4
Imposição de Restrições Lineares: A Metodologia de Doran

Com base nas notações e nas nomenclaturas adotadas nos dois capítulos anteriores, apresentam-se, agora, o desenvolvimento e a discussão sobre o conteúdo de Doran (1992), o qual fornece uma solução para o problema de estimação com restrições *lineares* no vetor de estado. Sendo as componentes naturais justamente as de interesse para o analista, esta metodologia se caracteriza, então, como a primeira das soluções a serem apresentadas para o problema central da Dissertação (imposição de restrições às componentes de interesse de um modelo em EE). Ilustrações práticas desta tecnologia serão apresentadas no capítulo 8.

Como principal contribuição deste capítulo, apresenta-se e prova-se os resultados que garantem a eficiência, citada por Doran (1992) porém não deduzida rigorosamente, desta Metodologia comparada ao uso de Filtro de Kalman sem imposição de restrições lineares. Como poderá ser visto na ocasião, as demonstrações, embora relativamente técnicas, são elegantes e baseadas essencialmente em argumentos geométricos inerentes aos Espaços de Hilbert.

4.1
Restrições nos Filtrados

Suponha-se que o vetor de estado α_t, teoricamente, satisfaz a restrição linear

$$A_t\alpha_t = q_t \ , \tag{4.1}$$

na qual A_t é uma matriz $k \times m$ e q_t é um vetor de dimensão k, sendo que $k < m$. Como devidamente indicado pelo índice t, os outros vetores podem ou não satisfazer restrições e, em caso afirmativo, estas restrições podem variar ao longo do tempo, tanto em tipo quanto em número. Note-se que q_t pode ser estocástico.

Um objetivo bem razoável seria, de alguma maneira, impor que o resultado das recursões de Kalman satisfizesse esta restrição teórica. Para as equações de atualização, isto é possível, como garante o

Teorema 4.1. *Se o vetor das medidas* Y_t *for substituído por* $Y_t^* = (Y_t' , q_t')'$ *, a matriz do sistema* Z_t *for substituída por* $Z_t^* = [Z_t' \ A_t']'$ *, e o vetor de erros da equação das medidas* ε_t *for substituído por* $\varepsilon_t^* = (\varepsilon_t' , 0')'$ *, então as equações de atualização do Filtro de Kalman dadas em* (3.3) *satisfazem as mesmas restrições de* (4.1)*, isto é,*

$$A_t a_{t/t} = q_t. \tag{4.2}$$

<u>Prova</u>: Vide Doran (1992). □

Logo, para que o Filtro de Kalman gere atualizados que respeitem as restrições lineares desejadas, a única providência que deve ser tomada é a adoção de um modelo em EE modificado – isto é, utiliza-se uma equação das medidas devidamente aumentada. Observe-se que estas alterações induzem diretamente a outras. Por exemplo, a matriz H_t deve ser substituída $H_t^* = \begin{pmatrix} H_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, na qual os zeros são matrizes nulas com dimensões apropriadas[1].

Uma conseqüência importante deste último teorema é dada a seguir.

Corolário 4.2. *Se algumas das equações univariadas do vetor de medidas abrangerem variâncias nulas para as correspondentes coordenadas do vetor de erros* ε_t*, então*

$$Z_{t2} a_{t/t} = Y_{t2} \quad , \tag{4.3}$$

[1] Eventualmente, a matriz nula do canto inferior direito pode (ou deve!) ser substituída por uma matriz diagonal com elementos positivos e "pequenos" no decorrer da diagonal principal. Isto decorre de possíveis problemas numéricos que possam surgir durante a filtragem de Kalman para o modelo modificado.

onde Z_{t2} é o bloco de Z_t correspondente ao bloco Y_{t2} de Y_t cujas coordenadas possuem erros de variância nula.

Prova: Basta ver que Y_t pode ser escrito como $[Y_{t1}' \;\; Y_{t2}']'$ e que Z_t pode ser escrita como $[Z_{t1}' \;\; Z_{t2}']'$. Denotando-se $A_t = Z_{t2}$ e $q_t = Y_{t2}$, e usando o Teorema 4.1, tem-se o resultado. □

4.2
Restrições nos Suavizados

A Metodologia de Doran é mais recursal do que o que foi apresentado na seção anterior, já que o mesmo procedimento, qual seja, o de se alterar o modelo em EE da maneira então descrita, restringe, convenientemente, não só o *output* do vetor de estado atualizado, mas, também, o do vetor de estado suavizado. O Teorema a seguir estabelece este resultado de forma precisa e, de certa maneira, é mais importante do que sua contrapartida da seção anterior, pois, na prática, as componentes suavizadas são mais visadas do que as atualizadas, devido à hierarquia de precisão referente à Proposição 3.3 dada no capítulo anterior.

Teorema 4.3. *Se o vetor das medidas Y_t for substituído por $Y_t^* = (Y_t' \, , \, q_t')'$, a matriz do sistema Z_t for substituída por $Z_t^* = [Z_t' \;\; A_t']'$, e o vetor de erros da equação das medidas ε_t for substituído por $\varepsilon_t^* = (\varepsilon_t' \, , \, 0')'$, então as equações do suavizador do intervalo fixo de Kalman dadas em (3.5) satisfazem as mesmas restrições de (4.1), isto é,*

$$A_t \hat{\alpha}_t = q_t \tag{4.4}$$

Prova: Por conveniência, apresentam-se, novamente, as equações do suavizador para o vetor de estado, referentes ao modelo em EE já devidamente alterado:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_t &= a_t + P_t r_{t-1}\\ r_{t-1} &= Z_t^{*'} F_t^{-1} \upsilon_t + (T_t - T_t P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} Z_t^{*})' r_t\end{aligned}$$, onde $Z_t^* = \begin{bmatrix} Z_t \\ A_t \end{bmatrix}$. É claro que outras quantidades também careceriam de um asterisco, mas este será suprimido de forma a facilitar a notação.

Substituindo-se a expressão de r_t devidamente na expressão de $\hat{\alpha}_t$, obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_t &= a_t + P_t (Z_t^{*'} F_t^{-1} \upsilon_t + (T_t - T_t P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} Z_t^{*})' r_t)\\ &= a_t + P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} \upsilon_t + P_t (T_t - T_t P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} Z_t^{*})' r_t\\ &= (\text{por } (3.3)) = a_{t/t} + (P_t T_t' - P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} Z_t^{*} P_t T_t') r_t\end{aligned}$$

Pré-multiplicando ambos os lados por A_t, obtém-se

$$A_t \hat{\alpha}_t = A_t a_{t/t} + (A_t P_t T_t' - A_t P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} Z_t^{*} P_t T_t') r_t$$

De acordo com a equação (22) de Doran (1992), cuja dedução faz parte do corpo da demonstração do Teorema 4.1, tem-se que $A_t P_t Z_t^{*'} F_t^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{kxp} & I_{kxk} \end{bmatrix}$. Além disso, pelo Teorema 4.1, já se sabe que $A_t a_{t/t} = q_t$. Logo,

$$\begin{aligned}A_t \hat{\alpha}_t &= q_t + \left(A_t P_t T_t' - [0 \quad I] \begin{bmatrix} Z_t \\ A_t \end{bmatrix} P_t T_t' \right) r_t\\ &= q_t + \left(A_t P_t T_t' - A_t P_t T_t' \right) r_t = q_t \quad ,\end{aligned}$$

a qual é a restrição desejada. □

Este último Teorema foi demonstrado em Doran (1992) com base na formulação original do suavizador do intervalo fixo de Kalman, o qual, como foi discutido no capítulo 3, apresenta diversos entraves teóricos e práticos.

Como conseqüência imediata e importante, tem-se a seguinte extensão do Corolário 4.2.

Corolário 4.4. *Se algumas das equações univariadas do vetor de medidas abrangerem variâncias nulas para as correspondentes coordenadas do vetor de erros* ε_t*, então*

$$Z_{t2}\hat{\alpha}_t = Y_{t2} \quad , \tag{4.5}$$

onde Z_{t2} *é o bloco de* Z_t *correspondente ao bloco* Y_{t2} *de* Y_t *cujas coordenadas possuem erros de variância nula.*

Prova: Análoga à do Corolário 4.2, sendo que agora se usa Teorema 4.3 para a conclusão final. □

Os Corolários 4.2 e 4.4 foram usados convenientemente em uma aplicação de estimação de totais populacionais em Doran (1996).

Como formas de ser verificada a validade "aproximada" das restrições teóricas dadas pela expressão em (4.1), sugerem-se

- a comparação entre os resultados obtidos via a aplicação das recursões de Kalman ao modelo em EE original e aqueles decorrentes da aplicação da Metodologia de Doran. Por exemplo, a magnitude dos erros de previsão um passo à frente das medidas, ou dos erros filtrados, ou até mesmo dos erros suavizados, pode ser comparada;
- Também podem ser improvisadas medidas do tipo *pseudo* R^2. Doran (1996), por exemplo, adota o quadrado das correlações entre as observações e os previstos um passo à frente como tal medida. Doran e Rambaldi (1997), por sua vez, oferecem a mesma proposta, só que substituem os previstos um passo à frente pelos suavizados; e
- Outra forma bastante interessante e intuitiva de se checarem as validades das restrições impostas seria através da análise das inovações (vide seção 7.5 desta Dissertação). Se as restrições são "corretas", espera-se que as inovações oscilem em torno de 0 (zero), indicando ausência de viés.

4.3
Restrição nos Previstos

Embora a proposta original de Doran não garanta, *em geral*, restrições aos previstos um passo à frente provenientes das equações dadas em (3.2) ou (3.4), é importante registrar que, sob um tipo específico de representação em EE, existe a garantia de que o previsto um passo à frente, diga-se, em t+1, satisfaça sempre a restrição imposta no instante anterior, ou seja, em t. O resultado seguinte, decorrente do Teorema 4.1, sintetiza a idéia.

Corolário 4.5. *Sob as condições apresentadas no Teorema 4.1, adicionadas a* (i) $c_t = 0$ *e* (ii) $T_t = I$ *, então*

$$A_t a_{t+1} = q_t \tag{4.6}$$

Prova: $A_t a_{t+1}$ = (equação (3.2) e os pressupostos (i) e (ii)) = $A_t a_{t/t} = q_t$.□

Não é difícil estender este resultado para previsões h passos à frente, sendo h genérico, para o caso em que $T_j = I$ e $c_j = 0$, para j = t, t+1, ..., t+h-1.

4.4
Eficiência da Metodologia de Doran em Relação à Estimação Irrestrita

> "Em algumas situações, é possível ocorrer que informações adicionais estejam disponíveis na forma de restrições variantes no tempo do vetor de estado. Incorporação destas informações irá, obviamente, aumentar a eficiência da estimação."
>
> Doran (1992)

Embora esta citação esteja em sintonia com o fato recorrente de que a incorporação de informações não amostrais em modelagens estatísticas induzem, geralmente, ajustes mais eficazes de modelos e análises mais consistentes e interpretáveis, ela não foi corroborada, tanto no artigo correspondente quanto em artigos posteriores sobre o assunto, através de argumentos matematicamente rigorosos.

O propósito desta seção é justamente provar o que foi afirmado em Doran (1992), ou seja, deduzir rigorosamente que a utilização das recursões de Kalman com o modelo em EE linear aumentado com base nas restrições em (4.1) gera estimadores mais eficientes do vetor de estado – em termos de erro médio quadrático – do que a utilização das mesmas com o modelo original. Para tanto, é preciso que alguns tópicos concernentes à Análise Funcional sejam debatidos. As referências utilizadas para a dialética que se que são Reed e Simon (1980), o capítulo 2 de Brockwell e Davis (1991) e, principalmente, Kubrusly (2001).

Lembrando que as coordenadas dos vetores de estado e dos vetores das medidas são variáveis aleatórias de segunda ordem definidas em (Ω, Λ, P), então estas são *pontos*[2] do espaço de Hilbert $L_2 \equiv L_2(\Omega, \Lambda, P)$, cujo produto interno é definido ponto a ponto por $<X,Y> \equiv E(XY)$, $\forall X,Y \in L_2$, e norma induzida por este produto interno é dada ponto a ponto por $||X|| \equiv [E(X^2)]^{1/2}$, $\forall X \in L_2$. Este espaço, como qualquer outro que seja de Hilbert, admite, para qualquer subespaço (linear fechado) $S \subseteq L_2$, uma *única projeção ortogonal* P_S *sobre* S. Como propriedades básicas desta projeção, citam-se sua condição de transformação linear e os fatos de que, para qualquer ponto X de L_2, X - $P_S(X)$ é ortogonal a S e a norma de X - $P_S(X)$ é mínima. Em termo do operador esperança, estas últimas duas propriedades são descritas por $E\left[\left(X - P_S(X)\right)Y\right] = 0 , \forall Y \in S,$ e por $E\left(X - P_S(X)\right)^2 = \inf_{Y \in S} E\left(X - Y\right)^2$.

Agora, com base nestas questões, é estabelecida a seguinte notação:

- S' é o subespaço de L_2 gerado pelas medidas associadas ao modelo em EE original não aumentado até o instante j, isto é, $\{Y_{11}, ..., Y_{1p}, ..., Y_{j1}, ..., Y_{jp}\}$;

---

[2] De forma mais rigorosa, estes pontos, na realidade, são *classes de equivalência*, cuja relação de equivalência subjacente é: duas variáveis aleatórias X e Y são equivalentes - e se escreve X ~ Y - se, e somente se, X = Y quase certamente. Sem perda de generalidade, e levando-se em conta que as variáveis aleatórias em tela são representantes de tais classes, esta distinção técnica ficará subentendida no texto.

- $a_{t/j}$ é o vetor aleatório com as imagens empilhadas da projeção ortogonal sobre S' correspondentes aos elementos do vetor de estado $\alpha_t = (\alpha_{t1}, ..., \alpha_{tm})$. Denote-se o i-ésimo elemento de $a_{t/j}$ por $a_{ti/j}$, i = 1, ..., m;
- $P_{t/j} \equiv E\left[(\alpha_t - a_{t/j})(\alpha_t - a_{t/j})'\right]$;
- S" é o subespaço de L_2 gerado pelas medidas associadas ao modelo em EE aumentado até o instante j, isto é, $\{Y_{11}, ..., Y_{1p}, q_{11}, ..., q_{1k}, ..., Y_{j1}, ..., Y_{jp}, q_{j1}, ..., q_{jk}\}$;
- $a^*_{t/j}$ é o vetor aleatório com as imagens empilhadas da projeção ortogonal sobre S" correspondentes aos elementos do vetor de estado $\alpha_t = (\alpha_{t1}, ..., \alpha_{tm})$. Denote-se o i-ésimo elemento de $a^*_{t/j}$ por $a^*_{ti/j}$, i = 1, ..., m;
- $P^*_{t/j} \equiv E\left[(\alpha_t - a^*_{t/j})(\alpha_t - a^*_{t/j})'\right]$.

A partir desta notação, apresenta-se o Teorema que possibilitará, mais adiante, garantir a eficiência da Metodologia de Doran.

Teorema 4.6. $P^*_{t/j} \leq P_{t/j}$ *, na ordenação usual das matrizes simétricas*

.

<u>Prova</u>: Seja i = 1, ..., n. Como o conjunto de medidas até o instante j do modelo original está contido no conjunto de medidas até o instante j do modelo aumentado, tem-se então que S'⊆S". Daí, $a_{ti/j} \in$S". Logo, por propriedades da projeção ortogonal, tem-se que

$$E\left(\alpha_{ti} - a^*_{ti/j}\right)^2 = \inf_{Y \in S''} E\left(\alpha_{ti} - Y\right)^2 \leq E\left(\alpha_{ti} - a_{ti/j}\right)^2.$$

Então, sob função de perda quadrática (ou seja, o erro médio quadrático), α_{ti} é estimado com mais precisão por $a^*_{ti/j}$ do que por $a_{ti/j}$.

Generalizando, agora fixe-se $x = (x_1, ..., x_1) \in R^m$. Por linearidade, as projeções ortogonais sobre S' e sobre S", ambas avaliadas em $x'\alpha_t = x_1\alpha_{t1} + ... + x_m\alpha_{tm}$, são dadas, respectivamente, por

$$x'a_{t/j} = x_1 a_{t1/j} + \dots + x_m a_{tm/j}$$

e

$$x'a^*_{t/j} = x_1 a^*_{t1/j} + \dots + x_m a^*_{tm/j}.$$

Observando-se que $x'a_{t/j} \in S''$ (com efeito: $a_{ti/j} \in S''$ $\forall$ i = 1, ..., m e S'' é subespaço linear), tem-se, então, que

$$\begin{aligned}
x'P^*_{t/j}x &= x'E\left[(\alpha_t - a^*_{t/j})(\alpha_t - a^*_{t/j})'\right]x = E\left[x'(\alpha_t - a^*_{t/j})(\alpha_t - a^*_{t/j})'x\right] \\
&= E\left[(x'\alpha_t - x'a^*_{t/j})(x'\alpha_t - x'a^*_{t/j})'\right] = E(x'\alpha_t - x'a^*_{t/j})^2 \\
&= \inf_{Y \in S''} E(x'\alpha_t - Y)^2 \leq E(x'\alpha_t - x'a_{t/j})^2 \\
&= E\left[(x'\alpha_t - x'a_{t/j})(x'\alpha_t - x'a_{t/j})'\right] = E\left[x'(\alpha_t - a_{t/j})(\alpha_t - a_{t/j})'x\right] \\
&= x'E\left[(\alpha_t - a_{t/j})(\alpha_t - a_{t/j})'\right]x = x'P_{t/j}x .
\end{aligned}$$

Como x é arbitrário, conclui-se então que $P^*_{t/j}$ é, de fato, menor ou igual a $P_{t/j}$. □

Como já citado no capítulo 3, as recursões de Kalman fornecem as projeções (isto é as imagens da única projeção ortogonal) dos elementos do vetor de estado α_t sobre o subespaço gerado pelas coordenadas das medidas até um determinado instante de tempo; em geral, até t-1 (previsão 1 passo à frente), ou até t (atualização), ou até n (suavização). Logo, combinando este fato com o Teorema 4.6, obtem-se finalmente o

Corolário 4.7. *As equações de previsão, as equações de atualização do Filtro de Kalman e o Suavizador do Intervalo Fixo de Kalman fornecem estimadores mais eficientes do vetor de estado quando combinados ao modelo aumentado do que quando aplicados ao modelo original. Em outras palavras, a Metodolgia de Doran é mais eficiente do que a aplicação usual do Filtro de Kalman sem imposição de restrições lineares.*

Prova: Basta fazer j = t-1, t e n no Teorema 4.6. □

Logo, com estes desenvolvimentos, conclui-se que, uma vez identificada a veracidade de restrições lineares para o vetor de estado, é sugerida a sua adoção com base na Metodologia de Doran descrita neste capítulo, pois, além de gerar atualizados e suavizados que satisfaçam tais restrições, há a garantia estatística de que estes estimadores são mais eficientes do que suas contra partes irrestritas.