3
Modelagem Computacional

3.1
Estrutura Matricial do Método de Elementos Finitos Mistos

Usando as equações discretas, o sistema (2-6) assume a seguinte forma:

Para a equação da velocidade no eixo x:

$$\int_\Omega \left(-\lambda^{-1}\langle \mathbf{u}_h^x, \phi_{i,j}^x\rangle + p_h \frac{\partial \phi_{i,j}^x}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} p_h \langle \phi_{i,j}^x, \eta\rangle ds,$$

$$i = 0, ..., m, \qquad j = 1, ..., n.$$

Para a equação da velocidade no eixo y:

$$\int_\Omega \left(-\lambda^{-1}\langle \mathbf{u}_h^y, \phi_{i,j}^y\rangle + p_h \frac{\partial \phi_{i,j}^y}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} p_h \langle \phi_{i,j}^y, \eta\rangle ds,$$

$$i = 1, ..., m, \qquad j = 0, ..., n.$$

Para a equação da conservação da massa:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_h^x}{\partial x} + \frac{\partial u_h^y}{\partial y}\right)\psi_{i,j} dxdy = 0 \qquad i = 1, ..., m, \qquad j = 1, ..., n$$

As seguintes integrais que aparecem na expressão são fáceis de calcular, sendo normalmente realizado de acordo com a estrutura determinada após a discretização escolhida:

$$\int_\Omega p_h \frac{\partial \phi_{i,j}^x}{\partial x} dxdy, \qquad \int_\Omega p_h \frac{\partial \phi_{i,j}^y}{\partial y} dxdy, \qquad \int_\Omega \frac{\partial u_h^x}{\partial x}\psi_{i,j} dxdy,$$

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h^y}{\partial y}\psi_{i,j} dxdy, \qquad \int_{\partial\Omega} p_h \langle \phi_{i,j}^y, \eta\rangle ds, \qquad \int_{\partial\Omega} p_h \langle \phi_{i,j}^x, \eta\rangle ds.$$

3.1.1
A Matriz A

Pelo teorema do valor médio para integrais [2, pp. 184-185], como λ^{-1} é limitado e integrável em cada um dos elementos de Ω, então sabemos que existem números $T_{i,j}^{I}, T_{i,j}^{II}, T_{i,j}^{III}, T_{i,j}^{IV}, T_{i,j}^{V}$ e $T_{i,j}^{VI}$, todos positivos, tais que (ver [10]):

$$\int_\Omega \lambda^{-1}\phi_{s,t}^{x}\phi_{i,j}^{x}dxdy = \begin{cases} T_{i,j}^{II}/6, & t=j, \quad s=i-1; \\ \left(T_{i,j}^{I}+T_{i+1,j}^{III}\right)/3, & t=j, \quad s=i; \\ T_{i+1,j}^{II}/6, & t=j, \quad s=i+1; \end{cases} \tag{3-1}$$

$$\int_\Omega \lambda^{-1}\phi_{s,t}^{y}\phi_{i,j}^{y}dxdy = \begin{cases} T_{i,j}^{V}/6, & t=j-1, \quad s=i; \\ \left(T_{i,j}^{IV}+T_{i,j+1}^{VI}\right)/3, & t=j, \quad s=i; \\ T_{i,j+1}^{V}/6 & t=j+1, \quad s=i. \end{cases} \tag{3-2}$$

Calculamos estas integrais relacionadas com a matriz A, formada por funções que variam com o espaço $s(x,y)$, com um método de integração dupla, neste caso Quadratura de Gauss (ver [7, pp 218, alg 4.5]).

Adotaremos a seguinte ordenação dos vetores dos coeficientes de variáveis nodais:

$$u = \begin{bmatrix} u^x \\ u^y \end{bmatrix}, \qquad u^x = \begin{bmatrix} u_{0,1}^x \\ \vdots \\ u_{m,1}^x \\ \vdots \\ u_{0,n}^x \\ \vdots \\ u_{m,n}^x \end{bmatrix}, \qquad u^y = \begin{bmatrix} u_{1,0}^y \\ \vdots \\ u_{1,n}^y \\ \vdots \\ u_{m,0}^y \\ \vdots \\ u_{m,n}^y \end{bmatrix}, \qquad p = \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{m,1} \\ \vdots \\ p_{1,n} \\ \vdots \\ p_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema algébrico resultante de (2-6) possui o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} A^x & 0 & B^x \\ 0 & A^y & B^y \\ B^x & B^y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^x \\ u^y \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^x \\ f^y \\ g \end{bmatrix}$$

sendo:

$$A^x = \begin{bmatrix} A_1^x & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^x \end{bmatrix} \in \Re^{(m+1)n \ \times \ (m+1)n} ,$$

onde cada bloco $A_j^x \in \Re^{(m+1) \ \times \ (m+1)}$ possui uma estrutura tridiagonal da forma:

$$A_j^x = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2T_{1,j}^I & T_{1,j}^{II} & & & \\ T_{1,j}^{II} & 2(T_{1,j}^I + T_{2,j}^{III}) & T_{2,j}^{II} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & T_{m,j}^{II} \\ & & & T_{m,j}^{II} & 2T_{m,j}^{III} \end{bmatrix} . \tag{3-3}$$

e similarmente para o eixo y:

$$A^y = \begin{bmatrix} A_1^y & & \\ & \ddots & \\ & & A_m^y \end{bmatrix} \in \Re^{(n+1)m \ \times \ (n+1)m} ,$$

onde cada bloco $A_j^x \in \Re^{(n+1) \ \times \ (n+1)}$ possui uma estrutura tridiagonal da forma:

$$A_j^y = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2T_{i,1}^{IV} & T_{i,1}^{V} & & & \\ T_{i,1}^{V} & 2(T_{i,1}^{VI} + T_{i,2}^{IV}) & T_{i,2}^{V} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & T_{i,n}^{V} \\ & & & T_{i,n}^{V} & 2T_{i,n}^{VI} \end{bmatrix} . \tag{3-4}$$

Definição 3.1 *Chamaremos uma Matriz M de Diagonal Dominante sempre que, para cada uma de suas linhas i, sendo d_i a diagonal e f_i a soma dos valores absolutos dos elementos fora de sua diagonal, obedecer a seguinte propriedade:* $|d_i| > f_i$.

Notemos que, para as funções escolhidas em (2-5) temos que $\forall\ i, j,\ T^I_{i,j} = T^{II}_{i,j} = T^{III}_{i,j} = T^{IV}_{i,j} = T^V_{i,j} = T^{VI}_{i,j} > 0$ e que de (3-3) e (3-4) vemos que a matriz formada por A é simétrica. Então, observando que A é Diagonal Dominante, pelo Teorema de Gershgorin[14, pp. 240] que garante estarem os autovalores λ_i de A dentro do círculo centrado nas diagonais d_i e com raio do tamanho de f_i, temos que $\forall\ i,\ \lambda_i > 0$, isto é, A é simétrica positiva.

3.1.2
A Matriz B

As duas matrizes B^x e B^y possuem a seguinte estrutura:

$$B^x = \begin{bmatrix} B^x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B^x_n \end{bmatrix} \in \Re^{n(m+1)\ \times\ nm},$$

onde

$$B^x_j = (y_j - y_{j-1}) \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \in \Re^{(m+1)\ \times\ m},$$

e

$$B^y = \begin{bmatrix} B^y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B^y_n \end{bmatrix} \in \Re^{m(n+1)\ \times\ nm},$$

onde para cada $B^y_j \in \Re^{(n+1)\ \times\ m}$

$$B_j^y = (x_j - x_{j-1}) \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots \\ & \vdots & \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow linha \;\; j \\ \leftarrow linha \;\; j+1 \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ \\ coluna \;\; i \end{array} .$$