5
Imposição de Restrições Não Lineares: A Metodologia de Doran Estendida

Quando algumas das restrições nos vetores de estado não são de natureza linear, mas decorrentes de funções *diferenciáveis*, Doran (1992) estende a metodologia discutida no capítulo anterior de forma que o filtro e o suavizador de Kalman satisfaçam, pelo menos aproximadamente, estas imposições. A idéia é aproximar a restrição não linear por meio de uma expansão em Taylor de primeira ordem.

Para estabelecimento de notação, considere-se que a restrição no vetor de estado é dada por

$$f_t(\alpha_t) = 0 \quad , \tag{5.1}$$

sendo $f_t : R^m \to R^k$ uma função diferenciável, ou seja, a matriz Jacobiana de f representa a sua derivada. Como exemplo, tem-se $f_t(x) = A_t x - q_t$, o que faz das restrições lineares abordadas no último capítulo casos particulares da formulação proposta em (5.1).

5.1
O Algoritmo Original

A Metodologia de Doran Estendida pode ser resumida na seguinte seqüência de passos:

1) "Rodar" o Filtro de Kalman para o modelo em EE linear irrestrito, obtendo $a_{t/t}^{(0)}$. Em decorrência das boas propriedade do Filtro de Kalman (vide capítulo 3), espera-se que $a_{t/t}^{(0)}$ esteja "próximo" de α_t;
2) Aproximar a equação em (5.1) pela expansão em Taylor de primeira ordem $a_{t/t}^{(0)}$

$$0 = f_t(\alpha_t) \cong f_t(a_{t/t}^{(0)}) + \frac{\partial f_t(a_{t/t}^{(0)})}{\partial \alpha_t}(\alpha_t - a_{t/t}^{(0)})\,; \tag{5.2}$$

3) Convencionar que

$$\begin{aligned} A_t^{(0)} &= \frac{\partial f_t(a_{t/t}^{(0)})}{\partial \alpha_t} \\ q_t^{(0)} &= \frac{\partial f_t(a_{t/t}^{(0)})}{\partial \alpha_t} a_{t/t}^{(0)} - f_t(a_{t/t}^{(0)})\,; \end{aligned} \tag{5.3}$$

4) Com base nas matrizes $A_t^{(0)}$ e $q_t^{(0)}$ do passo anterior, aumentar a equação das medidas da forma apresentada no capítulo anterior;
5) "Rodar" o Filtro de Kalman para o modelo em EE modificado. Se a aproximação de Taylor for adequada, o novo filtrado $a_{t/t}^{(1)}$ deve satisfazer a restrição não linear dada em (5.1), pelo menos aproximadamente; e
6) Com o novo filtrado, repetir os passos de 2 a 5, até que se obtenha convergência.

Doran (1992) adverte para a importância do primeiro filtrado, o qual é irrestrito, para a obtenção de convergência. Embora não haja nenhuma sugestão adicional, cita-se que, se de fato existe, teoricamente, a restrição não linear, este (o filtrado) assumirá valor próximo da mesma, com "alta" probabilidade, sendo intrinsecamente, portanto, um *bom chute inicial*.

5.2
Proposta de Alteração no Algoritmo

Embora a proposta de Doran tenha sido originalmente concebida em termos de expansões em torno do filtrado, é interessante, também, que se experimente com suavizados. Devido à sua maior precisão (vide Proposição 3.3), os suavizados podem assumir valores mais próximos daqueles que satisfaçam a restrição não linear, promovendo, desta forma, uma aproximação de primeira ordem, melhor que a dada por filtrados.

5.3
Restrições de Desigualdade

A Metodologia de Doran Estendida, a qual vem sendo discutida neste capítulo, talvez possa ser "estendida um pouco mais", no intuito de abarcar a imposição de *restrições de desigualdade*. Com efeito: imagine-se, para fins de ilustração, que se tenham indícios de que a i-ésima coordenada do vetor de estado α_t tenha que ser não negativa, ou seja, que $\alpha_{t,i} \geq 0$. Ora, mas isto é satisfeito ao se conjeturar, para uma determinada *componente auxiliar* denotada por $u_{t,i}$, que $\alpha_{t,i} - u_{t,i}^2 = 0$, ou que $\alpha_{t,i} – \exp(u_{t,i}) = 0$, ou alguma outra proposta pertinente – mas que se caracterize por "restrições diferenciáveis"! Estes são exemplos de restrições de igualdade não lineares, as quais podem ser tratadas, de forma aproximada, pela Metodologia de Doran Estendida. As questões primordiais residem em:

- *como modelar de forma "correta" a componente auxiliar* $u_{t,i}$; e
- *como estabelecer a conversão da restrição de desigualdade em restrição não linear de igualdade.*

Acredita-se que esta sugestão, de implementação ainda bastante *in vitro*, pode resultar em uma solução mais eficiente computacionalmente que a modelagem em EE não linear atacada via métodos baseados de simulação.