Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Luiz Carahu da Cunha Neto

Matemática Crítica e Significativa: Uma Experiência Com a Geometria no Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA).

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profa. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Luiz Carahu da Cunha Neto

Matemática Crítica e Significativa: Uma Experiência com a Geometria no Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA).

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Profa. Christine Sertã Costa
Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profa. Dirce Uesu Pesco
Departamento de Matemática - UFF

Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 2019

Luiz Carahu da Cunha Neto

Graduou-se em Engenharia Elétrica com ênfase em Eletrônica pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Campus Maracanã, Rio de Janeiro. Possui licenciatura em Matemática e Física para os ensinos fundamental e médio, obtida na Universidade Cândido Mendes. Atualmente exerce o cargo de Professor de Matemática na Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Cunha Neto, Luiz Carahu da

Matemática crítica e significativa : uma experiência com a geometria no Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA) / Luiz Carahu da Cunha Neto ; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2019.

90 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2019.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. PEJA. 3. Matemática crítica. 4. Ensino significativo. 5. Perímetro. 6. Área. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha querida esposa Carmen, cuja paciência e compreensão nessa caminhada foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Aos meus pais, Maria do Socorro e Francisco, pela educação, atenção e carinho.

À minha orientadora Christine Sertã, pelo excelente apoio desde o início até a conclusão deste trabalho.
.
À Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, por patrocinar e por prover este excelente ambiente de trabalho, o qual serviu de laboratório para o desenvolvimento dessa dissertação.

Às minhas diretoras da EM Gonçalves Dias, Fabíola Daniele da Silva (Diretora Geral) e Sandra de Oliveira (Diretora Adjunta), que sempre acreditaram no meu trabalho e me proporcionaram, através do PEJA da referida escola, um ótimo ambiente de trabalho e o contato com um corpo discente espetacular.

À minha filha Giovanna Luiza Conceição da Cunha, pela paciência por conta do tempo de convivência levemente reduzido por conta da dedicação a este trabalho.

A todos os familiares, amigos e colegas de trabalho que de uma forma ou de outra me estimularam e me ajudaram.

Resumo

Cunha Neto, Luiz Carahu da; Costa, Christine Sertã. **Matemática Crítica e Significativa: Uma Experiência Com Geometria no Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA).** Rio de Janeiro, 2019. 90 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho é fruto de reflexões voltadas para o incentivo do ensino crítico e significativo de matemática na educação básica e defende a utilização da tecnologia neste espaço. Em especial são tratados conteúdos relativos ao cálculo de perímetros, áreas e volumes para o público do Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA). O PEJA está vigente na Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro desde 1984 e atende uma parcela considerável da população que, por algum motivo, não pôde concluir o ensino regular na idade escolar prevista. Pretendeu-se com as reflexões apresentadas nos capítulos iniciais, aproximar o cotidiano do aluno ao mundo da matemática, mostrar o quanto aspectos geométricos estão presentes em suas vidas e promover a criticidade através do incentivo de debates e troca de experiências e saberes. A geometria exige um olhar cuidadoso no que diz respeito à compreensão do espaço e das formas de objetos. Buscou-se, portanto, o desenvolvimento de métodos adequados ao público que estimulassem esse olhar. As reflexões desenvolvidas geraram um produto educacional constituído de uma sequência de atividades criadas e aplicadas junto a alunos do PEJA. As atividades e os resultados de suas aplicações estão expostos nos capítulos finais do trabalho. Espera-se que o presente estudo possa colaborar com outros professores interessados em criar caminhos comprometidos com o intuito de promover na educação básica, cada vez mais, uma educação crítica e significativa que incentive a autonomia para todos.

Palavras-chave

PEJA; Matemática Crítica; Ensino Significativo; Perímetro; Área; Volume.

Abstract

Cunha Neto, Luiz Carahu da; Costa, Christine Sertã (Advisor). **Critical and Meaningful Mathematics: An Experience With Geometry in the Youth and Adult Education Program (PEJA).** Rio de Janeiro, 2019. 90 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This study is the result of thoughts and reflections focused on the encouragement of a critical and meaningful teaching of Mathematics on basic education level and advocates the use of technology in classroom. In particular, topics related to perimeter calculations, areas and volumes are covered, to the public of the Young and Adults Education Program. This Program is in force at the Rio de Janeiro`s City Hall since 1984 and meets a considerable portion of the population which, for some reason, could not complete regular education on the predicted age. It was intended, through the thoughts and reflections presented in the first chapters to bring the students daily life closer to the Mathematics World, showing that geometrical aspects are common in their lifes. It was intended too, also, to promote criticality through the encouragement of debates and exchange of experiences and knowledge. Geometry requires a careful look with regard to the space comprehension and the objects form. Therefore, we sought the development of suitable methods that stimulate that look, to the public. The thoughts and reflections developed generated an educational product consisting in a sequence of activities created and applied to PEJA students. The activities and their results are shown in the final chapters of this study. We hope that this study can collaborate with other teachers, interested in creating compromised paths, in the Basic Education, to promote a critical and meaningful education that encourages the autonomy of all.

Keywords

PEJA; Critical Mathematics; Meaningful Teaching; Perimeter; Area; Volume.

Sumário

Lista de figuras

“A teoria sem prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria, se torna ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade"

Paulo Freire

1
Introdução

Desde os tempos de estudante, sempre percebi minha vocação para o magistério. Em sala de aula, inúmeras vezes, tive o prazer de ajudar e procurar ensinar aos meus colegas que tinham mais dificuldade. E sempre, também, aprendi muito com isso. Especialmente em matérias do ramo das “chamadas” exatas, como Matemática e Física, constantemente estive pronto para auxiliar e costumava dizer que seria engenheiro e professor. Atingidos esses dois objetivos (sim, além de professor, também sou engenheiro elétrico com ênfase em eletrônica), percebi que a vocação de ajudar as pessoas lecionando e estabelecer essa troca de saberes e convivência continuou forte dentro de mim e resolvi me dedicar exclusivamente ao magistério. Desde o ano de 2001, na primeira escola onde trabalhei (lá comecei como monitor e, algum tempo depois, me tornei professor de Matemática), já comecei a perceber as dificuldades que os alunos tinham, sob outra ótica: a do professor de sala de aula. E, diante de tantas dificuldades na absorção de conteúdos de Matemática, uma questão me chamou muito a atenção: a peculiar resistência e embaraço que muitos tinham com uma área específica da Matemática: a **Geometria**.

É importante destacar que, durante minha vida profissional como professor de Matemática e até os dias de hoje, procuro sempre observar, comparar e pensar em estratégias para melhorar o meu desempenho e de meus alunos em diferentes áreas dessa ciência. Especificamente pensando na educação dos meus alunos, foco nas áreas mais trabalhadas na educação básica, tais como Álgebra, Geometria, Estatística e Matemática Discreta. Embora entenda que a Matemática é uma só e muitas ao mesmo tempo, busco analisar as especificidades de cada área. Essa reflexão constante, aliada a um olhar mais cuidadoso para a Geometria, tem me levado a uma conclusão: ou o aluno se identifica muito com essa área, consegue organizar seu raciocínio geométrico de forma eficiente e, consequentemente tende a alcançar um bom desempenho, ou, o que ocorre na maioria das vezes, ele tem muita dificuldade em compreender os conceitos de formas e espaços que subsidiam essa área e acaba por transformá-la em algo que considera muito difícil e inatingível; como consequência, o discente opta apenas por tentar tirar nota para "passar". Talvez essa dificuldade seja intensificada pela forma como o ensino da Geometria muitas vezes é tratado na aula de Matemática. Segundo Soares (2009):

> "Em suma, o que podemos perceber é a pouca importância que vem sendo dada ao ensino de Geometria em todos os níveis [...] por muito tempo foi relegada à disciplina de Educação Artística ou foi apresentada no final do programa de Matemática. Essas características levam-nos a concluir que esta importante área do conhecimento, muitas vezes, tem sido negligenciada, tratada sob uma certa forma teórica e com isso tem se tornado árida e sem sentido para boa parte dos alunos e até professores" (Soares, 2009, p. 43)

Embora essa dificuldade esteja presente nos ensinos regulares, fundamental e médio, ela, sem dúvida, se agrava na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Algumas reflexões sobre essa afirmação, encontram-se nas linhas a seguir.

Desde o início da minha vida profissional e até o presente momento tenho trabalhado como docente, com o público do PEJA (Programa de Educação de Jovens e Adultos). Esse programa é voltado para a conclusão do ensino fundamental e é oferecido pela SME-RJ (Secretaria Municipal de Educação da Cidade do Rio de Janeiro) na PCRJ (Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro). Percebo com clareza o quanto a Geometria é abstrata para meus alunos desse segmento, onde a aprendizagem já é naturalmente um pouco mais comprometida, principalmente pelo fato de não estarem na idade escolar prevista e pelo fato de, em sua maioria, terem de conciliar trabalho e estudo em busca de recuperar um tempo escolar perdido. O estudo das formas geométricas, suas propriedades e relações é um grande desafio e, corroborando com o que foi dito inicialmente, esse público costuma ter um desempenho em geometria aquém do obtido em outras áreas da matemática.

Diante disso, este trabalho foi elaborado com o objetivo de propor uma abordagem democrática, lúdica e significativa no que diz respeito a conceitos de Geometria, mediante a criação de atividades destinadas a trabalhar, mais especificamente, o ensino de perímetros, áreas e volumes. Para isso, foram implementadas, dentro dessas atividades, estratégias para tentar minimizar as dificuldades desses alunos e auxiliá-los a desenvolver tanto o olhar quanto o raciocínio geométrico, sem deixar de abordar os conteúdos importantes e necessários do curso.

Esse enfoque tem como base a tentativa de reproduzir experiências da vida cotidiana dos alunos, relacionadas com formas geométricas em geral, procurando trazer significado e criticidade ao estudo, tal como defende Skovsmose (2010):

> "... Na Educação Crítica, é essencial que os problemas se relacionem com situações e conflitos sociais fundamentais, e é importante que os estudantes possam reconhecer os problemas como "seus próprios problemas", de acordo com ambos os critérios subjetivo e objetivo da identificação do problema na Educação Crítica. Problemas não devem pertencer a "realidades de faz de conta" sem nenhuma significação exceto como ilustração da matemática como ciência das situações hipotéticas." (Skovsmose, 2010 p. 24)

Muitos alunos desse segmento de ensino trabalham ou tem contato, por exemplo, com questões relacionadas à construção civil (seja como operários ou em atividades de comércio relacionadas a esse segmento, seja para aplicar conhecimentos em pequenas obras em suas próprias residências). Frente a essa realidade, pode-se fazer importantes aproximações do tema com o cotidiano dos alunos, levando a sala de aula para o mundo real desses discentes, já jovens e adultos. É possível abordar o tema por meio de estratégias diversas: o estudo de diferentes unidades de medida que podem ser utilizadas para a mesma grandeza; diferentes formas planas que podem ter a mesma medida de área; diferentes formatos de sólidos que podem ter o mesmo volume, etc. Esses conceitos, quando trabalhados pelos próprios alunos, com o auxílio do professor, possibilita que os primeiros comecem a fazer as conexões necessárias para o verdadeiro entendimento de questões que fazem parte do seu cotidiano.

O trabalho a seguir, está assim organizado: no capítulo 2, apresentamos um breve histórico sobre o Ensino de Jovens e Adultos no Brasil, desde o descobrimento até os dias atuais, dando uma ênfase especial ao PEJA da PCRJ. Em seguida, no capítulo 3, exploramos as bases da educação matemática do ponto de vista crítico, com foco na aprendizagem significativa. No capítulo 4, enumeramos alguns conceitos básicos relativos ao estudo de perímetros, áreas e volumes, no âmbito da Educação Básica. Na sequência, no capítulo 5, descrevemos e apresentamos as atividades desenvolvidas, seus aspectos mais relevantes e as análises pertinentes às atividades que foram aplicadas. Por fim, no capítulo 6, encontram-se nossas considerações finais.

2

A Educação de Jovens e Adultos

Em função do trabalho aqui apresentado ter como público alvo alunos jovens e adultos, julgamos importante traçar aspectos relevantes sobre a evolução da educação de jovens e adultos no país, apresentando o contexto histórico desse segmento até os dias atuais e tratando também do PEJA, que é o programa de EJA em vigor na Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.

2.1 A história da EJA no Brasil

A trajetória da Educação de Jovens e Adultos no Brasil, segundo Da Silva (2017), tem início marcado ainda no período colonial pela chegada dos jesuítas e a implantação, por parte dos mesmos, dos ensinamentos baseados em preceitos católicos. O objetivo principal não era exatamente educar e, sim, “domesticar” o povo indígena, e o ensino aplicado era limitado pela norma dos colonizadores, atendendo sempre aos interesses da coroa portuguesa (principalmente no que dizia respeito à formação de mão de obra para a lavoura e para atividades extrativistas). Ainda segundo Moura apud Da Silva (2017), esse “período jesuítico” perdurou até a chegada da família real portuguesa ao Brasil (1808), o que provocou mudanças significativas no sistema educacional vigente à época, passando o estado a assumir diretamente a responsabilidade pela educação. Nessa época surgiu a escola pública no Brasil, com ensino de boa qualidade, mas acessível apenas a uma elite selecionada. Mais especificamente com foco na EJA, existem registros de escolas de ensino noturno que atendiam a uma parcela expressiva da população mais humilde, especialmente nas classes de alfabetização, demostrando que a modalidade EJA já possuía uma dimensão importante desde aquela época.

Já no período republicano, somente a partir da década de 1930, o ensino primário no país passou a ser, teoricamente, obrigatório e gratuito, tornando-se um direito de todos. Com isso, começaram a ser implantadas diferentes políticas públicas voltadas para a Educação Básica, principalmente no que diz respeito ao combate ao analfabetismo, porém, com resultados aquém dos esperados (Da Silva, 2017). A Constituição de 1934 possibilitou a criação do PNE (Plano Nacional de Educação) e a EJA ganhou um novo status, passando a ser de responsabilidade do Estado. Porém, os resultados apresentados ainda eram pouco satisfatórios - a taxa de analfabetismo girava em torno de 55% entre os maiores de 18 anos, segundo o censo de 1940 (Rio de Janeiro, 2018). Este fato é creditado ao texto da nova Constituição, imposta pela implantação da ditadura do Estado Novo, que demonstrava que

> "O Estado Novo se desincumbiu da educação pública através de sua legislação máxima, assumindo apenas um papel subsidiário. O ordenamento relativamente progressista alcançado em 34, quando a letra da lei determinou a educação como direito de todos e obrigação dos poderes públicos, foi substituído por um texto que desobrigou o Estado de manter e expandir o ensino público." (GHIRALDELLI, JR., 1994, p. 81 *apud* SOUZA, 2018)

Conforme relatado em Rio de Janeiro (2018), após o fim do Estado Novo (1945) e o retorno da política democrática, o Estado reconhece, motivado pela necessidade de formar mão-de-obra qualificada para a industrialização do país, a necessidade de alfabetizar os adultos (em especial os migrantes das zonas rurais para as zonas urbanas). Com isso, diversas campanhas foram criadas nesse período, com destaque para a Campanha de Educação de Adolescentes e Adultos (CEAA), que previa a alfabetização em apenas 3 meses.

Segundo Da Silva (2017), com o passar dos anos, na década de 1960, houve a implantação do Plano Nacional de Alfabetização (PNA), sob a responsabilidade de Paulo Freire, que foi um marco teórico na Educação de Jovens e Adultos no Brasil. O método de alfabetização desenvolvido por ele (denominado Método Paulo Freire de Alfabetização) foi direcionado especialmente para esse público e tinha como principal característica o desenvolvimento do pensamento crítico do educando sobre seu papel na sociedade em paralelo com o processo de alfabetização. Estabelecia-se, assim, uma educação que era, ao mesmo tempo, libertadora e funcional, politizando o educando e desenvolvendo sua autonomia.

Ainda segundo Da Silva (2017), no ano de 1964, com o início da Ditadura Militar, esse método foi desativado pelo novo governo por considerá-lo subversivo uma vez que o incentivo ao pensamento crítico implantado na EJA pelo método desenvolvido por Paulo Freire não era bem visto pelo novo regime. O método foi então substituído por um novo programa, mais conservador, chamado Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL).

O MOBRAL foi criado em 1967, mas só colocado efetivamente em prática a partir de 1970 através de convênios entre as Secretarias de Educação e Comissões Municipais e contou com grandes incentivos financeiros (em especial da Loteria Esportiva). Suas principais características foram o abandono do pensamento crítico como parte do processo de alfabetização e a restrição do conceito de alfabetização à habilidade de saber ler e escrever, sem se preocupar com a formação do educando como cidadão (Rio de Janeiro, 2018). Almeida (2015) relata que essa metodologia gerou muitas críticas à época, seja por conta dos resultados não satisfatórios obtidos, seja pelo próprio objetivo do programa.

Após 15 anos, em 1985, o MOBRAL chegou ao fim e foi substituído pela Fundação Educar, que guardava muitas semelhanças com seu antecessor, mas estava diretamente subordinada ao MEC e atuava junto às prefeituras. A Fundação durou até 1990.

Ainda conforme Rio de Janeiro (2018), com a Constituição de 1988, a educação passou a ser "direito subjetivo" de todos e o Estado responsável por garantir e escolaridade básica de qualquer cidadão, independentemente de sua idade. Neste momento, houve grande investimento financeiro por parte do governo federal e apoio da sociedade civil no combate ao analfabetismo.

Almeida (2015) afirma que no começo dos anos 90 houve um significativo recuo com relação às conquistas obtidas após a Constituição de 1988, representado pelo fim da Fundação Educar e pela redução de investimentos em programas tidos como de grande importância, como o Programa Nacional de Alfabetização e Cidadania, que durou apenas 1 ano, em função da carência de recursos. O autor narra que a segunda metade dos anos 90 foi marcada por uma política de "enfraquecimento" da responsabilidade do Estado com a EJA, remetendo essa incumbência a entidades privadas e filantrópicas. Dentre tantas perdas, um dos acontecimentos mais marcantes desse período foi a criação do FUNDEF (Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do ensino fundamental e Valorização do Magistério) onde os números relativos ao ensino supletivo foram absorvidos pelos números do ensino fundamental, retirando parte da autonomia desse segmento.

Almeida (2015) afirma que, tirando os 2 primeiros anos, a década de 2000 foi marcada pelo retorno da questão da alfabetização de jovens e adultos como ponto prioritário do governo, bem como a educação profissional. Em especial entre os anos de 2003 e 2006, diversas iniciativas foram desenvolvidas em benefício de jovens e adultos trabalhadores, sendo alguns dos principais programas: Brasil Alfabetizado, Proeja, Exame Nacional Para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCEJA) e o Programa Nacional de Educação na Reforma Agrária. A principal característica desse período foi a proposta de integração da educação profissional com a educação básica, cujo objetivo era a inclusão social através da capacitação para o trabalho ao mesmo tempo em que a escolarização se desenvolvia. Esses aspectos mostraram uma valorização da EJA nesse período, de forma inédita no Brasil, onde alguns programas contemplavam a educação básica e a educação profissional voltada para a classe trabalhadora que, pela primeira vez, andavam juntas, contribuindo para uma melhor formação do cidadão. O resultado desses e outros programas, conforme dados divulgados pelo MEC em 2014 e descritos em Brasil (2012), foi uma redução no índice de analfabetismo no país de 11,5% em 2004 para 8,7% em 2012.

Nos dias atuais, o analfabetismo do Brasil gira em torno de 7%, segundo dados do IBGE de 2017 (BRASIL, 2018). A meta, estabelecida em 2015 de 6,5%, ainda não foi atingida.

2.2 A Educação de Jovens e Adultos na rede pública do sistema municipal de ensino do Rio de Janeiro

Segundo Rio de Janeiro (2018), a Educação de Jovens e Adultos teve início no Sistema Municipal de Ensino do Rio de Janeiro motivado pela necessidade de atender aos jovens das classes populares, egressos do ensino regular, na faixa etária de 14 a 20 anos. Com início no ano de 1984, seu objetivo inicial era promover a educação correspondente ao período da alfabetização até a antiga 4ª. série. A grade curricular, além do núcleo comum da época, também abordava aulas de Técnicas Comerciais, Inglês, Artes Industriais, Artes Plásticas, Educação para o Lar e Educação Musical.

No ano seguinte, esta proposta cedeu lugar ao Projeto de Educação Juvenil (PEJ), o qual visava resolver a questão dos altos índices de analfabetismo detectados na época (em especial os que atingiam os jovens entre 14 e 20 anos).

Este projeto tornou-se parte da proposta do Programa Especial de Educação, implantado inicialmente em 20 Cieps da cidade. Em 1987, devido à grande procura por cursos de escolarização mais altos (inclusive pelos próprios concluintes do PEJ), ocorreu a ampliação do projeto, que passou a operar em 2 blocos: um voltado para a alfabetização e outro voltado para as primeiras séries do ensino fundamental. Em 1988, houve a implantação do ensino regular noturno nas escolas convencionais, que tinha por objetivo atender alunos que não podiam frequentar a escola no horário diurno, mas tinham o interesse e a necessidade de concluir o ensino fundamental.

Até o ano de 1998, "o PEJ ainda não podia emitir qualquer documento de certificação oficial para os alunos, pois não possuía o reconhecimento do Conselho Municipal de Educação, o que só veio a acontecer em 1999" (Rio de Janeiro, 2018, p. 9). Apenas programas sociais podiam oferecer cursos de educação de jovens e adultos. Em 1998, após aprovação pelo Conselho Municipal de Educação de uma proposta de regulamentação do 1º. segmento e de implantação do 2º. segmento do ensino fundamental, feita pela Secretaria Municipal de Educação, foi oficialmente criado o Programa de Educação Juvenil. Tratava-se de uma ação educacional para jovens e adultos a partir de 14 anos, dividido em PEJ 1 (contemplando o 1º. segmento – 1ª a 4ª séries) e PEJ 2 (contemplando o 2º. segmento – 5ª a 8ª séries), sendo o ensino estruturado em blocos de aprendizagem.

A EJA, atualmente, é instituída na Rede Pública do Sistema Municipal de Ensino como PEJA (Programa de Educação de Jovens e Adultos) e passou a oferecer, a partir de 2003, além do tradicional curso noturno, a opção diurna nos turnos manhã e tarde, ampliando seu público-alvo e mostrando sua relevância na Secretaria de Educação. A partir de 2004, ocorreu um novo avanço no EJA da cidade do Rio de Janeiro: a implantação do Centro de Referência de Educação de Jovens e Adultos (CREJA), localizado no centro da cidade e cujo objetivo é atender aos trabalhadores locais cuja ocupação principal é o comércio e a prestação de serviços.

2.2.1 Estrutura do PEJA

Segundo Rio de Janeiro (2013), o PEJA vem sendo estruturado desde 2013 até os dia atuais da seguinte maneira:

. EJA I:

Essa etapa refere-se aos anos iniciais do ensino fundamental e é trabalhada, em média, por dois anos letivos. Possui 400 horas de carga horária anual, distribuídas em dois blocos:

Bloco I - o aluno vivencia o processo inicial de alfabetização, compreendido como aquisição da base alfabética da escrita, numa visão de leitura que considera a relação texto-contexto. Neste bloco, considerando que os alunos ainda se encontram em fase de aquisição do código escrito, necessitando da mediação presencial de um professor, a abordagem curricular é realizada, exclusivamente, por intermédio de interações diretas professor-aluno;

Bloco II - amplia e aprofunda a relação texto-contexto, a partir da abordagem interdisciplinar das diferentes áreas do conhecimento, sempre realizada, exclusivamente, por intermédio de interações diretas professor-aluno.

. EJA II:

Essa etapa refere-se aos anos finais do ensino fundamental e é estruturada, também, em dois blocos de aprendizagem, com duração de 801 horas anuais. Cada bloco incorpora três unidades de progressão, compostas por cinco componentes curriculares: Língua Portuguesa, Matemática, História e Geografia, Ciências, Linguagens Artísticas (especificamente no Bloco I) ou Língua Estrangeira (especificamente no Bloco II). Cada unidade é organizada em cerca de 270 horas trimestrais, sendo que 134 horas são de atividades curriculares de interatividade direta professor-aluno, realizadas na sala de aula, e 133 horas de atividades curriculares de interatividade indireta, realizadas fora da sala de aula. O quadro abaixo dá maior visibilidade à dinâmica de funcionamento. Na EJA II, as atividades presenciais de interação direta professor-aluno, são realizadas em salas ambiente. Cada componente curricular é trabalhado em uma sala ambiente. Nesses espaços são ministradas as aulas presenciais, com duração de duas horas do respectivo componente curricular em cada dia. Assim, ao término da semana, o aluno terá participado das aulas de todas as disciplinas, em cada uma das salas ambiente, em um dos 6 horários oferecidos.

EJA II					
Bloco 1 (801 h – 9 meses)					
Componentes Curriculares: 1 – Língua Portuguesa; 2 – Matemática; 3 – História e Geografia; 4 – Ciências; 5 – Linguagens Artísticas					
Unidades de Progressão (3)					
1 (267 h – 3 meses)		2 (267 h – 3 meses)		3 (267 h – 3 meses)	
interatividade direta - professor/ aluno - sala de aula 134 h	interatividade indireta - fora da sala de aula 133 h	interatividade direta - professor/ aluno - sala de aula 134 h	interatividade indireta - fora da sala de aula 133 h	interatividade direta - professor/ aluno - sala de aula 134 h	interatividade indireta - fora da sala de aula 133 h
Bloco 2 (801 h – 9 meses)					
Componentes Curriculares: 1 – Língua Portuguesa; 2 – Matemática; 3 – História e Geografia; 4 – Ciências; 5 – Língua Estrangeira					
Unidades de Progressão (3)					
1 (267 h – 3 meses)		2 (267 h – 3 meses)		3 (267 h – 3 meses)	
interatividade direta - professor/ aluno - sala de aula 134 h	interatividade indireta - fora da sala de aula 133 h	interatividade direta - professor/ aluno - sala de aula 134 h	interatividade indireta - fora da sala de aula 133 h	interatividade direta - professor/ aluno - sala de aula 134 h	interatividade indireta - fora da sala de aula 133 h

Figura 1: Subdivisão dos blocos do PEJA

Fonte: Diário Oficial da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro. Data: 28/02/2013.

Outras características da estrutura do PEJA são:

- As turmas têm no máximo 25 alunos e a unidade escolar um mínimo de 100 alunos.
- Os professores possuem horários definidos de *centros de estudos* (horário destinado ao planejamento pedagógico), que ocorrem semanalmente e sempre às sextas-feiras no horário correspondente ao horário de aula (exceto para os professores das disciplinas de Linguagens Artísticas e Língua Estrangeira, que ocorrem quinzenalmente e sempre às quintas-feiras).
- A subdivisão dos blocos é dada em UP´s (Unidades de Progressão), conforme a figura 1, os quais são trimestrais. Cada aluno é progredido à UP seguinte de acordo com seu aproveitamento. Sendo aprovado nas 3 primeiras UP´s do bloco 1, ele passa para o bloco 2. Sendo aprovado nas 3UP´s restantes do bloco 2, o aluno conclui o ensino fundamental.
- As avaliações no PEJA são diárias e não exclusivamente na forma de avaliação escrita e também levam em consideração o aproveitamento participativo do aluno ao longo do curso.

2.2.2 Perfil atual dos alunos do PEJA

Atualmente, uma das principais características do PEJA é a heterogeneidade. Antes voltado quase em sua totalidade para trabalhadores acima dos 20 anos de idade, percebe-se uma redução na média de idade de ingresso de seus alunos, começando a receber muitos alunos com idade por volta dos 17 anos em diante e, em alguns casos, mediante autorização dos pais, declarada à Coordenadoria Regional de Educação, alguns alunos conseguem ingressar até mesmo com 15 anos. Esses alunos são oriundos do ensino regular onde tiveram aproveitamento insuficiente e, por isso, entraram na faixa mínima para poderem frequentar o programa (embora os alunos de mais idade ainda representem uma porcentagem considerável do público do PEJA).

Assim, seja pelo aproveitamento insuficiente no período diurno dos alunos mais jovens, seja pelo longo período sem frequentar a escola por parte dos alunos mais velhos, percebe-se uma natural e até mesmo esperada maior dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos do PEJA. Isso demanda um tipo de trabalho bem específico para esse público, para o qual a questão afetiva, a compreensão dos diferentes ritmos de aprendizagem de cada um e a escolha de um planejamento pedagógico que possa atender a essa diversidade fazem toda a diferença.

Outro ponto importante que merece atenção é a questão da evasão. O primeiro trimestre geralmente começa com as turmas bem frequentadas (no que diz respeito ao quantitativo) mas, a partir da metade do segundo trimestre, percebe-se uma tendência ao esvaziamento por abandono, muitas vezes motivado pelo cansaço, consequente da conciliação do trabalho com a rotina escolar. Sendo assim, nota-se que essa questão da evasão é um ponto importante a ser considerado no planejamento anual do PEJA.

Em face de tudo o que foi exposto, fica evidente que esse segmento da educação precisa de um olhar especial sobre os alunos que os auxilie a tornarem-se cidadãos que possam ter mais voz na sociedade. Este é um dos propósitos do presente trabalho.

3
Fundamentação teórica

Esse capítulo apresenta uma reflexão sobre o ensino da Matemática nos dias atuais, sua importância numa sociedade democrática e tecnológica e como a aprendizagem da mesma pode acontecer de maneira mais significativa com base nos autores que subsidiaram o presente estudo em cada um desses temas.

3.1 O Ensino tradicional da matemática no mundo contemporâneo

A disciplina Matemática, independentemente do nível escolar em que é trabalhada, quando abordada no modo chamado tradicional, possui uma rotina quase que compulsória: o professor, referência da sala de aula no que diz respeito ao conhecimento sobre a disciplina, usualmente apresenta para seus alunos conceitos prontos, incontestáveis (afinal, a Matemática é uma ciência "exata"); os alunos então precisam absorver esses ensinamentos e utilizá-los para resolver problemas por vezes repetitivos (que podem ou não fazer sentido). Na maioria das vezes esses problemas possuem "solução única" (afinal, assim é a Matemática), fazendo dessa disciplina algo meio "ditatorial" quanto aos conteúdos trabalhados e as formas de abordá-los. Dessa maneira, não se possibilita que o aluno participe da construção daquele conhecimento em sala de aula e, em casos mais ortodoxos, nem mesmo é proposto um debate saudável a respeito de conceitos apresentados.

> "É preciso, sobretudo, e aí já vai um destes saberes indispensáveis, que o formando, desde o princípio mesmo de sua experiência formadora, assumindo-se como sujeito também da produção do saber, se convença definitivamente de que ensinar não é *transferir conhecimento*, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção. " (Freire, 2019, p. 24)

Esse pensamento pode ser observado na interpretação do ensino tradicional por Rogers (1994) apud Skovsmose:

> "... No modo tradicional (...), 'o professor é o detentor do conhecimento e do poder' e 'regras ditadas por uma autoridade são a política aceita para a sala de aula'. Espera-se que os alunos sejam captadores do conhecimento, e as avaliações sejam usadas para medir o grau de retenção que eles conseguem atingir." (Roger apud Skovsmose, 2010, p. 15)

Em geral, dentre as consequências dessa forma de ensinar Matemática, pode-se destacar:

- A alta rejeição à disciplina por parte de um grande número de alunos;
- O baixo rendimento nas avaliações oficiais da disciplina e
- A falsa impressão de que a aprendizagem de Matemática não é para todos.

> "Percebe-se que esse tipo de aula tem pouca participação do aluno, que é apenas um sujeito receptor de informações descontextualizadas. Esse tipo de ensino parece não ter bons resultados, haja vista as altas taxas de reprovação em Matemática no ensino básico e até mesmo no ensino superior, além da popular rejeição à Matemática por parte do alunado, o que tornam um desafio para a Educação Matemática (EM) promover estudos a favor de um ensino matemático mais bem sucedido." (Torres, 2019, p. 1)

Diante disso, é preciso refletir sobre novas alternativas para o ensino da Matemática de forma que os problemas identificados anteriormente possam ser minimizados. Segundo Ole Skovsmose (2013), uma saída para esse problema, está na implantação da Educação Matemática Crítica (EMC), cujos principais fundamentos são o diálogo e a construção democrática do conhecimento.

> "... estamos de acordo com a proposição de que a relação entre Educação Matemática e democracia é crítica. E se a Educação Matemática deve ser organizada para apoiar ideais democráticos, então se torna essencial rever e refazer todos os aspectos da Educação Matemática." (Skovsmose, 2010, p. 142)

Esses fundamentos, aliados à aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1980), podem dar excelentes resultados.

> "A aprendizagem significativa envolve a aquisição de novos significados e os novos significados, por sua vez, são produtos da aprendizagem significativa. Ou seja, a emergência de novos significados no aluno reflete o complemento de um processo de aprendizagem significativa" (Ausubel, 1980, p. 34)

Essa filosofia educacional, que visa proporcionar uma aprendizagem da Matemática de forma libertadora e além disso, mais atraente e eficiente, culmina com um aproveitamento melhor do aluno em relação à disciplina. Busca-se assim promover a emancipação do discente como cidadão no exercício da democracia bem como sua politização.

Vejamos, inicialmente, alguns pontos que podem ser revistos no que diz respeito à construção de uma EMC no ambiente escolar.

3.2 A Interferência da Ideologia da Certeza na Educação Matemática Crítica

O senso comum afirma, especialmente na educação básica, que a Matemática é uma "ciência exata" e, por isso, não é passível de contestações. Afinal, se algo está "matematicamente provado", a solução apresentada ganha o "respeito" dos expectadores, ansiosos por uma solução e contribui cada vez mais para o incremento da visão absolutista da Matemática vista como uma ciência que não admite interferências. Esse fenômeno, segundo Skovsmose (2013), é um exemplo do que é chamado de ideologia da certeza.

Como já foi exposto anteriormente, no ensino da Matemática na escola, ainda encontramos aulas conduzidas a partir da transmissão, por parte do professor, de determinados conteúdos seguidos da proposição de problemas que devem ser resolvidos pelos alunos. O professor então avalia as soluções construídas pelos discentes, oferecendo duas respostas possíveis: "está correto" ou "está errado". Ou seja, o foco da correção, não visa a construção do conhecimento, a valorização de diferentes estratégias de soluções e nem um debate sobre as linhas de raciocínio utilizadas, mas apenas o resultado final do problema proposto. Entretanto, essa visão absolutista da Matemática tem, cada vez mais, cedido espaço para propostas mais críticas que minimizam a ideologia da certeza e procuram valorizar o pensamento de estratégias múltiplas de soluções, proposto por Skovsmose (2013).

> "Os alunos deveriam, portanto, ser persuadidos contra ideias como: um argumento matemático é o fim da história; um argumento matemático é superior por sua própria natureza; 'os números dizem isto e isto'. Acreditamos que a matemática poderia se tornar simplesmente uma maneira possível de olhar o fenômeno e não *o* caminho." (Skovsmose, 2013, p. 111)

Essa reprodução da ideia da verdade absoluta que a Matemática pode proporcionar frequentemente leva os educandos a serem repetidores de padrões, técnicas e algoritmos que nem sempre fazem sentido para eles. Quando nos deparamos com um exercício que, na forma imperativa, diz "Arme e efetue:", muitas vezes essa tarefa (cuja resposta única já existe previamente) é uma tarefa completamente sem sentido para muitos educandos e, o pior, fechada para interferências externas. Os mesmos sentem-se doutrinados para resolver aquele problema com técnicas pré-estabelecidas, sem participar da construção de sua solução. E isso já mostra que o ensino da Matemática, nesse caso, não está sendo crítico e nem libertador, indo contra a ideia da Educação Matemática Crítica, especialmente quando se trata de alunos jovens ou adultos.

A ideologia da certeza, dessa forma, acaba sendo sutilmente desenvolvida no pensamento dos alunos, uma vez que grande parte dos problemas que eles "enfrentam" em sala de aula são resolvidos de forma perfeita, com o auxílio da Matemática, reforçando inclusive a visão absolutista da mesma. Mas a grande questão é: será que fora da escola esses pensamentos se aplicam tão bem quanto se aplicam em sala de aula? Não teria valido a pena discutir um pouco mais a aplicabilidade daquele problema considerando outras variáveis? Não teria valido a pena ter discutido com o professor aquela solução "não tão correta" encontrada pelo aluno e entender melhor porque aquela solução está, supostamente, "categorizada como errada"?

Em outras palavras, não teria valido a pena desafiar um pouco a ideologia da certeza?

Vale citar que a responsabilidade da instauração da ideologia da certeza não pode ser creditada diretamente ao professor, que muitas vezes está reproduzindo no seu ofício a sua própria formação como aluno e o senso comum da sociedade.

> "Uma questão pode surgir: como a comunicação entre professor e alunos e as correções feitas pelo professor são duas fontes da ideologia da certeza, poderíamos culpar os professores pelo surgimento dessa ideologia? Nossa resposta é não. Os professores são parte de uma cadeia que contribui para a difusão da ideologia: ela também inclui pais, negócios, agências de fomento, professores universitários, etc. Além disso, os próprios professores frequentemente são formados por matemáticos que não estão, em geral, interessados em questões educacionais ou filosóficas sobre a incerteza da matemática" (Skovsmose, 2013, p. 137)

Dessa forma, o desafio à ideologia da certeza acaba sendo um desafio tanto para o educando quanto para o professor comprometido com uma Educação Crítica (EC) e, em especial, com uma EMC.

3.3 A importância do diálogo na criação de um ambiente democrático

Segundo Ole Skovsmose (2010), o diálogo é um dos principais pontos de partida para uma Educação Crítica e democrática, uma vez que somente através do diálogo, faz sentido falar em democracia. Para o autor, a democracia possui a seguinte definição:

> "A democracia está relacionada, pelo menos, com os 4 aspectos a seguir:
> 1) Procedimentos formais para eleger um governo e para o governo governar;
> 2) Uma distribuição justa de serviços sociais e bens na sociedade, tais como saúde, educação, hospitais, etc. Consequentemente, uma parte substancial da análise teórica das ideias democráticas diz respeito aos tipos de bens e facilidades que devem ser distribuídos de maneira justa. E qual é a interpretação de "justo"?
> 3) Oportunidades iguais, direitos e deveres para todos os membros da sociedade. Não podem existir diferenças de oportunidade baseadas em diferenças de posição social, sexo ou raça. De acordo com a lei, todos devem ser tratados de igual forma e, similarmente, todos devem obedecer à lei. Mas o que significa "igualdade de oportunidades"? Segundo a tradição liberal e idealista, significa a possibilidade não restrita de cada um tentar fazer o que quiser (legalmente); já a tradição materialista tem ressaltado que não é suficiente diminuir o número de restrições, a sociedade deve, na verdade, prover as condições para que todos possam perseguir seus interesses. Dessa forma, toda discussão sobre democracia vem a ser uma discussão sobre liberdade.
> 4) A possibilidade e a habilidade dos cidadãos de participar na discussão e na avaliação das condições e consequências do ato de governar que é levado a efeito: isso pressupõe uma 'vida democrática´". (Skovsmose, 2013, p. 69)

Como a democracia visa à igualdade dentro da sociedade, a sala de aula deve ser um dos primeiros ambientes sociais onde isso deve ser experimentado, minimizando as distâncias entre professor e educando e entre educandos. Isso possibilita que todos participem ativamente do processo de aprendizagem, refletindo sobre os problemas propostos e não somente focados na missão de encontrar a "solução final e única" de cada um deles.

A partir do momento em que o aluno se vê capaz de participar da investigação da solução de um problema, proposto através de diálogos e debates aluno-professor e aluno-aluno, ele se vê como um participante ativo da sociedade da qual faz parte. Da mesma forma, cresce o interesse do discente em entender a questão proposta e participar da construção de estratégias de solução. Além disso, essa dinâmica favorece a redução de patamares entre alunos que tem mais facilidade com a Matemática e os que não têm, provocando a bem-vinda troca de ideias entre alunos e professores. Destarte, desenvolve-se efetivamente o que chamamos de aprendizagem significativa. Como consequência desse exercício, o aluno vai se tornando capaz de reproduzir essa conduta participativa dentro de outros espaços da qual faça parte e exercer sua cidadania de maneira crítica e democrática, sem precisar aceitar de maneira compulsória verdades prontas e incontestáveis.

Um ponto importante, ainda destacado por Ole Skovsmose (2013), é a questão da sociedade tecnológica. Vivemos numa sociedade cada vez mais dependente do desenvolvimento da tecnologia e esta tem fortes ligações com o raciocínio matemático. Isso coloca a Matemática numa posição de “destaque”, uma vez que a mesma é uma das principais responsáveis pela evolução da tecnologia, da qual o mundo é cada vez mais dependente.

Segundo Skovsmose, é preciso tomar cuidado com essa questão que pode gerar um ambiente não democrático em sala de aula, uma vez que os alunos que possuem maior habilidade com a Matemática tendem (inicialmente neste espaço e, posteriormente, na visão da sociedade) a ser mais valorizados do que os outros, principalmente no que diz respeito ao mercado de trabalho. É preciso considerar o seguinte: aqueles que possuem maior facilidade com os cálculos e os algoritmos tem que tomar cuidado para que não sejam doutrinados a apenas saber resolver sistematicamente esses problemas com as técnicas apresentadas pelo professor, de maneira robotizada, sem se preocupar com os efeitos dessas aplicações na sociedade. Isso pode gerar uma condição de obediência cega necessária para o funcionamento de tantos postos de trabalho existentes. Da mesma forma, aqueles que não possuem níveis tão elevados de habilidade matemática não devem tomar apenas o papel de coadjuvantes. É preciso valorizar o diálogo entre todos os personagens para que possam posicionar-se diante dos problemas apresentados e verificar se somente aqueles recursos matemáticos são suficientes para resolver de forma satisfatória o problema proposto ou se existem outras variáveis que podem ser consideradas. Além disso, o diálogo estende esse domínio do conhecimento matemático (ou parte dele) para todos os envolvidos, ajudando assim a formar seres humanos aptos a gozar de sua cidadania plena nessa sociedade tecnologicamente dependente. Ou seja, mais uma vez, é valorizada a questão reflexiva dos conteúdos na EMC que, dentro de uma sociedade tecnológica, foca nas funções da modelagem da matemática na sociedade e não somente na aplicação.

3.4 A aprendizagem significativa

Uma boa definição do que seria a aprendizagem significativa está resumida nas palavras de Ausubel (1980):

> "A essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição." (Ausubel, 1980, p. 34)

Assim, a aprendizagem significativa defende que, ao se apresentar um determinado conteúdo para o educando, o mesmo será melhor absorvido se este conteúdo estiver intimamente ligado à sua estrutura cognitiva e, principalmente, se tiver uma relação direta com sua vivência ou com algum assunto de seu interesse. Caso isso não ocorra, o educando, em sua necessidade de absorver o conteúdo, acaba por desenvolver uma aprendizagem automática, focada na memorização e na absorção apenas dos termos chave, inibindo uma absorção mais completa (e ideal) do conteúdo proposto. Isso nos leva a seguinte conclusão quanto ao que, de fato, influencia no bom resultado de um processo de aprendizagem: a natureza do assunto a ser aprendido e a estrutura cognitiva do aluno. São dois fatores que devem estar em harmonia para que a aprendizagem significativa ocorra de modo satisfatório.

O assunto a ser aprendido não deve ser algo totalmente arbitrário e aleatório. Este deve estar intimamente relacionado com ideias relevantes e pertencentes ao domínio da capacidade intelectual do educando, tornando-se assim um assunto potencialmente significativo. Por exemplo: de nada adianta um professor tratar a importância da economia da energia elétrica em kwh para o desenvolvimento do país numa escola de uma cidade onde não existe a luz elétrica. Muito mais significativo para esse aluno seria aprender de que forma seria possível trazer a luz elétrica para sua cidade e todo o potencial de desenvolvimento que a chegada dessa energia elétrica pode proporcionar para essa sua comunidade e como ela pode melhorar sua qualidade de vida. Se esse cuidado não for tomado, a aprendizagem desse aluno torna-se meramente automática e ele só fará a absorção dos termos chave e dos símbolos trabalhados nessa aula, uma vez que esse conteúdo não terá relevância suficiente para ser aprendido de maneira significativa. Além disso, essas pequenas informações são retidas por um tempo limitado, uma vez que foram apenas memorizadas para um objetivo momentâneo e, como não tiveram aspecto significativo para o educando, logo serão esquecidas.

Ainda segundo Ausubel (1980), podem ocorrer situações nas quais a aprendizagem significativa está relacionada com a estrutura do assunto a ser tratado e não com os componentes que formam sua estrutura. Por exemplo: um aluno, numa aula de geometria, pode perfeitamente saber o que é um triângulo retângulo e que os nomes de seus lados são hipotenusa e catetos e todas essas informações serem significativas do ponto de vista representacional (o educando reconhece esses símbolos e formas). Mas, no momento de utilizar esses conceitos para compreender significativamente um novo assunto (como, por exemplo o Teorema de Pitágoras), isso pode não ser potencialmente significativo do ponto de vista proposicional (quando utiliza a reunião desses símbolos conhecidos pelo educando para formar uma estrutura significativa) para esse mesmo educando. O professor interessado em aplicar uma aprendizagem significativa proposicional para com o educando também deve estar atento a essa possibilidade de dificuldade.

Ainda segundo Ausubel (1980), o processo de aprendizagem significativa é o processo mais importante a ser aplicado na aprendizagem escolar, mostrando-se extremamente eficaz no que diz respeito à assimilação dos conteúdos. Uma vez que os conteúdos trabalhados com o educando na vida escolar sempre atendem à sua estrutura cognitiva, o mesmo desenvolve a capacidade de relacionar os significados desses conteúdos (que não foram simplesmente memorizados) a outras situações similares que possam surgir em sua vida (escolar ou cotidiana) de maneira independente, uma vez que os significados daquele conteúdo passam a ser facilmente identificáveis pelo discente.

3.4.1 Os cenários de investigação e sua importância na aprendizagem significativa

Uma boa colocação do que seria um Cenário de Investigação, segundo Skovsmose (2014) seria:

> “Um cenário para investigação é um terreno sobre o qual as atividades de ensino-aprendizagem acontecem. Ao contrário da bateria de exercícios tão característica do ensino tradicional de matemática, que se apresenta como uma estrada segura e previsível sobre o terreno, as trilhas dos cenários para investigação não são tão bem-demarcadas. Há diversos modos de explorar o terreno e suas trilhas.” (Skovsmose, 2014, p. 45)

Ao abordar um determinado tema, o educador pode criar um cenário que estimule nos educandos o senso investigativo e reflexivo sobre os problemas propostos e isso deve acontecer de maneira espontânea, uma vez que o “investigar” e o “explorar” são atos que não acontecem de maneira forçada. Pelo contrário: surgem da intencionalidade (e não da imposição) do educando de fazer parte do processo.

Mas o que se deve levar em consideração, no momento de buscar um cenário de investigação, para que se consiga desenvolver essa intencionalidade no educando? Segundo Skovsmose (2014), nesse momento, devem ser consideradas as complexas relações existentes entre o *background* e o *foreground* dos educandos. Entende-se por *background* todas as experiências que o educando traz em sua bagagem (história de vida).

> “... a fim de estabelecer uma aprendizagem significativa, é preciso estabelecer relações entre o conteúdo educacional e os *backgrounds* dos alunos. Essa é a teoria do sentido pelo *background*, que tem tido respaldo nos estudos etnomatemáticos. Nesses estudos, análises dos *backgrounds* culturais dos alunos servem de base para a elaboração de propostas pedagógicas.” (Skovsmose, 2014, p. 42)

Já o *foreground* é compreendido como as expectativas que o educando possui com relação à continuação da construção de sua história.

> “Uma ação revela a intencionalidade de quem a executa e, portanto, revela o seu *foreground*. O sentido de uma atividade realizada em sala é uma construção dos alunos, e depende de como eles encaram suas próprias possibilidades na vida, ou seja, essa construção depende de seus *foregrounds* e intenções.” (Skovsmose, 2014, p. 42)

Esses dois pontos são tidos como fundamentais. Deles depende a elaboração de um cenário de investigação que desperte o interesse exploratório do problema por parte dos educandos, uma vez que os mesmos, ao identificarem suas experiências anteriores relacionadas com o problema proposto ou perceberem que aquele conteúdo se identifica com seu projeto de vida, se sentirão capazes de interagir com o referido problema e também se sentirão capazes e motivados para solucioná-lo.

3.5 A questão da tecnologia no ensino

No mundo contemporâneo, é inegável a importância de nos atualizarmos constantemente no que diz respeito aos avanços tecnológicos disponíveis. Praticamente todas as atividades de nossas vidas têm algum grau de dependência das novas tecnologias que são definidas, segundo Masetto, da seguinte forma:

> "Por novas tecnologias em educação, estamos entendendo o uso da informática, do computador, da internet, do CD-ROM, da hipermídia, da multimídia, de ferramentas para educação à distância – como chats, grupos ou listas de discussão, correio eletrônico, etc. – e de outros recursos de linguagens digitais de que atualmente dispomos e que podem colaborar significativamente para tornar o processo de educação mais eficiente e mais eficaz." (Masetto, 2000, p. 152)

E a prática docente não deve ficar alheia a essa evolução.

Utilizar os recursos tecnológicos contemporâneos disponíveis para tornar as aulas mais interessantes e dinâmicas faz com que o educando tenha um aproveitamento melhor no que diz respeito à compreensão e reflexão sobre os conteúdos abordados e no que diz respeito ao seu envolvimento com as aulas. Por conta disso, o professor deve estar sempre atento à essa evolução e levá-la, sempre que possível, para sua prática docente.

O presente trabalho então busca aliar conceitos da educação matemática crítica, da aprendizagem significativa e da utilização de recursos tecnológicos contemporâneos na prática docente (especificamente as plataformas computacionais Geogebra e Kahoot) para a elaboração de atividades voltadas para o público de jovens e adultos. Detalhes sobre os conteúdos trabalhados e sobre as construções das atividades são discutidos nos próximos capítulos.

4
Aspectos matemáticos

Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos de geometria que são utilizados no trabalho desenvolvido junto aos educandos. Apesar de básicos, optamos por deixá-los aqui organizados com o intuito de que o trabalho fique fechado nos conceitos primordiais que estão nas atividades propostas no capítulo 5. Pretendemos assim facilitar a consulta e adaptação de professores da educação básica que se valham do presente estudo para construir novas propostas em suas próprias salas de aula.

4.1 O conceito de perímetro

Segundo a definição de Michaelis (2019),

> "perímetro
> pe.ri.me.tro
> **sm1** Contorno ou limite de uma figura plana. **2**GEOM Medida do limite ou do contorno de uma figura plana. **3**GEOM Soma dos comprimentos das linhas que formam o polígono. **4**Linha delimitadora de uma área ou região. (Michaelis, 2019)

É bastante frequente os alunos interpretarem de forma equivocada o conceito de perímetro como sendo apenas "o resultado da soma de todos os lados de um polígono". Essa definição leva ao pensamento de que o perímetro é algo aplicável somente a polígonos[1]. Mas, o conceito de perímetro, na realidade, é baseado no conceito da medida do contorno de qualquer figura bidimensional. Segundo Andrini (2006), "a medida do contorno de uma figura geométrica plana é o seu perímetro". Logo, essa definição abrange não somente polígonos como também figuras planas não-poligonais (como, por exemplo, a circunferência). Nas figuras 2 (figura poligonal) e 3 (figura não-poligonal) abaixo, em ambos os casos, o comprimento do contorno dessas figuras (linha verde) representam seus respectivos perímetros.

[1]Uma definição de polígono: "Figura geométrica, plana, fechada, formada por segmentos de reta consecutivos que não se entrelaçam." (Michaelis, 2019)

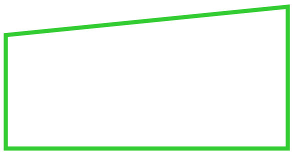


Figura 2: Figura poligonal

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 3: Figura não-poligonal

Fonte: elaborado pelo autor

4.1.1 Perímetro de polígonos

O perímetro de um polígono qualquer pode ser obtido pela soma dos comprimentos dos segmentos de reta que compõem seus lados. Na figura 4 abaixo, por exemplo, o perímetro (representado por **2P**) do polígono representado é dado por **2P** = 18 + 10 + 16 + 8 = 52 cm.

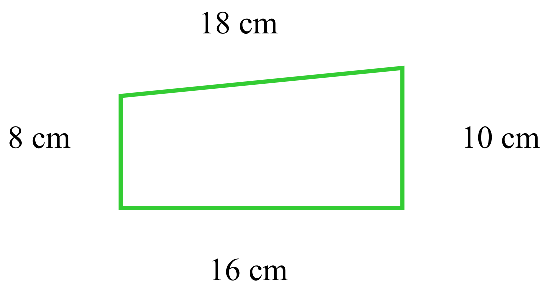


Figura 4: Polígono hipotético e as medidas de seus lados

Fonte: elaborado pelo autor

4.1.2 Um caso especial: o perímetro de uma circunferência

Uma circunferência é o lugar geométrico do conjunto de pontos de um plano que estão a uma mesma distância **R** de um ponto central fixo O (conhecido como centro da circunferência). O segmento cujos extremos são dois pontos da circunferência e que possui esse ponto O é chamado de diâmetro. A medida do diâmetro (**D**) é igual ao dobro da circunferência (**R**). Ou seja,

$$D = 2R$$

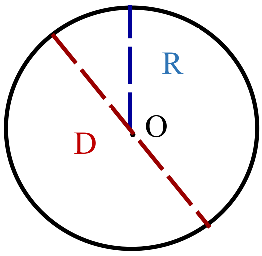


Figura 5: Circunferência de centro O, raio R e diâmetro D

Fonte: elaborado pelo autor

Que o perímetro (ou comprimento) de uma circunferência pode ser obtido multiplicando o dobro de **R** por uma constante, é um conhecimento antigo. Segundo Santos (2019) já há cerca de 4000 anos, os babilônios afirmavam que aquela constante era 3 1/8 (=3,125) e os egípcios que seu valor era 4 $(8/9)^2$ (=3,16). Essa constante é chamada de π (pi), que é a primeira letra da palavra grega **περίμετρος,** que significa "perímetro". O número π é um número irracional, possuindo assim infinitas casas decimais caracterizando uma dízima não-periódica. Trata-se de uma constante matemática que até hoje é alvo de muitas pesquisas, sempre em busca de uma maior precisão para seu valor. O valor do perímetro 2P de uma circunferência tem relação direta com essa constante e é dado pelo produto do dobro do raio **R** dessa circunferência por essa constante, sendo assim:

$$2P = 2\pi R$$

4.2 O conceito de área

Segundo Neto (2013), intuitivamente, a "a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado". Trata-se de uma definição voltada para qualquer figura geométrica plana. No tópico a seguir, ainda segundo Neto (2013), faremos uma abordagem especificamente com relação às áreas de polígonos.

4.2.1. Áreas de polígonos

Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidade, é preciso postular que as seguintes propriedades sejam válidas:

1) Polígonos congruentes[2] têm áreas iguais.
2) Se um polígono convexo[3] é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (ou seja, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3) Se um polígono maior contém outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4) A área de um quadrado de lado 1 é igual a 1 unidade de área.

4.2.1.1 Área do quadrado

Segundo Iezzi (2009), “Quadrado é um quadrilátero[4] cujos quatro lados são congruentes e cujos quatro ângulos são retos”. Tomando como válidos os postulados citados anteriormente, imaginemos um quadrado qualquer de lado n ($n \in \mathbb{N}$). Particionemos esse quadrado em n^2 quadrados de lado 1 cada. Denotando a área desse quadrado inicial como A_n, devemos ter A_n igual a soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1 (cuja área é 1). Ou seja,

$$A_n = 1.n^2 \rightarrow A_n = n^2$$

Para ilustrar essa afirmação, segue a figura 6, onde temos um quadrado de lado n = 4, particionado em 4^2 quadrados de lado 1.

[2] Polígonos congruentes são polígonos que possuem todos os lados e os ângulos que o compõem congruentes.
[3] Polígonos convexos são polígonos que não apresentam reentrâncias no corpo do mesmo. Isto significa que todo segmento de reta cujas extremidades estão nesta região estará totalmente contido na região poligonal
[4] Quadrilátero é um polígono que possui 4 lados.

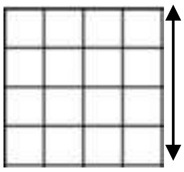


Figura 6: Quadrado de lado 4 formado por 16 quadrados de lado 1.

Fonte: elaborado pelo autor

Consideremos agora um quadrado de lado ${}^{m}/_{n}$, com m, n ∈ N e cuja área seja igual a $A_{m/n}$. Tomemos uma quantidade n^2 de quadrados iguais a esse e os arranjemos de modo a formar um quadrado maior de lado $\left(\frac{m}{n}\right).n = m$. Seguindo o raciocínio anterior, temos que sua área será igual a m^2. Observamos também que, como este quadrado maior é formado por n^2 quadrados (cada um de lado ${}^{m}/_{n}$), a sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados. Ou seja,

$$m^2 = n^2.A_{m/n} \rightarrow A_{m/n} = ({}^{m}/_{n})^2$$

Isso nos permite dizer que, se chamarmos o lado ${}^{m}/_{n}$ desse quadrado menor de L, a área desse quadrado pode ser expressa por:

$$A_L = L^2$$

Logo, esta expressão fornece a área de um quadrado qualquer de lado L.

4.2.1.2 Área do retângulo

Segundo Iezzi (2009), “Retângulo é um quadrilátero cujos quatro ângulos são retos”. Usando um raciocínio análogo ao aplicado ao quadrado, podemos provar que a área A_{ab} de um retângulo de lados **a** e **b** é igual a $\boldsymbol{ab}$.

Comecemos particionando um retângulo de lado **a** e **b** **(**a, b ∈ N) em $\boldsymbol{ab}$ quadrados de lado 1, conforme o exemplo da figura 7 abaixo:

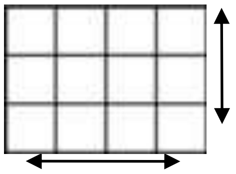


Figura 7: Retângulo de lados **a** = 3 e **b** = 4 formado por ab = 12 quadrados de lado 1 e, consequentemente, área 1.
Fonte: elaborado pelo autor

Percebemos facilmente que a área desse retângulo de lados 3 e 4 é igual à soma das áreas de todos os quadrados de lado 1, sendo assim $A_{ab} = 3 \cdot 4 = 12$.

Para o caso em que **a** e **b** são racionais do tipo $\boldsymbol{a} = {}^{m}/_{n}$ e $\boldsymbol{b} = {}^{p}/_{n}$ (m, n, p $\in$N)e, consequentemente, $A_{ab} = {}^{(mp)}/_{n^2}$, admitamos dividir cada um desses lados em segmentos de comprimento ${}^{1}/_{n}$. Assim, o lado de medida **a** ficará com m segmentos de medida ${}^{1}/_{n}$ e o lado de medida **b** ficará com p segmentos de medida ${}^{1}/_{n}$. Dessa forma, o retângulo pode ser formado, assim, por mp quadrados de lado ${}^{1}/_{n}$. A área de cada um desses quadrados terá valor igual a $({}^{1}/_{n})^2 = {}^{1}/_{n^2}$. Sendo assim, a área total da figura é dada pela soma da área de todos os mp quadrados que compõem a figura, sendo assim igual a $mp\left({}^{1}/_{n^2}\right) = {}^{mp}/_{n^2} = A_{ab}$. Logo, isso nos permite dizer que, para um retângulo de lado **a** e **b**, sua área A_{ab} pode escrita como:

$$A_{ab} = \boldsymbol{ab}$$

Logo, esta expressão fornece a área de um retângulo qualquer de dimensões **a** e **b**.

4.2.1.3 Área do paralelogramo

Segundo Iezzi (2009), “Paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos”. Um paralelogramo, que possui base de medida igual a **a** e altura igual a **h,** pode ter sua área A_p facilmente demonstrada como sendo igual ao produto $\boldsymbol{ah}$.

Considere o paralelogramo ABCD abaixo de altura **h** e base **a** = CD:

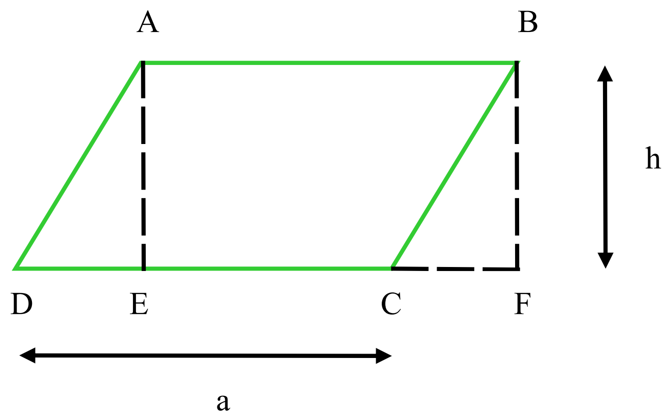


Figura 8: Paralelogramo ABCD

Fonte: elaborado pelo autor

Percebe-se claramente que os triângulos ADE e BCF são congruentes (caso LAL). Deslocando-se o triângulo ADE (que é uma fração do paralelogramo ABCD) e colocando-se sobreposto ao triângulo BCF, obtêm-se o retângulo ABFE, de mesma área, mesma base **a** e mesma altura **h** que o paralelogramo ABCD. Sendo assim, podemos afirmar que a área A_p do paralelogramo ABCD pode ser calculada por:

$$\boldsymbol{A_p = ah}$$

Logo, a expressão acima fornece a área de um paralelogramo qualquer de base **a** e altura **h**.

4.2.1.4 Área do triângulo

Segundo Iezzi (2009), "Dados três pontos A, B e C não colineares, chama-se triângulo ABC a reunião dos segmentos AB, BC e CA". A área A_t de um triângulo pode ser calculada a partir da metade da área de um paralelogramo de mesma base **a** e mesma altura **h**, sendo dada por $(\boldsymbol{ah})/_2$. Tomemos como exemplo o paralelogramo ABCD da figura 9 abaixo, no qual está destacada sua diagonal AC e vamos determinar a área do triângulo ACD:

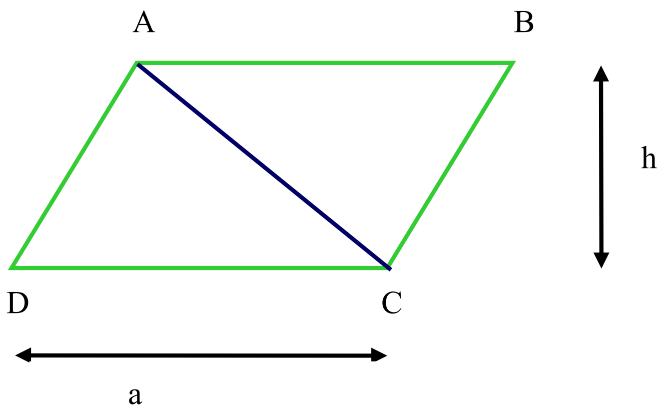


Figura 9: Paralelogramo ABCD e sua diagonal AC

Fonte: elaborado pelo autor

Percebe-se que, a partir do triângulo ACD, pode-se obter o paralelogramo ABCD traçando-se uma reta AB congruente e paralela a CD e uma reta BC congruente e paralela a AD. Isso resulta na formação de um novo triângulo ABC que é congruente a ADC (caso LLL). A soma das áreas desses dois triângulos congruentes é igual à área do paralelogramo ABCD (que é igual a $\boldsymbol{ah}$). Logo, a área do triângulo ADC pode ser dada por:

$$A_t = (\boldsymbol{ah})/_2$$

Esta expressão fornece a área de um triângulo qualquer de base **a** e altura **h**.

4.2.1.4.1 Área do triângulo utilizando a Fórmula de Heron

Com a finalidade de estabelecer uma relação entre área e perímetro, apresentaremos aqui a demonstração da Fórmula de Heron, que relaciona a área A_H de um triângulo, cujos lados têm medidas iguais a a, b e c, e o seu semiperímetro p.

Considere um triângulo hipotético ABC, cujas medidas de seus lados são a, b e c, conforme a figura 10 abaixo, onde h (segmento BH) é o segmento que representa a altura do triângulo referente ao lado AC

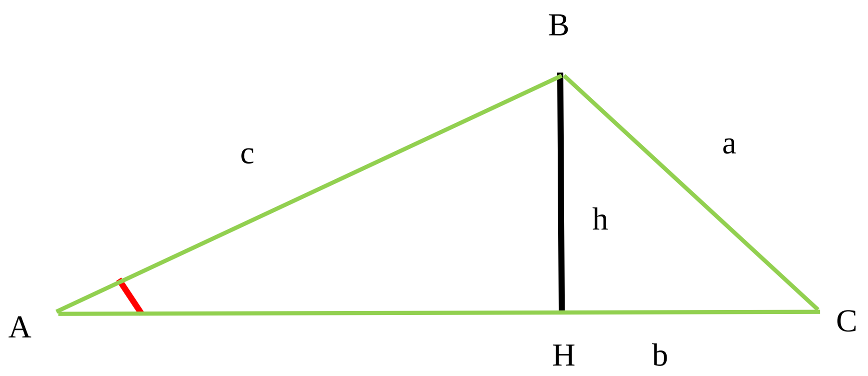


Figura 10: Triângulo hipotético ABC

Fonte: elaborado pelo autor

Calcularemos, inicialmente, o cos Â. Para isso, aplicamos primeiramente o Teorema de Pitágoras no triângulo AHB para encontrar o comprimento do segmento AH

$$c^2 = h^2 + (AH)^2 \rightarrow (AH)^2 = c^2 - h^2 \rightarrow AH = \sqrt{c^2 - h^2}$$

Logo,

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c}$$

Agora, utilizando o triângulo ABC, aplicamos a lei dos cossenos relativa ao ângulo Â:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Substituindo o valor de cos Â, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2}$$

Isolando o valor de h^2, temos:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2 \qquad \text{(I)}$$

Preservemos a expressão (I). Utilizaremos agora a fórmula apresentada anteriormente que fornece a área de um triângulo qualquer de base b e altura h, dada por

$$A = \frac{bh}{2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da fórmula, temos que

$$A^2 = \frac{b^2h^2}{4} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos que

$$A^2 = \frac{b^2\left[c^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2\right]}{4} \rightarrow A^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}$$

Aplicando a fórmula da diferença de dois quadrados, que é $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, temos:

$$A^2 = \frac{[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)].[2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]}{16} \rightarrow$$

$$A^2 = \frac{[a^2 - (b-c)^2].[(b+c)^2 - a^2]}{16}$$

Aplicando novamente a diferença de dois quadrados, temos:

$$A^2 = \frac{[a - (b-c)].(a+b-c).(b+c-a).(a+b+c)}{16} \rightarrow$$

$$A^2 = \frac{(a-b+c)}{2}.\frac{(a+b-c)}{2}.\frac{(b+c-a)}{2}.\frac{(a+b+c)}{2}$$

Fazendo aparecer o termo $p = \frac{a+b+c}{2}$, o qual representa o semiperímetro do triângulo ABC, temos:

$$A^2 = \frac{(a+b+c-2b)}{2}.\frac{(a+b+c-2c)}{2}.\frac{(b+c+a-2a)}{2}.\frac{(a+b+c)}{2} \rightarrow$$

$$A^2 = \left[\frac{(a+b+c)}{2} - b\right].\left[\frac{(a+b+c)}{2} - c\right].\left[\frac{(a+b+c)}{2} - a\right].\left[\frac{(a+b+c)}{2}\right] \rightarrow$$

$$A^2 = (p-b).(p-c).(p-a).p$$

Onde obtemos a Fórmula de Heron, que é dada por:

$$A_H = \sqrt{(p-b).(p-c).(p-a).p}$$

4.2.1.5 Área do losango

Segundo Iezzi (2009), "Losango é um quadrilátero cujos quatro lados são congruentes". A área A_l de um losango pode ser obtida pelo resultado da metade do produto das medidas de suas diagonais **a** e **b** a partir da área de um retângulo cujas dimensões (lados) também são dadas por **a** e **b**. Tomemos como exemplo o losango ABCD abaixo, cujas diagonais são concorrentes no ponto O e têm medidas dadas por **a** e **b**:

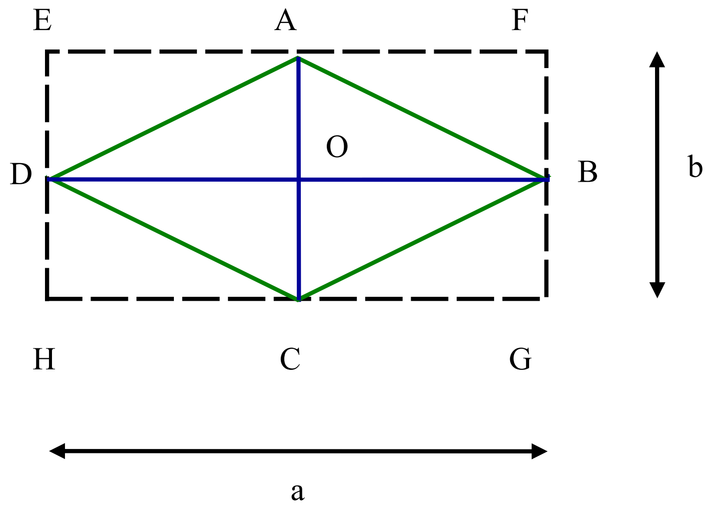


Figura 11: Losango ABCD

Fonte: elaborado pelo autor

Percebe-se a congruência de triângulos pelo caso LLL nos seguintes pares de triângulos: EAD e AOD; AFB e AOB; BOC e BGC; DOC e DCH. Logo, a área A_l do losango ABCD é facilmente identificada como metade da área do retângulo EFGH, podendo ser calculada por:

$$A_l = {(\boldsymbol{ab})}/{2}$$

Esta equação fornece a área de um losango qualquer cujas diagonais possuem medidas iguais a **a** e **b**.

4.2.1.6 Área do trapézio

Segundo Iezzi (2009), “Trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos”. A área A_T de um trapézio pode ser obtida pela soma das áreas de 2 triângulos e um retângulo, que é equivalente ao produto da metade da altura **h** desse trapézio pela soma das medidas dos lados paralelos (chamados de base maior **B** e base menor **b**). Tomemos como exemplo o trapézio ABCD abaixo, cuja altura é dada por **h**:

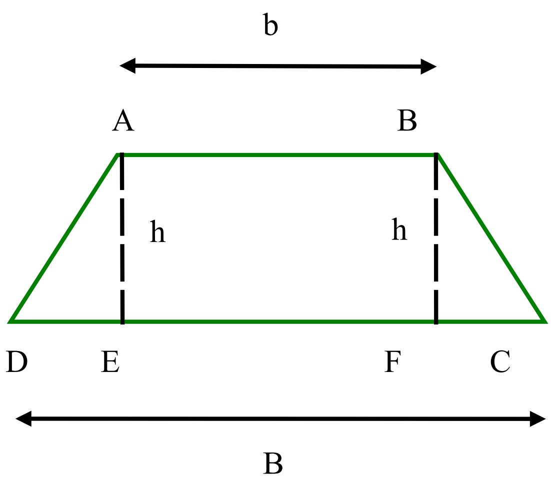


Figura 12: Trapézio ABCD

Fonte: elaborado pelo autor

Percebe-se que a área desse trapézio é dada pela soma das áreas do retângulo ABFE e dos triângulos AED e BCF. Sendo assim, podemos escrever a área desse trapézio como:

$$\boldsymbol{(DE)h}/_2\ \boldsymbol{(FC)h}/_2 + \boldsymbol{(EF)h} = \boldsymbol{(DE + FC + 2EF)h}/_\mathbf{2}$$

$$= \boldsymbol{(DE + FC + EF + EF)h}/_\mathbf{2}.$$

Porém, $\boldsymbol{EF = b}$ e $\boldsymbol{(DE + FC + EF) = B.}$ Logo, a área A_T do trapézio pode ser escrita como:

$$A_T = {}^{(B+b)h}/_{2}$$

Esta expressão fornece a área de um trapézio qualquer que possua base maior **B**, base menor **b** e altura **h**.

4.2.2 Área do círculo

Segundo Iezzi (2009), "Círculo é a reunião da circunferência com o conjunto dos seus pontos internos". Mas, antes de definir a área de um círculo, é preciso antes definir como calcular a área de um polígono regular (polígono que possui todos os seus lados congruentes).

Qualquer polígono regular de **n** lados pode ser decomposto em **n** triângulos congruentes de mesma altura **h** e mesma base **b**. Além disso, qualquer polígono regular pode ser inscrito numa circunferência, conforme o exemplo abaixo, que conta com um polígono regular de 8 lados.

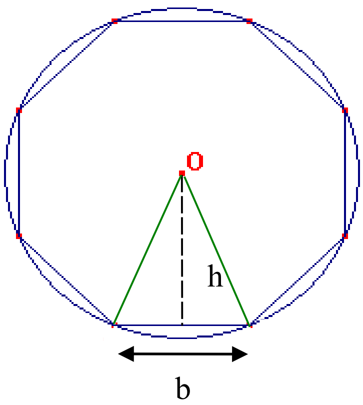


Figura 13: Circunferência de centro O e apótema h do octógono inscrito
Fonte: http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/dg_ex_re/dg_ex_re11.php - adaptado

Observa-se que a área A_n do polígono de **n** lados é o resultado da soma das áreas de **n** triângulos de base **b** e altura **h**, onde **h** é a distância do centro da circunferência até o lado do polígono (denominada apótema). Sendo assim,

$$A_n = {}^{\boldsymbol{nbh}}/_2$$

Porém, observamos que ${}^{\boldsymbol{nb}}/_2$ corresponde ao semiperímetro do polígono. Chamando esse resultado de **p**, podemos definir a área do polígono regular como

$$A_n = \boldsymbol{ph}$$

Observemos agora a figura 14 abaixo, que mostra diferentes polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio **R**, porém aumentando-se gradativamente o número **n** de lados desses polígonos.

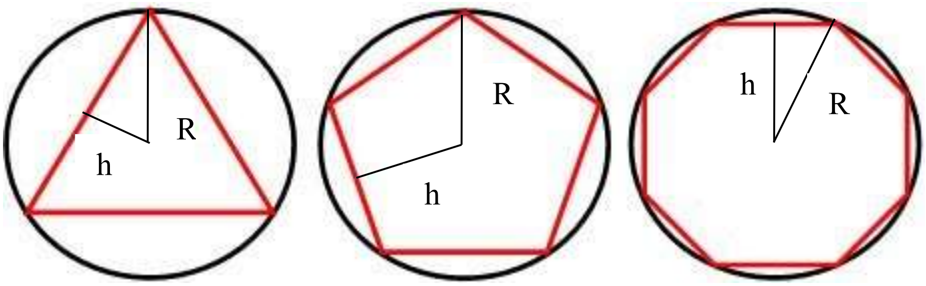


Figura 14: Polígonos regulares inscritos numa circunferência

Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poligonos-inscritos-circunscritos.htm - adaptado

À medida que a quantidade de lados **n** do polígono inscrito aumenta, mais o perímetro do polígono se aproxima do perímetro da circunferência (comprimento da circunferência). Além disso, à medida que a quantidade de lados **n** do polígono inscrito aumenta, mais o apótema h se aproxima do valor de **R.** Como a área de um polígono regular qualquer é dada por $A_n = \boldsymbol{ph}$, onde p é o semiperímetro do polígono, temos que **p** tende a ser igual à metade do comprimento da circunferência, ou seja, **p** tende a ser ${}^{2\pi\boldsymbol{R}}/_2 = \boldsymbol{\pi R}$. Além disso, **h** tende a ser **R**. Logo, a área $A_c$de um círculo de raio **R** é dada pelo produto de $\boldsymbol{\pi R}$ por **R**, ou seja:

$$A_c = \boldsymbol{\pi R^2}$$

Logo, a expressão acima fornece a área de um círculo qualquer que possua raio de medida igual a **R**.

4.3 O Conceito de volume

Segundo Neto (2013), intuitivamente o volume de um sólido é uma medida do espaço que ele ocupa. Espera-se, então, que dois sólidos disjuntos tenham volume igual à soma dos volumes ocupados por cada um deles e, também intuitivamente, espera-se que para o caso em que um deles esteja contido no outro, espera-se que este último tenha volume maior que o primeiro. Um conceito mais formal de sólido é apresentado abaixo, onde consideramos Int (S) o interior de um sólido S:

> Um sólido é um conjunto S de pontos do espaço satisfazendo as seguintes condições:
> a) S é fechado, limitado e tem interior não vazio.
> b) Para todos A, B ∈ **S,** existe uma poligonal $A_1A_2...A_k$ ligando $A = A_1$ a $B = A_k$ e contida em Int (S) U {A,B}. (Neto, 2013, p. 336)

Segundo Iezzi (2010), formas tridimensionais idealizadas pela Geometria são chamadas de sólidos geométricos, cujas formas mais simples são os poliedros e os corpos redondos. Neste trabalho vamos apresentar mais adiante o cálculo do volume de alguns poliedros e alguns corpos redondos.

> "Poliedros são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc). A palavra *poliedro* vem do grego antigo, em que *poli* significa 'vários' e *edros*significa 'faces'". (Iezzi, 2010, p. 281).
>
> "Corpos redondos são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana)" (Iezzi, 2010, p. 281)

Os poliedros tratados neste trabalho são os prismas (com um destaque aos cubos) e as pirâmides. E os corpos redondos são o cone, o cilindro e a esfera.

4.3.1 Unidade de medida de volume

Tomaremos como unidade de medida padrão o espaço ocupado por um cubo, que é um poliedro cujas seis faces que o compõe são quadrados congruentes. Ou ainda, segundo Iezzi (2010), “Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados equivalentes”. Imaginemos que o tamanho da aresta (comprimento de um dos lados de uma face qualquer) desse cubo hipotético possui comprimento de 1 u.c. (unidade de comprimento). Sendo assim, o volume ocupado por um cubo padrão seria de 1 $(u.c.)^3$ = 1 u.v. (unidade de volume).

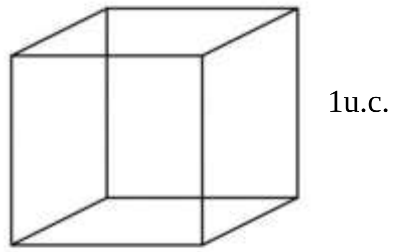


Figura 15: Cubo de aresta 1 u.c.

Fonte: elaborado pelo autor

4.3.2 Volume de um cubo

Consideremos um cubo, cuja aresta possua medida igual a **a** u.c.. Dividindo-se cada aresta desse cubo por **a**, é possível obter um total de $\boldsymbol{a}^3$cubos de aresta 1 u.c., onde cada um desses cubos possui volume de 1 u.v. A soma de todos esses volumes desses cubos menores é igual a $\boldsymbol{a}^3 \cdot 1 = \boldsymbol{a}^3$.

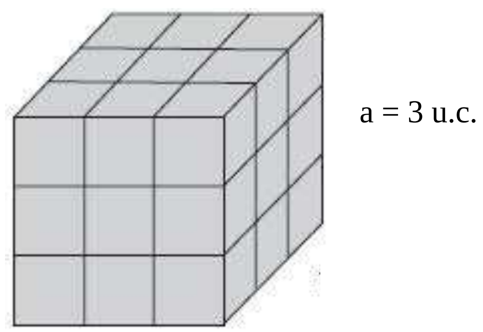


Figura 16: Cubo de aresta 3 u.c.

Fonte: https://professor.bio.br/matematica/provas_vestibular.asp?origem=Ufpe&curpage=16

Logo, conclui-se que a medida do volume V_c de um cubo de aresta **a** é dada por:

$$V_c = a^3$$

Obs.: Segundo o SI (Sistema Internacional de Unidades), um cubo de aresta 1 dm (logo, cujo volume é igual a 1 dm^3), pode comportar uma unidade de volume de 1L (1 litro), onde o litro também é uma unidade de volume. E, com relação a um cubo de aresta 1 m (logo, cujo volume é igual a 1 m^3), é possível comportar 1000 L (mil litros).

4.4 Volume do paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo é um poliedro cujas bases superior e inferior são retangulares (ou até mesmo quadrangulares) e congruentes e cujas arestas laterais são retas. Suas dimensões são normalmente chamadas de comprimento (**a**), largura (**b**) e altura (**c**).

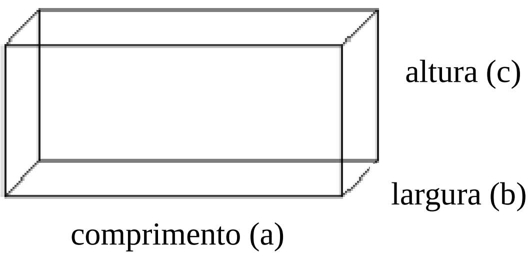


Figura 17: Paralelepípedo
Fonte: elaborado pelo autor

Consideremos um paralelepípedo cujas dimensões são iguais a **a** = **x** u.c., **b** = **y** u.c. e **c** = **z** u.c.. Dividindo-se a primeira aresta **a** por **x**, a segunda aresta **b** por **y** e a terceira aresta **c** por **z**, é possível obter xyz cubos de aresta 1 u.c., cujo volume de cada cubo é 1 u.v.. A soma de todos esses cubos de volume 1 u.v. é igual a xyz. 1 = xyz u.v.

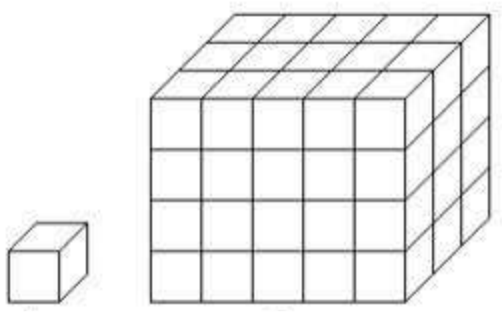


Figura 18: Paralelepípedo formado por cubo de aresta 1 u.c.

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/11506137

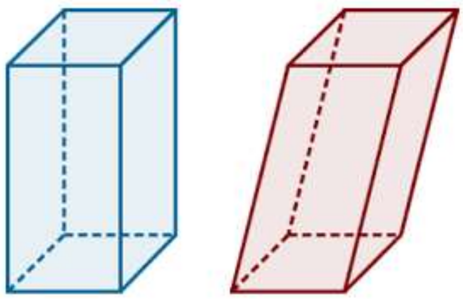
Logo, conclui-se que o volume V_p desse paralelepípedo de dimensões **x, y** e **z** é dado por:

$$V_p = xyz$$

4.5 Volume do prisma

Segundo Michaelis (2019), podemos definir um prisma como sendo um “poliedro limitado lateralmente por paralelogramos e por dois polígonos iguais e paralelos nas extremidades”.

A figura 19 abaixo apresenta um prisma reto (X) e um prisma oblíquo Y.

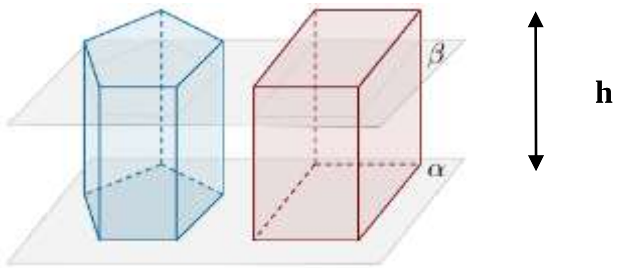


X Y

Figura 19: Prismas reto e oblíquo

Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/exemplos-calculo-area-prisma.htm

Consideremos um paralelepípedo reto retângulo A (que também é um prisma) e um prisma B que possuam a mesma altura **h** e cujas bases possuam áreas iguais, que chamaremos de $\boldsymbol{A_b}$. Imaginemos que esses sólidos estão apoiados sobre um plano α e são seccionados por um plano β, conforme a figura 20 abaixo.



B A

Figura 20: Prismas de bases diferentes

Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm

Utilizaremos o Princípio de Cavalieri, enunciado a seguir, para calcular o volume do prisma B.

> “Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), então esses sólidos têm volumes iguais (sólidos equivalentes).” (Iezzi, 2010, p. 291)

Observando que o plano β corta os dois prismas numa mesma altura formando duas novas seções de áreas iguais às da base de cada prisma, pelo Princípio de Cavalieri, temos então que os volumes dos sólidos B e A são iguais, ou seja $V_B = V_A$. Como V_A é um paralelepípedo retângulo, seu volume pode ser calculado por

$$V_A = \boldsymbol{A_b h}$$

Como $V_B = V_A$ e as alturas **h** dos sólidos A e B também são iguais, então o volume V_p de um prisma qualquer pode ser dado por

$$V_p = \boldsymbol{A_b h}$$

Onde A_b representa a área de sua base e **h** representa sua altura.

4.6 Volume de uma pirâmide

A definição de pirâmide pode ser dada por:

> “Dados um polígono contido em um plano α e um ponto V, não pertencente a α, tracemos todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em V e a outra num ponto do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido chamado pirâmide” (Iezzi, 2010, p. 305)

Proposição 4.1. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem volumes iguais.*

Demonstração: Considere a figura 21 abaixo, que representa duas pirâmides de mesma base, mesma altura H e seccionadas a uma mesma distância h de seus vértices formando duas áreas S_1 e S_2.

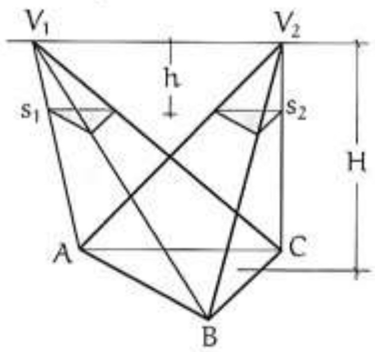


Figura 21: Pirâmides de mesma base

Fonte: http://docplayer.com.br/80402562-O-ensino-dos-solidos-geometricos-um-estudo.html

Chamemos a base comum às pirâmides de S. É sabido que vale a relação entre as áreas das seções S_1 e S_2 e a área S dada por

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{S_2}{S}$$

Donde conclui-se que $S_1 = S_2$. Logo, pelo Princípio de Cavalieri, as pirâmides possuem o mesmo volume.

4.6.1 Cálculo do volume de uma pirâmide triangular

Proposição 4.2*O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do volume do prisma de mesma base.*

Demonstração: Consideremos um prisma de base triangular que é divido em três pirâmides conforme a figura 22 abaixo:

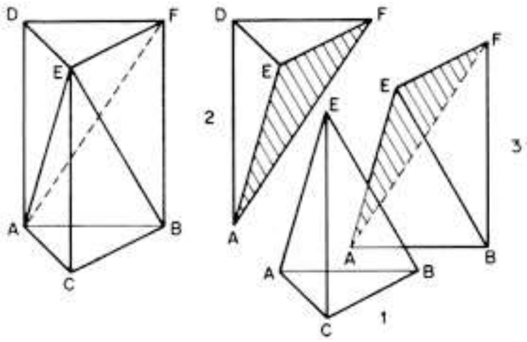


Figura 22: Prisma de base triangular decomposto em pirâmides de bases triangulares

Fonte: http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/11.htm

Observamos que as pirâmides AEDF e EACB possuem bases congruentes e a mesma altura em relação a essa base. Logo, conforme demonstrado anteriormente, possuem o mesmo volume, ou seja, $V_{AEDF} = V_{EACB}$. Observamos também que as pirâmides AEDF e BAEF possuem a mesma base AEF e a mesma altura em relação a essa base. Logo, também possuem o mesmo volume, ou seja, $V_{AEDF} = V_{BAEF}$.

Logo, $V_{AEDF} = V_{EACB} = V_{BAEF} = V$. Chamando-se o volume do prisma que originou as pirâmides de V_{prisma}, chamando-se sua base de A_b, e sabendo-se que seu volume é dado por $V_{prisma} = A_b h$, podemos dizer que seu volume, em função dos volumes das pirâmides é dado por

$$V_{prisma} = A_b h = V + V + V$$

Logo,

$$3V = A_b h$$

Onde conclui-se que

$$V = {}^{A_b h}/_{3}$$

Onde esta equação fornece o volume de uma pirâmide qualquer de base triangular.

4.6.2 Cálculo do volume de uma pirâmide de base qualquer

Proposição 4.3 *O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração: Observe a pirâmide da figura 23 abaixo, de base A_o, onde a mesma foi dividida em pirâmides triangulares de mesma altura que a pirâmide original.

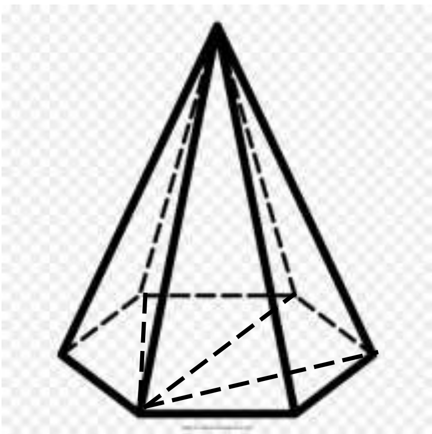


Figura 23: Pirâmide de base hexagonal dividida em pirâmides de bases triangulares

Fonte: https://www.gratispng.com/png-ihhekk/

Podemos dizer que o volume V_o da pirâmide original é igual à soma dos volumes de cada pirâmide triangular obtida $(V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-2})$, ou seja

$$V_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-2} = {A_1 h}/_3 + {A_2 h}/_3 + \cdots + {A_{n-2} h}/_3$$

$$= {}^1/_3\,(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-2})h$$

Porém, $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-2} = A_o$. Logo,

$$V_o = {A_o h}/_3$$

Onde esta equação fornece o volume de uma pirâmide de base qualquer.

4.7 Volume do cilindro

Inspirado em Iezzi (2010), um cilindro é um sólido redondo que possui as seguintes características:

- Apresenta dois círculos com raios de medidas iguais que se situam em planos paralelos;
- Sua superfície lateral é constituída por todos os segmentos de reta de igual comprimento, paralelos à reta que contém os centros dos círculos e que tem extremidades nas circunferências desses círculos.
- Seu preenchimento interno é formado por segmentos de reta de comprimento igual ao citado no item anterior cujas extremidades pertencem aos círculos que formam suas bases.

A figura 24 abaixo mostra um cilindro reto (X) e um cilindro oblíquo (Y).

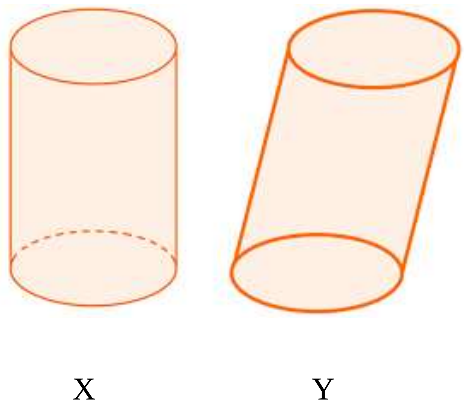


Figura 24: Cilindros reto e oblíquo

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/cilindro-2.htm

Para determinarmos o volume do cilindro, utilizaremos novamente o Princípio de Cavalieri. Observe a figura 25 abaixo, onde temos um prisma e um cilindro cujas bases possuem áreas de mesma medida e iguais a A:

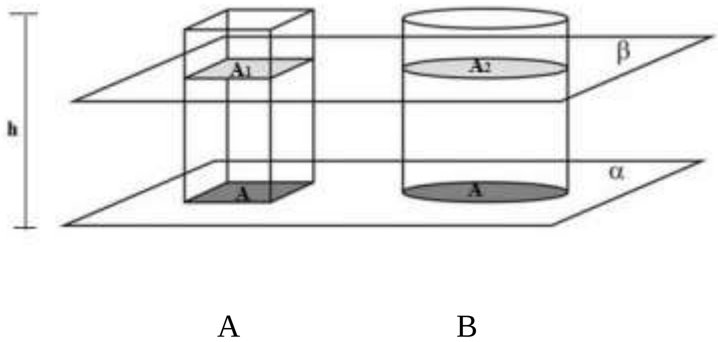


Figura 25: Prisma e cilindro de mesma base e mesma altura h

Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html – adaptado

Observando que o plano β corta o prisma e o cilindro numa mesma altura qualquer formando duas novas seções de áreas iguais ($A_1 = A_2$), pelo Princípio de Cavalieri, temos que os volumes dos dois sólidos são iguais, ou seja, $V_B = V_A$. Como V_A é um paralelepípedo retângulo, seu volume pode ser calculado por

$$V_A = \boldsymbol{A_b h}$$

Como $V_B = V_A$ e as alturas **h** dos sólidos A e B também são iguais, então o volume V_{cil}de um cilindro qualquer pode ser dado por

$$V_{cil} = \boldsymbol{A_b h}$$

Porém, como o cilindro possui base circular, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$V_{cil} = \pi R^2 \boldsymbol{h}$$

Onde R é o raio do círculo da base do cilindro.

4.8 Volume do cone

A definição de cone pode ser dada por:

> "Consideremos um círculo de centro O e raio R, situado num plano α, e um ponto V, fora de α. Chama-se cone circular, ou apenas cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em ponto do círculo" (Iezzi, 2010, p. 355)

A figura 26 abaixo apresenta um cone reto (X) e um cone oblíquo (Y).

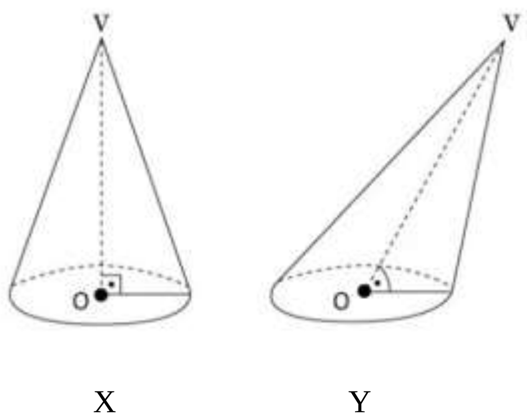


Figura 26: Cones reto e oblíquo

Fonte: https://www.guiaestudo.com.br/cone

Para determinarmos o volume do cone, utilizaremos novamente o Princípio de Cavalieri. Observe a figura 27 abaixo, onde temos uma pirâmide e um cone de bases com áreas de mesma medida e iguais a B e que também possuem a mesma altura h.

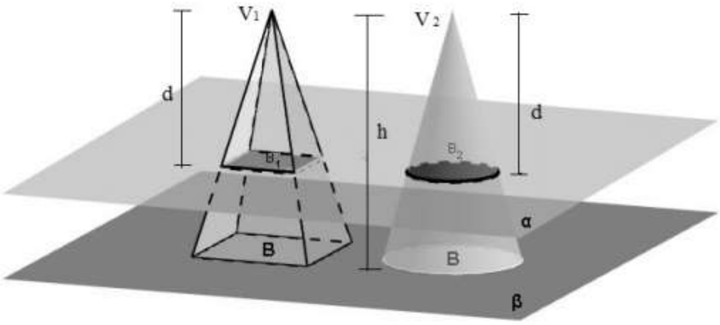


Figura 27: Cone e pirâmide de mesma base e mesma altura
Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=88383

Conforme demonstrado anteriormente, pelo Princípio de Cavalieri, sabemos que as áreas B_1 *e* B_2, respectivamente resultantes da secção do plano α pela pirâmide e pelo cone são iguais. Isso comprova que o volume do cone V_{cone} também pode ser dado por

$$V_{cone} = {}^{Bh}/_{3}$$

Onde B é a área da base do cone. Porém, como a base do cone é um círculo de raio R, podemos reescrever a equação que fornece o volume do cone como

$$V_{cone} = {}^{\pi R^2 h}/_{3}$$

4.9 Volume da esfera

Segundo Iezzi (2010), considerando um ponto O e um segmento de medida R, denomina-se esfera de centro O e raio R o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R.

Segue a figura 28, que representa uma esfera de raio R.

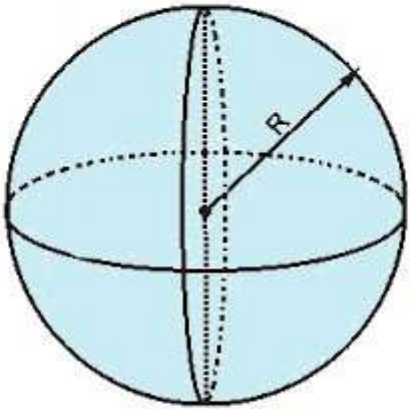


Figura 28: Esfera de raio R

Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/volume-da-esfera/

Proposição 4.4 *O volume de uma esfera de raio R é igual a* $^{4\pi R^3}/_{3}$.

Demonstração: Segundo Pernambuco (2019), **c**onsideremos um cilindro de raio de base R (a altura é igual a 2R) e tendo como S o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones, tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado Clépsidra). Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido X é chamado anticlepsidra).

Consideremos agora uma esfera de raio R e o sólido X descrito acima.

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α, que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semiespaço dos determinados por α.

Qualquer plano secante β, paralelo a α, distando d do centro da esfera (e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X, conforme a figura 29.

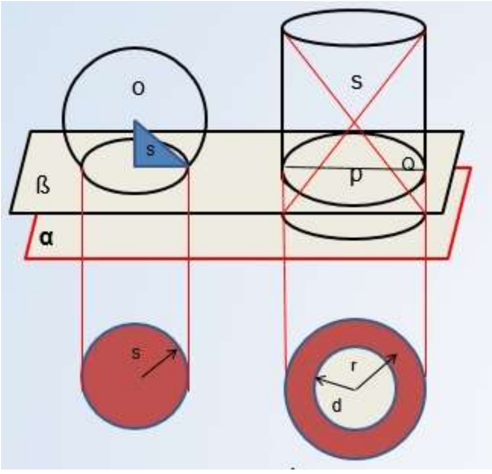


Figura 29: Esfera de raio R e o sólido X

Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/3648246/

Temos, portanto:

- Área da secção na esfera = $\pi S^2 = \pi(R^2 - d^2)$ círculo
- Área da secção no sólido X = $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$ coroa circular

As áreas das secções na esfera e no sólido X são iguais. Então, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais. Ou seja,

$$V_{esfera} = V_{sólido\ X}$$

Porém,

$$V_{sólido\ X} = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi R^2 . 2R - {2\pi R^3}/{3} = {4\pi R^3}/{3}$$

Logo, o volume da esfera é dado por:

$$V_{esfera} = {4\pi R^3}/{3}$$

5
Atividades geométricas significativas para o PEJA

Este capítulo descreve a aplicação de algumas atividades relativas ao ensino significativo de Geometria para o PEJA, construídas no presente trabalho com o olhar na fundamentação teórica aqui apresentada. Além disso, uma breve análise dos resultados alcançados quando das aplicações dessas atividades em sala de aula, também é relatada.

5.1 Por que o PEJA?

A escolha do Programa de Educação de Jovens e Adultos (PEJA) da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SME/RJ) para realizar esse trabalho deveu-se às seguintes características desse público:

- As diferentes histórias de vida dos alunos desse público, que possibilita um rico compartilhamento de experiências, motivando assim o diálogo no processo de aprendizagem.
- As grandes variações nas trajetórias escolares dos discentes, o que proporciona um ambiente desafiador para a criação de um cenário de investigação que atenda às necessidades de todos os educandos ou, pelo menos, da grande maioria.
- Os diferentes tipos de *backgrounds* e *foregrounds* apresentados pelos educandos (muito por conta das grandes variações de idade dos mesmos, indo desde o fim da adolescência até a terceira idade) os quais também serão desafiadores na construção do cenário de investigação adequado, conforme citado anteriormente.
- A natural maior facilidade dos alunos mais jovens na aprendizagem dos conteúdos (afinal, estão mais próximos da idade escolar correta e regular) ajudando os alunos mais velhos e com maior dificuldade de aprendizagem, criando um ambiente democrático de aprendizagem matemática, onde cada

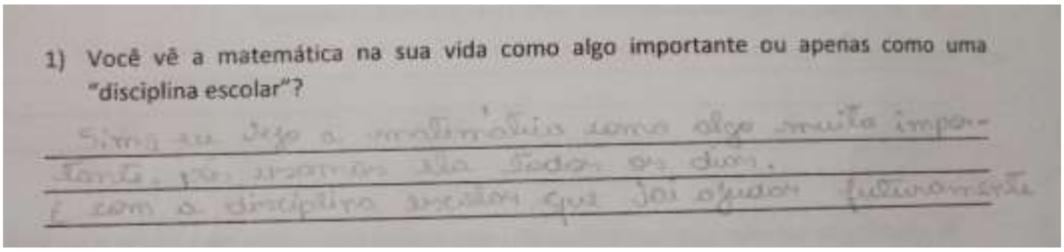
aluno colabora dentro de sua visão de mundo com aquele conteúdo de forma reflexiva, baseado no cenário de investigação proposto.

- A possibilidade de estabelecer uma aproximação entre os alunos mais jovens e mais velhos no que diz respeito à utilização da tecnologia no processo de aprendizagem, uma vez que foram utilizados nesse processo alguns recursos tecnológicos contemporâneos que são melhor dominados pelo público mais jovem, proporcionando um processo de emancipação desse público mais velho em relação às novas tecnologias.

Para implantar o ensino significativo de perímetros, áreas e volumes no PEJA, a primeira etapa do trabalho proposto foi a realização de uma entrevista com os alunos de duas turmas (161 e 162 - turmas finais do bloco 2 do EF da Escola Municipal Gonçalves Dias), de maneira a se coletar dados suficientes que ajudassem na elaboração de um cenário de investigação que atendesse a todos ou, pelo menos, a maioria do público. A entrevista foi feita com um questionário (ANEXO 1) contendo perguntas cuja elaboração foi baseada nos prováveis *backgrounds* e *foregrounds* dos alunos, levando em consideração os aspectos culturais da região onde se localiza a escola, seus estilos de vida, suas profissões, suas rotinas, etc.

Após a entrevista, realizada com um total de 38 alunos, foi percebido que parte significativa dos alunos (21, cerca de 55% dos entrevistados), trabalhavam ou tinham a intenção de trabalhar no ramo da construção civil, faziam algum curso relacionado a essa área, ou já tinham feito algum tipo de obra em suas casas nas comunidades onde moram (Mangueira, Mandela, Arará), o que é uma prática muito comum para moradores de áreas como essas. Logo, de posse dessas informações relativas aos *backgrounds* e *foregrounds* desses alunos, o ensino de perímetros, áreas e volumes relacionados à essa realidade seria o ponto de partida para a criação do cenário de investigação ideal para a apresentação desses conteúdos.

Algumas das respostas obtidas neste questionário estão apresentadas nas figuras a seguir.

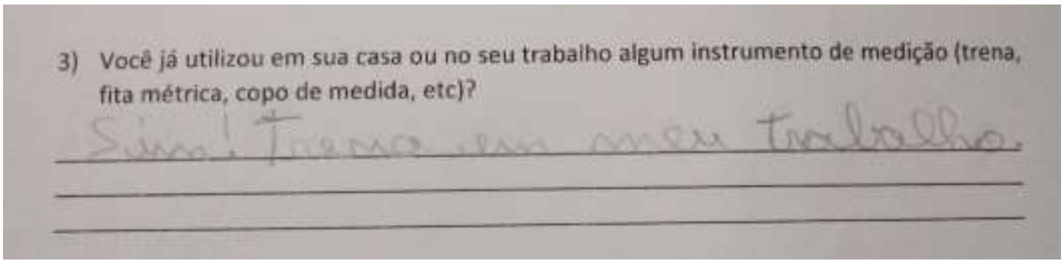


1) Você vê a matemática na sua vida como algo importante ou apenas como uma "disciplina escolar"?

Sim, eu vejo a matemática como algo muito impor-
tante, pois usamos ela todos os dias.
E com a disciplina escolar que vai ajudar futuramente

Figura 30: Resposta 1

Fonte: resultado da pesquisa

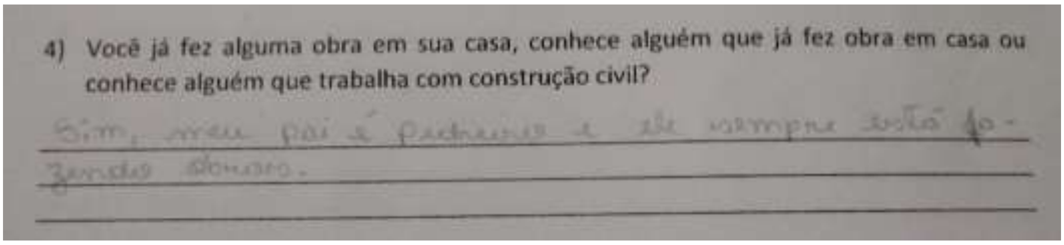


3) Você já utilizou em sua casa ou no seu trabalho algum instrumento de medição (trena, fita métrica, copo de medida, etc)?

Sim! Trena em meu trabalho.

Figura 31: Resposta 2

Fonte: resultado da pesquisa

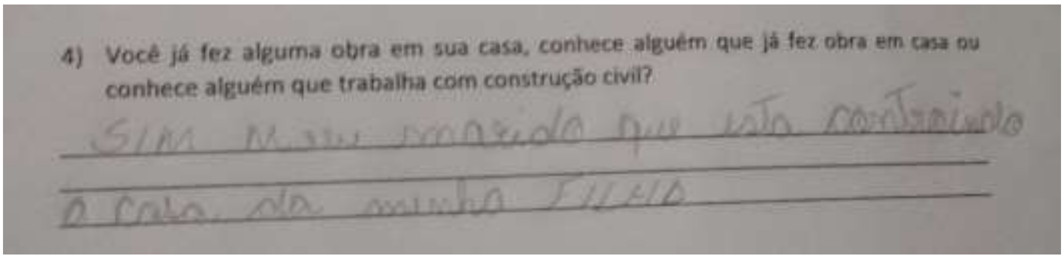


4) Você já fez alguma obra em sua casa, conhece alguém que já fez obra em casa ou conhece alguém que trabalha com construção civil?

Sim, meu pai é pedreiro e ele sempre está fa-
zendo obras.

Figura 32: Resposta 3

Fonte: resultado da pesquisa



4) Você já fez alguma obra em sua casa, conhece alguém que já fez obra em casa ou conhece alguém que trabalha com construção civil?

SIM meu marido que esta construindo
a casa da minha FILHA

Figura 33: Resposta 4

Fonte: resultado da pesquisa

Após esse período investigativo, foi elaborada uma sequência de atividades geométricas fundamentadas na educação matemática crítica e na aprendizagem significativa. Essas atividades forma aplicadas com os alunos no período compreendido entre agosto e setembro de 2019. As descrições das atividades, bem como reflexões sobre as aplicações estão expostas a seguir.

5.2 Atividade 1 – Áreas e perímetros de polígonos com o auxílio da malha quadriculada

A primeira atividade proposta teve como objetivo principal trabalhar os conceitos de perímetros e áreas de polígonos diversos a partir do perímetro e área de um quadrado de lado 1. Antes de iniciada a atividade, um debate sobre o significado desses conceitos foi feito com a turma. Posteriormente foi apresentada uma malha quadriculada construída no software Geogebra com diversas formas geométricas poligonais de maneira a estimular a busca de recursos por parte dos alunos para encontrar as áreas e perímetros das figuras apresentadas. Além de receberem a proposta da atividade impressa, ela também foi projetada em sala de aula, conforme a figura 36, para facilitar os debates com o professor e entre os alunos também.

A atividade está representada na figura 34 e pretendeu desenvolver no aluno a capacidade de identificar e/ou relacionar diferentes polígonos, com o objetivo de buscar formas alternativas para o cálculo dos perímetros e das áreas dos mesmos, sem se apegar a fórmulas fechadas. Após a realização da atividade, foi sugerido que os alunos comparassem os resultados encontrados e trocassem ideias sobre o que os levou àqueles resultados.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

. Conceito de polígono.
. Cálculo de áreas das principais figuras planas.
. Teorema de Pitágoras.

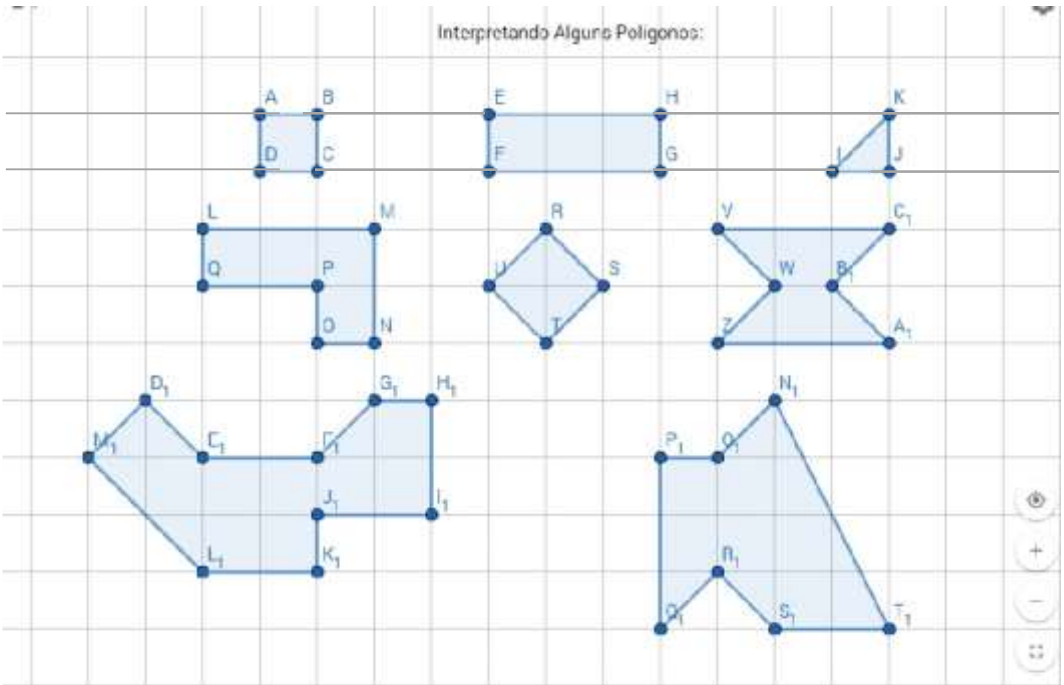
Tempo estimado para realização: 2 tempos de aula (100 minutos)

ESCOLA MUNICIPAL GONÇALVES DIAS

Atividade 1

Nome: .... Turma.:...................

Observe a figura abaixo, que contém diversos polígonos em formatos variados:



Sabendo-se que o lado de cada quadradinho na malha quadriculada mede 1 cm, determine o perímetro e a área de cada um dos polígonos (se necessário, utilize a calculadora para encontrar resultados aproximados):

Polígono	**Perímetro (cm)**	**Área (cm^2)**
ABCD		
EFGH		
IJK		
LMNOPQ		
RSTU		
$VWZA_1B_1C_1$		
$D_1E_1F_1G_1H_1I_1J_1K_1L_1M_1$		
$N_1O_1P_1Q_1R_1S_1T_1$		

Figura 34: Atividade 1

Fonte: elaborado pelo autor

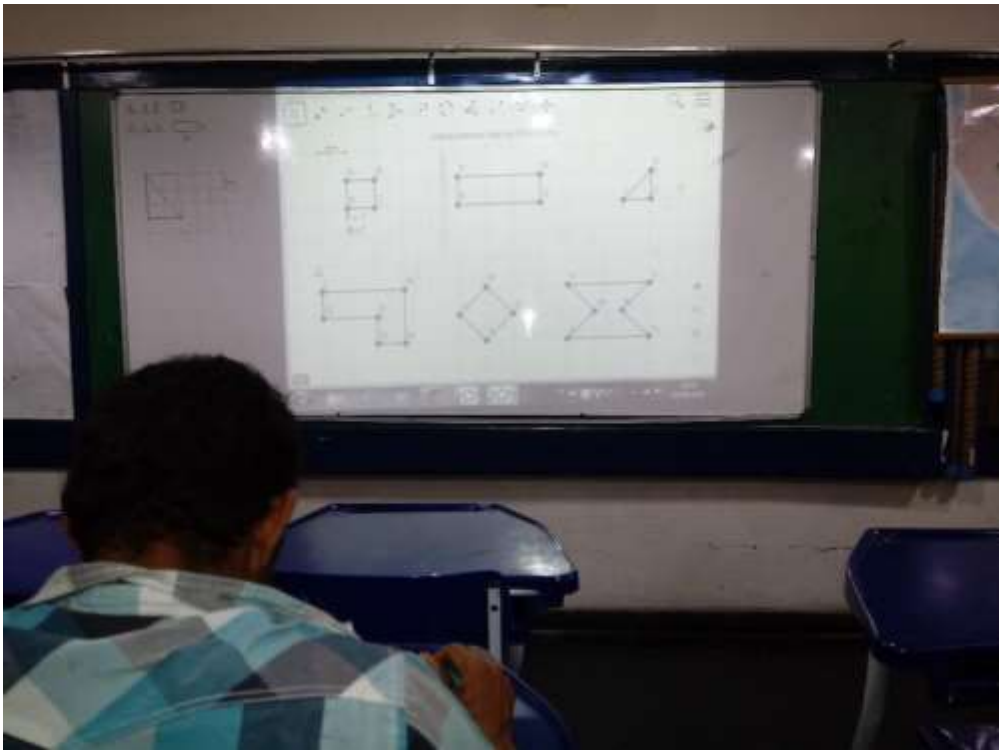


Figura 35: Realização da atividade 1

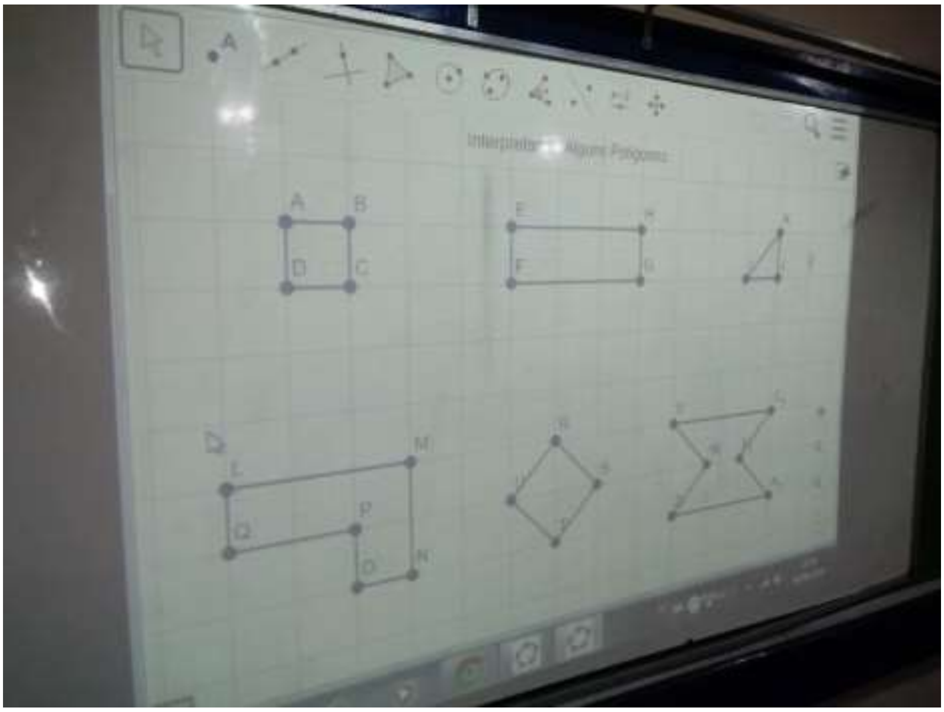


Figura 36: Projeção da atividade 1 no quadro

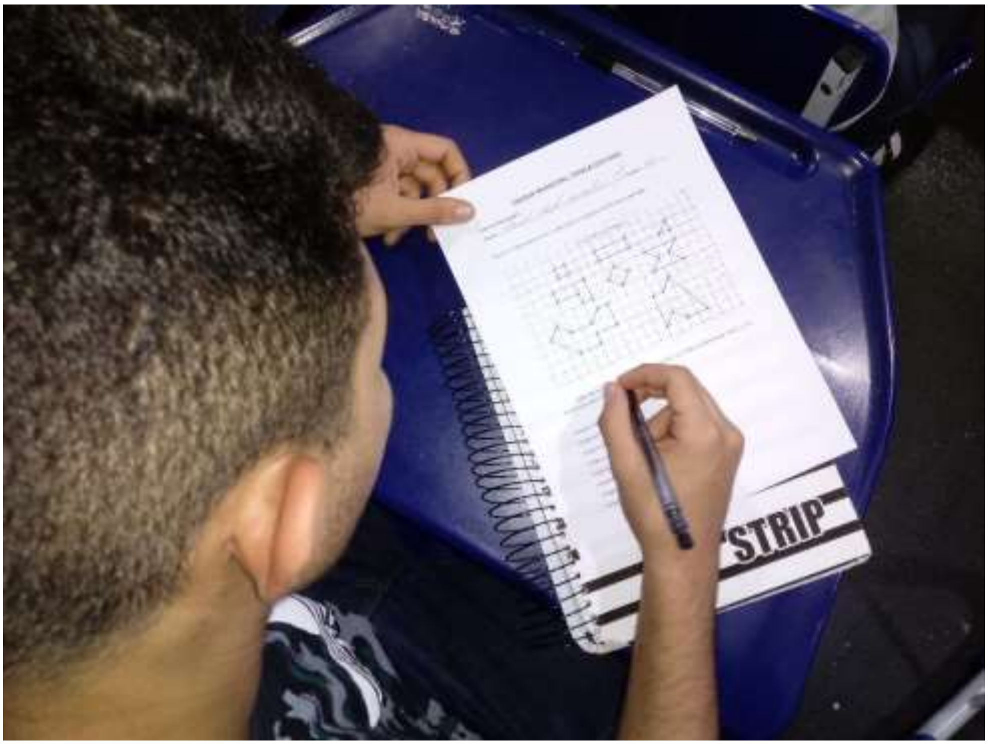


Figura 37: Execução da atividade 1

Embora inicialmente ocorressem algumas dificuldades por parte dos alunos para efetuar os cálculos solicitados de alguns dos polígonos apresentados, após algum tempo isso deixou de ser problema, já que perceberam que a malha podia ajudá-los e as diversas figuras podiam ser interpretadas como frações do quadrado base ou de outros polígonos já calculados. Algumas fórmulas de áreas de polígonos foram introduzidas e puderam comparar os resultados dando mais significado à proposta. Já para o cálculo do perímetro, o maior desafio neta etapa foi o cálculo de comprimento de lados inclinados em relação à malha onde foi necessário retomar a questão do Teorema de Pitágoras.

5.3 Atividade 2 – Perímetros e áreas de polígonos semelhantes

Nessa atividade, foram propostos pares de polígonos semelhantes para compararmos o que acontecia com o novo perímetro e a nova área de cada um deles ao se multiplicar suas dimensões por uma constante **k.** A atividade com os polígonos propostos está representada na figura 38.

Após a realização da atividade, foi sugerido que os alunos comparassem os resultados encontrados e trocassem ideias sobre o que os levou àqueles resultados.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

. Conceito de perímetro de polígonos.
. Cálculo de áreas das principais figuras planas.
. Conceito de razão e proporção.

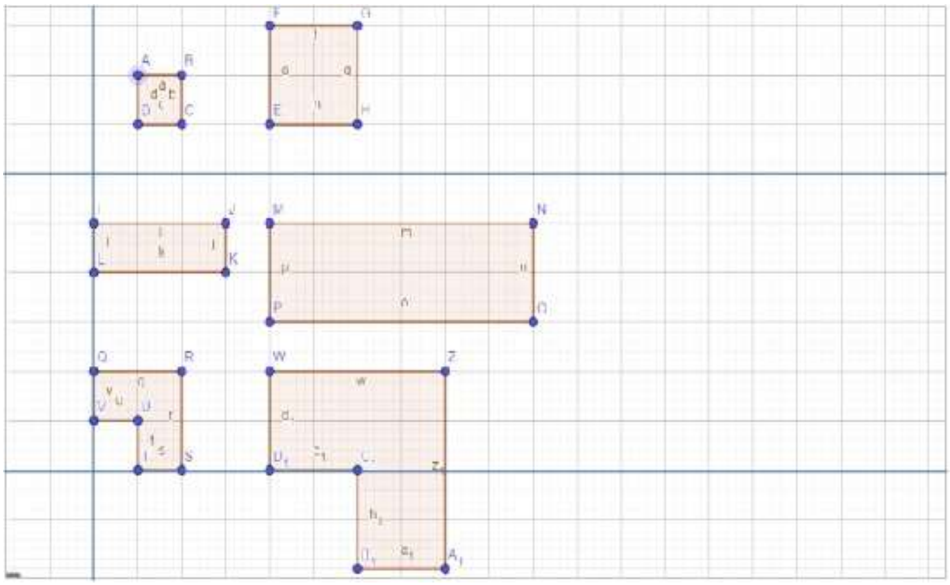
Tempo estimado para realização: 2 tempos de aula (100 minutos)

ESCOLA MUNICIPAL GONÇALVES DIAS

Atividade 2

Nome:.. Turma.:............

Observe as figuras abaixo, as quais representam pares de polígonos semelhantes.



Sabendo-se que o lado de cada quadradinho na malha quadriculada mede 1 m, faça o que se pede:

1) Por que é possível afirmar que cada par de polígonos apresentados na malha quadriculada é formado por polígonos semelhantes? Explique.
2) Calcule o perímetro de cada figura.
3) Compare o perímetro de cada polígono com o perímetro de seu semelhante. O que se observa?
4) Calcule a área de cada figura.
5) Compare a área de cada polígono com a área de seu semelhante. O que se observa?

Figura 38: Atividade 2

Fonte: elaborado pelo autor

O objetivo principal dessa atividade foi demonstrar como as relações de proporcionalidade entre polígonos semelhantes não são tão óbvias assim quando se trabalha o perímetro e as áreas dos mesmos. Com isso, leva-se o aluno a perceber e refletir sobre o fato de que, por exemplo, ao duplicar as medidas dos lados de um polígono, isso implica na duplicação do perímetro do mesmo, mas não na duplicação de sua área.

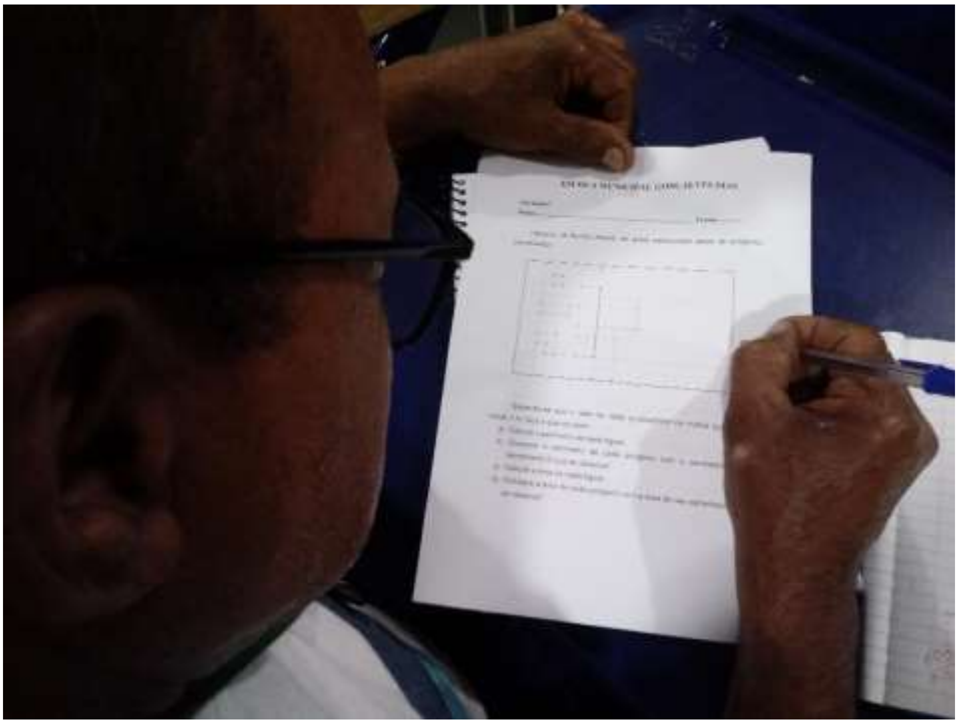


Figura 39: Execução da atividade 2

O mais interessante dessa atividade foi perceber como, inicialmente, a maioria dos alunos achava que, por exemplo, dobrando o valor do lado do polígono, o mesmo tinha sua área multiplicada por 2. A comprovação desse equívoco pelo cálculo foi um dos pontos mais intrigantes dessa atividade.

5.4 Atividade 3 – Volumes de alguns sólidos

Nessa atividade, representada pela figura 40 e desenvolvida com o auxílio do software Geogebra, foram apresentados alguns sólidos para o cálculo do volume dos mesmos, com destaque para o cálculo do volume do cilindro, que entrou na atividade em caráter de desafio. Após a realização da atividade, foi sugerido que os alunos comparassem os resultados encontrados e trocassem ideias sobre o que os levou àqueles resultados.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

. Conceito de volume do cubo e do paralelepípedo.
. Cálculo de áreas dos principais polígonos e do círculo.
. Conhecer a relação entre unidades de volume e de capacidade (em litros)
. Conceito de razão e proporção.

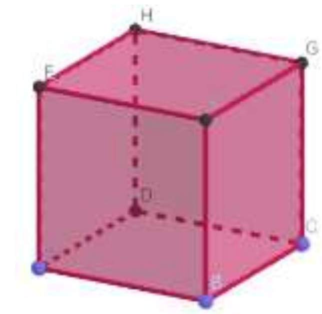
Tempo estimado para realização: 2 tempos de aula (100 minutos)

ESCOLA MUNICIPAL GONÇALVES DIAS

Atividade 3

Nome: .... Turma.:....................

Observe o cubo ABCDEFGH da figura abaixo, cujo comprimento da aresta é de 2 m:



2 m

1) Determine:
a) O volume desse cubo, em m^3.
b) Sua capacidade, em litros.

2) Agora imagine que a medida da aresta do cubo acima fosse o dobro do valor inicial. Determine:
a) O novo volume desse cubo, em m^3.
b) A nova capacidade desse cubo, em litros.

3) Determine o volume de um paralelepípedo cuja base é quadrangular de lado 3m e cuja altura vale 12 m. (Lembrando que o volume de um paralelepípedo pode ser calculado pelo produto **área de sua base x altura** ou pelo produto **largura x comprimento x altura**).

Desafio: Observe o cilindro da figura abaixo, cujo comprimento do raio R de sua base é de 2 m e sua altura h é igual a 10 m.

h = 10 m

R = 2 m

Sabendo-se que o volume do cilindro pode ser calculado multiplicando-se a área de sua base circular (A_b) pela sua altura (h), ou seja, $V_{cilindro} = A_b \cdot h$, determine o volume desse cilindro (Para facilitar os cálculos, considere $\pi = 3$).

Figura 40: Atividade 3

Fonte: elaborado pelo autor

O mais interessante nessa atividade foi a reação dos alunos com relação ao aumento considerável do volume do cubo após a duplicação da medida de sua aresta e o clima de desafio criado por conta do cálculo do volume do cilindro, em que nem todos obtiveram sucesso na conclusão da atividade.

5.5 Atividade 4 – Uma aplicação prática

Nessa atividade, representada pela figura 41 abaixo, com o auxílio do software Geogebra, foi montada uma planta modelo de uma casa hipotética onde foram solicitados os cálculos de áreas, perímetros e volume de cômodos ou da piscina da casa. Essa atividade foi a primeira a relacionar os conteúdos trabalhados de forma mais efetiva com o cenário investigativo resultante da entrevista feita com os alunos, mostrando-se assim mais significativos para os mesmos. Após a realização da atividade, foi sugerido que os alunos comparassem os resultados encontrados e trocassem ideias sobre o que os levou àqueles resultados.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

. Conceito de perímetro de polígonos da circunferência.
. Cálculo de áreas dos principais polígonos e do círculo
. Conhecer a relação entre unidades de volume e de capacidade (em litros)

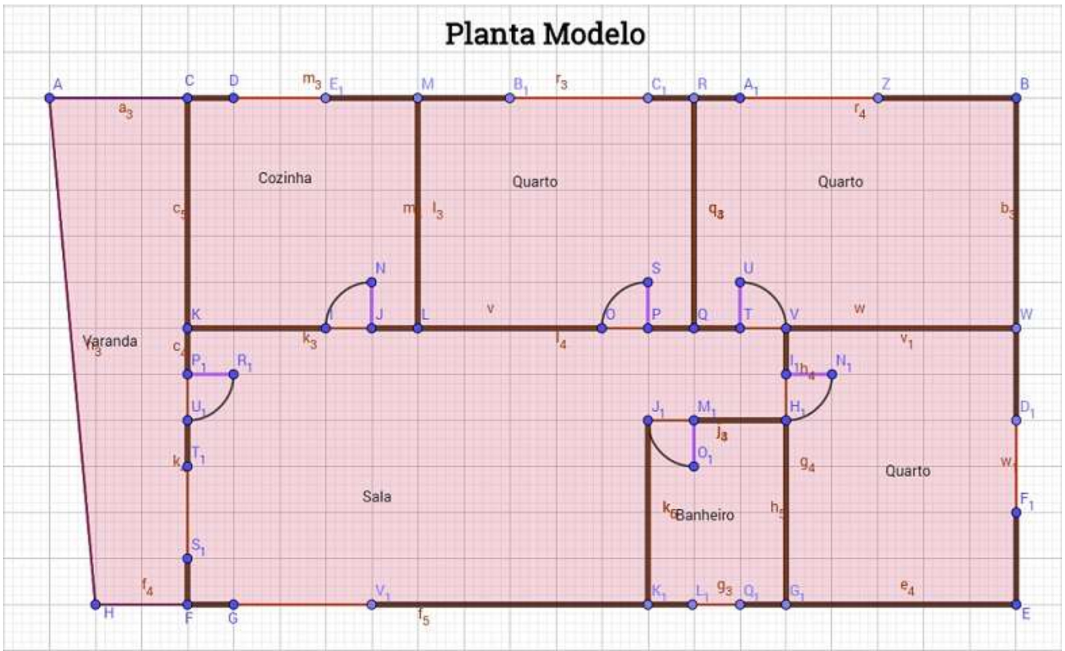
Tempo estimado para realização: 2 tempos de aula (100 minutos)

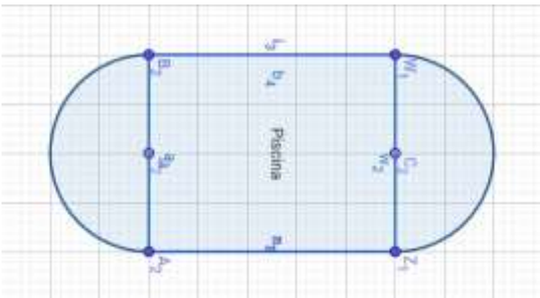
ESCOLA MUNICIPAL GONÇALVES DIAS

Atividade 4

Nome: .... Turma.:...................

Observe a figura abaixo, que representa a planta de uma casa **hipotética** e, logo abaixo, a piscina dessa casa:





Sabendo-se que o lado de cada quadradinho na malha quadriculada mede 1 m, determine:

1) A área e o perímetro de cada um dos cômodos dessa casa.

2) O comprimento da piscina e sua capacidade em litros, sabendo que a profundidade da mesma é de 1,5 m.

3) Quantos metros de rodapé serão necessários para colocar rodapé em todos os cômodos, menos na varanda.

Figura 41: Atividade 4

Fonte: elaborado pelo autor

Como dito anteriormente, o objetivo principal desta atividade foi relacionar o conteúdo estudado com algo que tivesse relação com a vida cotidiana dos educandos (baseados em seus *backgrounds*), de maneira que os mesmos se sentissem ainda mais estimulados a se envolver com o assunto, enxergando sentido em aprender o mesmo.

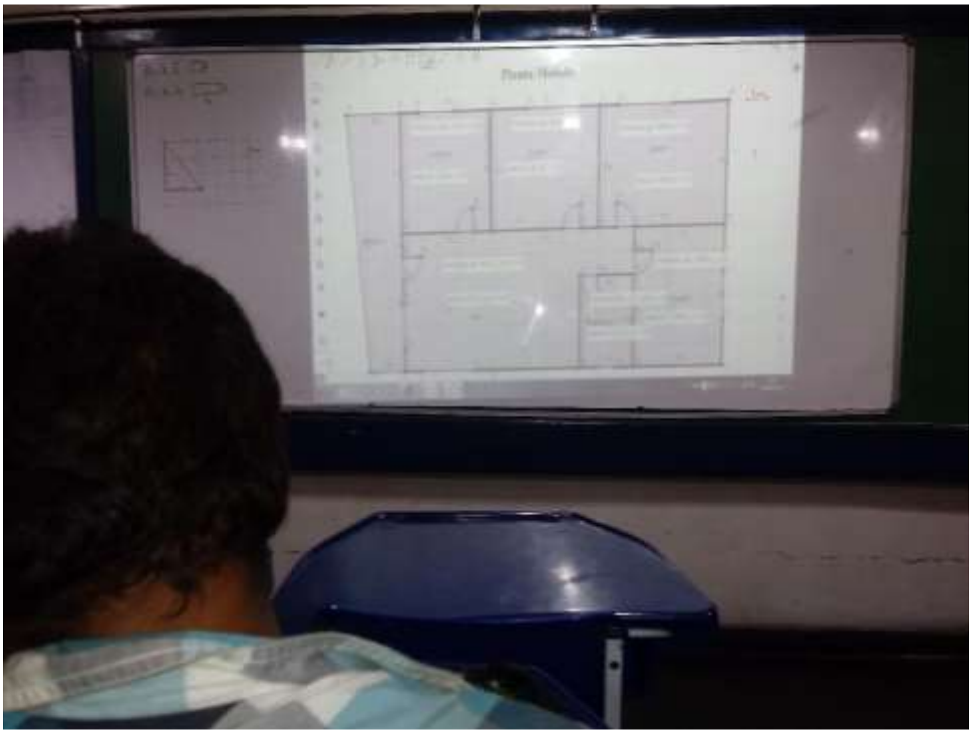


Figura 42: Aplicação da atividade 4

Nesse momento, os alunos já demonstravam maior domínio dos conteúdos e mostraram-se capazes de calcular a área e o perímetro de maneira mais confortável. Começaram a surgir, nesse momento, perguntas referentes às medidas de suas próprias casas e referentes aos seus trabalhos.

Percebeu-se também, por parte dos alunos, o levantamento de pequenos questionamentos que poderiam fazer a diferença no momento de executar, na prática, essas pequenas obras em suas vidas cotidianas, como por exemplo:

"Como medir a área da 'parede' da piscina para colocar o azulejo?"

"Se tiver que colocar um ralo no cômodo, diminui a área total dele, já que vou utilizar um pouco menos de piso?"

Esses questionamentos comprovam novamente, e de maneira satisfatória, o grau de envolvimento que a atividade conseguiu desenvolver junto aos alunos.

5.6 Atividade 5 – Perímetro, áreas e volumes influenciando no custo das construções

Esta atividade, representada pela figura 43, é uma continuação da atividade 4e continua utilizando a mesma planta da casa hipotética citada anteriormente. A atividade visa otimizar gastos para fazer algumas obras na casa hipotética, utilizando como base para essa otimização os conhecimentos sobre áreas e perímetros anteriormente trabalhados. Neste momento, questões financeiras foram discutidas e trabalhadas, uma vez que os problemas tinham relação com a realidade de grande parte dos alunos e verificou-se novamente um interesse crescente em entender bem esses problemas para construir estratégias eficientes para solucioná-los. Após a realização da atividade, foi sugerido que os alunos comparassem os resultados encontrados e trocassem ideias sobre o que os levou àqueles resultados.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

. Conceito de perímetro de polígonos.
. Cálculo de áreas dos principais polígonos.
. Conhecer o Sistema Monetário Brasileiro

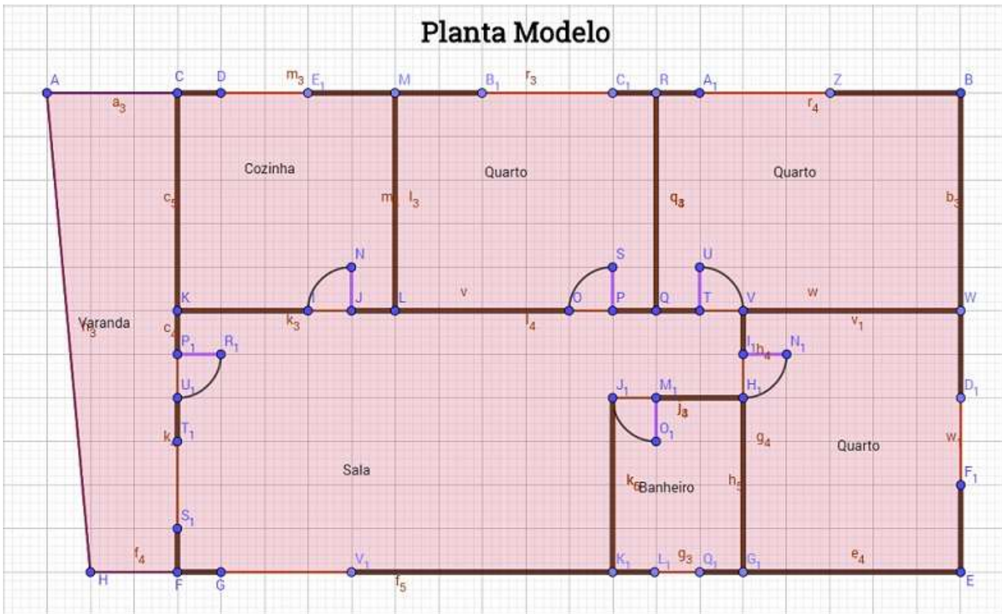
Tempo estimado para realização: 2 tempos de aula (100 minutos)

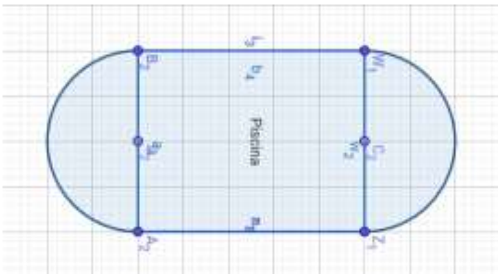
ESCOLA MUNICIPAL GONÇALVES DIAS

Atividade 5

Nome: .... Turma.:...................

Observe novamente a figura abaixo, que representa a planta de uma casa **hipotética** e, logo abaixo, a piscina dessa casa:





1) Agora que sabemos a área de cada um dos cômodos (após resolver a atividade 4), suponha que 1 m^2 de piso numa loja hipotética esteja custando R$ 14,00. Determine o custo total para se colocar piso em todos os cômodos.

2) Agora que sabemos quantos metros de rodapé são necessários para colocar em todos os cômodos, exceto na varanda (após resolver a atividade 4), suponha que o rodapé seja feito a partir do corte de placas quadradas de piso de 1 m^2 (o mesmo da questão 1) e que o rodapé possua 10 cm de largura. Determine o custo para colocar todo o rodapé previsto nos cômodos.

Figura 43: Atividade 5

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 44: Execução da atividade 5

Essa atividade foi a que despertou maior interesse dos alunos, uma vez que a questão da utilização dos conceitos de perímetro, área e volume para a elaboração de um orçamento para fazer determinada obra foi identificado como algo muito útil para a vida de muitos deles, já que eventos como esse (pequenas obras) eram muito comuns em suas vidas cotidianas.

5.7 Atividade 6 – Um quiz.

Nessa atividade, utilizando o recurso computacional educacional disponível no site KAHOOT.IT, foi realizado um quiz de perguntas e respostas envolvendo perímetros, áreas e volumes. Os alunos se organizaram em duplas formadas com pelo menos um aluno que tivesse habilidade com o uso de celulares e/ou computadores. O kahoot.it é uma plataforma de recursos computacionais educacionais que permite, dentre outras atividades, a realização de quiz com um grupo de educandos que tenham cada um à sua disposição um celular ou um computador com acesso à internet para responder às perguntas (de múltipla escolha) do quiz a partir de seus dispositivos. Uma das questões do quiz (que é um arquivo digital que pode ser salvo na plataforma na conta do usuário), está representado pela figura 45 abaixo:

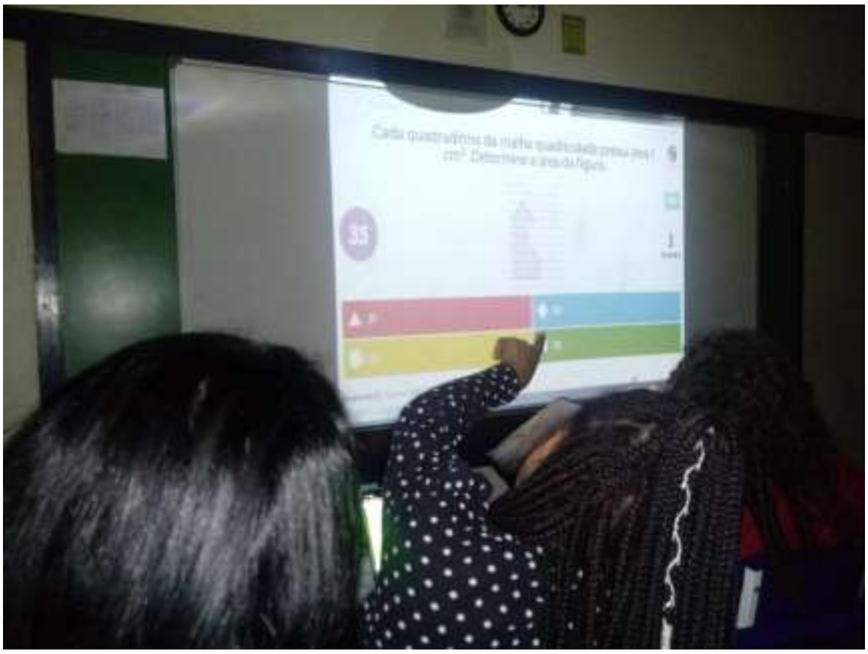


Figura 45: Aplicação da atividade 6

O principal objetivo dessa atividade foi, além de rever os conteúdos trabalhados sob uma outra ótica, promover uma aproximação dos alunos menos envolvidos com tecnologia (em sua maioria os alunos mais velhos) com os recursos tecnológicos básicos e contemporâneos que a maioria das pessoas têm acesso e, mais uma vez, promover a valorização do diálogo no processo de aprendizagem.

Pré-requisitos para a realização da atividade:

. Conceito de perímetro de polígonos da circunferência.
. Conceito de áreas dos principais polígonos e do círculo
. Conhecer a relação entre unidades de volume e de capacidade (em litros)

Tempo estimado para realização: 2 tempos de aula (100 minutos)

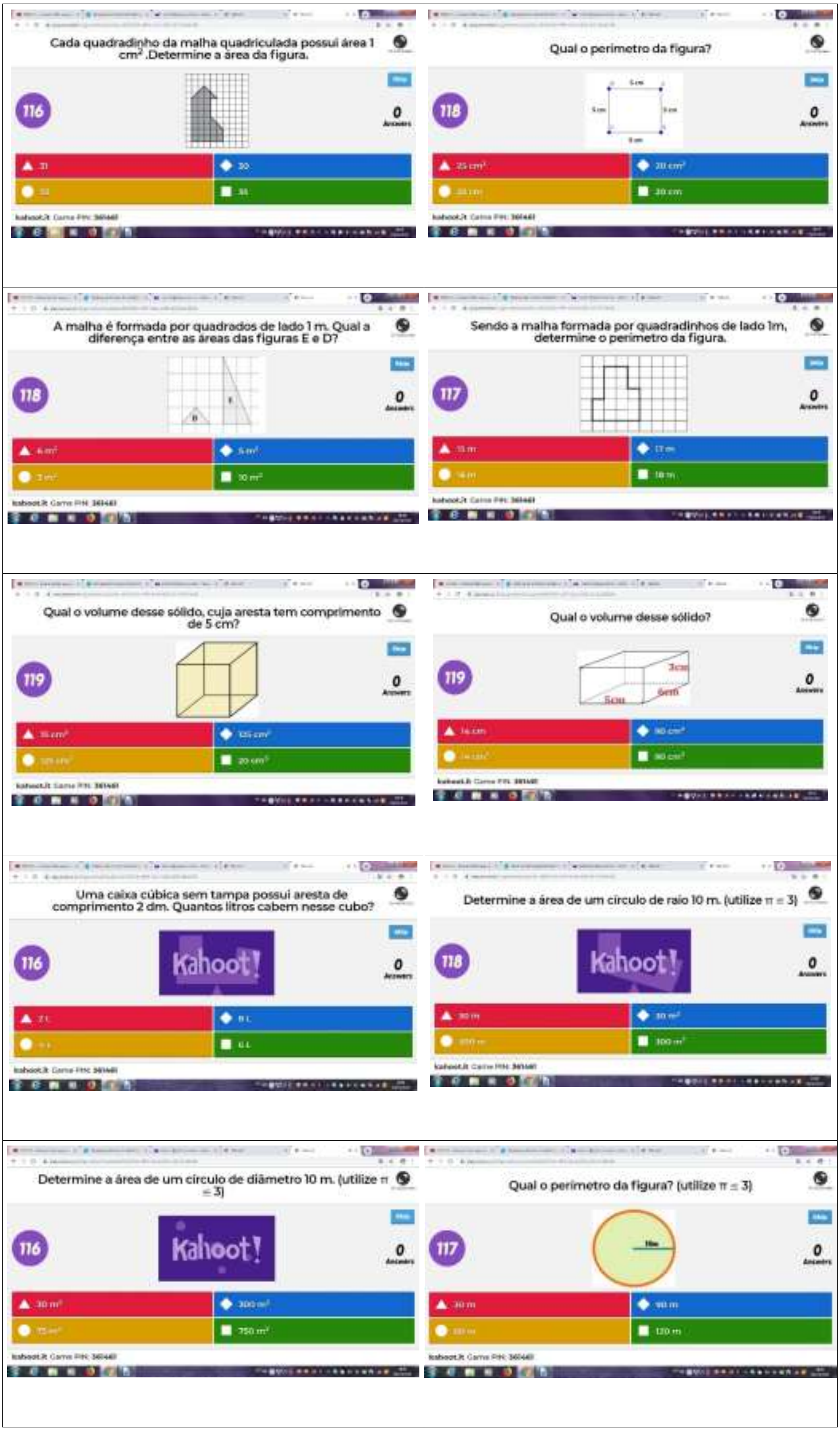


Figura 46: Questões aplicada no quiz.

Nessa atividade, percebeu-se uma saudável troca de ideias da dupla durante o quiz, o que estimulou um produtivo debate sobre os conteúdos trabalhados e proporcionou uma maior interação dos educandos com o objetivo de solucionar os problemas propostos. Foi importante também para frisar com os educandos que o avanço tecnológico no mundo é algo inevitável e que é indispensável nossa constante adaptação a esse novo mundo em diversos setores, como no trabalho, em nossos círculos sociais, etc. e não somente na escola.

5.8 O olhar dos alunos participantes

A figura 47 resume uma breve avaliação realizada com os alunos participantes da aplicação das atividades. Analisando-se os gráficos, percebe-se que a maioria dos alunos avaliou a proposta de forma positiva. Porém, vale ressaltar que alguns se mostraram um pouco resistentes quanto às mesmas e, a fala recorrente é que a atividade fugia do "padrão" de aula que estavam acostumados. Vale lembrar que em turmas de PEJA, a faixa etária é muito heterogênea e assim, enquanto alguns esperam modelos de aula da escola tradicional, outros anseiam, cada vez mais, uma escola do século XXI. Mas é importante relatar, que todos saíram ganhando em criticidade, reflexão e conteúdo obtidos com as trocas, com os debates e com a possibilidade de utilização de novos recursos.

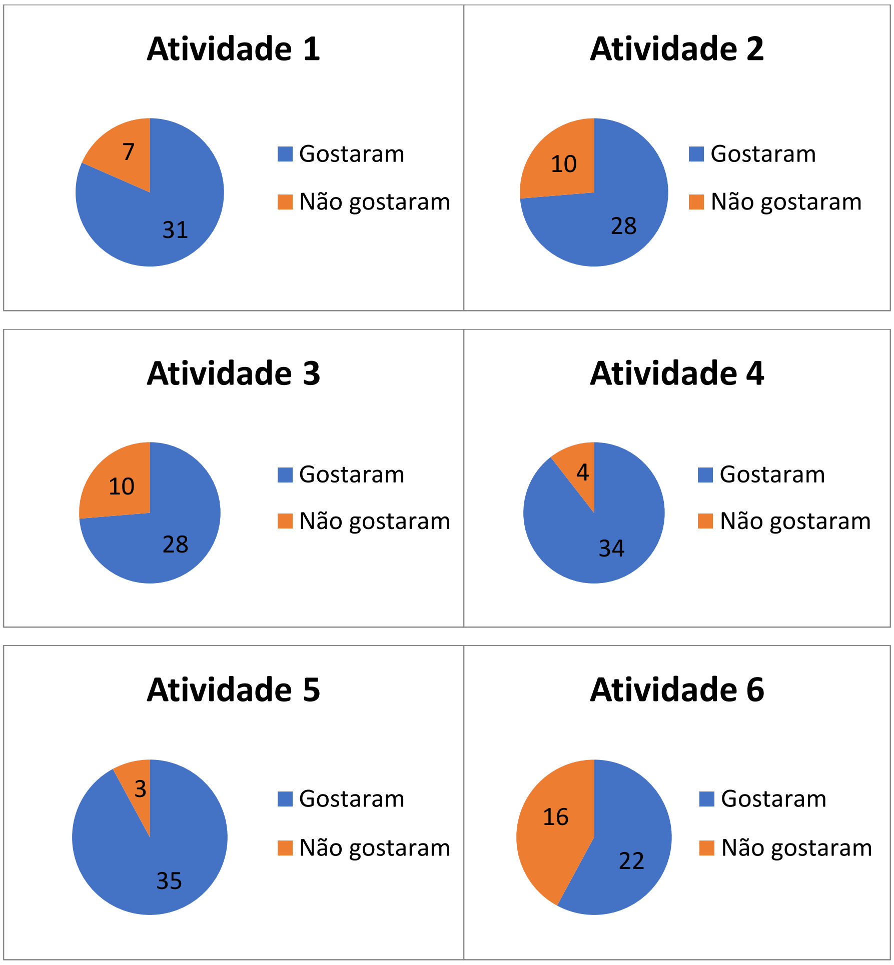


Figura 47: Avaliação das atividades por parte dos alunos

Observa-se que as atividades que foram mais bem avaliadas foram as atividades 4 e 5. Essas foram as atividades que mais se identificavam com suas vidas cotidianas e isso acabou sendo um fator motivacional para a execução das mesmas em busca das soluções corretas.

Observa-se também que a atividade que obteve maior avaliação negativa foi a atividade 6, relativa ao quiz. Foi notório o desconforto de alguns alunos, em especial os de mais idade, nessa atividade que envolvia dispositivos tecnológicos contemporâneos (celulares, tablets e computadores). Por outro lado, os alunos mais jovens (na faixa de 20 a 30 anos) mostraram-se bastante entusiasmados com a dinâmica. Essa atividade deixou bem clara a questão da afinidade com o uso da tecnologia por parte de alguns alunos e a falta de afinidade por parte de outros.

6
Considerações finais

A ideia principal desse trabalho foi buscar formas alternativas de se abordar, junto aos educandos do PEJA, questões geométricas (especificamente perímetros, áreas e volumes) de modo que o processo de aprendizagem se tornasse mais eficiente. Essa ideia baseou-se, inicialmente, na busca (mediante pesquisa) e criação de um cenário de investigação propício para a instauração de um ambiente democrático e significativo de aprendizagem, onde o pensamento crítico baseado no diálogo e nas trocas fossem as principais ferramentas do processo de ensino-aprendizagem. Com esse olhar, uma sequência de atividades foi criada e estas foram aplicadas no chão da sala de aula.

O início da aplicação das atividades foi marcado por certa desconfiança por parte de alguns alunos por conta de estarem participando de uma aula com dinâmica diferente da sua rotina escolar. Porém, percebeu-se considerável elevação da motivação dos alunos para a realização das mesmas à medida em que as trocas de saberes, os debates sobre o tema e a utilização de recursos diversos (softwares, papel, jogos) foram sendo apresentados. A pesquisa, baseada nos foregrounds e backgrounds dos alunos, mostrou-se eficiente na busca da construção de um cenário investigativo que atendesse satisfatoriamente a maioria dos educandos, desenvolvendo um maior envolvimento dos mesmos com as atividades, onde boa parte dos mesmos conseguiram relacioná-las com fatos de suas vidas cotidianas.

Alguns alunos, inclusive, reproduziram os mesmos conceitos aprendidos nas atividades em suas próprias vidas, trazendo nas aulas seguintes dúvidas para serem esclarecidas, sejam com o professor, sejam com colegas.

Observou-se, uma troca positiva de ideias, estratégias e conteúdos motivada pelo diálogo sobre um assunto que se mostrou potencialmente significativo para todos, o que valorizou a instauração de um ambiente democrático de construção do conhecimento, valorizando as relações de ensino-aprendizagem sejam elas do tipo professor-aluno ou aluno-aluno.

Nem mesmo a questão da maior facilidade com cálculos apresentada por alguns alunos ou o maior domínio dos recursos tecnológicos (utilizados em algumas atividades) apresentado por outros foi capaz de minimizar a participação de todos nas atividades. A potencialização do diálogo motivada pelo cenário de investigação bem escolhido acabou por minimizar esse problema, uma vez que todos mostraram-se motivados a contribuir de alguma forma com a solução dos problemas propostos, cada um dentro de suas possibilidades.

Diante desses resultados, percebe-se que um dos maiores desafios dos professores de matemática de hoje é desmistificar a disciplina e apresentá-la com significado mostrando as inúmeras aproximações que podem ser feitas com a realidade de cada um. Acreditamos que passo a passo, esse caminho é possível e convidamos outros professores da educação básica a percorrer esse caminho.

7
Referências bibliográficas

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J.; **Novo Praticando Matemática***,* Vol 4, 1 ed, São Paulo, Editora do Brasil, 2006.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK J. D.; H. HANESIAN. **Psicologia Educacional**. 2 EDIÇÃO. Editora: Interamericana. 1980.

ALMEIDA, A., **A Educação De Jovens e Adultos: Aspectos Históricos e Sociais***,* 2015*. Disponível em:* <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/22753_10167.pdf> . Acesso em: 21/05/2019.

BRASIL, **Ministério Da Educação**, 2012. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/34167>. Acesso em: 21/05/2019.

BRASIL, **IBGE**, 18/05/2018, Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/21255-analfabetismo-cai-em-2017-mas-segue-acima-da-meta-para-2015> . Acesso em: 21/05/2019.

BRASIL, C. C. **História da Alfabetização de Adultos: de 1960 até os dias de hoje**. 2005. 8f. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília – Brasília, 2005. Disponível em <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/CristianeCostaBrasil.pdf>. Acesso em: 20/05/2019.

DA SILVA, A. C., **A Trajetória da Educação de Jovens e Adultos no Brasil***.*2017*.* Disponível em*:*<https://www.iessa.edu.br/revista/index.php/tcc/article/view/610/218> . Acesso em: 21/05/2019.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Editora Paz e Terra. 1974.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia.** Editora Paz e Terra. 60ª ed. 2019.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: Ciência e Aplicações.** Vol 2.5 ed. Editora Atual, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade, 8◦ Ano***,* 6ed. Editora Atual, 2009.

MASETTO, M. T., Mediação Pedagógica e o Uso da Tecnologia**.** In: Moran, José Manuel (org.). **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.** Campinas/SP, Ed. Papirus, 2000.

MICHAELIS, **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa.** Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/perimetro/>. Ed. Melhoramentos, 2019. Acesso em 07/09/2019.

NETO, A. C. M., **Geometria***,* Coleção ProfMat, SBM, Rio de Janeiro, 1 ed., 2013

PERNAMBUCO, 2019. **Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco.** Disponível em <https://www1.educacao.pe.gov.br/cpar/ProfessorAutor/Matem%C3%A1tica/Matem%C3%A1tica%20%20I%20%203%C2%BA%20ano%20%20I%20%20M%C3%A9dio/Volume%20da%20esfera.ppt.> Acesso em 08/09/2019.

RIO DE JANEIRO. **Orientações Curriculares: 1◦ ao 9◦ ano. Matemática**, SME-RJ, 2018.

RIO DE JANEIRO, 2018. **Secretaria Municipal de Educação. Gerência de Educação de Jovens e Adultos. Documentos Norteadores do PEJA**. Rio de Janeiro, 2018.

RIO DE JANEIRO, 2013. **Diário Oficial da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro**. Pág. 40. Data: 28/02/2013.

SANTOS, J. C. S. O., **Uma Breve História de π***.* 2019*.* Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/pi.htm>. Acesso em 18/08/2019.

SKOVSMOSE, O.; A. HELLE, **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática***.* 2 EDIÇÃO, Belo Horizonte/MG. Editora: Autêntica. 2010*.*

SKOVSMOSE, O*.* **Educação Matemática Crítica: A questão da democracia**. 6 EDIÇÃO, Campinas/SP. Editora: Papirus, 2013.

SKOVSMOSE, O. **Um Convite à Educação Matemática Crítica: A questão da democracia**. 6 ed., Campinas/SP. Editora: Papirus, 2014.

SOARES, L. H., **Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma Proposta para a Aprendizagem de Geometria Básica**. Dissertação de Mestrado. UFPB, João Pessoa, 2009.

SOUZA, J. C. S., **Educação e História da Educação no Brasil**, 2018. Disponível em: <https://educacaopublica.cederj.edu.br/artigos/18/23/educao-e-histria-da-educao-no-brasil>. Acesso em: 21/05/2019.

TORRES, A. F. N.; FELIX, F. J.; MEIRA, G. G.. **Reflexões Sobre Educação Matemática Crítica na Obra de Ole Skovsmose.** Disponível em:<http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA8_ID321_08092015172345.pdf >. Acesso em 08/10/2019.

8

Anexos

Anexo 1:

ESCOLA MUNICIPAL GONÇALVES DIAS

Questionário 1

Nome: ....Turma: ....

Responda com seriedade e sinceridade às questões abaixo:

1) Você vê a matemática na sua vida como algo importante ou apenas como uma “disciplina escolar”?

____

____

____

2) Você percebe a matemática na sua vida cotidiana, seja em casa, no trabalho ou em outro ambiente que costuma frequentar?

____

____

____

3) Você já utilizou em sua casa ou no seu trabalho algum instrumento de medição (trena, fita métrica, copo de medida, etc)?

____

____

____

4) Você já fez alguma obra em sua casa, conhece alguém que já fez obra em casa ou conhece alguém que trabalha com construção civil?

5) Você sabe a capacidade, em litros, da caixa d´água da sua casa?

6) Para uma eventual obra que aconteça em sua casa, você sabe fazer uma estimativa de gastos com material (fora a mão-de-obra) com base no local da sua casa onde será realizada esta obra?

7) Você sabe a medida do terreno onde sua casa está localizada? Como você faria para obter essa informação?

8) Você sabe calcular quantos metros de cerca seriam necessários para cercar o terreno onde sua casa está localizada para evitar uma acidental "invasão" de terreno por parte de um terreno vizinho?