7 Referências Bibliográficas

1. LUCY, L. B. **A numerical approach to the testing of the fission hypothesis.** Astronomical Journal, 82, pp. 1013-1024, 1977.
2. RABCZUK, T.; EIBL,J.; STEMPNIEWS,L. **Numerical analysis of high speed concrete fragmentation using a meshfree Lagrangian method,** Engineering Fracture Mechanics, Volume 71, Issues 4-6, March-April 2004, pp. 547-556.
3. LIU, M. B.; LIU ,G. R.; ZONG, Z.; LAM, K. Y. **Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology,** Computers & Fluids, Volume 32, Issue 3, March 2003, pp. 305-322.
4. IAIN, H. G.; VEROLME,L.K.; HAYHURST,C.J. **Predicting the fragmentation onset velocity for different metallic projectiles using numerical simulations,** International Journal of Impact Engineering, Volume 26, Issues 1-10, December 2001, pp. 453-464.
5. JOHNSON, G. R. ; STRYK, R. A.; BEISSEL, S. R. **SPH for high velocity impact computations,** pp. 347-373 , Volume 139, Issues 1-4, Pages 3-429 (1 December 1996) , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
6. RANDLES, P. W.; LIBERSKY, L. D. **Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications**, pp 375-408, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, 1-4, 375.
7. CAMPBELL,J.; VIGNJEVIC,R.; LIBERSKY,L. **A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics,** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 184, Issue 1, 31 March 2000, pp 49-65
8. JOHNSON,G.R.; STRYK R. A. **Conversion of 3D distorted elements into meshless particles during dynamic deformation,** International Journal of Impact Engineering, Volume 28, Issue 9, October 2003, pp 947-966

9. BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D.; FLEMING, M.; KRYSL, P. **Meshless methods: An overview and recent developments,** Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering Volume 139, Issues 1-4, pp 3-47 (1 December 1996)

10. JIUN-SHYAN, C.; CHUNHUI, P. ; CHENG-TANG, W.; WING, K. L. **Reproducing Kernel Particle Methods for large deformation analysis of non-linear structures**, *Pages 195-227* Volume 139, Issues 1-4, pp 3-429 (1 December 1996).

11. CHEN, J.S.; ROQUE, C. M. O. L.; PAN, C.; BUTTON, S. T. **Analysis of metal forming process based on meshless method,** Journal of Materials Processing Technology, Volumes 80-81, 1 August 1998, pp 642-646

12. LIU, W. K.; JUN S.; LI S.; ADEE, J.; BELYTSCHKO, T. **Reproducing Kernel Particle Methods for structural dynamics**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38 (1995), pp 1655 – 1679.

13. HULBERT, G. M. **Application of Reproducing Kernel Particle Methods in electromagnetics,** pp 229-235, Volume 139, Issues 1-4, (1 December 1996)

14. GÜNTHER, F. C.; LIU W. K.; CHRISTON, M. A., **Multi-scale meshfree parallel computations for viscous, compressible flows.** Computational. Methods in Applied Mechanics and Engineering **190** (2000), p. 279.

15. LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. **Surfaces generated by moving least squares methods**, Math. Comput., 37, pp 141-158, (1981)

16. NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. **Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements**, Computational Mechanics, 10, pp 307-318 (1992).

17. BELYTSCHKO,T.; LU, Y.Y.; GU, L. **Element – free Galerkin method**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37 (1994), pp 229-256.

18. LU, Y.Y.; BELYTSCHKO, T. ; GU, L. **A new implementation of the element free Galerkin Method** Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering , 113, (1994), pp 397-414.

19. BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ ,Y.; FLEMING, M.; ORGAN ,D.; LIU, W.K.S. **Smoothing and accelerated computations in the element**

free Galerkin method. Journal of Computational and Applied Mathematics 74 (1996), pp 111 – 126.

20. KALJEVIC, I.; SAIGAL, S. **An improved Element free Galerkin formulation**, International Journal for Numerical Methods in Engineering,(1997) 40, pp 2953 – 2974.

21. HEGEN ,D. **Element – free Galerkin Methods in combination with finite element approaches**, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering , 135 (1996), pp 143 – 166.

22. KRONGAUZ, Y.; BELYTSCHKO,T. **Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements**, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering,131 (1996), pp 133 – 145.

23. DOLBOW, J.; BELYTSCHKO,T. **Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods**, Computational Mechanics 23 (1999), pp 219 – 230.

24. PONTHOT,J.P.; BELYTSCHKO,T. **Arbitrary lagrangian – eulerian formulation for element – free Galerkin method**, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 152 (1998) 19-46.

25. YU, X.; SAIGAL, S. **An element free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid**, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering , 154 (1998), pp 331-343.

26. BELYTSCHKO, T.; LU,Y.,Y. ; GU, L. **Crack propagation by element – free Galerkin methods** , Engineering Fracture Mechanics 51, 2 (1995), pp 295-315.

27. BELYTSCHKO, T.; LU,Y.; GU,Y.; TABBARA, M. **Element – free Galerkin methods for static and dynamic fracture**, International Journal of Solids and Structures, 32, 17/18, 2547 – 2570.

28. CORDES, L. W.; MORAN, B. **Treatment of material discontinuity in element – free Galerkin method** , Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering , 139 (1996), pp 75 – 89.

29. BELYTSCHKO, T.; KRYSL, P.; Y. KRONGAUZ, **A three – dimensional explicit element – free Galerkin method,** International Journal for Numerical Methods in Fluids, 24, pp 1253 – 1270 (1997)

30. KRYSL, P.; BELYTSCHKO, T. **Analysis of thin plates by the Element**

Free Galerkin method, Computational Mechanics 17 (1996), pp 26-35.

31. KRYSL, P.; BELYTSCHKO , T. **Analysis of thin shells by the element free Galerkin method**, International Journal of Solids and Structures, 33: 3057 - 3080, 1996.
32. BELYTSCHKO,T., ORGAN, D. AND KRONGAUZ, Y**., A coupled finite element – element free Galerkin method**, Computational Mechanics, 17 (1995), pp 186-195.
33. ASKES, H.; BORST, R.; HEERES, O. **Conditions for locking – free elasto – plastic analyses in the Element – Free Galerkin Method** , Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering , 173 (1999), pp 99 – 109
34. KRYSL,P.; BELYTSCHKO, T. **Element – Free Galerkin Method: convergence of the continuous and discontinuous shape functions**. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, 148 (1997), pp 257 – 277.
35. FLEMING,M.; CHU,Y.A.; MORAN,B.; BELYTSCHKO,T. **Enriched Element – Free Galerkin methods for crack tip fields**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1997) 40, pp 1483 – 1504.
36. DUARTE, C. A.; ODEN , J.T. **An h-p adaptive method using clouds,** Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 139 (1996), pp 237 - 262.
37. DUARTE, C. A., **The HP Cloud Method**, PhD dissertation, The University of Texas at Austin, 1996.
38. DUARTE, C. A. **, A review of some meshless methods to solve partial differential equations**, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, Technical Report No 95 – 06 (1995).
39. Duarte, C. A. M.; Oden, J. T.. **Hp Clouds : an hp Meshless Method. Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v12, pp 673-705, 1996.
40. BABUSKA, I.; MELENK, J. M. **The partition of unity finite element method,** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40: pp 727 – 758, 1997.

41. MELENK, J. M.; BABUSKA, I. **The partition of unity finite element method: Basic theory and applications**, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, 139 (1996) 289 - 314.

42. MELENK , J.M. **On generalized finite element methods**, Ph. D. thesis, University of Maryland, 1995.

43. DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; ODEN, J. T. **Generalized Finite Element Method for three – dimensional mechanics problems**. Computers and Structures, v 77, pp 215-232, 2000.

44. BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. **Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients**. SIAM J. Numerical Analysis, 31 (4): 745 – 981, 1994.

45. ODEN, J. T.; DUARTE C. A. ; ZIENKIEWICZ O. C. **A new cloud-based hp finite element method,** Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, 153 (1998), pp 117 - 126.

46. BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. **Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing** . International Journal for Numerical Methods in Engineering . (1999) 45(5), pp 601– 620.

47. MOES,N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. **A finite element method for crack growth without remeshing**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, (1999), pp 131 – 150.

48. SHIH, C.F.; MORAN, B.; NAKAMURA, T. **Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body** , International Journal of Fracture. Vol 30, 1986 , pp 79 - 102.

49. BATHE K.J. **Finite element procedures**, 1996. Prentice Hall.

50. ANDERSON T.L. **Fracture Mechanics**, CRC, Second Edition.

51. TIMOSHENKO; GOODIER. **Theory of Elasticity**. Mac Graw-Hill 1970.

52. LEE, N.S.; BATHE, K.J. **Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements**, International Journal for Numerical Methods in Engineering , 36, pp 3553-3576, 1993.

53. SANTANA, W.C. **Metodo de elementos finitos h-adaptativo para análise de problemas elásticos planos ;** Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-RJ, 1993.

54. CARVALHO, C.V.A. **Simulação bidimensional adaptativa por elementos finitos de processos de fraturamento por fadiga**;

Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio , 1998.

55. CARVALHO, C.V.A.; ARAÚJO, T.D.; CAVALCANTE, J. B.; MARTHA, L.F.; BITTENCOURT, T.N. **Automatic fatigue crack propagation using a self-adaptive strategy**, PACAM 99 , Rio de janeiro, 1999.

56. MIRANDA, A.C.O. **Propagação de trincas por fadiga em geometrias 2D complexas sob cargas cíclicas variáveis**. Tese (Doutorado), PUC - RJ, Departamento de Engenharia Civil, 2003.

57. MIRANDA, A.C.O.; MEGIOLARO,M.A.; CASTRO, J.T.P; MARTHA, L.F.; BITTENCOURT,T.N. **Fatigue crack propagation under complex loading in arbitrary 2D geometries**, Applications of automation technology in fatigue and fracture testing and analysis. ASTM - Standard Technical Publication (STP), 2002.

58. HILDEBRAND, F.B., **Introduction to numerical Analysis ,** Dover.

59. SIH , G**.,** **Strain- energy- density factor applied to mixed mode crack problems.** International journal of fracture, 10, 305 – 321, 1974

60. ERDOGAN, F. ; SIH,G. **On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear**. Journal of Basic Engineering 85, pp 519-527, 1963

61. YAU,J.; WANG,S.; CORTEN, H., **A mixed mode crack analysis of isotropic solids using conservations laws of elasticity**. Journal of Applied Mechanics, 1980; 47: pp 335-341.

62. BITTENCOURT, T. N.; WAWRZYNECK P. A.; INGRAFFEA A. R.; SOUZA, J.L. **Quasi- automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems**, Engineering Fracture Mechanics, Vol 55 No 2, pp 321-334, 1996.

63. ROOKE, D.P.; CARTWRIGHT D.J. **Compendium of Stress Intensity Factors, London**, Her Majesty's Stationery Office., 1976;

64. RAO B. N.; RAHMAN S., **An efficiente meshless method for fracture analysis of cracks**, Computational Mechanics, Vol 26, pp398-408, 2000.

65. PUSTEJOVSKY, M.A., **Fatigue crack propagation in titanium under general in-plane loading – I: experiments.** Engineering Fracture Mechanics, Vol 11, Nr 1, pp 9-15, 1979.

66. SUMI, Y. **Computational Crack Path Prediction** , Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 4,149-156, 1985.

67. SUMI, Y.; YANG, C.; WANG, Z.N. **Morphological aspects of fatigue crack propagation, Part II – effects of stress biaxiality and welding residual stress** , International Journal of Fracture, Vol 82, No 3, pp 221-235,1996.

68. KREYSZIG, E. **Matemática Superior** , Volume 1, 2ª edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

69. Ji, H.; Chopp, D. ; Dolbow, J.E. **A Hybrid Extended Finite Element / Level Set Method for Modeling Phase Transformations**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 54, Number 8, pp. 1209-1233, (2002)

70. Chessa, J. ; Belytschko, T. **An Enriched Finite Element Method for Axisymmetric Two-Phase Flow with Surface Tension .** Journal of Computational Physics, submitted, 2003.

71. Bathe,K.J. ; Almeida,C.A. **A Simple and Effective Pipe Elbow Element - Linear Analysis.** Journal of Applied Mechanics, Vol 47, pp 93-100,1980.

72. Bathe,K.J. ; Chaudhary, A.B. **On The Displacement Formulation Of Torsion Of Shafts With Rectangular Cross-Sections**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 18, pp1565 - 1580 , 1982.

73. ZIENCKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method,** 4th Edition.

Apêndice I

Obtenção Das Coordenadas Locais (r,s) Associadas Às Coordenadas Globais (x,y)

Sabendo que a geometria de um elemento finito é interpolada na forma

$$x = \sum h_i(r,s)x_i \ \text{ e } \ y = \sum h_i(r,s)y_i , \tag{1}$$

dado o ponto de coordenadas globais (x,y), calcula-se a inversa da Jacobiana associada à transformação em (1)

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

e

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix}$$

e arbitram-se os valores iniciais $(r_k,s_k) = (r_0,s_0) = (0,0)$, $k = 0$.

i) calcula-se (x_k,y_k) empregando-se a transformação dada por (1);

ii) calcula-se $\Delta x_k = x - x_k$ e $\Delta y_k = y - y_k$

iii) calcula-se Δr e Δs, onde

$$\Delta r \approx \frac{dr}{dx}\Delta x_k + \frac{dr}{dy}\Delta y_k$$

e $$\Delta s \approx \frac{ds}{dx}\Delta x_k + \frac{ds}{dy}\Delta y_k \tag{2}$$

iv) calcula-se $r_{k+1} = r_k + \Delta r$ e $s_{k+1} = s_k + \Delta s$

v) verifica-se como critério de parada se

$$\left\| x - \sum h_i(r_{k+1}, s_{k+1})x_i \right\| \le \varepsilon \ \text{ e } \ \left\| y - \sum h_i(r_{k+1}, s_{k+1})y_i \right\| \le \varepsilon$$

onde ε é uma tolerância especificada. Não se verificando o critério, retoma-se o passo (i).

Apêndice II

Para a equação diferencial ordinária não-homogênea

$$-u,_{xx} = f(x)/E \tag{1 a}$$

referente ao problema da barra uniaxial definido na figura 3.1, com

$$f(x) = 6x + \left[\frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{L-2x}{\alpha^2}\right)^2\right] \cdot e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2} \tag{1 b}$$

e as seguintes condições de contorno

$$k \cdot u(0) = AE \cdot u,_x(0) \tag{2 a}$$

e

$$u,_x(L) = T/AE \tag{2 b}$$

tem-se a solução da equação homogênea associada na forma

$$u_h(x) = bx + c\,, \tag{3}$$

onde b e c são constantes.

Uma solução particular para a equação

$$-E \cdot u,_{xx} = f(x) = 6x + \left[\frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{L-2x}{\alpha^2}\right)^2\right] \cdot e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2} \tag{4}$$

é obtida usando o **método dos coeficientes a determinar**, na forma apresentada por Kreyszig [65]. Por inspeção de função *f(x)* , em (1 b), arbitra-se uma solução particular na forma

$$u_p(x) = Kx^3 + Pe^{g(x)} \tag{5}$$

onde *K* e *P* são constantes. Para as derivadas temos

$$u_p,_x(x) = 3Kx^2 + P \cdot g,_x(x) \cdot e^{g(x)} \tag{6}$$

e

$$u_p,_{xx}(x) = 6Kx + P \cdot \left[g,_{xx}(x) + g,_x(x)^2\right] \cdot e^{g(x)} \tag{7}$$

onde

$$g(x) = -\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2 \tag{8a}$$

$$g,_x(x) = -\frac{2}{\alpha}\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right) = \left(\frac{L-2x}{\alpha^2}\right) \tag{8b}$$

$$g,_{xx}(x) = -\frac{2}{\alpha^2}\,. \tag{8c}$$

Comparando-se as equações (1), (7) e (8) obtem-se

$$\mathrm{K} = -1/E \quad \text{e} \quad \mathrm{P} = 1/E \tag{9}$$

A solução geral é então obtida na forma

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = -\frac{x^3}{E} + \frac{e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2}}{E} + bx + c \tag{10}$$

cuja primeira derivada fornece

$$u,_x(x) = -\frac{3x^2}{E} - \frac{2}{\alpha \cdot E}\cdot\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)\cdot e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2} + b\,. \tag{11}$$

Assim, aplicando-se as condições de contorno em (2), e desprezando a contribuição dos termos exponenciais nas extremidades da barra, ($\alpha/L \ll 1$), tem-se

$$k \cdot u(0) = AE \cdot u,_x(0) \therefore k \cdot c = AE \cdot b \tag{12a}$$

$$u,_x(L) = \frac{T}{AE} \therefore \frac{-3L^2}{E} + b = \frac{T}{AE} \tag{12b}$$

que resultam em

$$b = \frac{1}{E}\left(\frac{T}{A} + 3L^2\right) \tag{13a}$$

$$c = \frac{T + 3L^2 A}{k}\,. \tag{13b}$$

Desta forma, obtém-se a solução, apresentada na equação (3.3)

$$u(x) = -\frac{x^3}{E} + \frac{1}{E}e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{E}\left(\frac{T}{A} + 3L^2\right)\cdot x + \frac{T + 3L^2 A}{k} \tag{14}$$

e, para $A = E = 1$

$$u(x) = -x^3 + e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2} + \left(T + 3L^2\right)\cdot\left(x + \frac{1}{k}\right) \tag{15}$$

Apêndice III

Solução da MFLE e Funções de Enriquecimento de Ponta-de-Trinca

A solução da MFLE para o campo de deslocamentos na ponta de trinca, da Ref. [50]; fornece:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix} \cos(\theta/2)(\kappa-1)+2\cdot sin^2(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ sin(\theta/2)(\kappa+1)-2\cdot sin^3(\theta/2) \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{Bmatrix} sin(\theta/2)(\kappa+1)+2\cdot\cos^2(\theta/2)\cdot sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)(\kappa-1)+2\cdot sin^2(\theta/2)\cos(\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de fratura, respectivamente, *r* e θ são as coordenadas polares no sistema de referência com origem na ponta-de-trinca, μ é módulo de cisalhamento, $\mu = G = E/(2(1+\nu))$, κ é a constante de kolosov, $k = 3-4\nu$, para o estado de deformações planas e $k = (3-\nu)/(1+\nu)$, para o estado de tensões planas.

Esta solução é equivalente à combinação linear de quatro funções $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, definidas para as coordenadas *r* e θ na forma

$$\sqrt{r}sin(\frac{\theta}{2}) = F_1(r,\theta) \quad (2)$$

$$\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2}) = F_2(r,\theta) \quad (3)$$

e, observando a identidade trigonométrica , $sin\theta = 2\cdot sin(\frac{\theta}{2})\cdot\cos(\frac{\theta}{2})$

$$2\cdot\sqrt{r}\cdot sin^2(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{r}sin(\frac{\theta}{2})sin\theta = F_3(r,\theta) \quad (4)$$

$$2\cdot\sqrt{r}\cdot\cos^2(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})sin\theta = F_4(r,\theta) \quad (5)$$

$$2\sqrt{r}sin^3(\frac{\theta}{2}) = 2\cdot\sqrt{r}\cdot\left(1-\cos^2(\frac{\theta}{2})\right)sin(\frac{\theta}{2}) = 2F_1(r,\theta)-F_4(r,\theta) \quad (6)$$

o que justifica o emprego do conjunto de funções $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, como funções de enriquecimento, na discretização do campo de deslocamentos definido por (1).

Apêndice IV

Arquivo de trabalho - worksheet - do Maple® com a rotina de cálculo algébrico para a obtenção das coordenadas e pesos dos pontos de integração, para a integração de Gauss-Lobatto:

```
# Integração de Gauss-Lobatto
> Digits:=30;
                            Digits := 30
> with(orthopoly);
                         [G, H, L, P, T, U]
>
>
# Definição do número de pontos
> n:=20;
                              n := 20
# Derivada do polinômio de legendre
>
> diff(P(n-1,x),x);

  83945001525  18   347123925225  16   148767396525  14
  ----------- x   - ------------ x   + ------------ x
     65536             65536              16384

          136745788725  12   145568097675  10   45176306175  8
        - ------------ x   + ------------ x   - ----------- x
             16384              32768              32768

          3904125225  6   334639305  4   43648605  2   230945
        + ---------- x  - --------- x  + -------- x  - ------
            16384          16384          65536        65536

# cálculo das abscissas livres:
> a:=fsolve(diff(P(n-1,x),x));

  a := -.980743704893914171925446438584,
        -.935934498812665435716181584931,
        -.866877978089950141309847214616,
        -.775368260952055870414317527595,
        -.663776402290311289846403322971,
        -.534992864031886261648135961829,
        -.392353183713909299386474703816,
        -.239551705922986495182401356927,
        -.0805459372388218379759445181596,
        .0805459372388218379759445181596,
        .239551705922986495182401356927,
        .392353183713909299386474703816,
        .534992864031886261648135961829,
        .663776402290311289846403322971,
        .775368260952055870414317527595,
        .866877978089950141309847214616,
        .935934498812665435716181584931,
        .980743704893914171925446438584

> xg[1]:=-1.0;
> for i from 1 to n-2
```

```
> do
> xg[i+1]:=a[i];
> od;
> xg[n]:=1.0;

                            xg[1] := -1.0
              xg[2] := -.980743704893914171925446438584
              xg[3] := -.935934498812665435716181584931
              xg[4] := -.866877978089950141309847214616
              xg[5] := -.775368260952055870414317527595
              xg[6] := -.663776402290311289846403322971
              xg[7] := -.534992864031886261648135961829
              xg[8] := -.392353183713909299386474703816
              xg[9] := -.239551705922986495182401356927
              xg[10] := -.0805459372388218379759445181596
              xg[11] := .0805459372388218379759445181596
              xg[12] := .239551705922986495182401356927
              xg[13] := .392353183713909299386474703816
              xg[14] := .534992864031886261648135961829
              xg[15] := .663776402290311289846403322971
              xg[16] := .775368260952055870414317527595
              xg[17] := .866877978089950141309847214616
              xg[18] := .935934498812665435716181584931
              xg[19] := .980743704893914171925446438584
                            xg[20] := 1.0

> xg[1] := -1.0;
                            xg[1] := -1.0

>
# Pesos das abscissas livres:
> w:=(n,x)->2/(n*(n-1)*(P(n-1,x))^2);
>
                                            1
               w := (n, x) -> 2 ----------------------
                                                      2
                                n (n - 1) P(n - 1, x)

>
> #
# pesos abscissas extremidades:
> wext:=(2/(n)/(n-1));

                            wext := 1/190

> wext:=evalf(wext);
              wext := .00526315789473684210526315789474
>
> wgt[1]:=wext;
> for i from 1 to n-2
> do
> wgt[i+1]:=evalf(w(n,a[i]));
> od;
> wgt[n]:=wext;
             wgt[1] := .00526315789473684210526315789474
              wgt[2] := .0322371231884889414916048186088
              wgt[3] := .0571818021275668260047538286448
              wgt[4] := .0806317639961196031447767445512
              wgt[5] := .101991499699450815683781172092
              wgt[6] := .120709227628674725099429694936
              wgt[7] := .136300482358724184489780791251
```

```
wgt[8] := .148361554070916825814713013931
wgt[9] := .156580102647475487158169896810
wgt[10] := .160743286387845749007726726448
wgt[11] := .160743286387845749007726726448
wgt[12] := .156580102647475487158169896810
wgt[13] := .148361554070916825814713013931
wgt[14] := .136300482358724184489780791251
wgt[15] := .120709227628674725099429694936
wgt[16] := .101991499699450815683781172092
wgt[17] := .0806317639961196031447767445512
wgt[18] := .0571818021275668260047538286448
wgt[19] := .0322371231884889414916048186088
wgt[20] := .00526315789473684210526315789474

>
>
```

Anexo I

Propriedades de singularidade em elementos finitos.

Algumas configurações de nós em elementos finitos produzem campos de deformação com singularidades. Este comportamento é indesejável na maioria das análises, mas na MFLE ele é vantajoso. Elementos com singularidade do tipo $1/\sqrt{r}$, onde r é a distância radial para a ponta de trinca, podem ser usados nesta ponta. Isto melhora a precisão dos resultados e reduz a necessidade de refinamento na malha nesta região.

A demonstração apresentada a seguir mostra que esta singularidade pode ser obtida em elementos isoparamétricos quadráticos deslocando os nós de meio de aresta, em direção à extremidade, de uma distância de 1/4 do lado [50].

A matriz deformação - deslocamento de um elemento finito poder ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = [B]\cdot\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = [J]^{-1}[B^*]\cdot\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

onde

$$[B^*] = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial s} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial s} & \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

onde (r,s) são as coordenadas locais paramétricas de um ponto no elemento. Os valores de deslocamento nodal $\{u_i, v_i\}$ são limitados ou não singulares, por sua própria natureza. Os termos singulares devem estar então em $[J]^{-1}$ ou $[B^*]$.

Considere o elemento isoparamétrico bidimensional quadrático de 8 nós. As funções de forma para este elemento podem ser escritas na forma [70]

$$N = [(1+rr_i)(1+ss_i) - (1-r^2)(1+ss_i) - (1-s^2)(1+rr_i)]\frac{r_i^2 s_i^2}{4}$$
$$+ (1-r^2)(1+ss_i)(1-r_i^2)\frac{s_i^2}{2} + (1-s^2)(1+rr_i)(1-s_i^2)\frac{r_i^2}{2} \qquad \text{(AI.1)}$$

onde (r_i, s_i) são as coordenadas locais paramétricas do i-ésimo nó.

Em geral, as funções de forma são polinomiais. A equação (AI.1), por exemplo, é uma função quadrática. Portanto, N_i, $\partial N_i / \partial r$ ou $\partial N_i / \partial s$ são termos não singulares e, a matriz jacobiana [***J***] deve conter a fonte das singularidades.

A singularidade na deformação ocorrerá se o determinante da matriz jacobiana for nulo na ponta da trinca, ou seja, det $|J| = 0$.

Considerando-se um elemento quadrilateral com 8 nós com os nós médios deslocados para a posição de 1/4 da aresta do elemento, conforme ilustrado na figura A1.1, a origem do sistema de coordenadas é definida no nó 1. Seja a aresta do elemento definida pelos nós 1,2 e 5. Da equação (A1.1), temos que as funções de forma nesta aresta são dadas por

$$N_1 = -\frac{1}{2} r(1-r)$$
$$N_2 = \frac{1}{2} r(1+r) \qquad \text{(A1.2)}$$
$$N_5 = \left(1-r^2\right)$$

Com estas funções podemos escrever

$$x = -\frac{1}{2} r(1-r)\cdot x_1 + \frac{1}{2} r(1+r)\cdot x_2 + \left(1-r^2\right)\cdot x_5 \qquad \text{(A1.3)}$$

assumindo $x_1 = 0$, $x_2 = \mathrm{L}$ e $x_5 = L/4$, obtém-se

$$x = \frac{1}{2} r(1+r)\cdot L + \left(1-r^2\right)\cdot \frac{L}{4} = (1+r)^2 \frac{L}{4} \qquad \text{(A1.4)}$$

onde L é o comprimento da aresta do elemento entre os nós 1 e 2. Resolvendo para r temos

$$r = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \qquad \text{(A1.5)}$$

o termo relevante para a matriz jacobiana é dado por

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{L}{2}(1+r) = \sqrt{xL} \qquad \text{(A1.6)}$$

este termo anula-se para x = 0 , indicando a singularidade da deformação neste ponto. considerando os deslocamentos nodais u_1, u_2 e u_5, os deslocamentos nesta aresta são dados por

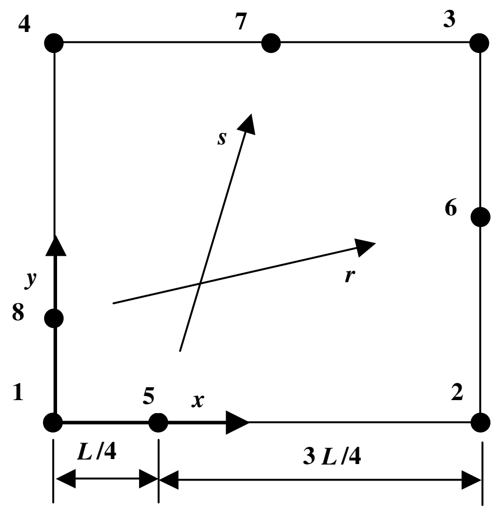

Fig A1.1 Elemento quadrilateral isoparamétrico com nós médios deslocados para 1/4 da aresta.

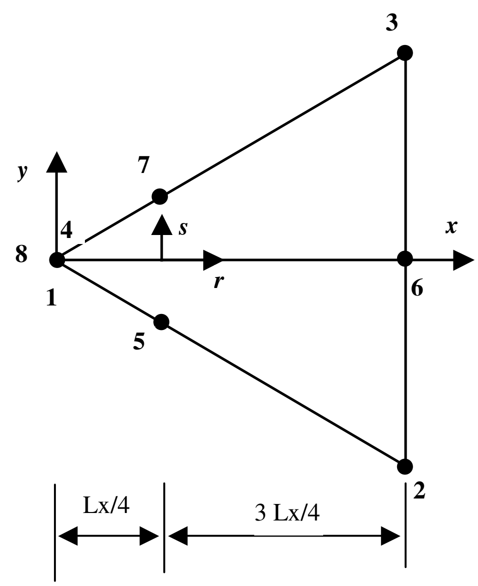

Fig A1.2 Elemento isoparamétrico colapsado.

$$u=-\frac{1}{2}r(1-r)\cdot u_1+\frac{1}{2}r(1+r)\cdot u_2+(1-r^2)\cdot u_5 \qquad \text{(A1.7)}$$

substituindo (A1.5) em (A1.7) temos

$$u=-\frac{1}{2}\left(-1+2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left(2-2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\cdot u_1+\frac{1}{2}\left(-1+2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left(2\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\cdot u_2+4\left(\sqrt{\frac{x}{L}}-\frac{x}{L}\right)\cdot u_5$$

(A1.8)

que resolvendo para a deformação na direção x

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(A1.9)}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{xL}}-\frac{4}{L}\right)u_1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{xL}}+\frac{4}{L}\right)u_2+\left(\frac{2}{\sqrt{xL}}-\frac{4}{L}\right)u_5 \qquad \text{(A1.10)}$$

e, assim, a deformação exibe uma singularidade $1/\sqrt{r}$ ao longo da aresta do elemento.

A construção de um elemento triangular por degeneração do elemento é mostrada na figura A1.1. Os nós 1,4 e 8 serão colapsados e os nós médios 5 e 7 são deslocados para a posição de 1/4 da aresta. A singularidade de deformação $1/\sqrt{r}$ ocorrerá ao longo das arestas 1-5-2 e 4-7-3, em analogia ao caso do elemento quadrilateral. Neste caso, no entanto, há o benefício adicional de se observar esta singularidade no interior do elemento.

Desta forma, considere-se o eixo x, para $s = 0$. A relação entre as coordenadas x e r é dada por

$$x=(r^2+2r+1)\frac{L_x}{4} \qquad \text{(A1.11)}$$

onde L_x é o comprimento do elemento na direção x. Resolvendo-se para r, tem-se

$$r=-1+2\sqrt{\frac{x}{L_x}} \qquad \text{(A1.12)}$$

que é idêntica à equação (A1.5). Então a deformação é singular ao longo do eixo x neste elemento. Repetindo-se os passos apresentados para a determinação da deformação, de (A1.8) para (A1.10), facilmente demonstra-se que a singularidade é do tipo $1/\sqrt{r}$.