

1

Introdução

1.1

Considerações Iniciais

Em termos gerais, um modelo em Espaço de Estado (EE), linear ou não linear, Gaussiano ou não Gaussiano, [Aoki (1987), Harvey (1989), Harvey (1993), Brockwell e Davis (1991), Brockwell e Davis (1996), Tanizaki (1996), e, mais recentemente, Durbin e Koopman (2001a)], é uma descrição probabilística de uma série temporal *observável* e, possivelmente, *multivariada*, através de características *não observáveis*, cujas respectivas dinâmicas devem ser adequadamente modeladas. Em muitos casos – embora, principalmente em aplicações estatísticas, isto não seja uma regra! – o objetivo central é a extração, o entendimento, a análise estatística inferencial e a previsão destas características não observáveis, tarefas estas que são feitas através de estimadores¹ baseados na série observável.

Como exemplos de metodologias conhecidas que podem ser manuseadas de forma unificada pelos Modelos em EE, citam-se:

- Modelos estruturais para séries temporais;
- Modelos Box e Jenkins com função de previsão exata;
- Modelos auto-regressivos com coeficientes variantes de forma estocástica no tempo;
- Modelos auto-regressivos vetoriais (VAR);
- Modelos de regressão com coeficientes fixos ou variantes de forma estocástica no tempo;
- Modelos de volatilidade estocástica com soluções aproximada e exata;
- Modelos de duração para ativos financeiros;
- Modelos de suavização tipo *spline*; e
- Modelos para dados de contagem.

¹ Talvez a expressão mais correta seja *preditores*, uma vez que as componentes são variáveis aleatórias e não parâmetros. No entanto, será usada a expressão *estimadores*, de forma que seja mantida uma certa concordância com a bibliografia tradicional.

Algumas das metodologias acima se encaixam em uma modelagem em EE do tipo *linear*. Outras, por sua vez, se enquadram melhor em uma especificação *não linear*. Para modelos lineares, a teoria da filtragem, previsão e suavização de Kalman, devidamente combinada a estimadores de (*quasi*) máxima verossimilhança para parâmetros desconhecidos, fornecem a alternativa mais natural, elegante, computacionalmente eficiente e, sob alguns aspectos, eficaz para se estimar as componentes não observáveis.

Em se tratando de modelos não lineares, novas dificuldades certamente surgem. Como maneiras principais de se lidar com estas estruturas, citam-se:

- O Filtro de Kalman Estendido e suas variantes, os quais se caracterizam por mudanças no Filtro de Kalman original e proporcionam tratamento *aproximado* para o problema, constituindo-se, em geral, de tecnologias computacionais não tão intensivas; e
- Métodos de simulação, dos quais os procedimentos de Monte Carlo e suas variantes (amostragem por importância, MCMC etc.) desempenham papel central. Com estas abordagens, é possível a obtenção de um tratamento *exato*, mas computacionalmente muito intensivo.

1.2

Problema Central

Em algumas situações práticas, contudo, um dado modelo em EE proposto não é suficiente para os propósitos de quem o utilizaria, pois podem existir teorias, indícios empíricos, ou simples experiências ou crenças do analista, que induzam à necessidade de que se imponham *restrições* às componentes de interesse do modelo (a definição de *componente* será apresentada no próximo capítulo). Tais restrições podem ser de quaisquer naturezas: lineares, não lineares, de desigualdade, variantes no tempo etc. Isto posto, passa a ser relevante o desenvolvimento de técnicas – ou de adaptação destas, caso já existam – para que as estimativas das componentes “respeitem” estes novos pressupostos. Exemplos para casos escalares: pode ser pertinente a adoção de componentes estimadas não negativas, ou que satisfaçam algum tipo de restrição linear economicamente

interpretável, ou que assumam valores pertencentes a um dado intervalo da reta (a,b) etc.

A primeira solução exata para restrições lineares em modelos em EE também lineares foi proposta em Doran (1992). Neste artigo, foi proposta uma solução bem convincente para o problema, a qual se baseia em uma simples alteração da expressão do modelo em EE que “força” as estimativas das recursões de Kalman – a saber, o filtro contemporâneo e o suavizador, mas não necessariamente a função de previsão – a satisfazerem as restrições impostas. Na qualidade de atrativos desta técnica, citam-se sua condição de ser exata, sua flexibilidade (a qual permite que as restrições variem no tempo tanto em quantidade quanto em natureza analítica), sua eficiência – a ser provada no capítulo 4 – perante a estimação irrestrita e sua facilidade de adoção.

A Metodologia de Doran também faz uma tentativa de se auto-estender para restrições não lineares. Cita-se que esta extensão é aproximada, implica diretamente em um esforço computacional maior do que aquele demandado para situações lineares, e ainda não foi “testada” em situações práticas.

Outra forma, talvez mais natural e menos heurística de se tratar uma ou mais restrições não lineares nas componentes, sendo elas provenientes de igualdades ou de desigualdades, é a adoção de um modelo em EE não linear com especificação funcional/probabilística que as satisfaçam. Uma vez isto sendo feito, podem ser usados, por exemplo, o Filtro de Kalman Estendido e suas variantes ou os métodos de simulação já previamente citados.

1.3

Objetivos da Dissertação

Tendo sido descrito o problema (o da imposição de restrições de naturezas diversas nas componentes de interesse associadas a um modelo em EE arbitrário), decidiu-se pela elaboração de uma Dissertação cujo *leitmotiv* seria a discussão metodológica e implementacional de algumas das soluções em potencial citadas:

- Metodologia de Doran para Restrições Lineares;
- Metodologia de Doran Estendida para Restrições Não lineares; e
- Modelagem em EE Não Linear com Tratamento Aproximado.

Como poderá ser visto no decorrer do conteúdo da Dissertação, são levantados: (i) comparações entre as soluções em potencial; (ii) eventuais desenvolvimentos teóricos; (iii) vantagens; (iv) desvantagens; e (v) estratégias de utilização para uma dada situação prática.

Ao final das reflexões teóricas, são propostos alguns exercícios práticos, os quais apresentam comparações de todas as metodologias revisitadas na estimação de *Modelos de Fatores para Classes de Ativos (Asset Class Factor Models)* para estimação do *estilo de investimento e de gestão* de alguns fundos de investimento brasileiros. Este modelo, descrito inicialmente em Sharpe (1988) e fortemente difundido em Sharpe (1992), visa à estimação das alocações dos recursos de um fundo em diferentes nichos do mercado financeiro. A proposta aqui adotada é substituir o pressuposto original de que as alocações são *fixas* ao longo do tempo por outro que possibilite às mesmas uma possível *evolução estocástica*. No entanto, dois tipos de restrições têm que ser, eventualmente, impostos, para todo instante de tempo: (1) a soma das alocações estimadas deve ser 1 (um); e (2) as alocações devem ser não negativas. Em outras palavras, as alocações estimadas devem, eventualmente, ser entendidas como *proporções*. O leitor já deve ter percebido que, neste exemplo em questão, as componentes de interesse seriam justamente as alocações, e que estas devem, neste contexto, satisfazer, eventualmente, dois tipos de restrições, quais sejam: uma linear (de igualdade) e outra não linear (de desigualdade), em todo instante de tempo.

1.4

Estrutura da Dissertação

A partir do segundo capítulo, a pesquisa proposta tem a seguinte organização:

- O segundo capítulo apresenta, em forma axiomática, a formulação do modelo em EE linear. Este capítulo tem como objetivo principal situar o leitor nas notações e nomenclaturas que serão adotadas no decorrer da Dissertação. Também, na ocasião, é apresentada a definição de *componente não observável* ou, de forma equivalente e mais direta, *componente*.
- O terceiro capítulo apresenta, na forma de teoremas, as equações de filtragem, previsão e suavização de Kalman – discutindo, inclusive, a delicada questão sobre inicialização referente a estas recursões, a qual pode ser *exata* ou *aproximada*. Nesta formulação matemática, ficam claros os contextos e as condições sob os quais estas tradicionais recursões são interessantes e, portanto, indicadas. Assim como o segundo capítulo, este também tem como objetivo principal o estabelecimento da “linguagem” a ser adotada.
- O quarto capítulo apresenta em detalhes a Metodologia de Doran para a imposição de restrições lineares. Na oportunidade, são apresentados e demonstrados os teoremas pertinentes e algumas estratégias de implementação e análise. Na ocasião, também é demonstrada, a partir de fatos elementares da Análise Funcional, a eficiência desta Metodologia frente à prática usual do Filtro de Kalman sem imposição de restrições lineares.
- No quinto capítulo, é apresentada uma proposta, também dada em Doran (1992), para a imposição de restrições não lineares. Esta técnica se constitui em uma generalização da Metodologia de Doran discutida no capítulo anterior. Ao final, conjectura-se uma sugestão para sua utilização em restrições de desigualdade.
- No sexto capítulo, são apresentados o Filtro de Kalman Estendido e o Filtro de Simulação de Monte Carlo [este último fora desenvolvido pioneiramente por Tanizaki e Mariano (1996)], os quais são adequados para o tratamento aproximado de dois tipos específicos – porém, como será demonstrado, *equivalentes* – de modelos em EE não lineares. Alguns tópicos sobre o Filtro de Segunda Ordem também são enunciados. Uma vez incorporada de forma inerente na modelagem restrições nas

componentes de interesse – por exemplo, de desigualdade – estes filtros podem constituir em uma solução considerável e relevante para o problema, a qual não demanda muito esforço computacional – excetuando-se, talvez, o Filtro de Simulação de Monte Carlo.

- O sétimo capítulo apresenta os métodos de máxima verossimilhança, *quasi* máxima verossimilhança e máxima verossimilhança aproximada no contexto de modelos em EE lineares, ajustados via Filtro de Kalman, e não lineares, ajustados via algum filtro aproximado. Neste mesmo capítulo, a questão dos diagnósticos também é efetivamente abordada.
- O oitavo capítulo se destina às aplicações, as quais, como já anunciado, fazem uma devida comparação das performances dos métodos apresentados para o ajuste de modelos dinâmicos de *análise de estilo* para fundos de investimento do Brasil. Esta metodologia será cognominada, na ocasião, de *análise dinâmica de estilo*.
- As conclusões finais são reservadas ao nono capítulo.

Para finalizar este capítulo preliminar, salientam-se as seguintes observações:

- Nenhum aspecto referente à abordagem *Bayesiana* dos modelos em EE é tratado nesta Dissertação. O motivo desta decisão decorre da perspectiva do autor, a qual se fundamenta em apresentar um escopo de soluções sob uma ótica freqüentista para o problema central enunciado;
- Demonstrações de resultados teóricos (proposições, lemas, teoremas e corolários), eventualmente apresentadas no decorrer do texto, são *todas* originais; e
- O autor reparte com seu orientador os bons frutos que esta pesquisa possa produzir. Ao primeiro, exclusivamente, devem ser debitados os equívocos e incorreções que, involuntariamente, possa haver no decorrer do texto.