

## Capítulo 4

### O MEEG Aplicado à Mecânica da Fratura

Neste capítulo apresenta-se a implementação do MEEG aplicado ao problema de propagação de trincas no contexto da mecânica da fratura linear elástica - MFLE. O capítulo está dividido em nove seções. Inicialmente discute-se o conceito básico do *enriquecimento* descontínuo que permite a construção de um campo de deslocamentos discreto e descontínuo a partir do MEF tradicional. Em seguida, este conceito é generalizado de forma a permitir a representação associada à presença de uma trinca em meio contínuo. Nas terceira e quarta seções descreve-se, em detalhes, a construção das funções de enriquecimento associadas à ponta-de-trinca e às suas faces – função salto - respectivamente. Na seção 5, discute-se o critério adotado para a escolha dos nós associados às funções de enriquecimento. O MEEG possibilita a adoção de uma estratégia de integração numérica baseada na tradicional quadratura gaussiana. Tal estratégia é apresentada na sexta seção, porém, a robustez do algoritmo é afetada em decorrência desta escolha. Uma outra solução é então proposta, na sétima seção, onde se estabelece o uso das quadraturas de Gauss-Lobatto e de Gauss-Radau no contexto de propagação de trincas. As duas últimas seções apresentam o critério usado para calcular a direção de propagação da trinca e a estratégia para a determinação dos fatores de intensidade de tensão, respectivamente.

#### 4.1 Discretização da Trinca.

Nesta seção são apresentados os detalhes da formulação e da implementação do modelo de elementos finitos enriquecido usado na representação numérica de uma trinca, da sua propagação em um meio contínuo e a comparação desta com a representação tradicional de trincas pelo MEF. O conceito básico desta representação está ilustrado nas figuras 4.1 e 4.2. Inicialmente, considera-se um conjunto de quatro elementos e dez nós, mostrado na figura 4.1, em que a ponta de trinca encontra-se em um nó da malha de discretização e arestas de elementos coincidem com as faces da trinca. Do ponto de vista geométrico, pode-se afirmar que a trinca está definida pelas arestas de elementos. Já na figura 4.2 apresenta-se

um conjunto de quatro elementos e nove nós, não havendo nesta discretização a presença, explícita, de nenhuma descontinuidade.

O campo de deslocamentos, clássico do MEF, para os elementos da figura 4.1, é expresso na forma

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{10} h_i u_i \tag{4.1}$$

onde  $u_i$  é o deslocamento do  $i$ -ésimo nó e  $h_i$  a função de forma bilinear associada ao  $i$ -ésimo nó.

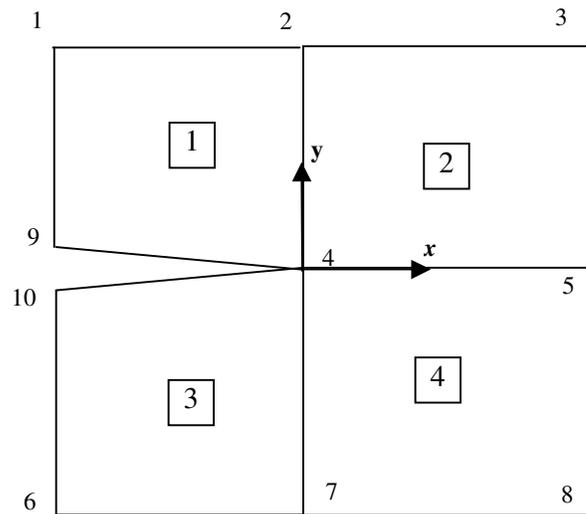


Fig 4.1 Trinca representada em malha de elementos finitos com 4 elementos (10 nós)

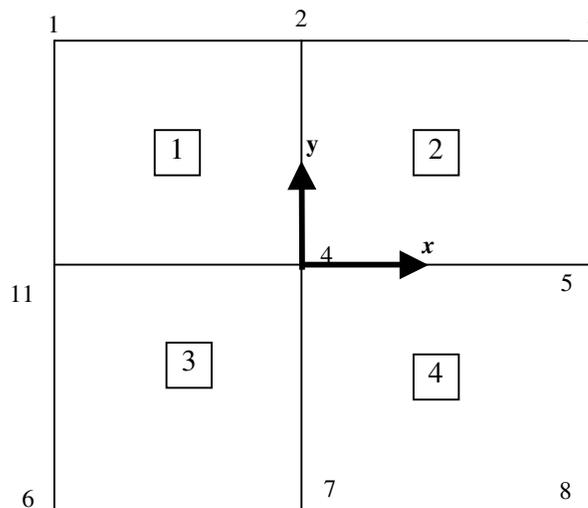


Fig 4.2 Malha de elementos finitos com 4 elementos (9 nós)

Reescrevendo-se (4.1) tem-se

$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i + h_9 u_9 + h_{10} u_{10} \quad , \text{ ou} \quad (4.2)$$

$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i + h_9 \left[ \left( \frac{u_9 + u_{10}}{2} \right) + \left( \frac{u_9 - u_{10}}{2} \right) \right] + h_{10} \left[ \left( \frac{u_9 + u_{10}}{2} \right) - \left( \frac{u_9 - u_{10}}{2} \right) \right] \quad (4.3)$$

ou ainda,

$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i + (h_9 + h_{10}) \cdot u_\alpha + (h_9 - h_{10}) \cdot u_\beta \quad (4.4)$$

onde

$$u_\alpha = \frac{u_9 + u_{10}}{2} \text{ e } u_\beta = \frac{u_9 - u_{10}}{2} . \quad (4.5)$$

Uma outra representação de (4.4) fornece

$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i + (h_9 + h_{10}) \cdot u_\alpha + (h_9 + h_{10}) \cdot S(x, y) \cdot u_\beta \quad (4.6)$$

onde  $S(x, y)$  é uma função descontínua, denominada função salto, definida por

$$S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

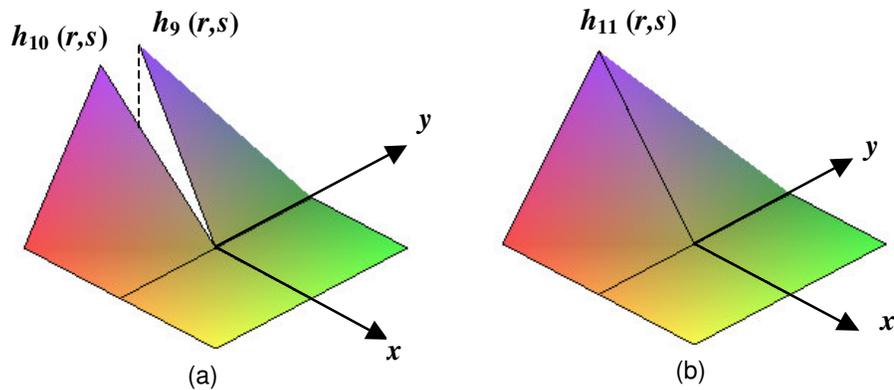


Fig 4.3 Representação geométrica das funções de forma: (a) modelo com descontinuidade e, (b) modelo sem descontinuidade.

Observando-se a figura 4.3 conclui-se que a adição das funções  $h_9$  e  $h_{10}$  pode ser considerada “quase idêntica” à construção da função de forma  $h_{11}$ , associada à malha mostrada na figura 4.2. Apenas para os pontos onde a trinca está definida esta adição não é rigorosamente observada. Portanto, considerando a malha na figura 4.2 podemos escrever que

$$u \cong \sum_{i=1}^8 h_i u_i + h_{11} \cdot u_{11} + h_{11} \cdot S(x, y) \cdot u_{\beta} \quad (4.8)$$

Na equação (4.8) os dois primeiros termos correspondem à interpolação clássica completa do campo de deslocamentos do MEF, sem a presença da trinca enquanto o último termo representa a inclusão de um grau de liberdade generalizado  $u_{\beta}$  e de uma função descontínua  $S(x,y)$  representativa da descontinuidade associada à presença de uma trinca na peça. Estas características indicam, na discretização em (4.8), que: a) há um enriquecimento do campo de deslocamentos original (note-se que  $u_{11} = u_{\alpha}$ ) permitindo a representação da condição de descontinuidade do material devido a presença da trinca; b) o enriquecimento obtido ocorre de forma localizada devido ao produto  $h_{11} S(x,y)$  que apresenta valores não nulos apenas no suporte (subdomínio) da função  $h_{11}$ .

### 4.2 Generalização do Modelo

O enriquecimento da discretização do MEF tradicional conforme apresentado na seção acima aponta para dois pontos básicos: a) a definição da função de enriquecimento a ser utilizada e, b) a criteriosa escolha dos nós do modelo de elementos finitos passíveis de enriquecimento.

Na figura abaixo são apresentadas duas situações correspondentes à generalização para o caso em que a direção de propagação da trinca não coincide com as arestas dos elementos

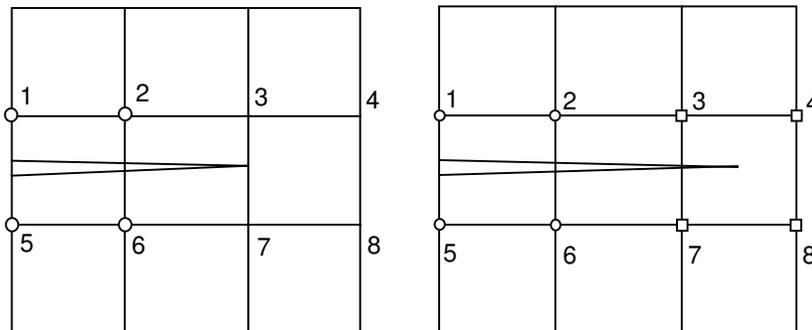


Fig 4.4 Generalização da condição de enriquecimento em elementos planos: (a) da direção de propagação e (b) ponta de trinca

Na figura 4.4 (a) , os nós marcados por círculos (nós 1,2,5 e 6) devem ser enriquecidos com funções salto incorporando a descontinuidade de domínio ao modelo tradicional do MEF. Com este conceito de função salto, pode-se representar a trinca cuja ponta coincide com uma aresta da malha de discretização por elementos finitos. A figura 4.4 (b) apresenta a próxima etapa da generalização do conceito, nela observam-se dois tipos de enriquecimento: i) os nós indicados por círculos são enriquecidos com a função salto descontínua e representam, desta forma, a descontinuidade associada às faces da trinca e, ii) os nós indicados por quadrados (nós 3,4,7 e 8) são enriquecidos com um segundo conjunto de funções de enriquecimento: as funções ponta-de-trinca. Assim, para a representação das descontinuidades na trinca denotam-se os nós enriquecidos com a função salto de nós-salto e os nós enriquecidos com as funções ponta-de-trinca de nós ponta-de-trinca. Estas serão consideradas na seção seguinte.

### 4.3 Descrição das Funções Ponta-de-trinca.

Considerando-se a figura 4.4 (b) , para a configuração de trinca mostrada a discretização é representada por

$$u = \sum_{i \in I} h_i u_i + \sum_{\beta \in S} b_\beta h_\beta S(x, y) + \sum_{p \in P} h_p \left( \sum_{l=1}^4 c_p^l P_l(x, y) \right) \quad (4.9)$$

onde  $I$  representa o conjunto de todos os nós da malha,  $S$  o conjunto de nós com enriquecimento pela função salto (nós 1,2,5 e 6) e  $P$  o conjunto de nós com enriquecimento pela função ponta-de-trinca (nós 3,4,7 e 8). Na equação (4.9),  $b_\beta$  e  $c_p^l$  são os graus de liberdade generalizados associados às funções salto e funções ponta de trinca, respectivamente. A funções de enriquecimento ponta-de-trinca são definidas na forma [35,46,47]

$$P(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (4.10)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas locais definidas no sistema polar relativo à ponta-de-trinca, conforme apresentado na figura 4.5

Dois aspectos importantes associados às funções  $P_l(r, \theta)$  , em (4.10), devem ser aqui destacados: i) estas quatro funções constituem uma base que representa a solução analítica assintótica para o campo de deslocamentos ao redor de uma

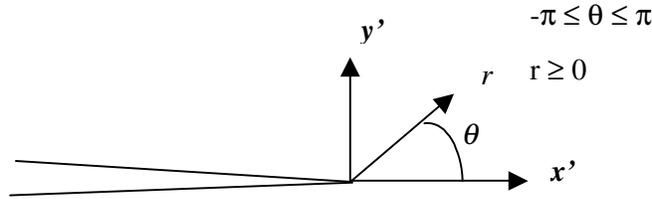


Fig 4.5 Sistema local na ponta da trinca

trinca na MFLE , conforme demonstrado no Apêndice III e, ii) a primeira função caracteriza a descontinuidade nas duas faces junto à ponta-da- trinca

$$\sin \frac{\theta}{2} = \begin{cases} +1 & \text{para } \theta \rightarrow \pi \\ -1 & \text{para } \theta \rightarrow -\pi \end{cases} \quad (4.11)$$

enquanto as demais funções são contínuas. É esta descontinuidade que permite a representação da abertura da trinca mesmo com a ponta no interior do domínio do elemento finito. O campo de deslocamentos torna-se então descontínuo ao longo das faces da trinca. Nas figuras 4-6 a 4-8 é apresentado o efeito do enriquecimento da equação (4.11) na função de forma do elemento. Inicialmente na figura 4.6 apresenta-se a representação espacial da função de forma bilinear lagrangeana  $h_2(x, y) = 0.25 \cdot (1 - x) \cdot (1 + y)$ , típica do MEF. O efeito do enriquecimento desta função - na forma do produto  $h_2(x, y) \sqrt{r} \sin(\theta/2)$  - é então apresentado na figura 4.7. Nota-se a descontinuidade obtida, usada para representar a presença da ponta de trinca. A figura 4.8 apresenta o enriquecimento da função de forma tradicional, obtido com o produto  $h_2(x, y) \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)$ .

Considerando-se a representação do caso genérico, mostrada na figura 4.9, em que a trinca possui duas pontas de propagação, a discretização é representada por

$$u = \sum_{i \in I} h_i u_i + \sum_{\beta \in S} b_\beta h_\beta S(x, y) + \sum_{p \in P_1} h_p \left( \sum_{l=1}^4 c_p^l P_l^1(x, y) \right) + \sum_{p \in P_2} h_p \left( \sum_{l=1}^4 d_p^l P_l^2(x, y) \right) \quad (4.12)$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  formam o conjunto de nós ponta-de-trinca para primeira e segunda ponta respectivamente,  $c_p^l$  e  $d_p^l$  são os graus de liberdade generalizados associados a estas funções de enriquecimento e,  $P_l^1(x, y)$  e  $P_l^2(x, y)$  são as funções de enriquecimento para as duas pontas de trinca, respectivamente.

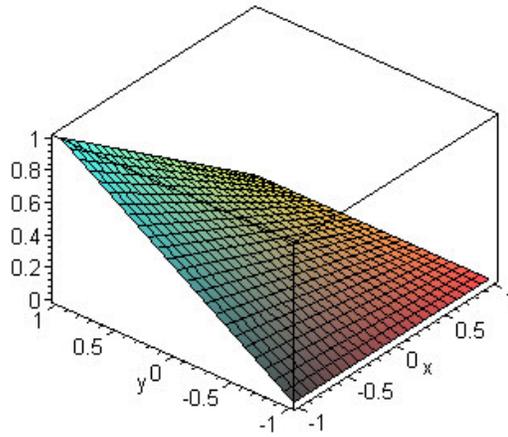


Fig 4.6 Função de forma bilinear tradicional  $h_2(x,y)$

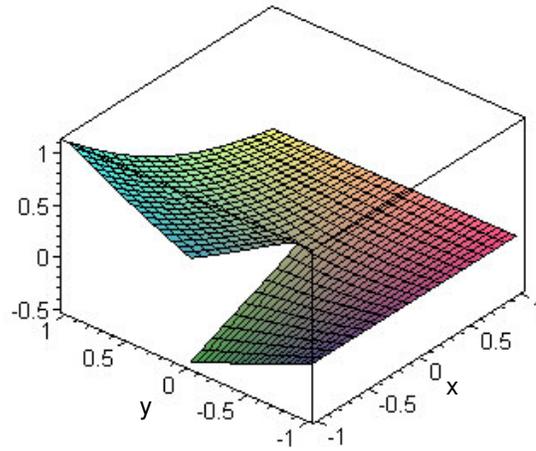


Fig 4.7 Função de forma enriquecida - produto  $h_2(x,y) \sqrt{r} \sin(\theta/2)$  apresentando a descontinuidade associada à ponta de trinca.

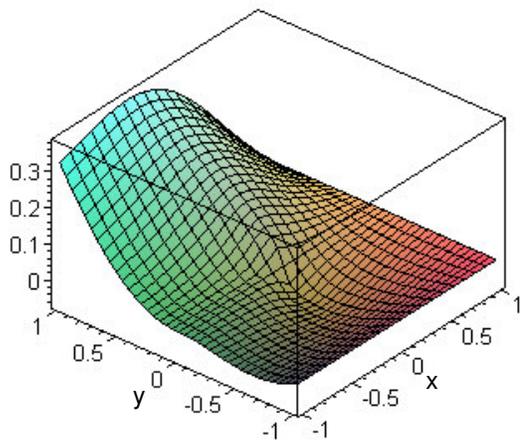


Fig 4.8 Função de forma enriquecida - produto  $h_2(x,y) \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)$

#### 4.4 Definição da função salto.

Inicialmente, considera-se a trinca definida geometricamente por uma sequência de segmentos de reta mostrada na figura 4.10 (a). Na definição da função salto, para um ponto  $P(x,y)$  pertencente a um elemento possuidor de nó-salto, procura-se o ponto extremidade desta sequência de segmentos mais próximos, excluindo-se desta busca as pontas da trinca. Com a extremidade  $V$  encontrada, determinam-se os vetores  $s_1 = \overline{O_1V}$  e  $s_2 = \overline{O_2V}$ , associados aos segmentos de reta da trinca e os vetores  $p_1 = \overline{O_1P}$  e  $p_2 = \overline{O_2P}$ , conforme mostrado na figura 4.10 (b).

A combinação dos sinais dos produtos vetoriais entre estes quatro vetores, tomados dois a dois, determina se o ponto  $P(x,y)$  está à direita ou à esquerda dos vetores  $s_1$  e  $s_2$  (figura 4.11), conforme mostrado à tabela 4.1 e definindo-se, assim, o sinal da função salto  $S(x,y)$ , cujo valor absoluto é unitário.

Tabela 4.1 Definição do sinal de  $S(x,y)$

		$p_2 \times s_2$	
		< 0	> 0
$p_1 \times s_1$	< 0	<i>sinal de <math>s_1 \times s_2</math></i>	<i>positivo</i>
	> 0	<i>negativo</i>	<i>sinal de <math>s_1 \times s_2</math></i>

#### 4.5 Escolha dos Nós Enriquecidos

A determinação dos conjuntos de nós  $S$ ,  $P_1$  e  $P_2$  deve ser feita através de uma escolha criteriosa. Ao considerarmos a primeira ponta de trinca, determina-se o(s) elemento(s) possuidor(es) desta ponta e o conjunto  $P_1$  é então constituído por todos os nós deste(s) elemento(s). De forma análoga, constrói-se o conjunto  $P_2$ . A figura 4.12 ilustra duas possíveis situações. Para o enriquecimento com a função salto, a escolha dos nós é determinada pela interseção do suporte das funções de forma destes com a trinca. No caso em que a trinca divide o suporte em duas

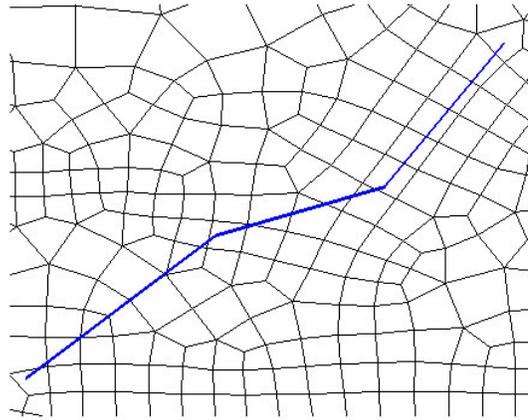


Fig 4.9 Caso Geral da propagação de trinca em duas direções.

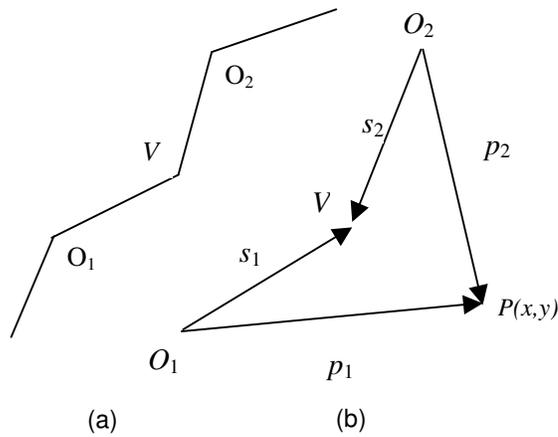
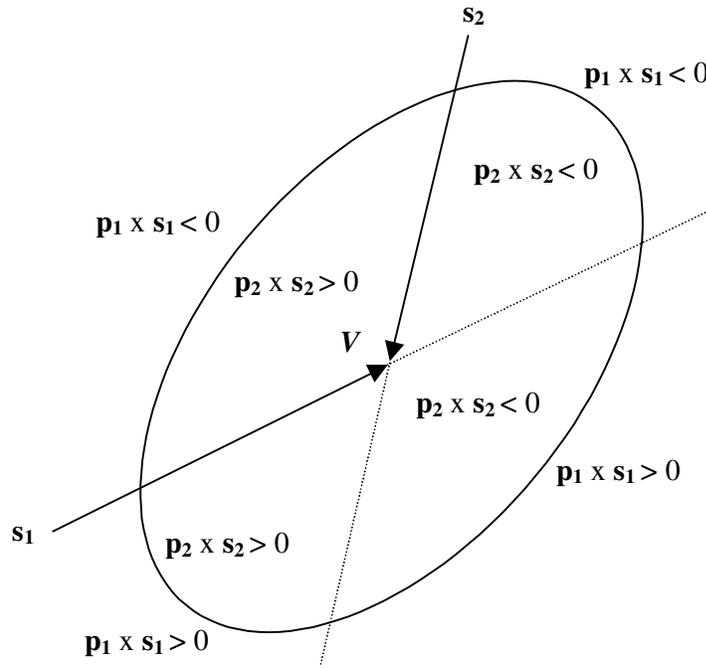
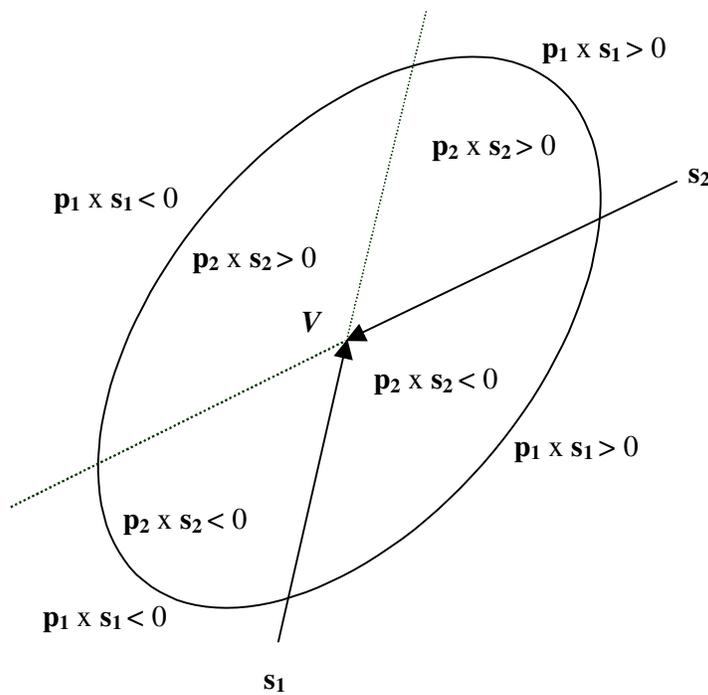


Fig 4.10 (a) propagação de uma trinca representada pelos segmentos  $O_1V$  e  $VO_2$  ; (b) Vetores  $s_1, s_2, p_1$  e  $p_2$  utilizados na definição da função salto.



(a) condição para  $s_1 \times s_2 < 0$



(b) condição para  $s_1 \times s_2 > 0$

Fig 4.11 Definição do sinal da função salto  $S(x,y)$  - vide Tabela 4.1.

regiões distintas seleciona-se o nó para o conjunto  $S$ . Para a implementação deste critério, identificam-se duas situações: i) todo nó interceptado pela trinca será incluído em  $S$ , conforme ilustra a figura 4.13 (a) e (b) ; ii) Seja um elemento dividido pela trinca em duas regiões cujas áreas são significativas em relação à área do elemento, figura 4.13 (c). Todos os nós deste elemento pertencem então a  $S$ . É importante observar que, quando houver a indicação simultânea para os dois tipos de enriquecimento, prevalecerá sempre a escolha pelo enriquecimento de ponta-de-trinca - como ocorre na figura 4.12 (b).

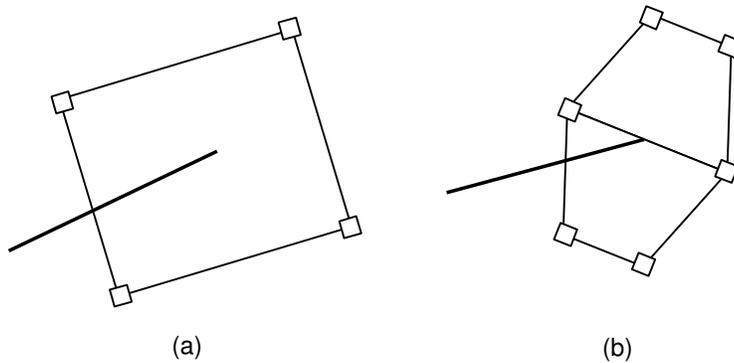


Fig 4.12. Enriquecimento com função ponta-de-trinca: (a) ponta-de-trinca no interior do elemento; (b) ponta-de-trinca sobre uma aresta do elemento.

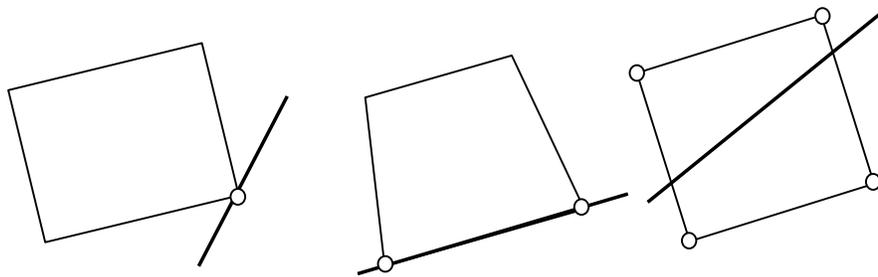


Fig 4.13: Enriquecimento com função salto: (a) e (b) nós interceptados pela trinca e (c) elemento dividido pela trinca.

### 4.6 Integração Numérica

A representação típica de uma trinca – de duas pontas - com uma malha de elementos finitos enriquecidos é mostrada na figura 4.14 (a). Com o emprego das

funções de enriquecimento ocorrem na malha de discretização elementos com as seguintes características: i) elementos sem enriquecimento; ii) elementos parcialmente enriquecidos, em que apenas alguns de seus nós possuem graus-de-liberdade de enriquecimento e iii) elementos totalmente enriquecidos, em que todos os nós possuem graus-de-liberdade de enriquecimento. Para estes últimos é necessário considerar um esquema especial de integração numérica espacial porque são cortados ou divididos pela trinca e devem ser subdivididos em subdomínios de integração devido à descontinuidade das funções de enriquecimento. A possibilidade natural é empregar-se subdivisões triangulares em cada um dos subdomínios do elemento, conforme ilustrado na figura 4.14 (b). Para estes elementos divididos em duas regiões distintas definem-se duas situações: i) formam-se duas regiões convexas, neste caso um algoritmo de triangulação simplificado é empregado [53]; ii) ocorre a formação de alguma região não convexa e, neste caso, um algoritmo de triangulação, baseado no conceito de avanço da linha frontal pode ser empregado [53].

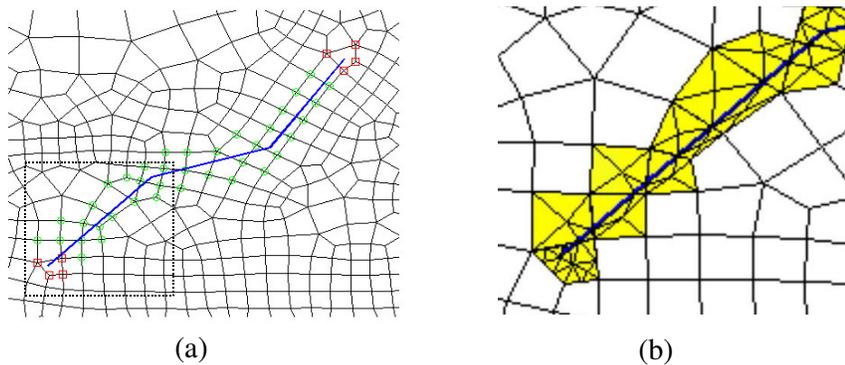


Fig 4.14 (a) Trinca e nós enriquecidos e (b) Detalhe dos subdomínios de integração

Com este esquema de subdivisões emprega-se um processo de integração numérica por quadratura Gauss – Legendre no interior dos subdomínios triangulares e a ordem de integração é determinada em função do tipo de enriquecimento do elemento. Com os subdomínios definidos, a integração sobre o elemento é então realizada tomando-se a contribuição de cada  $i$ -ésimo subdomínio triangular -  $A_i^{subdomínio}$  - da forma,

$$A_{elem} = \prod_{i=1}^n A_i^{subdomínio} \quad (4.13)$$

$$\int_{A_{elem}} f(x, y) dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f(x, y) dA_i^{subdominio} \quad (4.14)$$

É importante observar-se que este procedimento de integração requer a avaliação das funções de enriquecimento em pontos do subdomínio triangular e, portanto, há a necessidade de obter as coordenadas locais do subdomínio  $(r, s)$ , as coordenadas globais  $(X, Y)$  e as coordenadas locais  $(r, s)$  do elemento. Estes valores são obtidos numericamente conforme apresentado no Apêndice I.

Devido à distorção dos subdomínios, podem ocorrer dificuldades de mau condicionamento do sistema de equações em função da má qualidade nos resultados da integração numérica. Em alguns casos torna-se impossível evitar a ocorrência destas distorções sem que ajustes na malha sejam realizados. Duas destas ocorrências estão apresentadas nas figuras seguintes. No exemplo da figura 4.15, a interseção trinca-aresta de elemento ocorre muito próxima ao nó do elemento e, no caso apresentado na figura 4.16, a ponta da trinca avança para uma posição muito próxima de uma aresta ou nó do elemento. No primeiro caso o procedimento consiste em corrigir-se a malha deslocando o nó do elemento para o ponto de interseção tornando uma das subdivisões triangular. No segundo caso, no momento da propagação da trinca, a nova posição da ponta-de-trinca é verificada e considerada válida se estiver a uma distância conveniente das arestas do elemento, caso contrário reduz-se o tamanho de passo de propagação da trinca até uma posição adequada.

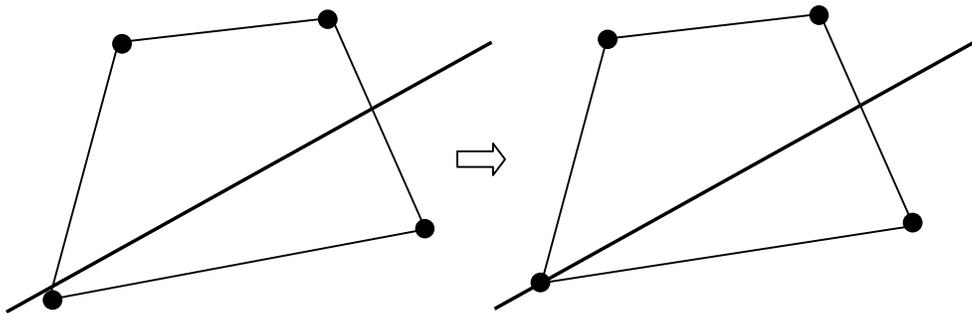


Fig 4.15 Correção da malha para a interseção nó - interseção

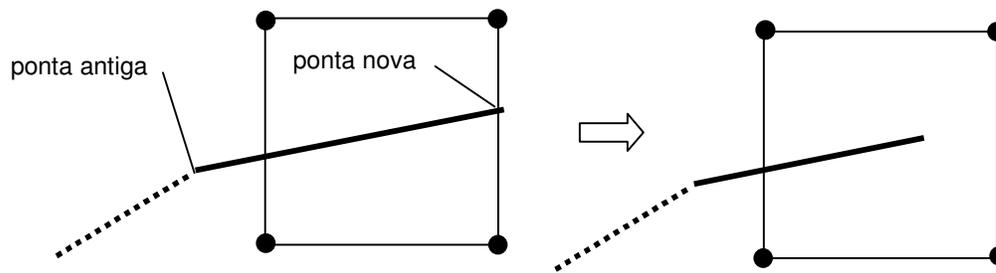


Fig 4.16 Correção da posição da ponta-de-trinca

Note-se que a construção destes subdomínios de integração e os ajustes acima descritos não implicam em modificações no número de graus de liberdade da discretização ou ainda em variações importantes na malha originalmente empregada. A subdivisão do domínio do elemento é utilizada apenas para a realização da integração numérica, não interferindo no processo de interpolação das variáveis de estado.

Embora a estratégia anteriormente apresentada leve a um aumento da robustez do algoritmo para o caso bidimensional, esta não é plenamente extensível para o caso tridimensional. Na próxima seção propõe-se um esquema de integração que resolve este problema de modo que a integração das equações torna-se robusta, sendo este esquema proposto integralmente aplicável em problemas tridimensionais.

#### 4.7 Integração Numérica para o MEEG Aplicado à Mecânica da Fratura.

Nesta seção abordaremos as opções adotadas para o cálculo das integrais do MEF Extendido. *Dois fatores* básicos devem aqui ser considerados: a) a presença, no interior do elemento, de uma trinca com a conseqüente imposição de um campo de deslocamentos descontínuo; b) O uso de funções de enriquecimento não polinomiais para a modelagem do campo de deslocamentos na ponta da trinca.

O primeiro fator requer que o esquema de integração seja robusto de modo a capturar os efeitos devidos à existência de uma função descontínua no domínio do elemento. Como visto anteriormente, a integração numérica empregando a quadratura Gaussiana requer um número suficiente de pontos de integração distribuído nas duas regiões (domínios) do elemento atravessado pela trinca.

O segundo fator refere-se ao uso de um número de pontos de integração ao redor da ponta-de-trinca de forma a garantir uma adequada aproximação das integrais avaliadas neste domínio. Também, devido à ocorrência de singularidade, é necessário evitar-se que coordenadas da ponta de trinca coincidam com algum ponto de avaliação de Gauss.

Uma primeira possibilidade natural é a de subdividir-se os elementos interceptados pela trinca na forma discutida na seção anterior, conforme apresentado pela figura 4.17. Este procedimento de subdivisão resulta em nenhuma modificação de número de graus de liberdade do modelo utilizado.

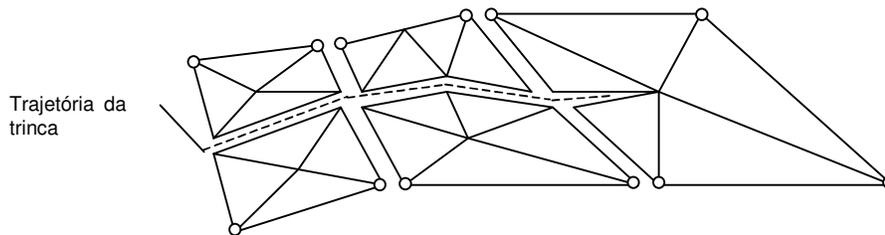


Figura 4.17 Três elementos cortados pela trinca e as suas subdivisões empregadas para a avaliação da integração nos domínios.

Este método garante uma distribuição adequada de pontos de Gauss em ambos os lados da descontinuidade (trajetória da trinca). No entanto, o processo de avaliação do integrando requer a necessidade de mapear as coordenadas locais do triângulo em função das coordenadas locais do elemento, através de procedimentos numéricos, com a ocorrência de erros de arredondamento e de um esforço computacional adicional. Um segundo aspecto a ser considerado é a ocorrência de subdivisões distorcidas que afetam a qualidade da integração e, eventualmente, o mau condicionamento do sistema de equações. Na figura 4.18 apresenta-se o exemplo de uma trinca com configuração desfavorável para a construção de subdivisões do domínio de integração numérica. Esta é apenas uma

ilustração e não esgota as muitas possibilidades de configurações desfavoráveis, que poderiam ser, eventualmente, contornadas através de procedimentos como: a) modificação de posição de nós da malha ou, b) escolha do tamanho de passo da trinca em função de uma posição conveniente para a ponta da trinca. Entretanto, o grande número de possíveis configurações geométricas leva ao questionamento quanto à *robustez* desta estratégia de integração e ainda ao seu eventual potencial em aplicações no tratamento da propagação de trincas em estruturas 3D.

Assim, outras possibilidades com a quadratura gaussiana foram exploradas no desenvolvimento deste trabalho. A figura 4.19 apresenta, por exemplo, duas situações em que a quadratura tradicional de Gauss-Legendre torna-se inadequada para capturar a descontinuidade no campo de deslocamentos no domínio do elemento finito. Nestas situações, a função salto de enriquecimento leva à obtenção de uma matriz de rigidez singular para o elemento, porque o polinômio interpolante da quadratura não captura a descontinuidade nos dois lados da trinca.

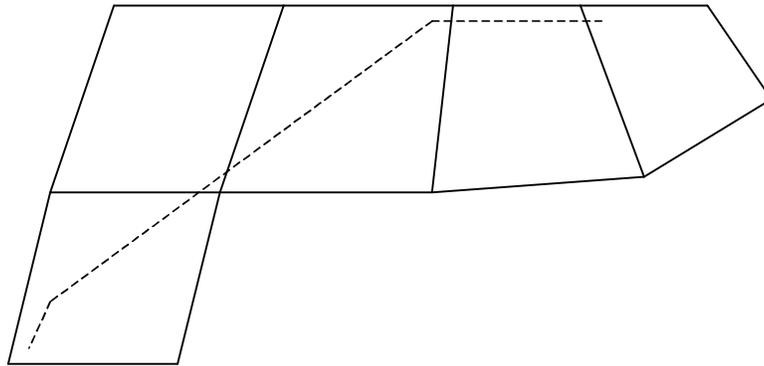


Figura 4.18 Posição relativa de uma trinca em malha de elementos finitos

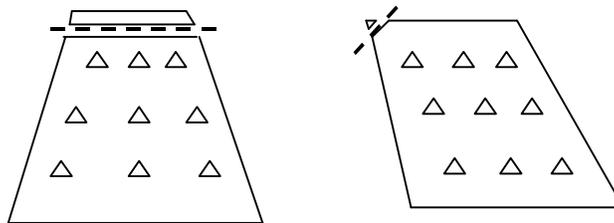


Figura 4.19 Exemplos de possibilidades de elementos cortados pela trinca com indicação dos pontos de Gauss-Legendre

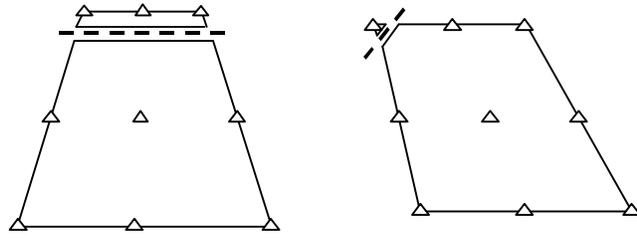


Figura 4.20 Esquema para a integração numérica proposto

A captura da descontinuidade pode ser obtida de forma mais adequada com os pontos de integração distribuídos ao longo das arestas dos elementos conforme mostrado na figura 4.20. O reposicionamento dos pontos de Gauss nas extremidades do domínio de integração é obtido empregando-se o procedimento da quadratura de Gauss-Lobatto [58], cuja aproximação para a integração unidimensional fornece

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \frac{2}{n(n-1)}[f(-1) + f(+1)] + \sum_{k=1}^{n-2} \omega_k f(\xi_k) \quad (4.15)$$

onde  $n$  é o número de pontos de integração empregados,  $\xi_k$  é a  $k$ -ésima coordenada do ponto de integração, com valor definido no intervalo  $-1 < \xi_k < 1$ . Esta coordenada corresponde à  $k$ -ésima raiz de  $P'_{n-1}(x)$  (primeira derivada em relação a  $x$  do polinômio de Legendre de grau  $n-1$ ). O peso  $\omega_k$  é dado por

$$\omega_k = \frac{2}{n(n-1)[P'_{n-1}(\xi_k)]^2}. \quad (4.16)$$

Este esquema de integração atende à dificuldade de captura da presença da trinca no interior do elemento sendo no entanto inadequado para a integração dos elementos enriquecidos em que a ponta de trinca coincide com o nó do elemento, como mostra a figura 4.21. Para estas situações adota-se o procedimento da quadratura de Gauss-Radau, na qual apenas um limite do intervalo recebe um ponto de integração [58]. Desta forma a seguinte aproximação é então empregada

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \frac{2}{n^2}[f(-1)] + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k f(\xi_k) \quad (4.17)$$

com

$$\omega_k = \frac{1}{n^2} \frac{1 - \xi_k}{[P_{n-1}(\xi_k)]^2} \quad (4.18)$$

onde  $n$ ,  $\xi_k$ ,  $P_{n-1}(\xi_k)$  têm a mesma definição usada para a equação (4.15).

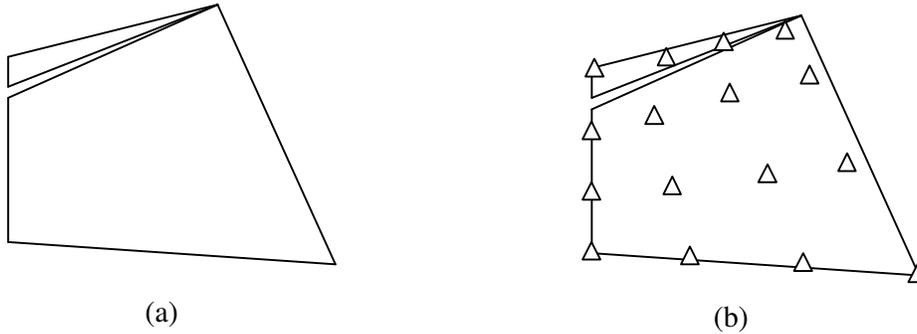


Figura 4.21 (a) ponta de trinca coincide com nó do elemento; (b) Distribuição dos pontos de integração de Gauss-Radau.

Esta nova distribuição de pontos de integração garante a captura da descontinuidade e a correta integração das funções de enriquecimento de ponta de trinca, para uma adequada ordem de integração  $n$ , como usual nos métodos de integração numérica espacial.

A implementação da quadratura de Gauss-Lobatto para o domínio bidimensional do elemento finito isoparamétrico segue o mesmo formato da tradicional quadratura Gauss-Legendre. No entanto, para a quadratura de Gauss – Radau uma pequena modificação faz-se necessária para levar em conta a presença da ponta de trinca: as coordenadas paramétricas locais dos pontos de integração no elemento  $(\xi, \eta)$  devem ser multiplicadas por  $\text{sign}(\xi_{ponta})$  e  $\text{sign}(\eta_{ponta})$ , sinais das coordenadas  $\xi_{ponta}$  e  $\eta_{ponta}$ , respectivamente. Assim,

$$\int f(x, y) dx dy \approx \sum_i \sum_j f(\xi_i \cdot \text{sign}(\xi_{ponta}), \eta_j \cdot \text{sign}(\eta_{ponta})) \omega_i \cdot \omega_j \cdot \det J \quad (4.19)$$

e os pontos de integração são corretamente distribuídos sobre o elemento evitando a coincidência com a ponta de trinca. A coordenada  $\xi_k$  dos pontos de integração, e seu correspondente peso de integração  $\omega_k$  estão apresentados no Apêndice IV, para a quadratura de Gauss-Lobatto.

De acordo com a experiência obtida nas análises reportadas no Capítulo 5, a ordem de integração empregada para o problema da propagação de trincas em função da classificação do elemento quanto ao enriquecimento de seus nós e de uma eventual interseção com a trinca, está ilustrada na Figura 4.22 e Tabela 4.3, para sete possíveis posições relativas dos elementos vizinhos à trinca.

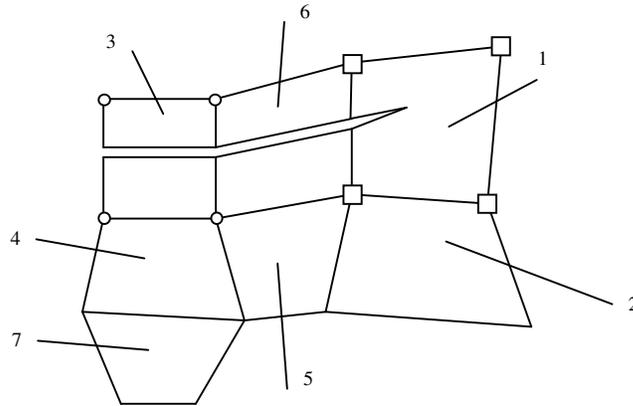


Figura 4.22 : Posições dos elementos em relação à trinca para definição do procedimento de integração.

Tabela 4.3: Definição da ordem de integração

interseção	Tipo de enriquecimento	Legenda	Tipo de quadratura	Ordem de integração
sim	ponta	1	Lobatto (i)	20 x 20
			Radau (ii)	
	salto	3	Lobatto	20 x 20
misto	6	Lobatto		
não	ponta	2	Legendre	8 x 8
	misto	5		
	salto	4	Legendre	2 x 2
	nenhum	7		

(i) Se a ponta-de-trinca não coincide com algum nó.

(ii) Se a ponta-de-trinca coincide com algum nó do elemento.

O esforço numérico adicional devido ao acréscimo da ordem de integração é neste caso compensado pela eliminação do penoso processo de construção de subdivisões dos domínios de integração. O esquema de integração assim proposto adquire robustez e toda a análise pode ser desenvolvida sem qualquer tipo de modificação na malha originalmente definida.

#### 4.8 Critério para a Determinação da Direção de Propagação.

Durante o procedimento numérico de análise, a determinação da direção de propagação da trinca é obtida adotando-se um dos seguintes critérios, conforme reportado na literatura [59-62]: a) o critério da tensão circunferencial máxima ou critério de tensão principal máxima, b) o critério da taxa máxima de liberação de energia e c) o critério de densidade mínima de energia de deformação. Testes numéricos comparativos de análises utilizando estes critérios apresentaram resultados semelhantes [62], de modo que, neste trabalho, adota-se o critério da tensão circunferencial máxima.

No caso do carregamento plano, em modo misto, as componentes das tensões circunferencial e cisalhamento no caso do estado plano, são expressas, respectivamente, por [50]

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \frac{K_I}{2\pi r} \frac{1}{4} \begin{cases} 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{cases} + \frac{K_{II}}{2\pi r} \frac{1}{4} \begin{cases} -3\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2) \end{cases}. \quad (4.20)$$

De acordo com o critério da máxima tensão circunferencial, uma trinca propaga-se a partir de sua ponta em uma direção  $\theta_c$  na qual a tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  é máxima, i.e., correspondente à direção principal. O ângulo  $\theta_c$ , que define esta direção radial de propagação da trinca, é obtido tornando nula a componente cisalhante em (4.20),

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left( K_I / K_{II} \pm \sqrt{(K_I / K_{II})^2 + 8} \right) \quad (4.21)$$

e o valor de  $\theta_c$  que maximiza a componente de tensão  $\sigma_{\theta\theta}$  em (4.20) indica a direção de propagação da trinca.

#### 4.9 Fatores de Intensidade de Tensão

Os fatores de intensidade de tensão são avaliados a partir das integrais de interação modificadas para avaliação em subdomínios [61]. No cálculo, são adotadas as coordenadas do sistema local  $x_1y_1$ , na ponta da trinca com o eixo  $x_1$  paralelo às faces da trinca. Para o problema em modo misto genérico obtém-se a seguinte relação entre o valor de integral  $J$  e os fatores de intensidade de tensão

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (4.22)$$

onde  $E^*$  é definido em termos de parâmetros do material  $E$  (módulo de Young) e  $\nu$  (razão de poisson), na seguinte forma.

$$E^* = \begin{cases} E & \text{estado plano de tensões} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{estado plano de deformações} \end{cases} \quad (4.23)$$

Dois estados independentes de tensão são considerados no corpo trincado. O estado a,  $(\sigma_{ij}^{(a)}, \varepsilon_{ij}^{(a)}, u_i^{(a)})$ , corresponde a uma solução efetiva, eventualmente obtida através de procedimento numérico, e o estado b,  $(\sigma_{ij}^{(b)}, \varepsilon_{ij}^{(b)}, u_i^{(b)})$ , que é um estado auxiliar, construído a partir da solução analítica para os campos de tensão e deformação assintóticos, na ponta da trinca para os modos I e II. A integral  $J$  para a soma dos dois estados é dada por [61]

$$J^{(a+b)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(a)} + \sigma_{ij}^{(b)}) (\varepsilon_{ij}^{(a)} + \varepsilon_{ij}^{(b)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(a)} + \sigma_{ij}^{(b)}) \frac{\partial (u_i^{(a)} + u_i^{(b)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (4.24)$$

onde  $n_j$  são as componentes do vetor normal ao contorno  $\Gamma$  que envolve a ponta da trinca conforme mostrado na Figura 4.23. Expandindo e reorganizando os termos da equação (4.24) obtém-se

$$J^{(a+b)} = J^{(a)} + J^{(b)} + I^{(a,b)} \quad (4.25)$$

onde  $I^{(a,b)}$  é a integral de interação para os estados (a) e (b)

$$I^{(a,b)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(a,b)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial (u_i^{(b)})}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial (u_i^{(a)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (4.26)$$

onde  $W^{(a,b)}$  é a energia de deformação de interação

$$W^{(a,b)} = \sigma_{ij}^{(a)} \varepsilon_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(b)} \varepsilon_{ij}^{(a)} \quad (4.27)$$

Aplicando-se a equação (4.22) para a interação entre os estados (a) e (b)

$$J^{(a+b)} = \frac{1}{E^*} \left[ (K_I^{(a)} + K_I^{(b)})^2 + (K_{II}^{(a)} + K_{II}^{(b)})^2 \right] \quad (4.28)$$

e reorganizando resulta

$$J^{(a+b)} = \frac{(K_I^{(a)})^2 + (K_{II}^{(a)})^2}{E^*} + \frac{(K_I^{(b)})^2 + (K_{II}^{(b)})^2}{E^*} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(a)} K_I^{(b)} + K_{II}^{(a)} K_{II}^{(b)}) \quad (4.29)$$

$$J^{(a+b)} = J^{(a)} + J^{(b)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(a)} K_I^{(b)} + K_{II}^{(a)} K_{II}^{(b)}) \quad (4.30)$$

Da comparação entre as equações (4.25) e (4.30) para os estados combinados obtém-se

$$I^{(a,b)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(a)} K_I^{(b)} + K_{II}^{(a)} K_{II}^{(b)}) , \quad (4.31)$$

que define a integral de interação entre os dois estados auxiliares.

Das equações (4.27) e (4.31), os fatores  $K_I$  e  $K_{II}$  para um problema de trinca submetida a um carregamento combinado em modo misto podem ser obtidos. Neste caso, é necessário estabelecer as soluções auxiliares conhecidas: Seja o primeiro campo auxiliar denotado pelo índice (2a) . Para um corpo trincado sujeito a um carregamento em modo I tem-se  $K_I^{(2a)} = 1$  e  $K_{II}^{(2a)} = 0$  . A equação (4.31) resulta então em

$$I^{(2a,b)} = \frac{2}{E^*} (K_I^b) \quad (4.32)$$

e  $I^{(2a,b)}$  tem a forma, de (4.26),

$$I^{(2a,b)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(2a,b)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2a)} \frac{\partial(u_i^{(b)})}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial(u_i^{(2a)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (4.33)$$

com

$$W^{(2a,b)} = \sigma_{ij}^{(2a)} \epsilon_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(b)} \epsilon_{ij}^{(2a)} \quad (4.34)$$

onde os campos auxiliares  $\sigma_{ij}^{(2a)}$  e  $u_i^{(2a)}$  são obtidos da solução analítica assintótica clássica para o problema da MFLE e os campos para  $\sigma_{ij}^{(b)}$  e  $u_i^{(b)}$  são fornecidos pelo MEF.

Observe-se que a integral de contorno (4.33) não é adequada para a discretização de elementos finitos. Emprega-se então uma forma equivalente expressa como integral de domínio, obtida pela multiplicação do integrando por uma função peso suave,  $q(x)$ , de valor unitário em um subdomínio que contém a ponta da trinca e de valor nulo na fronteira  $C_0$  que limita este subdomínio. Então, para cada contorno  $\Gamma$  , como mostrado na Figura 4.23 , pode-se expressar a integral de interação na forma

$$I^{(a,b)} = \int_C \left[ W^{(a,b)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(a)} \frac{\partial u_i^{(b)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(b)} \frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial x_1} \right] q m_j d\Gamma \quad (4.35)$$

onde o domínio de integração resulta do contorno  $C = \Gamma \cup C_+ \cup C \cup C_0$  e  $m$  é vetor normal unitário direcionado para o exterior do contorno  $C_0$ . Usando-se o

teorema da divergência e tomando-se o limite quando o contorno  $\Gamma$  tende a zero obtém-se uma expressão para a integral de interação na forma de integral de domínio

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (4.36)$$

onde foram usadas as relações  $m_j = -n_j$  em  $\Gamma$  e  $m_j = n_j$  em  $C_0, C_+$  e  $C_-$ . O domínio da integral ( $A$ ) é definido por uma coleção de elementos localizados ao redor da ponta da trinca. Inicialmente obtém-se um comprimento característico  $h_{local}$  definido pela raiz quadrada da área de um elemento tocado pela ponta da trinca. Um raio de domínio  $r_d$  é definido na forma

$$r_d = \lambda \cdot h_{local}, \quad \lambda \geq 1, \quad (4.37)$$

no caso plano, adota-se o domínio  $A$  constituído pelos elementos que possuem pelo menos um nó no interior do círculo de raio  $r_d$ . A Figura 4.24 apresenta um conjunto típico de elementos definindo um domínio  $A$  com raio  $r_d$ .

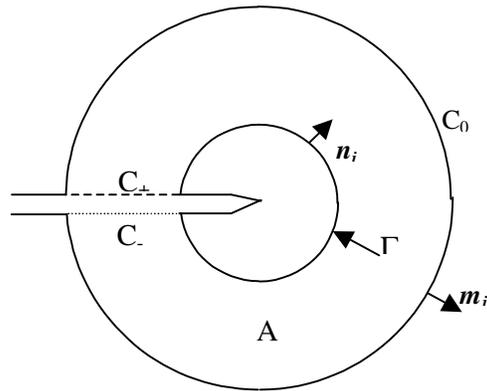


Fig 4.23 Domínio para integral de interação

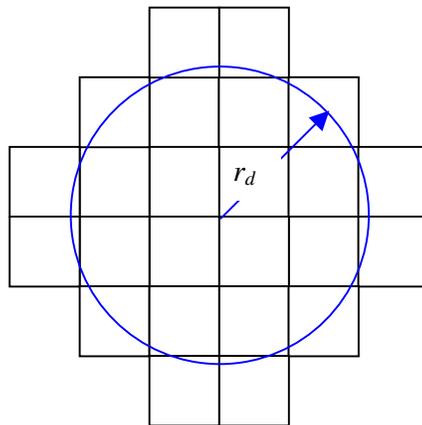


Fig 4.24 Elementos para a integral de interação

Com a seleção destes elementos, define-se então a função peso  $q(x,y)$ . Arbitram-se valores nodais  $q_i$  unitários em todos os nós interiores ao círculo de raio  $r_d$  e valores nodais nulos nos nós exteriores. A função é interpolada com o auxílio de  $h_i$  - funções de forma lagrangeanas – na forma, para cada elemento  $j$

$$q_j = \sum_i h_i q_{ij} \quad (4.38)$$

e

$$q(x, y) = \bigcup_j q_j \quad (4.39)$$

Após o cálculo da integral de interação, a análise de propagação da trinca é realizada observando-se as seguintes etapas:

- i) cálculo de e KI e KII;
- ii) determinação da direção de propagação da trinca;
- iii) escolha do tamanho de passo da trinca;
- iv) atualização da configuração geométrica da trinca;
- v) reclassificação dos nós da malha em função da nova configuração da trinca;
- vi) Obtenção da solução para os campos de deformação, tensão e deslocamento, cálculo da integral de interação para a nova configuração da trinca e retorno à etapa i) .