 1 até $n + 1$ é ímpar, k por exemplo, e igual ao número de trocas de sinal de $n + 1$ até $2n + 1$. Temos o desejado.

■

7.5 Áreas com sinal de CW e CMLC

Definição 7.26. *Sejam P e Q polígonos definidos em C_U. Definimos como área mista dos polígonos P e Q,*

$$A(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} [P_i, \Delta_i Q].$$

Teorema 7.27. *(Desigualdade de Minkowski) Sejam P e Q polígonos simples e convexos em C_U então*

$$A(P, Q)^2 \geq A(P)A(Q) \tag{7.5}$$

onde $A(P)$, $A(Q)$ e $A(P, Q)$ são respectivamente as áreas das curvas e área mista.

Note que se fizermos $Q = U$, U bola unitária, temos pela equação (8.5)

$$A(P,U) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i U] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[U_i, \Delta_i P] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i[U_i, \Delta_i U] = \frac{L_V(P)}{2}$$

isto é, temos a desigualdade isoperimétrica de Minkowski,

$$L_V^2 \geq 4A(U)A(P). \tag{7.6}$$

Proposição 7.28. *Seja o polígono* $P \in C_U$ *então* $\tilde{A}(CW(P)) < 0$, $\tilde{A}(CMLC(P)) < 0$.

Demonstração.
Ver capítulo 9 seção (9.1).

■

7.6 Evolutas

Definição 7.29. *Definimos* $U-$*evoluta do polígono* P *em* C_P *como sendo o polígono* $E(P)$ *tal que*

$$E(P_i) = P_i - r_i U_i = P_{i+1} - r_i U_{i+1}, i = 1, ..., 2n.$$

onde $r = (r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *é o raio de curvatura de* P.

Proposição 7.30. $P \in C_U$. $P(c)$ *e* P *possuem a mesma* $U-$*evoluta.*

Demonstração. Como $\Delta_i(P(c)) = (r_i + c)\Delta_i U$ temos que a evoluta do paralelo $P(c)$ é $E(P_i(c)) = P_i(c) - (r_i + c)U_i = P_i + cU_i - r_iU_i - cU_i = E(P_i)$

■

Proposição 7.31. *A* $U-$*evoluta de* $P \in C_U$ *possui comprimento*$-U$ *com sinal igual a zero.*

Demonstração. Basta observar que $\Delta_i E(P) = (-\Delta_i r)U_{i+1}$. Assim temos

$$L_U(E(P)) = \sum_{i=1}^{2n} -\Delta_i r = 0$$

■

Proposição 7.32. *Seja* $P \in C_U$. *A* $V-$*função suporte da* $U-$*evoluta de* P *é* $h_{E_{P_i}} = -\dfrac{\Delta_{i-1}h}{[V_{i-1}, V_i]}$, *onde* h *é a* $U-$*função suporte de* P.

Demonstração. Considere r o raio de curvatura de P. Como $E(P_i) = P_i - r_i U_i$ então $\Delta_i E(P) = (-\Delta_i r)U_{i+1} = \frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]}\Delta_i V$.

Portanto

$$\begin{aligned} h_{E_{P_i}} &= [E(P_i), U_i] \\ &= [P_i - r_i U_i, U_i] \\ &= [P_i, U_i] \\ &= [h_i U_i + (\Delta_{i-1} h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]}, U_i] \\ &= -\frac{\Delta_{i-1} h}{[V_{i-1}, V_i]} \end{aligned}$$

■

Proposição 7.33. *Seja $P \in C_U$. A $U-$função suporte da $V-$evoluta da $U-$evoluta, isto é, a dupla evoluta de P é*

$$h_{E(E(P_{i+1}))} = -\frac{1}{[u_i, u_{i+1}]}\nabla_i \left(\frac{\Delta_i h}{[v_i, v_{i+1}]}\right),$$

onde h é a $U-$função suporte de P.

Demonstração. Definimos

$$E(E(P_{i+1})) = E(P_{i+1}) - \frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]}V_{i+1} = E(P_i) - \frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]}V_i,$$

então

$$\begin{aligned} \Delta_i E_{E(P)} &= -\nabla_i \left(\frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]}\right) V_i \\ &= -\nabla_i \left(\frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]}\right) \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]}\Delta_i U. \end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
h_{E(E(P_{i+1}))} &= [E(E(P_{i+1})), V_i] \\
&= \left[E(P_i) - \frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]} V_i, V_i\right] \\
&= [E(P_i), V_i] \\
&= [P_i - r_i U_i, V_i] \\
&= h_i - \left(h_i - \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]} \nabla_i \left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{[U_i, U_{i+1}]} \nabla_i \left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]}\right)
\end{aligned}
$$

■

Proposição 7.34. *Seja $P \in C_U$. Então $E(CW(P_i)) = CW(E(P_i))$ e $E(CMLC(P_i)) = CMLC(E(P_i))$. Isto é, evolutas comutam com CW e CMLC.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
E(CW(P_i)) =& CW(P_i) - r_{CW_i} U_i \\
=& \frac{P_i + P_{i+n}}{2} - \frac{r_i - r_{i+n}}{2} U_i \\
=& \frac{P_i - r_i U_i + P_{i+n} - r_{i+n} U_{i+n}}{2} \\
=& \frac{E(P_i) + E(P_{i+n})}{2} \\
=& CW(E(P_i))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(CMLC(P_i)) =& CMLC(P_i) - r_{CMLC_i} U_i \\
=& \frac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2} - \frac{r_i + r_{i+n} - \overline{w}_P}{2} U_i \\
=& \frac{P_i - r_i U_i - (P_{i+n} - r_{i+n} U_{i+n}) - \overline{w}_{E_P} U_i}{2} \\
=& \frac{E(P_i) - E(P_{i+n}) - \overline{w}_{E_P} U_i}{2} \\
=& CMLC(E(P_i))
\end{aligned}
$$

Observe que nesse caso $\overline{w}_{E_P} = \dfrac{L_U(E_P)}{A(U)} = 0$.

■

7.7 Exemplos

Exemplo 7.35. *Seja a bola unitária U, o hexágono descrito no exemplo* (2.3). *Considere o polígono P em C_U com raio de curvatura $r = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$. Como P é fechado então $\sum_{i=1}^{6} \Delta_i P = \sum_{i=1}^{6} r_i \Delta_i U = 0$, o que implica $r_1(U_2-U_1)+r_2(U_3-U_2)+r_3(U_4-U_3)+r_4(U_5-U_4)+r_5(U_6-U_5)+r_6(U_1-U_6) = 0$. Substituindo as coordenadas da bola unitária U teremos:*

$$r_1 + r_2 - r_4 - r_5 = 0 \text{ e } r_1 - r_2 - 2r_3 - r_4 + r_5 + 2r_6 = 0$$

Esse sistema possui infinitas soluções e duas variáveis livres. Portanto a dimensão de C_U é 4. No caso geral a dimensão de C_U é $2n-2$, ver [7].

Exemplo 7.36. *Seja a bola unitária U, o hexágono descrito no exemplo* (2.3). *Considere o polígono $P \in C_U$ de raio de curvatura $r = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, conforme exemplo* (7.34). *Vamos calcular $CW(P)$ e $CMLC(P)$. Ver figura 7.1.*

$$L_V(P) = \sum_{i=1}^{6} r_i [U_i, U_{i+1}] = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=1}^{6} r_i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{17\sqrt{3}}{8}$$

e

$$A(U) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} [U_i, U_{i+1}] = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim $\overline{w}_P = \dfrac{L_V(P)}{A(U)} = \dfrac{17}{12}$ e $CMLC(P_i) = C_i = (P_i - P_{i+n} - \frac{17}{12} U_i)/2$. Os valores de U_i podem ser encontrados no exemplo (7.4).

Como $P_{i+1} = r_i \Delta_i U + P_i$ e $P_1 = (0,0)$ então teremos $P_2 = (\frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$, $P_3 = (\frac{-3\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$, $P_4 = (\frac{-3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4})$, $P_5 = (\frac{-3\sqrt{3}}{8}, -\frac{9}{8})$, $P_6 = (0, -\frac{3}{4})$.

Portanto $C_1 = (\frac{\sqrt{3}}{48}, \frac{1}{48})$, $C_2 = (\frac{\sqrt{3}}{16}, -\frac{1}{48})$, $C_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{48}, -\frac{5}{48})$, $C_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{48}, -\frac{1}{48})$, $C_5 = (-\frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{1}{48})$, $C_6 = (\frac{\sqrt{3}}{48}, \frac{5}{48})$. Observe que $C_1 = -C_4$, $C_2 = -C_5$, $C_3 = -C_6$, isto é, CMLC é simétrico. Note também que $r_{CMLC(P_1)} = -1/12 = r_{CMLC(P_4)}$ $r_{CMLC(P_2)} = 1/6 = r_{CMLC(P_5)}$, $r_{CMLC(P_3)} = -1/12 = r_{CMLC(P_6)}$. Assim podemos ver

$$L_V(CMLC(P)) = \sum_{i=1}^{6} r_{CMLC(P_i)} [U_i, U_{i+1}] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = 0$$

Como $CW(P_i) = \frac{P_i+P_{i+n}}{2}$ *teremos* $CW(P_1) = CW(P_4) = (\frac{-3\sqrt{3}}{8}, \frac{-3}{8})$, $CW(P_2) = CW(P_5) = (\frac{-5\sqrt{3}}{16}, \frac{-7}{16})$, $CW(P_3) = CW(P_6) = (\frac{-3\sqrt{3}}{8}, \frac{-1}{2})$. *Podemos ver que também que* $r_{CW(P)} = (-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ *e* $L_V(CW(P)) = 0$.

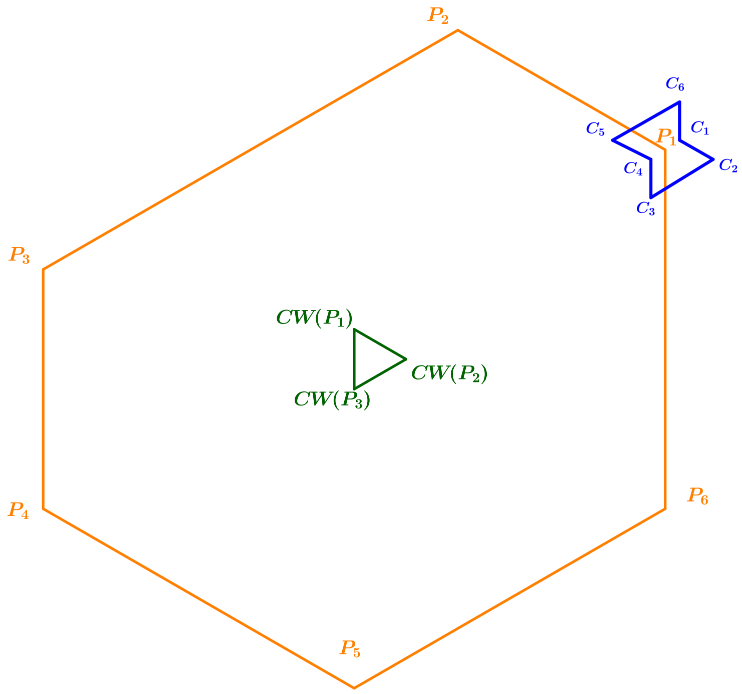

Figura 7.1: Polígono P, Cáustica de Wigner e CMLC C

8
Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado - Discreto

Teorema 8.1. *Seja $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ polígono em C_U no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ é a bola unitária e $P_{i+1} - P_i$ é paralelo a $U_{i+1} - U_i$. Então*

$$L_V^2(P) = 4A_U \tilde{A}_P - 8A_U \tilde{A}_{CW(P)} - 4A_U \tilde{A}_{CMLC(P)}, \tag{8.1}$$

onde $L_V(P)$ indica o $V-$comprimento com sinal do polígono P, A_U indica área da bola unitária e $\tilde{A}(P)$, $\tilde{A}_{CW(P)}$ e $\tilde{A}_{CMLC(P)}$ indicam respectivamente as áreas com sinal de P, $CW(P)$ e $CMLC(P)$.

Demonstração.

Pela proposição (7.20) podemos escrever $P_i = \dfrac{P_i + P_{i+n}}{2} + \dfrac{P_i - P_{i+n} - \overline{w}_P U_i}{2} + \dfrac{\overline{w}_P}{2} U_i$, isto é, $P_i = CW(P_i) + CMLC(P_i) + \dfrac{\overline{w}_P}{2} U_i$. Utilizando o operador diferença temos $\Delta_i P = \Delta_i CW(P) + \Delta_i CMLC(P) + \dfrac{\overline{w}_P}{2} \Delta_i U$.

A seguir, temos três igualdades importantes para a prova.

$$\sum_{i=1}^{2n} [CW(P_i), \Delta_i CMLC(P)] = -\sum_{i=1}^{2n} [\Delta_i CW(P), CMLC(P_i)] \tag{8.2}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\overline{w}_P}{2} [CW(P_i), \Delta_i U] = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\overline{w}_P}{2} [U_i, \Delta_i CW(P)] \tag{8.3}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\overline{w}_P}{2} [CMLC(P_i), \Delta_i U] = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\overline{w}_P}{2} [U_i, \Delta_i CMLC(P)] \tag{8.4}$$

Vamos calcular a área com sinal do polígono P utilizando a proposição (7.20) e as igualdades (8.2), (8.3) e (8.4). Iremos utilizar também a proposição (7.27) que diz $\tilde{A}(CW(P)) < 0$ e $\tilde{A}(CMLC(P)) < 0$.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}(P) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i P] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left[CW(P_i) + CMLC(P_i) + \frac{\overline{w}_P}{2}U_i, \Delta_i CW(P) + \Delta_i CMLC(P) + \frac{\overline{w}_P}{2}\Delta_i U\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[CW(P_i), \Delta_i CW(P)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[CW(P_i), \Delta_i CMLC(P)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[CW(P_i), \Delta_i U] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[CMLC(P_i), \Delta_i CW(P)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[CMLC(P_i), \Delta_i CMLC(P)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[CMLC(P_i), \Delta_i U] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[U_i, \Delta_i CW(P)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[U_i, \Delta_i CMLC(P)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P^2}{4}[U_i, \Delta_i U] \\
&\Rightarrow \\
&\tilde{A}(P) = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4}A(U) + \sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[CW(P_i), \Delta_i U] \\
&+ \sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[CMLC(P_i), \Delta_i U] \\
&= 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4}A(U) + \sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}[CW(P_i) + CMLC(P_i), \Delta_i U] \\
&= 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4}A(U) + \sum_{i=1}^{2n}\frac{\overline{w}_P}{2}\left[P_i - \frac{\overline{w}_P}{2}U_i, \Delta_i U\right] \\
&= 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4}A(U) \\
&+ \frac{\overline{w}_P}{2}\left(\sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i U] - \frac{\overline{w}_P}{2}\sum_{i=1}^{2n}[U_i, \Delta_i U]\right) \\
&= 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4}A(U) \\
&+ \frac{\overline{w}_P}{2}\left(L_V(P) - \frac{\overline{w}_P}{2}2A(U)\right) \\
&= 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{(L_V(P))^2}{4A(U)} \\
&+ \frac{\overline{w}_P}{2}(L_V(P) - L_V(P)) \\
&\Rightarrow \\
&\tilde{A}(P) = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{L_V^2(P)}{4A(U)}
\end{aligned}
$$

$$\tilde{A}_P = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{L_V^2(P)}{4A_U}$$
$$L_V^2(P) = 4A_U\tilde{A}_P - 8A_U\tilde{A}_{CW(P)} - 4A_U\tilde{A}_{CMLC(P)}$$

■

Corolário 8.2. *Seja* $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ *polígono simples, fechado, convexo no plano* $(\mathbb{R}^2, U)$*, onde* $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ *é a bola unitária e* $P_{i+1} - P_i$ *é paralelo a* $U_{i+1} - U_i$*. Então*

$$L_V^2(P) = 4A_U A_P + 8A_U \left|\tilde{A}_{CW(P)}\right| + 4A_U \left|\tilde{A}_{CMLC(P)}\right|, \tag{8.5}$$

onde $L_V(P)$ *indica o comprimento do polígono* P *na norma dual,* A_U *e* A_P *indicam respectivamente as áreas da bola unitária e do polígono* P *e* $\tilde{A}_{CW(P)}$ *e* $\tilde{A}_{CMLC(P)}$ *indicam respectivamente as áreas com sinal de* $CW(P)$ *e* $CMLC(P)$*.*

Corolário 8.3. *Seja* $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ *polígono simples, fechado, convexo no plano* $(\mathbb{R}^2, U)$*, onde* $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ *é a bola unitária e* $P_{i+1} - P_i$ *é paralelo a* $U_{i+1} - U_i$*. Então*

$$L_V^2(P) \geq 4A_U A_P + 8A_U \left|\tilde{A}_{CW(P)}\right|, \tag{8.6}$$

onde $L_V(P)$ *indica o comprimento do polígono* P *na norma dual,* A_U *e* A_P *indicam respectivamente as áres da bola unitária e do polígono* P *e* $\tilde{A}_{CW(P)}$ *indica a área orientada de* $CW(P)$*. A igualdade ocorre se, e só se, o polígono* P *tem largura constante na norma* U*.*

Corolário 8.4 (Desigualdade Isoperimétrica Clássica em plano normado.)**.** *Seja* $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ *polígino simples, fechado, convexo no plano* $(\mathbb{R}^2, U)$*, onde* $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ *é a bola unitária e* $P_{i+1} - P_i$ *é paralelo a* $U_{i+1} - U_i$*. Então*

$$L_V^2(P) \geq 4A_U A_P, \tag{8.7}$$

onde $L_V(P)$ *indica o comprimento do polígono* P *na norma dual,* A_U *e* A_P *indicam respectivamente as áreas da bola unitária e do polígono* P*. A igualdade ocorre se, e só se,o polígono* P *é simétrico e tem largura constante, isto é, múltiplo da bola.*

Corolário 8.5. *Seja $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ polígono simples, fechado, convexo no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ é a bola unitária e $P_{i+1} - P_i$ é paralelo a $U_{i+1} - U_i$. Então*

$$L_V^2(P) \geq 4A_U A_P + 4A_U \left|\tilde{A}_{CMLC(P)}\right|, \tag{8.8}$$

onde $L_V(P)$ indica o comprimento do polígono P na norma dual, A_U e A_P indicam respectivamente as áreas da bola unitária e do polígono P e $\tilde{A}_{CMLC(P)}$ indica a área orientada de $CMLC(P)$.

8.1 Exemplo

Exemplo 8.6. *Podemos verificar o Corolário (8.2) caso discreto, utilizando o exemplo (7.35). Ver figura 7.1. Onde $L_V(P) = \frac{17\sqrt{3}}{8}$, $A(U) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $A(P) = \frac{47\sqrt{3}}{64}$, $\tilde{A}_{CW(P)} = -\frac{\sqrt{3}}{256}$, $\tilde{A}_{CMLC(P)} = -\frac{\sqrt{3}}{96}$.*

Substituindo:

$$\begin{aligned} A(U)\left(4A_P + 8\left|\tilde{A}_{CW(P)}\right| + 4\left|\tilde{A}_{CMLC(P)}\right|\right) &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(4 \cdot \frac{47\sqrt{3}}{64} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{256} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{96}\right) \\ &= \frac{867}{64} = \frac{17^2(\sqrt{3})^2}{8^2} = L_V^2(P) \end{aligned}$$

9
Ciclóides e Base Ortonormal - Discreto

Ciclóides clássicas tem a propriedade de que sua dupla evoluta é homotética a ela mesma. Considerando esta mesma propriedade em um plano normado $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é bola unitária poligonal, temos a seguinte definição (proposição (7.32)):

Definição 9.1. *Definimos como Ciclóide discreta $F \in C_U$ o polígono cuja função suporte h_{F_i} satisfaz a equação*

$$-\frac{1}{[U_i, U_{i+1}]}\nabla_i\left(\frac{\Delta_i h_F}{[V_i, V_{i+1}]}\right) = \lambda h_{F_i}, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{9.1}$$

que é a discretização natural de segunda ordem da Equação Diferencial de Sturm-Liouville exibida em [6].

Definição 9.2. *Dizemos que λ é autovalor da equação* (9.1) *se existe $U-$função suporte h que satisfaz tal equação. A função h é chamada de autovetor.*

Seja $P \in C_U$. Pela equação (6.4) existe uma correspondência entre P e h de forma que para cada P existe uma e apenas uma função suporte, assim vamos a partir de agora apresentar C_U como espaço das funções suporte e vamos muni-lo com o produto interno.

Definição 9.3. *Sejam $h, \overline{h} \in C_U$ então definimos o produto interno*

$$\langle h, \overline{h}\rangle_U = \sum_{k=1}^{2n} h_k \overline{h}_k [U_k, U_{k+1}] \tag{9.2}$$

onde h e $\overline{h}$ correspondem a funções suportes de dois polígonos em C_U.

Lema 9.4. *Seja $h \in C_U$. A transformação linear T tal que*

$$Th = (Th_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{[U_i, U_{i+1}]}\nabla_i\left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}},$$

definida em C_U é auto-adjunta com respeito ao produto interno (9.2).

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\langle Th, s\rangle_U &= \sum_{i=1}^{2n} s_i Th_i [U_i, U_{i+1}] \\
&= \sum_{i=1}^{2n} -s_i \left(\frac{1}{[U_i, U_{i+1}]} \nabla_i \left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]} \right) \right) [U_i, U_{i+1}] \\
&= \sum_{i=1}^{2n} -s_i \nabla_i \left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\Delta_i s \Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} -h_i \nabla_i \left(\frac{\Delta_i s}{[V_i, V_{i+1}]} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} h_i T s_i [U_i, U_{i+1}] = \langle Ts, h\rangle_U
\end{aligned}
$$

■

Suponhamos que o raio de curvatura r de P satisfaça a equação (10.1) com $\lambda \neq 1$, então $h_i = \dfrac{r_i}{1-\lambda}$ satisfaz (10.1). Reciprocamente se a função suporte h do polígono P satisfaz (10.1) então pela equação (7.6), $r_i = h_i(1-\lambda)$ também satisfaz (10.1).
Segundo [7], $\lambda = 1$ indica as ciclóides discretas abertas que, portanto, não podem ser representadas por funções suporte periódicas. Assim para $\lambda \neq 1$ o polígono P possui tanto para raio de curvatura como função suporte, na transformação T, mesmos autovalores. Como estamos trabalhando com polígonos fechados fica justificados o uso de h ao invés de r na transformação T, Lema (9.4).
O conjunto C_U é invariante pela transformação T. Com efeito, lembrando que o conjunto C_U é definido de forma que $\sum_{i=1}^{2n} \Delta_i P = 0$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \Delta_i P &= \sum_{i=1}^{2n} r_i \Delta_i U \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} \Delta_i r U_{i+1} \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} \frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]} U_{i+1} [V_i, V_{i+1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^{2n} \frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]} \Delta_i V \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \nabla_i \left(\frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]} \right) V_i \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{[U_i, U_{i+1}]} \nabla \left(\frac{\Delta_i r}{[V_i, V_{i+1}]} \right) \Delta_i U \\
&= \sum_{i=1}^{2n} (-Tr_i) \Delta_i U
\end{aligned}
$$

Agora basta substituir r_i por $h_i(1-\lambda), \lambda \neq 1$ e temos o desejado.

Como T é auto-adjunta e C_U é invariante nessa transformação teremos pelo Teorema Espectral que C_U possui uma base ortonormal de auto-vetores. Segundo [7] cada elemento da base é a função suporte de uma ciclóide discreta fechada. Assim se $h \in C_U$, então P é a soma de $2n-2$ ciclóides discretas fechadas, que é uma generalização da série de Fourier discreta.

Apresentamos agora de acordo com [7] os autovalores associados a transformação T. Lema (9.4).

$$
\lambda_0(=0) < \lambda_1^1 = \lambda_2^1(=1) < \lambda_2^1 \leq \lambda_2^2 < \lambda_3^1 \leq \lambda_3^2 < \ldots < \lambda_{n-1}^1 \leq \lambda_{n-1}^2 < \lambda_n,
$$

onde $\lambda_0(=0)$ indica as ciclóides que são múltiplos da bola, isto é funções suporte constantes, λ_1^1, λ_2^1, indicam ciclóides abertas **(não incluídas no nosso caso)** e cada ciclóide associada a λ_k^j possui exatamente $2k$ cúspides. Também, se k é par, a ciclóide é simétrica, e se k é ímpar, a ciclóide tem largura zero. Dessa forma se $h \in C_U$ teremos:

$$
h = h_0 + a_2^1 h_2^1 + a_2^2 h_2^2 + a_3^1 h_3^1 + a_3^2 h_3^2 + \ldots + a_{n-1}^1 h_{n-1}^1 + a_{n-1}^2 h_{n-1}^2 + a_n h_n
$$

$$
= h_0 + a_n h_n + \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=2}^{n-1} a_k^j h_k^j,\ a_k^j,\ a_n \in \mathbb{R},\ k \geq 2, j = 1, 2 \tag{9.3}
$$

Corolário 9.5. *O conjunto* $H := \{h_0, h_2^1, h_2^2, h_3^1, h_3^2, \ldots, h_{n-1}^1, h_{n-1}^2, h_n\}$ *é base ortonormal de* C_U*.*

Do corolário temos que $\forall h_1, h_2 \in H$

$$
\langle h_1, h_2 \rangle = A(U), se, h_1 = h_2 \tag{9.4}
$$

e

$$\langle h_1, h_2 \rangle = 0, se, h_1 \neq h_2, \tag{9.5}$$

Sabemos também segundo [7] que

$$h^j_{k_i} = (-1)^k h^j_{k_{i+n}}, i \in \mathbb{N}, j = 1, 2, k = 2, ..., n-1, \tag{9.6}$$

$$h_{n_i} = (-1)^n h_{n_{i+n}}, n \in \mathbb{N} \tag{9.7}$$

Teorema 9.6. *Sejam* $\{h_0, h^1_2, h^2_2, h^1_3, h^2_3, ..., h^1_{n-1}, h^2_{n-1}, h_n\}$ *base ortonormal de* C_U *e* F^j_k *ciclóide associada à função suporte* h^j_k*. Então*

1. $CW(F^j_k) = F^j_k$ *e* $CMLC(F^j_k) = \{0\}$, *k ímpar.*
2. $CW(F^j_k) = \{0\}$ *e* $CMLC(F^j_k) = F^j_k$, *k par.*

Demonstração. Para k ímpar a equação (9.6) e a proposição (7.6) implicam que $F^j_{k_i} = F^j_{k_{i+n}}$, então $CW(F^j_{k_i}) = F^j_{k_i}$. Pela proposição (7.16) $CMLC(F^j_{k_i}) = \{0\}$. Para k par a equação (9.6) e a proposição (7.9) mostram que F^j_k é simétrica e portanto $CW(F^j_k) = \{0\}$. Pela equação (9.5) temos

$$\begin{aligned} L_V(F^j_{k_i}) &= \sum_{i=1}^{2n} r_{F^j_{k_i}} [U_i, U_{i+1}] \\ &= \sum_{i=1}^{2n} h^j_{k_i}(1 - \lambda^j_k)[U_i, U_{i+1}] = 0 \end{aligned}$$

Portanto $\overline{w}_{F^j_k} = \dfrac{L_V(F^j_k)}{A(u)} = 0$ e simetria implicam $CMLC(F^j_k) = F^j_k$ ■

9.1
Áreas e Comprimentos

Nessa seção vamos apresentar o cálculo de áreas orientadas e comprimento dual de polígonos em C_U estudados até o momento, utilizando a base ortonormal de C_U, corolário (9.5), isto é, a série de Fourier generalizada discreta.

$$\begin{aligned} 2\tilde{A}(CW(P)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} [CW(P_i), \Delta_i CW(P)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} [CW(P_i), CW(P_{i+1})] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left(h_{CW(P_i)}\right)^2[U_i,U_{i+1}] - \frac{\left(\Delta_i h_{CW(P)}\right)^2}{[V_i,V_{i+1}]}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{h_i-h_{i+n}}{2}\right)^2[U_i,U_{i+1}] - \frac{\left(\Delta_i h-\Delta_{i+n}h\right)^2}{[V_i,V_{i+1}]}\\
&= \frac{1}{2}A(P) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n} h_i h_{i+n}[U_i,U_{i+1}] - \frac{\left(\Delta_i h\right)\left(\Delta_{i+n}h\right)}{[V_i,V_{i+1}]}\\
&= \frac{1}{2}A(P) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n}\left(h_{0_i}+a_nh_{n_i}+\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j h_{k_i}^j\right)\left(h_{0_{i+n}}+a_nh_{n_{i+n}}+\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j h_{k_{i+n}}^j\right)[U_i,U_{i+1}]\\
&- \frac{1}{[V_i,V_{i+1}]}\left(a_n\Delta_i h_n+\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j\Delta_i h_k^j\right)\left(a_n\Delta_{i+n}h_n+\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j\Delta_{i+n}h_k^j\right)\\
&= \frac{A(P)}{2} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n} h_0^2[U_i,U_{i+1}] - \frac{1}{4}(a_n)^2(-1)^n\sum_{i=1}^{2n}(h_{n_i})^2[U_i,U_{i+1}]\\
&- \frac{1}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(-1)^k\sum_{i=1}^{2n}(h_{k_i}^j)^2[U_i,U_{i+1}] + \frac{1}{4}(-1)^n(a_n)^2\sum_{i=1}^{2n}\frac{(\Delta_i h_n)^2}{[V_i,V_{i+1}]}\\
&+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2\sum_{i=1}^{2n}\frac{(\Delta_i h_k^j)^2}{[V_i,V_{i+1}]}\\
&= \frac{A(P)}{2} - \frac{2A(U)}{4}h_0^2 - \frac{A(U)}{4}(-1)^n(a_n)^2 - \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2\\
&+ \frac{A(U)}{4}(a_n)^2(-1)^n\lambda_n + \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2\lambda_k^j\\
&= \frac{A(P)}{2} - \frac{2A(U)}{4}h_0^2 + \frac{A(U)}{4}(-1)^n(a_n)^2(\lambda_n-1) + \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2(\lambda_k^j-1)\\
&= \frac{h_0^2A(U)}{2} - \frac{A(U)}{4}(a_n)^2(\lambda_n-1) - \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j-1)\\
&- \frac{A(U)}{2}h_0^2 + \frac{A(U)}{4}(-1)^n(a_n)^2(\lambda_n-1) + \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2(\lambda_k^j-1)\\
&= -\frac{A(U)}{4}\left((a_n)^2(\lambda_n-1)(1-(-1)^n) + \sum_{\substack{k=\text{ímpar}\\ j=1,2}}^{n-1} 2(a_k^j)^2(\lambda_k^j-1)\right)\\
&= -\frac{A(U)}{2}\left(\frac{(a_n)^2(\lambda_n-1)(1-(-1)^n)}{2} + \sum_{\substack{k=\text{ímpar}\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j-1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{CMLC(P)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[CMLC(P_i), \Delta_i CMLC(P)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[CMLC(P_i), CMLC(P_{i+1})] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left(h_{CMLC(P_i)}\right)^2[U_i, U_{i+1}] - \frac{\left(\Delta_i h_{CMLC(P)}\right)^2}{[V_i, V_{i+1}]} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2n}(h_i + h_{i+n} - \overline{w}_P)^2[U_i, U_{i+1}] - \frac{(\Delta_i h + \Delta_{i+n} h)^2}{[V_i, V_{i+1}]} \\
&= \frac{1}{4}\left(2A(P) - 4h_0 A(U)\overline{w}_P + (\overline{w}_P)^2 A(U) + \sum_{i=1}^{2n} h_i h_{i+n}[U_i, U_{i+1}] - \frac{(\Delta_i h)(\Delta_{i+n} h)}{[V_i, V_{i+1}]}\right) \\
&= \frac{1}{4}(2A(P) - 4h_0 A(U)\overline{w}_P + (\overline{w}_P)^2 A(U) + 2A(U)h_0^2 - A(U)(-1)^n(a_n)^2(\lambda_n - 1) \\
&\quad - A(U)\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)) \\
&= \frac{1}{2}\left(h_0^2 A(U) - \frac{A(U)}{2}(a_n)^2(\lambda_n - 1) - \frac{A(U)}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right) - h_0^2 A(U) \\
&\quad + \frac{1}{2}A(U)h_0^2 - \frac{A(U)}{4}(-1)^n(a_n)^2(\lambda_n - 1) - \frac{A(U)}{4}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(-1)^k(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1) \\
&= -\frac{A(U)}{2}\left(\frac{(a_n)^2(\lambda_n - 1)(1 + (-1)^n)}{2} + \sum_{\substack{k=par\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_V(P) &= \sum_{i=1}^{2n}\|\Delta_i P\|_V \\
&= \sum_{i=1}^{2n}\left(h_i[U_i, U_{i+1}] + \nabla_i\left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]}\right)\right)\|V_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{2n} h_i[U_i, U_{i+1}] \\
&= \sum_{i=1}^{2n}\left(h_{0_i} + a_n h_{n_i} + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j h_{k_i}^j\right)[U_i, U_{i+1}] \\
&= h_0\sum_{i=1}^{2n}[U_i, U_{i+1}] + a_n\sum_{i=1}^{2n} h_{n_i}[U_i, U_{i+1}] + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j\sum_{i=1}^{2n} h_{k_i}^j[U_i, U_{i+1}] \\
&= 2h_0 A(U)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{A}}_P &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[P_i, P_{i-1} - P_i] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[P_i, \Delta_i P] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left[h_i U_i + (\Delta_{i-1} h)\frac{V_i}{[V_{i-1}, V_i]}, \left(h_i[U_i, U_{i+1}] + \nabla_i\left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]}\right)\right) V_i\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(h_i)^2[U_i, U_{i+1}] + h_i \nabla_i\left(\frac{\Delta_i h}{[V_i, V_{i+1}]}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(h_i)^2[U_i, U_{i+1}] - \left(\frac{(\Delta_i h)(\Delta_i h)}{[V_i, V_{i+1}]}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(h_i)^2[U_i, U_{i+1}] - \frac{(\Delta_i h)^2}{[V_i, V_{i+1}]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\left(h_{0_i} + a_n h_{n_i} + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j h_{k_i}^j\right)^2 [U_i, U_{i+1}] - \frac{\left(a_n \Delta_i h_n + \sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1} a_k^j \Delta_i h_k^j\right)^2}{[V_i, V_{i+1}]} \\
&= h_0^2 \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}[U_i, U_{i+1}] + \frac{1}{2}(a_n)^2\sum_{i=1}^{2n}(h_{n_i})^2[U_i, U_{i+1}] + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2\sum_{i=1}^{2n}(h_{k_i})^2[U_i, U_{i+1}] \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(a_n)^2\frac{(\Delta_i h_n)^2}{[V_i, V_{i+1}]} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2\sum_{i=1}^{2n}\frac{\left(\Delta_i h_k^j\right)^2}{[V_i, V_{i+1}]} \\
&= h_0^2 A(U) + \frac{1}{2}(a_n)^2 A(U) + \frac{1}{2}A(U)\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2 - \frac{1}{2}(a_n)^2\lambda_n A(U) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2\lambda_k^j A(U) \\
&= h_0^2 A(U) + \frac{A(U)}{2}a_n^2(1-\lambda_n) + \frac{A(U)}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(1-\lambda_k^j).
\end{aligned}
$$

Corolário 9.7. *Todo polígono $P \in C_U$ com $V-$comprimento zero, isto é, $h_0 = 0$ possui $\tilde{\mathrm{A}}_P < 0$. Em particular a proposição (7.27) está demonstrada.*

9.2 Outra Prova - Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado - Discreto

Teorema 9.8. *Seja* $P = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ *polígono em* C_U *no plano* $(\mathbb{R}^2, U)$*, onde* $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$ *é a bola unitária e* $P_{i+1} - P_i$ *é paralelo a* $U_{i+1} - U_i$*. Então*

$$L_V^2(P) = 4A_U\tilde{A}_P - 8A_U\tilde{A}_{CW(P)} - 4A_U\tilde{A}_{CMLC(P)}, \tag{9.8}$$

onde $L_V(P)$ *indica o* $V-$*comprimento com sinal do polígono* P*,* A_U *indica área da bola unitária e* $\tilde{A}(P)$*,* $\tilde{A}_{CW(P)}$ *e* $\tilde{A}_{CMLC(P)}$ *indicam respectivamente as áreas com sinal de* P*,* $CW(P)$ *e* $CMLC(P)$*.*

Demonstração. Da seção anterior temos

$$L_V(P) = 2h_0A_U \tag{9.9}$$

$$\tilde{A}_P = h_0^2A_U - \frac{A_U}{2}(a_n)^2(\lambda_n - 1) - \frac{A_U}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1) \tag{9.10}$$

$$\tilde{A}_{CW(P)} = -\frac{A_U}{4}\left(\frac{(a_n)^2(\lambda_n - 1)(1-(-1)^n)}{2} + \sum_{\substack{k=\text{ímpar}\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right) \tag{9.11}$$

$$\tilde{A}_{CMLC(P)} = -\frac{A_U}{2}\left(\frac{(a_n)^2(\lambda_n - 1)(1+(-1)^n)}{2} + \sum_{\substack{k=par\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right) \tag{9.12}$$

Observe que $\tilde{A}_{CW(P)} \leq 0$ e $\tilde{A}_{CWMS(P)} \leq 0$ pois $\lambda_k^j > 1$(ver [7]). Substituindo.

$$4A_U\tilde{A}_P - 8A_U\tilde{A}_{CW(P)} - 4A_U\tilde{A}_{CMLC(P)} =$$

$$
\begin{aligned}
&4A_U\left(h_0^2 A_U - \frac{A_U}{2}(a_n)^2(\lambda_n - 1) - \frac{A_U}{2}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right)\\
&+8A_U\frac{A_U}{4}\left(\frac{(a_n)^2(\lambda_n-1)(1-(-1)^n)}{2} + \sum_{\substack{k=\acute{\imath}mpar\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right)\\
&+4A_U\frac{A_U}{2}\left(\frac{(a_n)^2(\lambda_n-1)(1+(-1)^n)}{2} + \sum_{\substack{k=par\\ j=1,2}}^{n-1}(a_k^j)^2(\lambda_k^j - 1)\right)\\
&= 4h_0^2\left(A_U\right)^2 = \left(2h_0 A_U\right)^2 = L_V^2(P)
\end{aligned}
$$

■

10
Curvas Rosáceas

Uma $m-$rosácea é uma curva suave fechada com curvatura não-nula e número de rotações igual a m onde m é um inteiro positivo(ver [3], [15]). O conjunto das $m-$rosáceas é representado por $\mathscr{H}_m$, veja definição (2.8).

Observe que pela definição (2.8) as curvas $m-$rosácea são $2m\pi-$periódicas. Por [6], teorema (4.4), utilizando uma norma qualquer do plano podemos calcular os autovalores $\lambda^j_{k,m}$ da equação (5.1) e seus respectivos autovetores $h^j_{k,m}$(ciclóides) para curvas fechadas com m rotações, isto é, $m-$rosácea. No caso euclidiano, por exemplo, a função suporte $h(\theta)$ da $m-$rosácea pode ser escrita utilizando Fourier como

$$h(\theta) = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{k\theta}{m}\right) + b_n \sin\left(\frac{k\theta}{m}\right), \theta \in [0, 2m\pi]. \tag{10.1}$$

10.1
Exemplo

Exemplo 10.1. *Considere $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ como bola unitária, $h(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) + 2$ função suporte de uma $2-$rosácea. Seja $\gamma(\theta)$ uma parametrização de $2-$rosácea. Utilizando a equação*

$$\gamma(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \frac{h'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$

teremos

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) = (&\cos(t/2)\cos(t) + (\sin(t/2)\sin(t))/2 + 2\cos(t), \cos(t/2)\sin(t) \\ &- (\sin(t/2)\cos(t))/2 + 2\sin(t))\end{aligned}$$

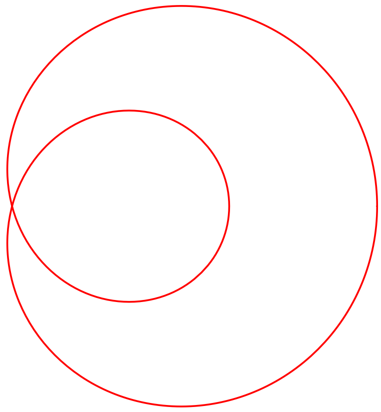

Figura 10.1: 2−rosácea

De acordo com [25] para cada $m-$rosácea podemos calcular $\frac{(m+1)m}{2}$ "ramos"de Cáusticas de Wigner. Nós vamos nos deter a apenas um dentre esses "ramos"de Cáusticas de Wigner, pois a partir dele obtemos a igualdade isoperimétrica. Para obter "ramos"de Cáustica de Wigner basta variar $k = 1, ..., m$ da definição $CW(\theta) = (\gamma(\theta) + \gamma(\theta + k\pi))/2$. Vamos nos deter no caso $k = m$.

10.2 Cáustica de Wigner

Definição 10.2. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}_m$. Chamamos Evoluta de Área ou Cáustica de Wigner (CW) γ o conjunto*

$$CW(\gamma)(\theta) = \{(\gamma(\theta) + \gamma(\theta + m\pi))/2; \theta \in [0, 2m\pi]\}.$$

Como $CW(\gamma)(\theta) = CW(\gamma)(\theta + m\pi)$ temos que $CW(\gamma)(\theta)$ possui período $m\pi$ e dá duas voltas no intervalo $[0, 2m\pi]$. Seus cúspides ocorrem quando $r(\theta) = ((-1)^{m+1})r(\theta + m\pi)$, pois $CW'(\gamma)(\theta) = \left(\frac{r(\theta)+(-1)^m r(\theta+m\pi)}{2}\right) u'(\theta)$. A função suporte de $CW(\gamma)(\theta)$ é

$$h_{CW(\gamma)} = [\gamma(\theta) + \gamma(\theta + m\pi))/2, v(\theta)] = \frac{1}{2}\left(h(\theta) + (-1)^m h(\theta + m\pi)\right). \quad (10.2)$$

Onde $h(\theta)$ é a função suporte de γ.

10.3
Conjunto de Medida de Largura Constante

Definição 10.3. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}_m$. Definimos como Conjunto de Medida de Largura constante de γ, abreviado por $CMLC(\gamma)$,*

$$CMLC(\gamma)(\theta) = \left\{\frac{1}{2}\left(\gamma(\theta) - \gamma(\theta + m\pi) - \frac{\overline{w}_\gamma}{m}u(\theta)\right), \theta \in [0, 2m\pi]\right\}$$

Ver [25] para versão Euclidiana do CMLC.

A função suporte de $CMLC$ é

$$h_{CMLC(\gamma)}(\theta) = \frac{1}{2}\left[\gamma(\theta) - \gamma(\theta + m\pi) - \frac{\overline{w}_\gamma}{m}u(\theta), v(\theta)\right] \tag{10.3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(h(\theta) - (-1)^m h(\theta + m\pi) - \frac{\overline{w}_\gamma}{m}\right). \tag{10.4}$$

10.4
Decomposição da curva $\gamma \in \mathscr{H}_m$ como soma de Caústica de Wigner, CMLC e bola unitária.

Proposição 10.4. $\gamma \in \mathscr{H}_m$. $\gamma(\theta) = CW(\gamma)(\theta) + CMLC(\gamma)(\theta) + \dfrac{\overline{w}_\gamma}{2m}u(\theta)$ *e* $h_\gamma(\theta) = h_{CW(\gamma)}(\theta) + h_{CMLC(\gamma)}(\theta) + \dfrac{\overline{w}_\gamma}{2m}$.

Corolário 10.5. $\gamma \in \mathscr{H}_m$. $\gamma(\theta) = CW(\gamma)(\theta) + CMLC(\gamma)(\theta)$ *e* $h_\gamma(\theta) = h_{CW(\gamma)}(\theta) + h_{CMLC(\gamma)}(\theta) \Leftrightarrow L_v(\gamma) = 0$

É simples ver que os resultados acima são consequência do fato que

$$\gamma(\theta) = \frac{\gamma(\theta) + \gamma(\theta + m\pi)}{2} + \frac{\gamma(\theta) - \gamma(\theta + m\pi)}{2}.$$

Pela proposição (10.5) podemos reescrever γ utilizando bases ortonormais. Com efeito

$$\gamma(\theta) = h_{CW}(\theta)u(\theta) + \frac{(h_{CW})'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta)$$
$$+ h_{CMLC}(\theta)u(\theta) + \frac{(h_{CMLC})'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]}v(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2m}u(\theta)$$

$$m\,par \Rightarrow \gamma(\theta) = \left(h_0 + \sum_{\substack{k\,par\\ j=1,2}}^{\infty} a_k^j h_{k,m}^j(\theta) \right) u(\theta) + \frac{\sum_{k\,par}^{\infty} a_k^j (h_{k,m}^j)'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]} v(\theta)$$
$$+ \left(\sum_{\substack{k\,ímpar\\ j=1,2}}^{\infty} a_k^j h_{k,m}^j(\theta) - h_0 \right) u(\theta) + \frac{\sum_{k\,ímpar}^{\infty} a_k^j (h_{k,m}^j)'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]} v(\theta)$$
$$+ \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} u(\theta).$$

$$m\,ímpar \Rightarrow \gamma(\theta) = \left(\sum_{\substack{k\,impar\\ j=1,2}}^{\infty} a_k^j h_{k,m}^j(\theta) \right) u(\theta) + \frac{\sum_{k\,impar}^{\infty} a_k^j (h_{k,m}^j)'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]} v(\theta)$$
$$+ \left(\sum_{\substack{k\,par\\ j=1,2}}^{\infty} a_k^j h_{k,m}^j(\theta) \right) u(\theta) + \frac{\sum_{k\,par}^{\infty} a_k^j (h_{k,m}^j)'(\theta)}{[v(\theta), v'(\theta)]} v(\theta)$$
$$+ \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} u(\theta).$$

10.5 Cuspides CMLC e Cáustica de Wigner

Teorema 10.6. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}_m$ curva que possui apenas singularidades ordinárias, isto é, do tipo $2-$cúspide. Se m é ímpar então o número de $2-$cúspides de $CMLC(\gamma)$ no intervalo $[0, 2m\pi]$ é múltiplo de quatro. Se m é par e $\overline{w}_\gamma = 0$ então o número de $2-$cúspides de $CMLC(\gamma)$ no intervalo $[0, 2m\pi]$ é $2k$ com k ímpar.*

Demonstração. O número de cúspides de $CMLC$ é igual ao número de zeros de $r_{CMLC(\gamma)}(\theta) = \frac{1}{2}(r(\theta) - (-1)^m r(\theta + m\pi) - \frac{\overline{w}_\gamma}{m})$ no intervalo de 0 até $2m\pi$. Para m ímpar $r_{CMLC(\gamma)}(\theta) = r_{CMLC(\gamma)}(\theta + m\pi)$ então o número de cúspides de $CMLC(\gamma)$ de 0 a $m\pi$ é par, como $r_{CMLC(\gamma)}(\theta)$ é $m\pi-$periódica para m ímpar concluímos que o números de cúspides deve ser múltiplo de quatro. Para m par $r_{CMLC(\gamma)}(\theta) = \frac{1}{2}(r(\theta) - r(\theta + m\pi) - \frac{\overline{w}_\gamma}{m})$ como por hipótese $\overline{w}_\gamma = 0$ implica $r_{CMLC(\gamma)}(\theta + m\pi) = -r_{CMLC(\gamma)}(\theta)$ então o número de zeros deve ser ímpar em $[0, m\pi]$ e em $[m\pi, 2m\pi]$. ∎

Teorema 10.7. *Seja $\gamma \in \mathscr{H}_m$ curva que possui apenas singularidades ordinárias, isto é, do tipo $2-$cúspide. Se m é par então o número de $2-$cúspides de $CW(\gamma)$ no intervalo $[0, 2m\pi]$ é múltiplo de quatro. Se m é ímpar então o número de $2-$cúspides de $CW(\gamma)$ no intervalo $[0, 2m\pi]$ é da forma $2k$ com k ímpar.*

Demonstração. Observe que $CW'(\gamma)(\theta) = \dfrac{r(\theta) + (-1)^m r(\theta + m\pi)}{2} u'(\theta)$. Assim, $r_{CW(\gamma)}(\theta) = \dfrac{r(\theta) + (-1)^m r(\theta + m\pi)}{2}$. Se m é par então $r_{CW(\gamma)}(\theta) = r_{CW(\gamma)}(\theta + m\pi)$ então o número de zeros de $r_{CW(\gamma)}$ de θ até $\theta + m\pi$ é par. Se m é impar então $r_{CW(\gamma)}(\theta) = -r_{CW(\gamma)}(\theta + m\pi)$ então o número de zeros de θ até $\theta + m\pi$ é ímpar. Temos o desejado. ∎

Destacamos que os dois resultados anteriores são válidos para $2-$cúspides, isto é, se $\gamma \in \mathscr{H}_m$ é tal que $\gamma'(\alpha) = 0$ então $r(\alpha) = 0$ e $r'(\alpha) \neq 0$ onde r é o raio de curvatura.

No teorema 10.6 temos a condição $\overline{w}_\gamma = 0$ para m par. Como contra exemplo considere o $CMLC$ de função suporte $h_{CMLC}(\theta) = 5\cos(3\theta/4) - \cos(\theta/4) - 2$ e considere como bola unitária o círculo Euclidiano. Neste contra exemplo $m = 4$, $\overline{w}_\gamma = 16$ e o número de $2-$cúspides é 4.

10.6 Exemplo

Exemplo 10.8. *Considere $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ como bola unitária, $h(\theta) = \cos(\frac{\theta}{2}) + 2$ função suporte de uma $2-$rosácea. Seja $\gamma(\theta)$ uma parametrização de $2-$rosácea. Podemos calcular $CW(\gamma)$ e $CMLC(\gamma)$.*

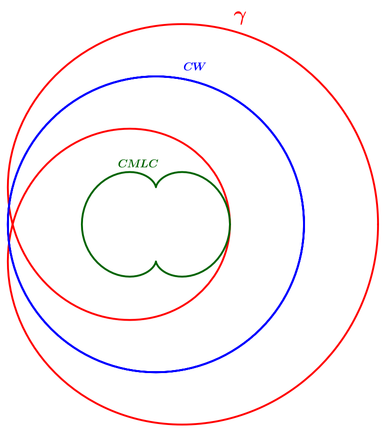

Figura 10.2: 2−rosácea, CW, CMLC

10.7 Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado para $m-$rosáceas

Teorema 10.9 (Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado para curvas $m-$rosáceas)**.** *Seja γ uma $m-$rosáceas em $\mathscr{H}_m$ no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

I) Se m é ímpar então

$$L_v^2(\gamma) = 4mA_U\tilde{\mathrm{A}}_\gamma - 8mA_U\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} - 4mA_U\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}. \tag{10.5}$$

II) Se m é par então

$$L_v^2(\gamma) = -4mA_U\tilde{\mathrm{A}}_\gamma + 8mA_U\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + 4mA_U\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}. \tag{10.6}$$

onde $L_v(\gamma)$ indica o comprimento com sinal da curva γ na norma dual, A_U a área da bola unitária, $\tilde{\mathrm{A}}_\gamma$, $\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)}$ e $\tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}$ indicam respectivamente as áreas com sinal de γ, $CW(\gamma)$ e $CMLC(\gamma)$.

Demonstração.
Pela proposição (10.4) temos

$$\gamma(\theta) = CW(\gamma)(\theta) + CMLC(\gamma)(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2m}u(\theta).$$

Vamos proceder da seguinte maneira: calcular a área de $\gamma(\theta)$ utilizando a proposição (10.4) e assim obter a Igualdade Isoperimétrica. Iremos também utilizar um resultado de integração por partes

$$\int_0^{2m\pi}[f'(t), g(t)]dt = -\int_0^{2m\pi}[f(t), g'(t)]dt,$$

onde f, g são de classe C^1 e que

$$\int_0^{2m\pi}[CMLC(\gamma)(\theta), CW'(\gamma)(\theta)]d\theta = -\frac{L_v^2(\gamma)}{4mA_U}(1 + (-1)^m),$$

e

$$\int_0^{2}[u(\theta), CW'(\theta) + CMLC'(\theta)]d\theta = 0.$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{A}}(\gamma) &= \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [\gamma(\theta), \gamma'(\theta)]\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} \left[CW(\theta) + CMLC(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} u(\theta), CW'(\theta) + CMLC'(\theta) + \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} u'(\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [CW(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [CMLC(\theta), CMLC'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4m^2} [u(\theta), u'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [CW(\theta), CMLC'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} [CW(\theta), u'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} [CMLC(\theta), u'(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} [u(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} [u(\theta), CMLC'(\theta)]\, d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4m^2} m A_U + \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2m\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta + \int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} [u(\theta), CW'(\theta)] d\theta \\
&+ \int_0^{2m\pi} \frac{\overline{w}_\gamma}{2m} [u(\theta), CMLC'(\theta)] d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{\overline{w}_\gamma^2}{4m^2} m A_U + \frac{\overline{w}_\gamma}{2m}\int_0^{2m\pi} [u(\theta), CW'(\theta) + CMLC'(\theta)] d\theta \\
&+ \int_0^{2m\pi} [CMLC(\theta), CW'(\theta)]\, d\theta \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} + \frac{L_v^2(\gamma)}{4mA_U} - \frac{L_v^2(\gamma)}{4mA_U}(1 + (-1)^m) \\
&= 2\tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} + \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)} - (-1)^m \frac{L_v^2(\gamma)}{4mA_U} \\
&\Rightarrow (-1)^{(m+1)} L_v^2(\gamma) = 4mA_U \tilde{\mathrm{A}}_\gamma - 8mA_U \tilde{\mathrm{A}}_{CW(\gamma)} - 4mA_U \tilde{\mathrm{A}}_{CMLC(\gamma)}
\end{aligned}
$$

■

11
Curvas Rosáceas - Discretas

Considere um plano normado com bola unitária $U = \{U_1, ..., U_{2n}\}$. Conforme a definição (6.2) uma $m-$rosácea discreta

$$P = \{P_1, ..., P_{2n}, P_{2n+1}, ..., P_{4n}, ..., P_{2n(m-1)+1}, ..., P_{2mn}\},$$

é polígono fechado com número de rotações igual a m onde m é um inteiro positivo e para cada $j \in \{1, ..., 2mn\}$ existe um $i \in \{1, ..., 2n\}$ tal que $i \equiv jmod(2n)$ e $P_jP_{j+1} \parallel U_iU_{i+1}$. O conjunto das $m-$rosáceas discretas é representado por $C_U - m$.

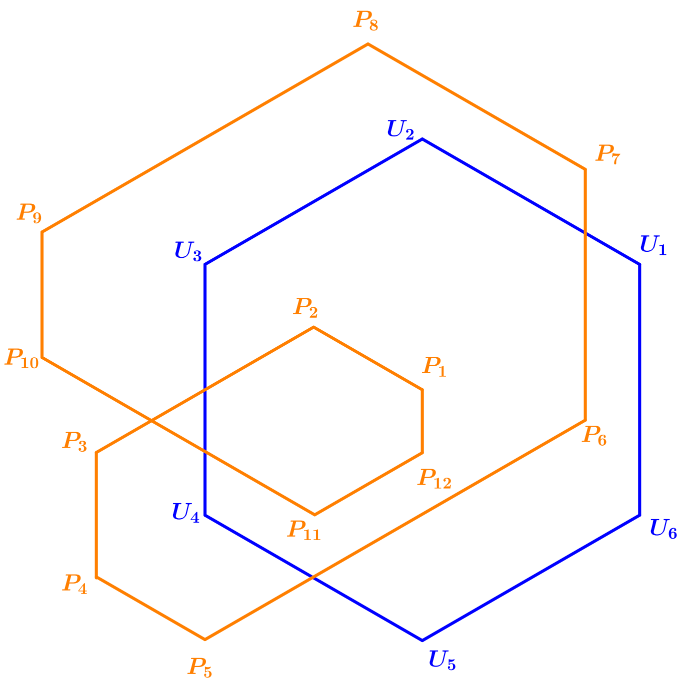

Figura 11.1: Bola unitária U e $2-$rosácea P

Para cada $m-$rosácea discreta podemos calcular $\frac{(m+1)m}{2}$ "ramos"de Cáusticas de Wigner. Nós vamos nos deter a apenas um dentre esses "ramos"de Cáusticas de Wigner, pois a partir dele obtemos a igualdade isoperimétrica. Para obter "ramos"de Cáustica de Wigner basta variar $k = 1, ..., m$ da definição $CW(P_i) = (P_i + P_{i+kn}))/2$. Vamos nos deter no caso $k = m$.

11.1
Cáustica de Wigner

Definição 11.1. *Seja $P \in C_U - m$. Chamamos Evoluta de Área ou Cáustica de Wigner (CW) de P o conjunto*

$$CW(P) = \{(P_i + P_{i+mn})/2; i \in \{1, ..., 2mn\}\}.$$

Como $CW(P_i) = CW(P_{i+mn})$ temos que $CW(P)$ possui mn vértices. A função suporte de $CW(P)$ é

$$h_{CW(P_i)} = [(P_i + P_{i+mn})/2, V_i] = \frac{1}{2}\left(h_i + (-1)^m h_{i+mn}\right). \tag{11.1}$$

Onde h_i é a função suporte de P.

11.2
Conjunto de Medida de Largura Constante

Definição 11.2. *Seja $P \in C_U - m$. Definimos como Conjunto de Medida de Largura constante de P, abreviado por $CMLC(P)$,*

$$CMLC(P) = \left\{\frac{1}{2}\left(P_i - P_{i+mn} - \frac{\overline{w}_P}{m}U_i\right), i \in \{1, ..., 2mn\}\right\}$$

A função suporte de $CMLC$ é

$$\begin{aligned} h_{CMLC(P_i)} &= \frac{1}{2}\left[P_i - P_{i+mn} - \frac{\overline{w}_P}{m}U_i, V_i\right] &(11.2)\\ &= \frac{1}{2}\left(h_i - (-1)^m h_{i+mn} - \frac{\overline{w}_P}{m}\right). &(11.3)\end{aligned}$$

11.3
Decomposição do polígono $P \in C_U - m$ como soma de Caústica de Wigner, CMLC e bola unitária.

Proposição 11.3. *$P \in C_U - m$, $P_i = CW(P_i) + CMLC(P_i) + \frac{\overline{w}_P}{2m}U_i$ e $h_{P_i} = h_{CW(P_i)} + h_{CMLC(P_i)} + \frac{\overline{w}_P}{2m}$.*

Corolário 11.4. $P \in C_U - m$, $P_i = CW(P_i) + CMLC(P_i)$ *e* $h_{P_i} = h_{CW(P_i)} + h_{CMLC(P_i)} \Leftrightarrow L_V(P) = 0$

É simples ver que os resultados acima são consequência do fato que

$$P_i = \frac{P_i + P_{i+mn}}{2} + \frac{P_i - P_{i+mn}}{2}.$$

11.4 Cúspides CMLC e Cáustica de Wigner

Teorema 11.5. *Considere o polígono P em $C_U - m$. Se m é ímpar então o número de cúspides de $CMLC(P_i)$ onde $i \in \{1, ..., 2mn\}$ é múltiplo de quatro. Se m é par e $\overline{w}_P = 0$ então o número de cúspides de $CMLC(P_i)$ onde $i \in \{1, ..., 2mn\}$ é da forma $2k$, k ímpar.*

Demonstração. O número de cúspides de $CMLC(P)$ é igual ao número de trocas de sinal do raio de curvatura em segmentos consecutivos. Sabemos que $r_{CMLC(P_i)} = (r_i - (-1)^m r_{i+mn} - \frac{\overline{w}_P}{m})/2$. Para m ímpar $r_{CMLC(P_i)} = (r_i + r_{i+mn} - \frac{\overline{w}_P}{m})/2$ o que implica $r_{CMLC(P_i)} = r_{CMLC(P_{i+mn})}$. Uma vez que $L_V(CMLC(P)) = 0$ temos

$$r_{CMLC(P_1)}[U_1, U_2] + r_{CMLC(P_2)}[U_2, U_3] + ... + r_{CMLC(P_{mn})}[U_{mn}, U_{mn+1}] = 0$$

e

$$r_{CMLC(P_{mn+1})}[U_{mn+1}, U_{mn+2}] + r_{CMLC(P_{mn+2})}[U_{mn+2}, U_{mn+3}] + ... + r_{CMLC(P_{2mn})}[U_{2mn}, U_{2mn+1}] = 0.$$

Das igualdades anteriores e pelo fato de $[U_i, U_{i+1}] > 0$, $\forall i \in \{1, ..., 2n\}$, concluímos que existe pelo menos um $k \in \{1, ..., mn\}$ tal que $r_{CMLC(P_k)} < 0$ assim o número de trocas de sinal de k até $k+mn$ deve ser par e pelo menos 2. O mesmo vale de $k+mn$ até $k+2mn$. Para m par $r_{CMLC(P_i)} = (r_i - r_{i+mn} - \frac{\overline{w}_P}{m})/2$. Por hipótese $\overline{w}_P = 0$ portanto $r_{CMLC(P_i)} = -r_{CMLC(P_{i+mn})}$ implica que número de trocas de sinal do raio de curvatura em segmentos consecutivos de 1 até $mn + 1$ é ímpar.

■

Teorema 11.6. *Considere o polígono P em $C_U - m$. Se m é par então o número de cúspides de $CW(P_i)$ onde $i \in \{1, ..., 2mn\}$ é múltiplo de 4. Se m*

é ímpar então o número de cúspides de $CW(P_i)$ onde $i \in \{1, ..., 2mn\}$ é da forma $2k$, k ímpar.

Demonstração. Observe que $r_{CW(P_i)} = \dfrac{r_i + (-1)^m r_{i+mn}}{2}$. Se m é par então $r_{CW(P_i)} = r_{CW(P_{i+mn})}$ então o número de trocas de sinal do raio de curvatura em segmentos consecutivos de 1 até $mn+1$ é par. Se m é ímpar então $r_{CW(P_i)} = -r_{CW(P_{i+mn})}$ então o número de trocas de sinal do raio de curvatura em segmentos consecutivos de 1 até $mn+1$ é ímpar.

■

11.5 Exemplo

Exemplo 11.7. *Considere $U = \{U_1, ..., U_6\}$ bola hexagonal regular e $P \in C_U - 2$ uma $2-$rosácea com raio de curvatura $r = (1/2, 1, 1/2, 1/2, 7/4, 1, 1, 3/2, 1/2, 5/4, 1/2, 1/4)$. Ver figura 11.1.*

Exemplo 11.8. *Considere $U = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ como bola unitária quadrada, onde $U_1 = (2, -2)$, $U_2 = (2, 2)$, $U_3 = (-2, 2)$, $U_4 = (-2, -2)$ e polígono P com raio de curvatura $r = (1/4, 1, 1/2, 3/4, 5/4, 1/2, 1, 3/4)$.*

Então $L_V(P) = \sum_{i=1}^{8} r_1[U_i, U_{i+1}] = 48$ e $\overline{w}_P = \frac{48}{16} = 3$, onde $A(U) = 16$. Podemos calcular CW e $CMLC$.

$CW(P_1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = CW(P_5)$, $CW(P_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = CW(P_6)$, $CW(P_3) = (-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}) = CW(P_7)$, $CW(P_4) = (-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}) = CW(P_8)$,

$CMLC(P_1) = (-1, 2)$, $CMLC(P_2) = (-1, -3)$, $CMLC(P_3) = (1, -3)$, $CMLC(P_4) = (1, 1)$, $CMLC(P_5) = (-2, 1)$, $CMLC(P_6) = (-2, 0)$, $CMLC(P_7) = (2, 0)$, $CMLC(P_8) = (2, 2)$.

Assim $\tilde{A}(P) = 15$, $\tilde{A}(CW(P)) = 9$, $\tilde{A}(CMLC(P)) = 15$, $m = 2$. Podemos substituir e verificar o teorema (11.7).

$$
\begin{aligned}
&-4m\tilde{A}(P)A(U) + 8m\tilde{A}(CW(P))A(U) + 4m\tilde{A}(CMLC(P))A(U) = \\
&4mA(U)(-\tilde{A}(P) + 2\tilde{A}(CW(P)) + \tilde{A}(CMLC(P)) = \\
&128(-15 + 18 + 15) = 2304 = 48^2 = L_V^2(P)
\end{aligned}
$$

Ver figura 11.2.

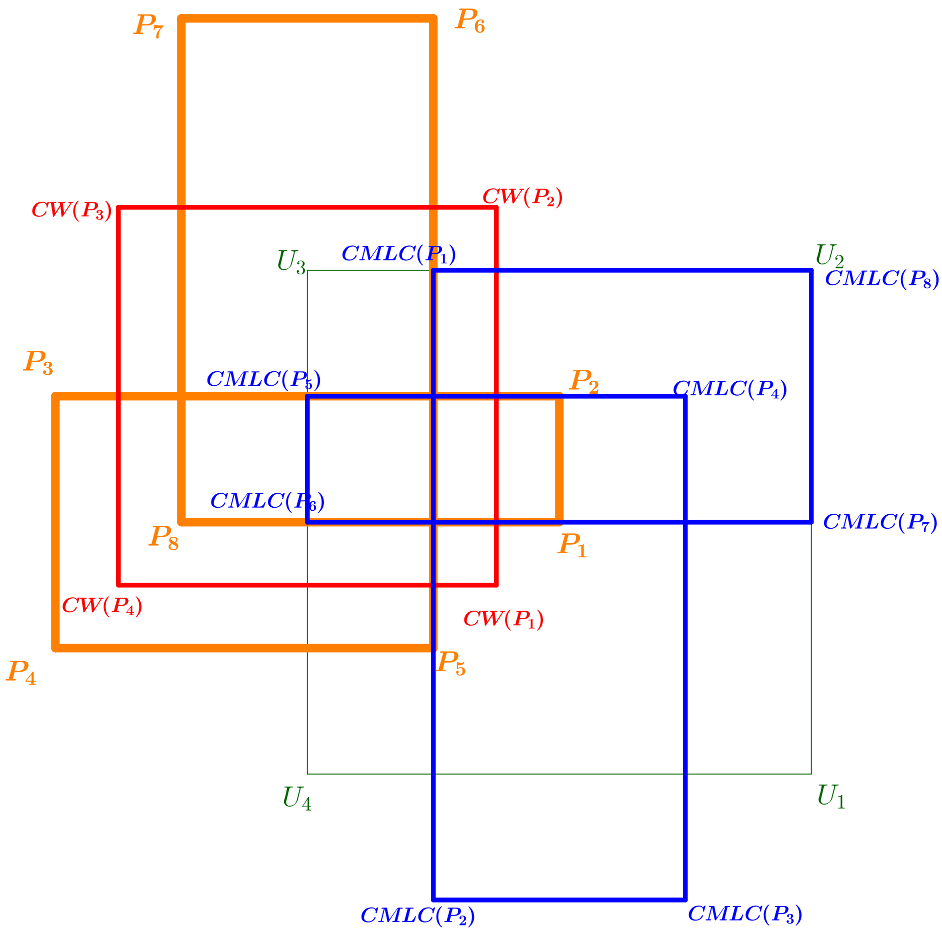

Figura 11.2: Bola U, 2−rosácea P, CW, CMLC

11.6 Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado para $m-$rosáceas discretas

Teorema 11.9 (Igualdade Isoperimétrica em Plano Normado para polígonos $m-$rosáceas discretas)**.** *Seja P uma $m-$rosáceas em $C_U - m$ no plano $(\mathbb{R}^2, U)$, onde U é a bola unitária. Então*

$I)$ Se m é ímpar então

$$L_V^2(P) = 4mA_U\tilde{A}_P - 8mA_U\tilde{A}_{CW(P)} - 4mA_U\tilde{A}_{CMLC(P)}. \qquad (11.4)$$

$II)$ Se m é par então

$$L_V^2(P) = -4mA_U\tilde{A}_P + 8mA_U\tilde{A}_{CW(P)} + 4mA_U\tilde{A}_{CMLC(P)}. \tag{11.5}$$

onde $L_V(P)$ indica o $v-$comprimento com sinal do polígono P, A_U a área da bola unitária, $\tilde{A}_P$, $\tilde{A}_{CW(P)}$ e $\tilde{A}_{CMLC(P)}$ indicam respectivamente as áreas com sinal de P, $CW(P)$ e $CMLC(P)$.

Demonstração.

Pela proposição (11.3) podemos escrever $P_i = CW(P_i) + CMLC(P_i) + \frac{\overline{w}_P}{2m}U_i$. Utilizando o operador diferença temos $\Delta_i P = \Delta_i CW(P) + \Delta_i CMLC(P) + \frac{\overline{w}_P}{2m}\Delta_i U$.

A seguir, temos igualdades importantes para a prova.

$$\sum_{i=1}^{2mn}[CW(P_i), \Delta_i CMLC(P)] = -\sum_{i=1}^{2mn}[\Delta_i CW(P), CMLC(P_i)] \tag{11.6}$$

$$\sum_{i=1}^{2mn}\frac{\overline{w}_P}{2m}[CW(P_i), \Delta_i U] = \sum_{i=1}^{2mn}\frac{\overline{w}_P}{2m}[U_i, \Delta_i CW(P)] \tag{11.7}$$

$$\sum_{i=1}^{2mn}\frac{\overline{w}_P}{2m}[CMLC(P_i), \Delta_i U] = \sum_{i=1}^{2mn}\frac{\overline{w}_P}{2m}[U_i, \Delta_i CMLC(P)] \tag{11.8}$$

$$\sum_{i=1}^{2mn}[CMLC(P_i), \Delta_i CW(P)] = -\frac{L_V^2(P)}{4mA_U}(1+(-1)^m) \tag{11.9}$$

$$\sum_{i=1}^{2mn}[U_i, \Delta_i CW(P) + \Delta_i CMLC(P)] = 0 \tag{11.10}$$

Vamos calcular a área do polígono P utilizando a proposição (11.3) e as igualdades (11.6), (11.7) e (11.8), (11.9), (11.10)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}(P) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} [P_i, \Delta_i P] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} \left[CW(P_i) + CMLC(P_i) + \frac{\overline{w}_P}{2m}U_i, \Delta_i CW(P) + \Delta_i CMLC(P) + \frac{\overline{w}_P}{2m}\Delta_i U\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} [CW(P_i), \Delta_i CW(P)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} [CW(P_i), \Delta_i CMLC(P)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} \frac{\overline{w}_P}{2} [CW(P_i), \Delta_i U] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} [CMLC(P_i), \Delta_i CW(P)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} [CMLC(P_i), \Delta_i CMLC(P)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} \frac{\overline{w}_P}{2m} [CMLC(P_i), \Delta_i U] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} \frac{\overline{w}_P}{2m} [U_i, \Delta_i CW(P)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} \frac{\overline{w}_P}{2m} [U_i, \Delta_i CMLC(P)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2mn} \frac{\overline{w}_P^2}{4m^2} [U_i, \Delta_i U] \\
&\Rightarrow \\
&\tilde{A}(P) = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4m^2} mA(U) + \sum_{i=1}^{2mn} \frac{\overline{w}_P}{2m} [CW(P_i), \Delta_i U] \\
&+ \sum_{i=1}^{2n} \frac{\overline{w}_P}{2m} [CMLC(P_i), \Delta_i U] + \sum_{i=1}^{2mn} [CMLC(P_i), \Delta_i CW(P)] \\
&\Rightarrow \tilde{A}(P) = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{\overline{w}_P^2}{4m^2} mA(U) - \frac{L_V^2(P)}{4mA_U}(1 + (-1)^m) \\
&\Rightarrow \tilde{A}(P) = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} + \frac{L_V^2}{4mA(U)} - \frac{L_V^2(P)}{4mA(U)}(1 + (-1)^m) \\
&\Rightarrow \tilde{A}(P) = 2\tilde{A}_{CW(P)} + \tilde{A}_{CMLC(P)} - (-1)^m \frac{L_V^2(P)}{4mA_U} \\
&\Rightarrow (-1)^{(m+1)} L_V^2(P) = 4mA_U\tilde{A}_P - 8mA_U\tilde{A}_{CW(P)} - 4mA_U\tilde{A}_{CMLC(P)}
\end{aligned}
$$

■

11.7 Trabalhos Futuros

Pensando em trabalhos futuros temos a seguinte pegunta. Podemos definir CW e $CMLC$ em um plano normado geral, ou seja, com a bola unitária convexa mas não necessariamente suave convexa ou poligonal, de forma a obter uma igualdade isoperimétrica? No caso suave, onde utilizamos bolas unitárias suaves, vale a Igualdade isoperimétrica para a classe de curvas "porco espinho".

No caso discreto, onde utilizamos bolas unitárias poligonais, vale a Igualdade Isoperimétrica para a classe de curvas que são polígonos com lados paralelos a bola poligonal. E no caso geral, qual a classe correta? Outro fato interessante a abordar é se teoremas relativos a outros ramos da Cáustica continuam válidos para bolas não euclidianas.

Referências bibliográficas

[1] **Dido**. Wikipédia, 2019.

[2] CHAVEL, I. **Isoperimetric inequalities: differential geometric and analytic perspectives**, volume 145. Cambridge University Press, 2001.

[3] CIEŚLAK, W.; MOZGAWA, W. On rosettes and almost rosettes, **Geometriae Dedicata**, v.24, n.2, p. 221–228, 1987.

[4] CRAIZER, M. Iteration of involutes of constant width curves in the minkowski plane, **Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry**, v.55, n.2, p. 479–496, 2014.

[5] CRAIZER, M.; MARTINI, H. Involutes of polygons of constant width in minkowski planes, **arXiv preprint arXiv:1406.3205**, 2014.

[6] CRAIZER, M.; TEIXEIRA, R. ; BALESTRO, V. Closed cycloids in a normed plane, **Monatshefte für Mathematik**, v.185, n.1, p. 43–60, 2018.

[7] CRAIZER, M.; TEIXEIRA, R. ; BALESTRO, V. Discrete cycloids from convex symmetric polygons, **Discrete & Computational Geometry**, v.60, n.4, p. 859–884, 2018.

[8] FLANDERS, H. A proof of minkowski's inequality for convex curves, **The American Mathematical Monthly**, v.75, n.6, p. 581–593, 1968.

[9] FUKUNAGA, T.; TAKAHASHI, M. Evolutes of fronts in the euclidean plane, **J. Singul**, v.10, p. 92–107, 2014.

[10] GAO, X. A note on the reverse isoperimetric inequality, **Results in Mathematics**, v.59, n.1-2, p. 83–90, 2011.

[11] GIBLIN, P. Affinely invariant symmetry sets, **Geometry and Topology of Caustics (Caustics 06), Banach Center Publications**, v.82, p. 71–84, 2008.

[12] GROEMER, H. **Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics**, volume 61. Cambridge University Press, 1996.

[13] HURWITZ, A. Sur quelques applications géométriques des séries de fourier, **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v.3e série, 19, p. 357–408, 1902.

[14] LAWLOR, G. A new area-maximization proof for the circle, **The Mathematical Intelligencer**, v.20, n.1, p. 29–31, 1998.

[15] MIERNOWSKI, A.; MOZGAWA, W. Isoptics of rosettes and rosettes of constant width, **Note di Matematica**, v.15, n.2, p. 203–213, 1995.

[16] MUSTAFAEV, H. M. Z. On reuleaux triangles in minkowski planes, **Contributions to Algebra and Geometry**, v.48, n.1, p. 225–235, 2007.

[17] PAN, S.; XU, H. Stability of a reverse isoperimetric inequality, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.350, n.1, p. 348–353, 2009.

[18] PETTY, C. On the geometry of the minkowski plane, **Riv. Mat. Univ. Parma**, v.6, p. 269–292, 1955.

[19] SCHNEIDER, R. **Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory**. Number 151. Cambridge university press, 2014.

[20] STEINER, J. Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. premier mémoire., **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v.24, p. 93–152, 1842.

[21] THOMPSON, A. C.; THOMPSON, A. C. **Minkowski geometry**, volume 63. Cambridge University Press, 1996.

[22] ZETTL, A. **Sturm-liouville theory**. Number 121. American Mathematical Soc., 2005.

[23] ZWIERZYŃSKI, M. The constant width measure set, the spherical measure set and isoperimetric equalities for planar ovals, **arXiv preprint arXiv:1605.02930**, 2016.

[24] ZWIERZYŃSKI, M. The improved isoperimetric inequality and the wigner caustic of planar ovals, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.442, n.2, p. 726–739, 2016.

[25] ZWIERZYŃSKI, M. Isoperimetric equalities for rosettes, **arXiv preprint arXiv:1605.08304**, 2016.