2
Modelos em Espaço de Estado Lineares: Formulação Geral

2.1
Definição Geral de um Modelo Linear

Apresenta-se uma definição de modelos em EE lineares que seja a mais geral e flexível possível, e que segue bastante o estilo de Brockwell e Davis (1996), mas que estabelece uma notação mais próxima daquelas adotadas nos livros Harvey (1989), Harvey (1993) e Durbin e Koopman (2001a).

Definição 2.1. *Seja* $Y_t = (Y_{t1}, \ldots, Y_{tp})$*,* $t = 1, 2, \ldots$*, um processo estocástico p-variado observável definido em algum espaço de probabilidade* (Ω, Λ, P)*. Diz-se que* Y_t *tem uma representação em Espaço de Estado linear se existem duas equações, uma das medidas e outra do estado, dadas respectivamente por*

$$\begin{gathered} Y_t = Z_t\alpha_t + d_t + \varepsilon_t \\ \alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + c_t + R_t\eta_t \\ t = 1, 2, \ \ldots \ , \end{gathered} \tag{2.1}$$

nas quais:

- α_t *é um processo estocástico m-variado, em geral não observável, chamado de vetor de estado ou simplesmente de estado.*
- ε_t *é um processo estocástico p-variado, em geral não observável, de segunda ordem, chamado de erro da equação das medidas, com vetor de médias nulo e com matriz de covariâncias não negativa definida* H_t.
- η_t *é um processo estocástico r-variado, em geral não observável, de segunda ordem chamado de erro da equação do estado, com vetor de médias nulo e com matriz de covariâncias não negativa definida* Q_t.
- α_1 *é um vetor aleatório m-variado de segunda ordem com vetor de médias* a_1 *e matriz de covariâncias não negativa definida* P_1.

- ε_t , η_s *e* α_1 *são vetores aleatórios não correlacionados, para quaisquer instantes* t *e* s.
- Z_t , d_t , H_t , T_t , c_t , R_t *e* Q_t *são as matrizes do sistema, com dimensões apropriadas, de natureza determinística e conhecida ou, no máximo, dependentes de termos passados (isto é, até* t-1 *no caso das matrizes* Z_t *,* d_t, e H_t, *e até* t *no caso das matrizes* T_t *,* c_t *,* R_t *e* Q_t*) do processo* Y_t.

São pertinentes os seguintes comentários acerca desta última definição, os quais proporcionam novas definições particulares:

1) De forma mais direta, quando um processo estocástico p-variado Y_t se encaixa nos pressupostos acima, diz-se que Y_t *segue um modelo em Espaço de Estado linear* ou que *está em uma forma de Espaço de Estado linear*.
2) Quando ε_t, η_s *e* α_1 têm distribuições normais e são *independentes* para quaisquer t e s, então todos os vetores aleatórios do modelo também terão necessariamente distribuições normais (com efeito: a dinâmica é linear). Isto ocorrendo, pode ser dito que Y_t segue um *modelo em Espaço de Estado Linear Gaussiano*. Esta nomenclatura é estabelecida em Durbin e Koopman (2001a) e em vários artigos publicados pelos mesmos autores. Em contrapartida, muitas vezes o modelo aqui definido, de pressupostos mais flexíveis, recebe o adjetivo *wide sense*.
3) Quando pelo menos uma das matrizes do sistema Z_t , d_t , H_t , T_t , c_t , R_t e Q_t depende de componentes passadas do processo Y_t e/ou, além disso, ε_t , η_t e α_1 têm distribuições condicionais normais e são condicionalmente independentes (dado todas as medidas passadas), Harvey (1989) denomina este modelo de *condicionalmente Gaussiano*. Esta classe de modelos ainda pode ser tratada da mesma forma, mas é possível, contudo, que surjam alguns problemas analíticos/operacionais, como por exemplo, a prática de previsões e de diagnósticos. Alguns aprofundamentos, inclusive com base em exemplos, sobre modelos deste tipo podem ser consultados em Harvey (1989).

4) Quando pelo menos uma das matrizes Z_t , d_t , H_t , T_t , c_t , R_t e Q_t é constante ao longo do tempo, seu índice t pode ser suprimido de forma a facilitar a notação. Por exemplo, se todas estas matrizes forem constantes, então se tem um modelo em EE linear *tempo invariante*. Esta classe de modelos apresenta propriedades interessantes e úteis, as quais facilitam a parte computacional referente ao Filtro de Kalman, fruto de discussão do próximo capítulo. Desenvolvimentos e terminologias associadas a modelos tempo invariante estão disponibilizadas no capítulo 4 de Anderson e Moore (1979) e em Harvey (1989).
5) Em geral, as matrizes Z_t , d_t , H_t , T_t , c_t , R_t e Q_t costumam abranger parâmetros desconhecidos. Portanto, para ajustes do modelo em EE, passa a ser necessária a estimação destes parâmetros, sendo as práticas mais naturais os métodos da máxima verossimilhança e da *quasi* máxima verossimilhança, os quais são discutidos no capítulo 7 desta Dissertação.
6) Em algumas situações, pode ocorrer a necessidade de se fazer com que os processos ε_t e η_t apresentem algum tipo de estrutura de correlação. Isto implica em num novo tipo de modelo em EE, o qual não será abordado nesta Dissertação. Para uma discussão sobre o tema, sugere-se ao leitor que veja a seção 3.2.4 de Harvey (1989), no qual são citadas bibliografias adicionais, ou o capítulo 4 de Chui e Chen (1999) para uma abordagem mais “engenheira”.

O principal atrativo da formulação dada pelas equações em (2.1) é o de que vários modelos de séries temporais podem ser assim escritos (ou seja, podem ser representados *em uma forma de espaço de estado*) e, portanto, tratados de maneira unificada. Citam-se como exemplos, os modelos abaixo.

- Modelos estruturais para séries temporais;
- Modelos ARIMA e SARIMA com função de previsão exata;
- Modelos auto-regressivos com coeficientes variantes de forma estocástica no tempo (este é um exemplo típico de modelo condicionalmente Gaussiano);
- Modelos auto-regressivos vetoriais (VAR);

- Modelos de regressão com coeficientes fixos ou variantes de forma estocástica no tempo; e
- Modelos de volatilidade estocástica com solução aproximada.

Aos interessados nesta Teoria, sugere-se a leitura do capítulo 3 de Durbin e Koopman (2001a), o qual discute diversos exemplos de modelos representados na forma de EE linear.

Em síntese, pode ser dito que um modelo em EE linear (e também não linear, como será discutido em capítulos posteriores), além de certamente estar, em uma situação prática, representando um modelo de séries temporais já conhecido e bem estabelecido na bibliografia, fornece, em muitas ocasiões importantes, um paradigma de *análise fatorial longitudinal* (proporcionado pelo vetor de estado α_t), no sentido que influências, *a priori* ocultas, podem ser desvendadas com base em recursos que só dependam de quantidades disponíveis e observáveis. Esta será toda a lógica do Filtro de Kalman, o qual será apresentado na seqüência da Dissertação.

2.2
Definição de Componente

Como as atenções da Dissertação estão voltadas para um conjunto de metodologias para imposição de restrições aos ajustes de modelos em EE, é importante que se faça claro, logo de início, quais quantidades associadas ao modelo serão o foco desta tarefa-chave.

Definição 2.2. *Seja* Y_t *um processo estocástico p-variado com uma representação em EE do tipo dado nas equações em* (2.1). *Chama-se componente não observável, ou simplesmente componente, qualquer transformação mensurável Borel do vetor de estado* α_t.

Algumas nomenclaturas adicionais, as quais serão recorrentes durante diversas passagens do texto, são dadas pelas seguintes observações:

1) Uma *componente natural* ou *canônica* seria qualquer coordenada do vetor de estado – esta seria dada por uma *função projeção*, a qual é devidamente mensurável (de fato, pois é linear), dada por $P_j(\alpha_t) = \alpha_{t,j}$, j = 1, ..., m.
2) Quando alguma componente for importante no contexto da análise, ou tiver algum significado especial, esta será chamada de *componente não observável de interesse*, ou simplesmente *componente de interesse*.
3) Em geral, estas componentes possuem uma interpretação direta. Por exemplo, em Modelos Estruturais representados na forma de EE, as componentes costumam ser a tendência, a inclinação da tendência, a sazonalidade, os eventuais ciclos etc. Estas, em geral, são componentes naturais (de acordo com a observação 1). Mas as de interesse (de acordo com a observação 2), não precisam ser todas elas. Por exemplo, em um ajuste sazonal, a única componente de interesse seria a sazonalidade.

É importante que fiquem claros e devidamente assimilados estes últimos conceitos, pois a Dissertação, como já postulado, visa abordar justamente as possibilidades de estimação – no caso, restrita – de componentes associadas a modelos em EE. Em capítulos seguintes, esta terminologia (<u>componente</u>, <u>componente natural</u> e <u>componente de interesse</u>) será estendida de forma direta para outros tipos mais complexos de modelos em EE, diferentes dos lineares.