

## Capítulo 3 - Métodos de Partição da Unidade

### Avaliação Numérica das Técnicas de Discretização

Conforme mencionado, no capítulo 2, as técnicas de modelagem e de análise desenvolvidas neste trabalho objetivam representar problemas com “*características localizadas*” inerentes ao contexto da mecânica da fratura. O termo *característica local* indica a avaliação da solução na vizinhança de uma descontinuidade, trinca, interface ou qualquer outro elemento que perturbe a suavidade desta solução. Independentemente da situação específica o objetivo é, portanto, elaborar-se um método que melhor represente esta característica localizada com robustez numérica. Assim, neste capítulo comparam-se as soluções fornecidas por três alternativas de métodos de solução disponíveis na literatura: a) o MEF convencional, b) um método sem malha (MSM) - o MGSE e, c) o MEFG aplicados à análise de um problema unidimensional. No texto são destacadas e avaliadas as características numéricas de formulação de cada método numérico e a sua capacidade e robustez em reproduzir esta *característica local* do problema considerado. O capítulo está organizado em duas seções: na primeira apresenta-se uma descrição do problema unidimensional considerado na análise e sua solução analítica, enquanto que na segunda seção são apresentadas as características de cada método empregado, os resultados obtidos, e as conclusões das análises.

### 3.1 O Problema Unidimensional Considerado

Para efeito de fácil avaliação e interpretação dos resultados numéricos considera-se o problema de elasticidade linear, unidimensional, constituído de uma barra cilíndrica de comprimento  $L$ , sujeita a uma força de corpo  $f(x)$  e uma carga de tração  $T$ , em  $x=L$ , conforme apresentado na figura 3.1. A barra tem o deslocamento na extremidade esquerda restrita por uma mola linear de rigidez  $k$ . O problema de valor de contorno que descreve o comportamento da barra unidimensional é equacionado na forma

$$-u_{,xx} = f/E \quad \text{em } \Omega = (0,L) \quad (3.1 \text{ a})$$

$$-k u(0) = -AE u_{,x}(0) \quad (3.1 \text{ b})$$

$$u_{,x}(L) = T/AE \quad (3.1 \text{ c})$$

onde  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de elasticidade.

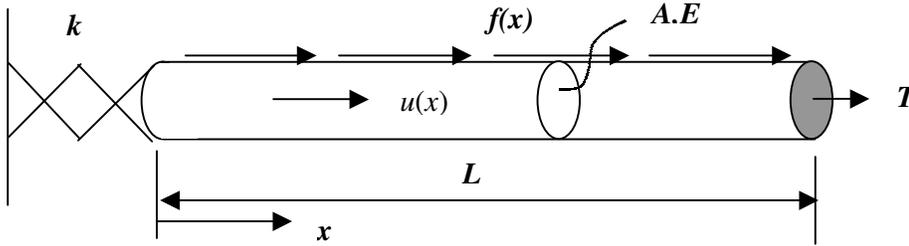


Fig 3.1 problema unidimensional

Para dar a este problema uma "característica localizada", considera-se a barra submetida a uma força de corpo na forma

$$f(x) = 6x + \left( \frac{2}{\alpha^2} - \left( \frac{L-2x}{\alpha^2} \right)^2 \right) e^{-\left( \frac{x-L/2}{\alpha} \right)^2} \quad (3.2)$$

onde o parâmetro  $\alpha$  assume um valor pequeno em relação ao comprimento da barra, neste caso, foi considerado  $(\alpha / L) = 0.01$ . Substituindo (3.2) em (3.1) e desprezando os termos exponenciais no contorno, obtém-se a seguinte solução analítica, conforme apresentado no Apêndice II, para o deslocamento na direção da barra, com  $A = E = 1$ ,

$$u(x) = (T + 3L^2) \left( \frac{1}{k} + x \right) - x^3 + e^{-\left( \frac{x-L/2}{\alpha} \right)^2} . \quad (3.3)$$

Nas figuras 3.2 (a) e (b) são apresentados gráficos das distribuições de  $f(x)$  e de  $u(x)$ , respectivamente, considerando-se  $L=1$ ,  $T=-2$ ,  $k=10$ . Observa-se que devido ao termo exponencial da força de corpo, a solução analítica apresenta uma característica local na vizinhança do centro da barra, ( $x=L/2$ ).

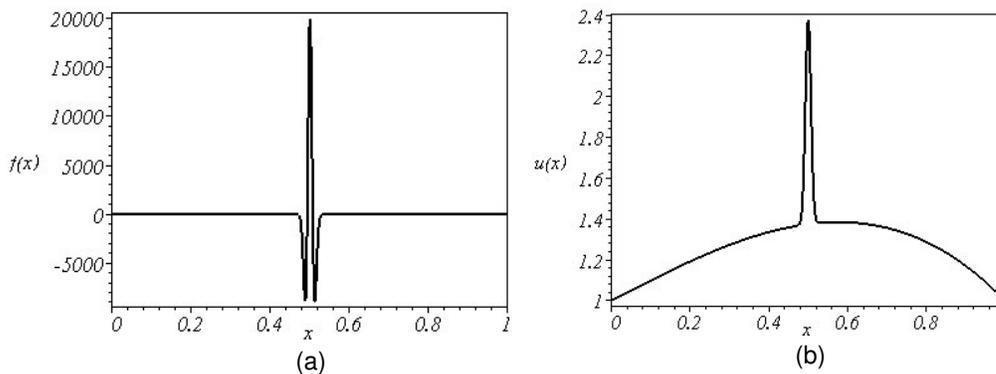


Fig 3.2 (a) Força de corpo  $f(x)$  utilizada e (b) Deslocamento  $u(x)$  ao longo da barra, considerando-se  $L=1$ ,  $T= -2$ ,  $k=10$ , nas equações (3.2) e (3.3) .

### 3.2 Métodos de Partição da Unidade

Nesta seção serão abordados três métodos de partição de unidade (PU): o MEF, o MGSE e o MEFG. Algumas características dos métodos serão enfatizadas e em seguida serão apresentados e comparados os resultados destas técnicas na análise numérica.

#### 3.2.1 Aproximação pelo Método de Elementos Finitos Tradicional

A formulação da aproximação pelo MEF é feita com a partição do domínio  $\Omega$  em  $m$  subdomínios (elementos)  $\Omega_\alpha$ . Nós são posicionados nos vértices ou extremidades de cada elemento. O total de nós no domínio é  $n$  e as suas coordenadas são indicadas por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , enquanto que os elementos por  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ . A cada nó associa-se uma função de forma  $\phi_\alpha$  que possui um suporte  $\omega_\alpha$ . O suporte de uma função nodal é definido pela união dos elementos conectados a este nó. A base de funções para a aproximação pelo MEF é formada pelas funções de forma, as quais geram um espaço de polinômios de grau mínimo igual a um. Espaços polinomiais de maior ordem podem ser construídos introduzindo graus-de-liberdade e funções de forma internas ao domínio em cada elemento. A aproximação pelo MEF é classicamente definida na forma

$$u^h(x) = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha(x) u_\alpha \quad (3.4)$$

possuindo as seguintes propriedades

- A aproximação obtida interpola os valores nodais  $u_\alpha$ , ou seja,  $u_h(x_\alpha) = u_\alpha$ .
- A aproximação obtida é contínua,  $u_h(x) \in C(\Omega)$ .
- Se a solução matemática do problema é linear, a aproximação é exata.

A primeira propriedade implica em que os coeficientes nodais  $u_\alpha$  possuem o significado físico de valores de deslocamentos nos nós. A terceira propriedade é consequência do fato das funções de forma satisfazerem as equações

$$\sum_{\alpha} N_\alpha(x) = 1 \quad (3.5 \text{ a})$$

$$\text{e } \sum_{\alpha} N_\alpha(x) x_\alpha = x \quad (3.5 \text{ b})$$

de modo que, se os coeficientes nodais  $u_\alpha$  assumem valores de um campo linear arbitrário, a aproximação (3.4) representa este campo com exatidão. As equações (3.5) são as condições de consistência ou condições de reprodução da aproximação. A condição (3.5a) implica que as funções de forma constituem uma partição da unidade e corresponde à capacidade da aproximação utilizada em representar os modos de corpo rígido do elemento, uma das condições para a convergência monotônica do método. Para a construção da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e do vetor força  $\mathbf{f}$ , as integrais no domínio são substituídas por integrais no domínio do elemento  $\Omega_\alpha$ . Em geral as funções de forma são polinômiais o que permite uma integração numérica exata desde que a ordem de integração seja suficiente. A avaliação do vetor  $\mathbf{f}$  depende da função que descreve a força de corpo. Nos exemplos apresentados neste capítulo, a integração do vetor carregamento leva em consideração a natureza da força de corpo assumida - equação (3.2). Neste caso adotam-se os mesmos valores da solução analítica:  $L = 1.0$ ,  $T = -2.0$ ,  $k = 10$ ,  $A = E = 1.0$ . Considerando-se a construção da aproximação de elementos finitos para o problema unidimensional indicado na seção anterior, a malha inicial consiste de 19 elementos e 20 nós uniformemente distribuídos no domínio  $\Omega = (0,1)$ . A solução numérica (círculos) é comparada à solução analítica (linha cheia) na figura 3.3. Nesta mostra-se que esta aproximação inicial pelo MEF é incapaz de reproduzir a "característica local" da solução na vizinhança de  $x = 0.5$ . Este fato já era esperado pois a característica local da solução está inteiramente contida em um único elemento  $\Omega_{10} = (x_{10}, x_{11}) = (9/19, 10/19)$ . A solução pode ser melhorada refinando-se a discretização, exigindo que novos elementos e novos nós sejam adicionados à malha. A reconstrução de malha no caso 1D é simples mas nos casos bi e tridimensionais é uma tarefa que demanda um grande esforço e manipulação numérica. Note-se que as dificuldades associadas aos procedimentos de reconstrução de malhas e o fato da solução numérica ser dependente de malha motivam o estudo dos métodos sem malha. As figuras 3.4 e 3.5 apresentam a solução numérica para os deslocamentos utilizando-se malhas com 40 e 80 nós, respectivamente. Observa-se que para um melhor resultado há a necessidade de

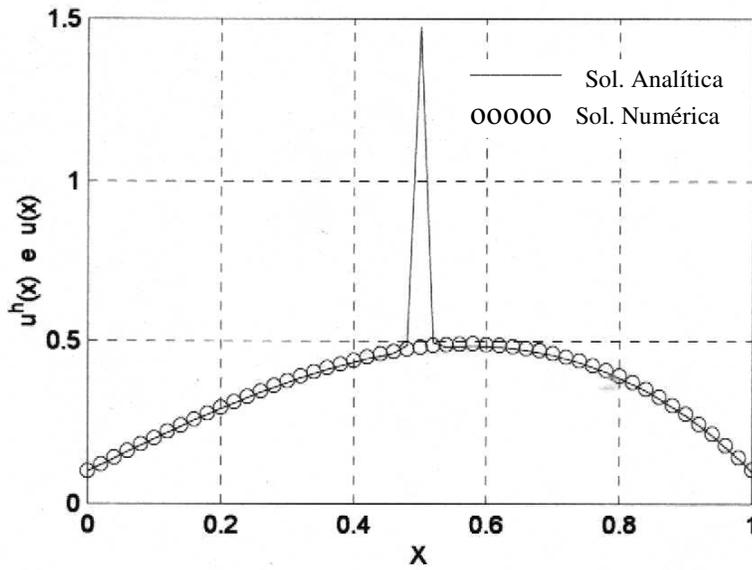


Fig 3.3 Solução do MEF com malha de 20 nós e a solução analítica.

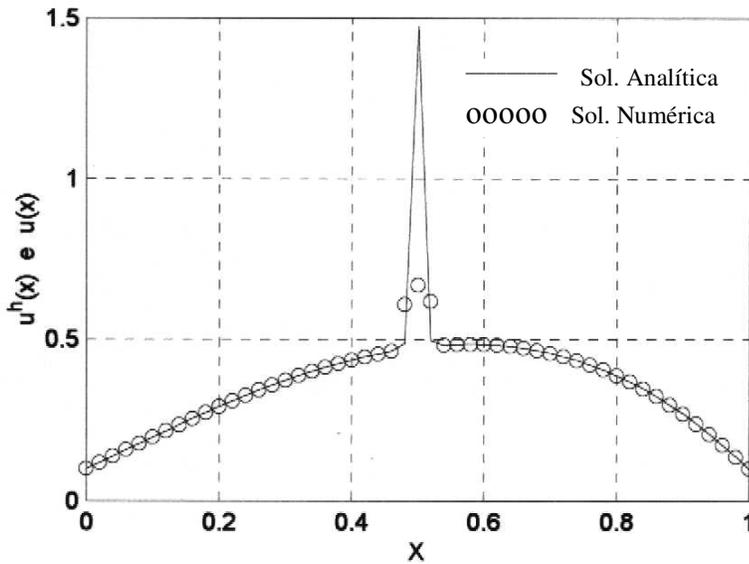


Fig 3.4 Solução do MEF com malha de 40 nós e a solução analítica.

adotar-se uma estratégia de refinamento não uniforme, que não será adotada aqui. Na integração numérica empregou-se um ponto de Gauss em cada elemento com exceção da região central do domínio. Definiu-se então um intervalo  $(a,b) = (8/19, 11/19) \approx (0.4211, 0.5789)$ . Para os elementos com interseção com este

intervalo, empregaram-se 11 pontos de Gauss. A tabela 3.1 apresenta os resultados obtidos para as discretizações com o MEF.

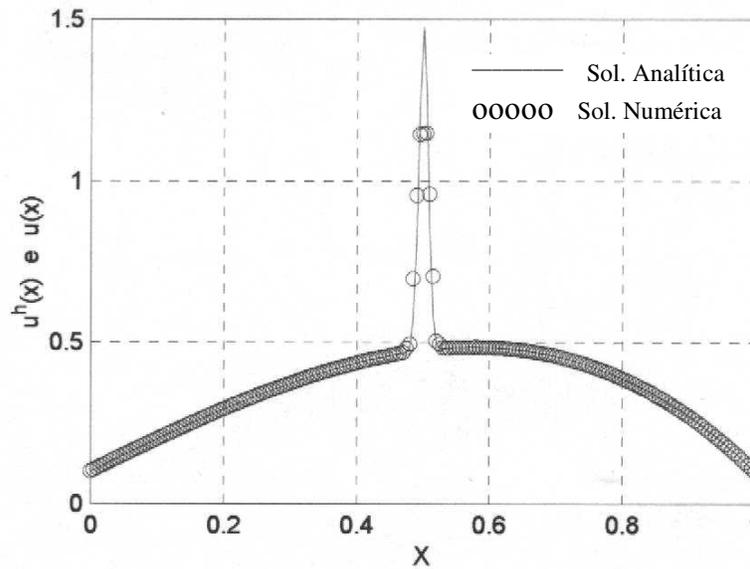


Fig 3.5 Solução do MEF com malha de 80 nós e a solução analítica.

Tabela 3.1 Solução do MEF para o problema unidimensional.

Nr nós	Nr graus de liberdade	$u^h(x=L/2)$	Erro
20	20	0.4823	67,3 %
40	40	0.6679	54,7 %
80	80	1.1448	22,3 %

Solução analítica:  $u(x=L/2) = 1.4750$

No MEF tradicional as funções de forma são expressas de forma direta, calculadas com reduzido esforço computacional, não havendo passos intermediários nesta operação. São expressões polinomiais o que favorece o uso da quadratura gaussiana tradicional na operação de integração numérica, nesta simplicidade reside a maior vantagem do método, o seu baixo esforço computacional.

Entretanto, esta simplicidade é obtida ao custo de definir-se uma estrutura de elementos finitos – a malha – que influi na qualidade das funções de forma e na precisão da solução aproximada. Definir uma malha adequada importa em observar um número suficiente graus-de-liberdade associados diretamente ao

número de nós, um conjunto de elementos finitos com formas geométricas não distorcidas, e a distribuição conveniente de nós dentro dos elementos e dentro do domínio discretizado. A construção de uma malha otimizada é uma tarefa onerosa e de difícil programação. O maior desafio está na definição de um algoritmo robusto que atenda a todas as situações sem a necessidade de intervenção do analista em passos intermediários da construção da malha. A elaboração de geradores de malha representa um desafio para pesquisa na área de geometria computacional, especialmente no caso de análises tridimensionais.

Em resposta a estas dificuldades foram propostos na literatura os métodos de adaptação de malha. Uma estimativa do erro associado à aproximação é avaliada, e a partir desta, executa-se uma reconstrução - ou adaptação - da malha, em geral empregando-se regras heurísticas: subdivisão dos elementos, aumento da ordem de interpolação, reposicionamento dos nós ou uma combinação destas estratégias. Isto leva a um processo iterativo envolvendo: i) cálculo das variáveis de estado; ii) estimativa de erro da aproximação; iii) reconstrução ou adaptação da malha e reinício do processo. O objetivo primário é minimizar o erro, i.e., encontrar a solução - polinomial - que melhor aproxime a solução matemática para o modelo físico assumido para o problema. Este processo demanda um esforço computacional considerável e comumente não utiliza as informações disponíveis sobre a natureza da solução do modelo matemático, por exemplo, se ela é expressa em termos de funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, etc.

Nas próximas seções apresentam-se aplicações de duas técnicas de discretização, que dispensam o emprego de técnicas de reconstrução de malha.

### 3.2.2 Aproximação Sem Malha

Nesta seção será apresentada uma solução sem malha, empregando o Método de Galerkin sem Elementos (MGSE), para o problema unidimensional em estudo. A formulação utilizada nos exemplos é a mesma apresentada no Capítulo 2. A função peso utilizada é a função spline cúbica descrita a partir da expressão

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4 + 4r^2 - \frac{4}{3}r^2 & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

definindo-se a distância  $d_\alpha = |x - x_\alpha|$ , a função peso nodal terá a forma

$$w_\alpha(x) = w(r) = w\left(\frac{d_\alpha}{d_{m\alpha}}\right) \quad (3.7)$$

onde  $d_{m\alpha}$  define a dimensão do domínio de influência e é calculado através de um fator  $s_m$

$$d_{m\alpha} = s_m c_\alpha \quad (3.8)$$

$c_\alpha$  é uma distância característica associada ao espaçamento nodal em torno do  $i$ -ésimo nó. O suporte das funções peso é dado por

$$\Omega_\alpha = (x_\alpha - s_m c_\alpha, x_\alpha + s_m c_\alpha) \quad (3.9)$$

este intervalo define o domínio de influência do  $\alpha$ -ésimo nó. As funções de forma são construídas de modo a satisfazer as condições de consistência (3.5). A aproximação pelo MGSE terá a forma

$$u_h(x) = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha(x) u_\alpha \quad (3.10)$$

com as propriedades

- A aproximação tem continuidade de ordem  $C^k(\Omega)$ , onde  $k = \text{mínimo} \{C^w(\Omega), C^p(\Omega)\}$ .
- A aproximação é precisa para o caso de uma solução linear.
- A aproximação não interpola o campo nos nós, ou seja,  $u_h(x) \neq u_\alpha$ .

Observe que  $C^w(\Omega)$  define a ordem de continuidade da função peso nodal e  $C^p(\Omega)$  a ordem de continuidade da base de funções adotada. No exemplo considerado, foi adotada uma base linear  $\mathbf{p}^t = [1, x]$ . A precisão da aproximação é garantida pela satisfação das condições de consistência (3.5). A terceira propriedade indica uma das desvantagens da abordagem sem malha e que leva ao uso de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno. O procedimento de integração numérica também traz dificuldades, conforme discutido no capítulo 1, sendo uma desvantagem desta abordagem em relação ao método de elementos finitos. Nas análises, utilizou-se uma malha de integração

com células definidas pelos intervalos entre nós. Adotou-se para estas células o mesmo critério utilizado para o MEF: um ponto de Gauss nas células fora da região central e 11 pontos de Gauss no outro caso. As figuras 3.6, 3.7 e 3.8 apresentam a solução exata e a solução discreta obtida com o MGSE para os modelos de 20, 40 e 80 nós, respectivamente. As discretizações empregam nós uniformemente distribuídos no domínio  $\Omega$ . Em cada nó,  $c_\alpha$  foi definido como a distância ao nó vizinho mais próximo e adota-se o fator  $s_m = 2$ . Isto é suficiente para garantir que a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  seja inversível em  $\Omega$ . Observa-se nas figuras que a solução sem malha tende a reproduzir a característica local do problema com maior sucesso que o MEF. Nota-se ainda a natureza da solução numérica do MGSE alternando-se em torno da solução analítica. Os resultados numéricos apresentados na tabela 3.2 indicam uma melhor precisão em comparação com a solução obtida pelo MEF. No entanto, a construção da aproximação sem malha requer um esforço computacional maior quando comparada ao MEF tradicional. No caso do MGSE as funções de forma são obtidas através da solução de um sistema de equações em cada ponto do domínio e o procedimento de integração numérica, em geral, também é mais caro.

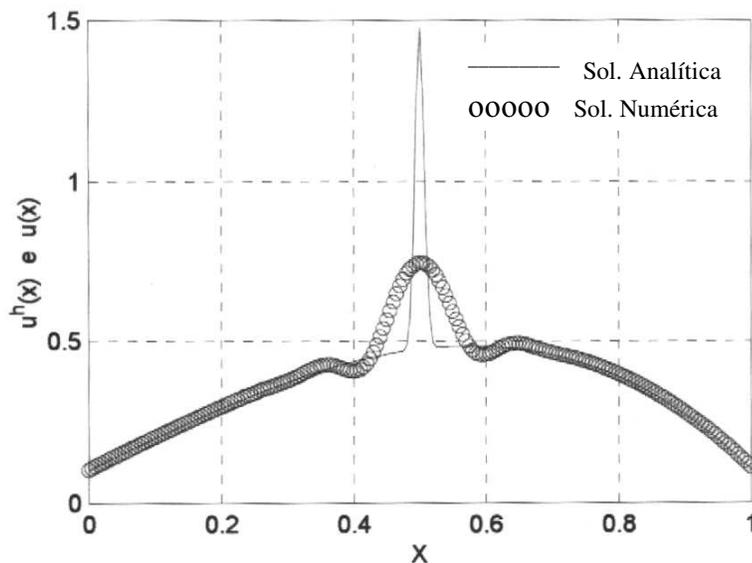


Fig 3.6 Solução discreta pelo MGSE com 20 nós e a solução analítica

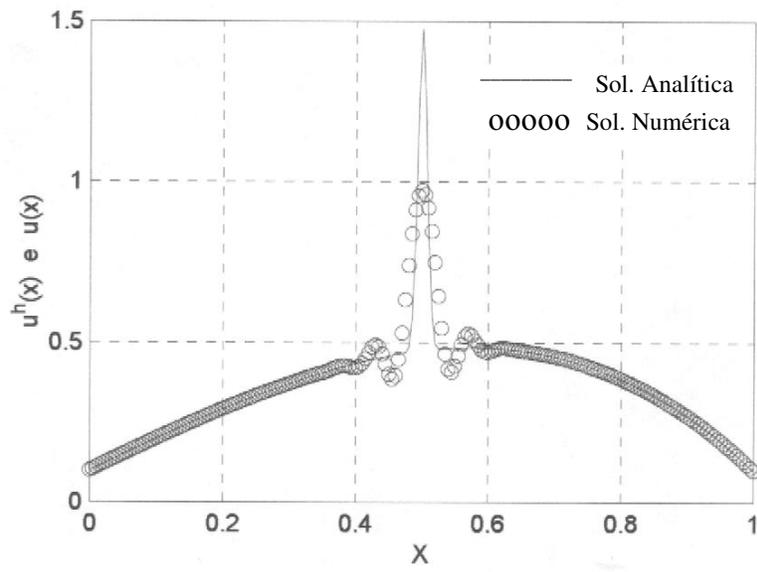


Fig 3.7 Solução discreta pelo MGSE com 40 nós e a solução analítica

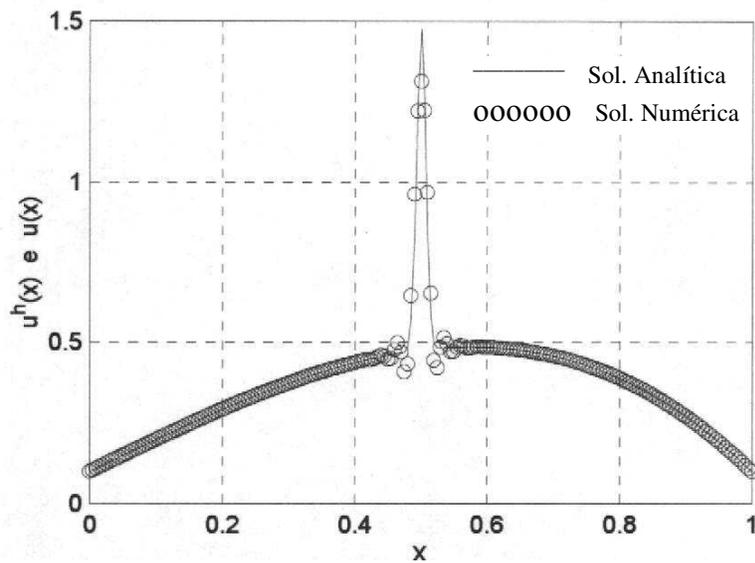


Fig 3.8 Solução discreta pelo MGSE com 80 nós e a solução analítica

Tabela 3.2 Solução do MGSE para o problema unidimensional

Nr nós	Nr graus de liberdade	$u^h(x=L/2)$	Erro
20	20	0.7452	49,4 %
40	40	0.9712	34,1 %
80	80	1.3138	10,9 %

Solução analítica:  $u(x=L/2) = 1.4750$

Em geral, as funções de forma para os métodos sem malha são de obtenção muito mais onerosa. Em cada ponto de avaliação destas funções torna-se necessário a solução de um sistema de equações ou a inversão de uma matriz. Além disto estas funções não obedecem às condições de reprodução do campo de deslocamentos nodais o que impossibilita a imposição direta das condições de contorno essenciais. Esta imposição deve então ser obtida por procedimentos especiais conforme descritos no capítulo anterior. Em termos de construção e modificação do modelo discretizado a vantagem dos MSM está na facilidade de inserção e retirada dos nós o que simplifica a análise e os procedimentos de adaptação baseados em estimativas de erro. Esta vantagem pode ser explorada nas análises tridimensionais ou análises que envolvam evolução da geometria do domínio discretizado.

Na tarefa de implementação há a necessidade de buscar-se novos paradigmas, melhor afinados com a natureza dos métodos sem malha (MSM). Dois exemplos disto são a integração numérica das equações do modelo discreto e a determinação da incidência nodal. Nos trabalhos publicados na literatura, observa-se o uso frequente da quadratura gaussiana tradicional. No entanto, esta estratégia é típica do MEF, não sendo a mais adequada para os MSM devido à natureza não polinomial das funções de forma. Em geral, a técnica de mínimos quadrados móveis empregada pelos métodos sem malha para a construção das funções de forma resulta em funções racionais – não polinomiais – cuja integração numérica para estes métodos é ainda tema aberto de pesquisa. Outro aspecto operacional do método é a não existência da entidade elemento, com uma incidência nodal pré-definida. Em cada ponto de integração há que se determinar a incidência nodal correspondente, i.e., o conjunto de nós que prestarão contribuição às variáveis de estado naquele ponto, requerendo assim um algoritmo de busca e seleção destes nós a ser incorporado ao método. Estes são alguns

exemplos das dificuldades enfrentadas pelo analista, ocorrendo ainda outras concepções de programação inerentes ao MEF forem mantidas.

Na próxima seção mostra-se que a aproximação pelo MEFG permite aprimorar a solução da técnica de elementos finitos tradicionais com um menor esforço de avaliação de funções de forma quando comparado ao MGSE.

### 3.2.3 Método de Elementos Finitos Generalizados

No capítulo anterior apresentou-se o conceito do MEFG em que as funções são obtidas a partir de uma multiplicação entre um conjunto de funções  $\{\varphi_\alpha\}$ , que constituem uma partição de unidade, e um conjunto de funções locais de aproximação  $\{L_{i\alpha}\}$ , ver equações (2.6 – 2.8)

$$\phi_i^\alpha = \varphi_\alpha L_{i\alpha}, \quad \alpha = 1..,n, \quad i \in I(\alpha) \quad . \quad (3.11)$$

Nesta seção discute-se como  $X_\alpha(\omega_\alpha)$ , o espaço gerado pela base de funções locais de aproximação  $\{L_{i\alpha}\}$  pode ser escolhido de forma a aprimorar a solução aproximada do MEF. Como partição da unidade (PU) adotaremos as funções de forma lineares do MEF, e usaremos nesta seção a nomenclatura  $\varphi_\alpha = N_\alpha$ . Para cada  $\alpha$ -ésimo nó é adotado um conjunto de funções locais de aproximação

$$\{L_{i\alpha}\} = \{L_{1\alpha}, L_{2\alpha}, \dots\} \quad (3.12)$$

que é a base para o espaço local de funções

$$X_\alpha(\omega_\alpha) = \text{espaço gerado por } \{L_{i\alpha}\} \quad (3.13)$$

a escolha mais simples possível é a de um conjunto de funções locais  $\{L_{i\alpha}\}$  idêntico para todos os nós

$$\{L_{i\alpha}\} = \{L_{1\alpha}\} = \{1\} \quad (3.14)$$

de forma que a formulação obtida é idêntica ao MEF. Para o caso em estudo, a aproximação será construída da seguinte forma: define-se um conjunto  $J$  de nós cuja PU é enriquecida com funções locais  $g_j$ . Estes nós são denominados “nós enriquecidos”. O nó enriquecido,  $\alpha \in J$ , terá uma base local de funções na forma

$$\{L_{i\alpha}\} = \{L_{1\alpha}, L_{2\alpha}, \dots\} = \{1, g_1, g_2, \dots\} \quad (3.15)$$

simplificando a formulação, usaremos apenas uma função de enriquecimento para cada nó

$$\{L_{i\alpha}\} = \{L_{1\alpha}, L_{2\alpha}\} = \{1, g_1\} \quad . \quad (3.16)$$

Já se o nó não é enriquecido,  $\alpha \notin J$ , teremos

$$\{L_{i\alpha}\} = \{L_{1\alpha}\} = \{1\}. \quad (3.17)$$

Considerando-se  $I$  o conjunto de nós da discretização e  $nE$  o total de nós enriquecidos, a aproximação para o campo de deslocamentos pode ser descrita na forma

$$u^h(x) = \sum_{\alpha \in I} N_\alpha(x) u_\alpha + \sum_{\alpha \in J} N_\alpha \sum_{j=1}^{nE_\alpha} g_j(x) a_{j\alpha} \quad (3.18)$$

onde  $n^{E\alpha}$  indica o número de funções de enriquecimento associadas a cada nó enriquecido e  $u_\alpha$  e  $a_{j\alpha}$  são os graus de liberdade nodais. A aproximação possui, então, as seguintes propriedades:

- Continuidade  $C^k(\Omega)$  onde  $k = \text{mínimo}\{C^{pu}(\Omega), C^e(\Omega)\}$ , onde  $C^{pu}(\Omega)$  indica a continuidade da partição de unidade,  $C^e(\Omega)$  indica a continuidade das funções de enriquecimento.
- A aproximação é precisa para uma solução linear.
- A aproximação não interpola os valores nodais do campo discretizado  $u_\alpha$  em  $\Omega$ .

A segunda propriedade é obtida pelo fato de que a aproximação é construída pela soma da aproximação tradicional com termos de enriquecimento. Observa-se ainda que, se  $\alpha \in J$ , temos  $u^h(x_\alpha) = u_\alpha + \sum_j g_j(x_\alpha) a_{j\alpha}$ , ou seja, não há interpolação para os valores nodais  $u_\alpha$  nas “regiões enriquecidas” e  $u_\alpha$ ,  $\alpha \in J$ , perde seu significado físico original. A base de funções para a aproximação no domínio é constituída pela união das funções de forma convencionais com o conjunto de produtos entre funções de forma e funções de enriquecimento

$$\{\phi\}_{\alpha=1}^N = \{N_\alpha\}_{\alpha=1}^n \cup \{N_l g_1, N_l g_2, \dots, N_l g_{n^{E_l}}\}_{l=1}^{n^E} \quad (3.19)$$

para observar o comportamento local da aproximação considera-se uma região  $D \subset \Omega$ . Todo nó cujo suporte intercepta  $D$  é então enriquecido com uma função local  $g_1(x)$ . Supondo-se que os únicos coeficientes nodais não nulos são os coeficientes na forma  $a_{1\alpha}$ , pode-se escrever

$$u(x) = \sum N_\alpha(x) g_1(x) = g_1(x), \text{ se } a_{1\alpha} = 1 \forall \alpha \quad (3.20)$$

$$u(x) = \sum N_\alpha(x) x_\alpha g_1(x) = x g_1(x), \text{ se } a_{1\alpha} = x_\alpha \forall \alpha, \quad (3.21)$$

como consequência direta do fato de que a PU do MEF satisfaz as condições de consistência (3.2). Selecionando a região  $D$  e a função  $g_1(x)$  apropriadamente

obtem-se uma aproximação capaz de reproduzir as características localizadas da solução matemática de forma simples e eficiente. É importante observar que as funções de enriquecimento não podem ser selecionadas arbitrariamente. Para que se forme uma base de funções adequada para a aproximação, é necessário que as funções de forma convencionais e as funções de enriquecimento sejam linearmente independentes. Por isso não se pode empregar funções de enriquecimento que sejam constantes ou de ordem linear, do mesmo modo que deve-se evitar um par de funções  $g_j$  linearmente dependentes. Caso estes cuidados não sejam observados, a matriz  $\mathbf{K}$  obtida não será positiva definida. A implementação da aproximação pelo MEFG é similar à implementação do MEF. O suporte das funções enriquecidas é definido pela união de elementos  $\Omega_\alpha$ . O procedimento de integração numérica deve levar em conta a natureza não polinomial destas funções. Em comparação com os métodos sem malha a integração é mais simples pois o suporte das funções é formado por elementos e as funções  $g_j(x)$  são conhecidas.

Considerando-se a solução do problema unidimensional, devido ao efeito localizado na variação brusca do deslocamento, apenas os nós do elemento contendo o centro da barra serão enriquecidos. A função de enriquecimento selecionada é

$$g_1(x) = e^{-\left(\frac{x-L/2}{\alpha}\right)^2} \quad (3.22)$$

que possui um comportamento localizado uma vez que a função e suas derivadas tendem a valores nulos em pontos afastados do centro  $x = L/2$ . O conjunto  $J$  de nós enriquecidos será definido por

$$J = \{\alpha \in I : \omega_\alpha \cap D \neq \emptyset\} \quad (3.23)$$

onde  $D$  é o intervalo  $(9/19, 10/19)$ . Esta definição de  $D$  garante que para a malha inicial com 19 elementos e 20 nós apenas um nó em cada lado do ponto  $x = L/2$  será enriquecido com  $g_1(x)$ . A figura 3.9 apresenta a solução para esta malha, observa-se que a aproximação enriquecida reproduz adequadamente a característica local da solução matemática na vizinhança de  $x = 0.5$ . Isto já era esperado pois a informação sobre a natureza desta solução foi incorporada na aproximação. O procedimento de integração numérica é o mesmo empregado para o MEF. A tabela 3.3 apresenta os resultados obtidos com duas discretizações, em

que uma segunda análise é considerada na qual o número de pontos de Gauss, na região central, é aumentado para 14 pontos. A figura 3.10 apresenta a solução para este segundo modelo.

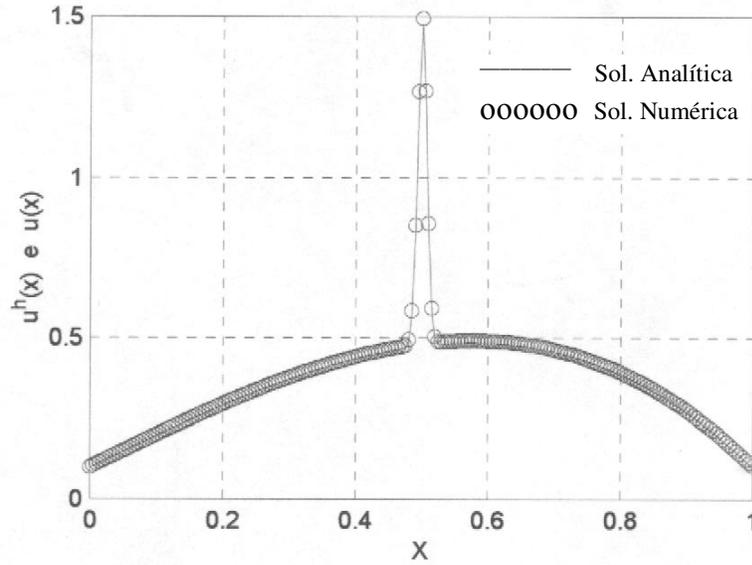


Fig 3.9 Comparação entre a solução discreta pelo MGEF e a solução analítica (11 pontos de Gauss)

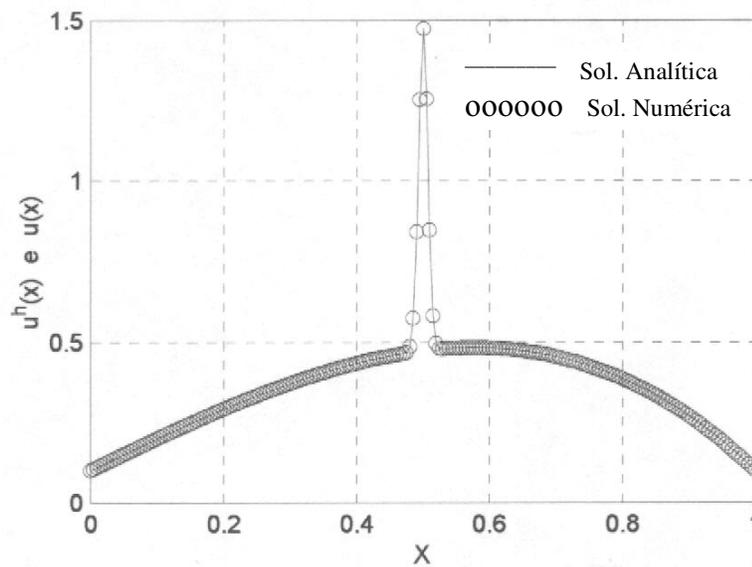


Fig 3.10 Comparação entre a solução discreta pelo MGEF e a solução analítica (14 pontos de Gauss)

Tabela 3.3 Solução do MEFG para o problema unidimensional

Nr nós	Nr pontos de Gauss (1)	Nr graus de liberdade	$u^h(x=L/2)$ (2)
20	11	22	1.4939 (1.28%)
20	14	22	1.4741 (0.06%)

(1) empregou-se um ponto de Gauss fora da região central.

(2) solução analítica:  $u(x=L/2) = 1.4750$

Na implementação do MEFG observa-se uma estreita similitude com a do MEF. A experiência acumulada com o emprego deste método pode ser estendida e novas soluções podem ser propostas a partir de estratégias já consagradas, anteriormente aplicadas a outras situações. Estas vantagens serão exploradas na implementação do MEFG apresentada no próximo capítulo.

### 3.3 Conclusões

Neste capítulo foi examinada a capacidade de aproximações de elementos finitos e de aproximações sem malha em reproduzir soluções de problemas com características localizadas. Embora no estudo tenha-se considerado apenas um exemplo unidimensional, as conclusões podem ser consideradas gerais e válidas para os casos bi e tridimensionais. Observou-se que a aproximação empregando a técnica de elementos finitos tradicional apresenta menor precisão e sua convergência é dependente da estratégia de refinamento da malha neste tipo de problema. Dentre as alternativas estudadas a aproximação sem malha é a que demandou maior esforço computacional apresentando dificuldades importantes na construção da função de forma e, em geral, no procedimento de integração numérica. Neste contexto, a formulação generalizada (enriquecida) de elementos finitos apresenta algumas vantagens importantes, enumeradas a seguir:

a) ao incorporar funções de enriquecimento adequadas à aproximação apresenta uma maior capacidade de reproduzir soluções com características localizadas. Esta representação é obtida de forma que a necessidade de adotar-se procedimentos de reconstrução de malhas é reduzida ou, eventualmente, eliminada. Os resultados apresentados nas figuras 3.9 e 3.10 e na tabela 3.3 mostram claramente a precisão e a eficiência do MEFG;

b) O esforço computacional é inferior àquele requerido com a abordagem sem malha pois o campo de funções da aproximação é construído a partir da formulação tradicional do MEF, que passa a incorporar uma modificação local.

Naturalmente esta abordagem é baseada no conhecimento *a priori* da natureza da solução. Neste capítulo um termo exponencial foi incorporado à base de funções convencional, porque a solução analítica é conhecida. No entanto, em geral a quantidade e a qualidade das informações disponíveis a respeito da solução do problema são reduzidas.

c) nas análises de problemas em mecânica da fratura é necessário definir-se a forma de representação da trinca. O MEF e o MGSE empregam uma representação explícita de trincas. No caso do MEF tradicional esta representação é construída através da coincidência entre as faces da trinca e as arestas dos elementos. Já nos MSM utiliza-se o critério da visibilidade: ao definir a incidência nodal, em um determinado ponto, os nós situados do outro lado da trinca não são visíveis, estes não contribuem para a avaliação da discretização no ponto. Nos dois casos, estas características implicam em modificar a posição de elementos e/ou dos nós, i.e., readaptar a discretização empregada, sempre que ocorrer um incremento de propagação da trinca.

d) o MEFG oferece a possibilidade de uma representação implícita da trinca, incorporando funções de enriquecimento descontínuas ao campo de deslocamentos do elemento finito tradicional. Desta forma tem-se a vantagem de realizar toda a análise de propagação de trinca considerando-se uma única malha, dispensando assim o uso de procedimentos de reconstrução de malha. Uma outra vantagem observada é a possibilidade de incorporar na discretização o conhecimento prévio acerca da natureza da solução do modelo matemático que descreve o problema físico. Funções de enriquecimento específicas associadas a nós vizinhos à ponta de trinca possibilitam uma adequada representação das trincas sem que interpolações utilizado modelos degenerados, por exemplo, como no caso de elementos quarter point [50], sejam necessários pois o emprego destes elementos demanda por procedimentos de reconstrução de malha.

A discussão das propriedades de cada técnica de aproximação leva a uma escolha natural pelo uso do MEFG, dentro do contexto da mecânica da fratura linear elástica. Este método reúne vantagens do MEF tradicional, como: a simplicidade na obtenção das funções de forma, a facilidade para impor-se diretamente as condições de contorno, o recurso às soluções já consagradas para este método, e uma grande semelhança no esquema de implementação numérica. Também, como no MGSE, este incorpora as vantagens de dispensar os

procedimentos de reconstrução de malha [53, 54, 55, 56, 57] e adicionalmente introduz, na solução aproximada, informações de soluções analíticas disponíveis e específicas acerca do problema físico considerado.

No próximo capítulo apresenta-se a incorporação das funções de enriquecimento descontínuas próprias para a representação de propagação de trincas na estrutura do MEF. Nesta classe de problemas as informações requeridas são as seguintes: a) um campo discretizado da variável de estado descontínuo ao longo de uma aresta, superfície ou linha de descontinuidade e, b) a natureza das funções que descrevem o campo de deslocamentos em uma ponta de trinca. É enfatizado que a formulação enriquecida apresenta a capacidade de representação da geometria da trinca independente da malha de elementos finitos e que o MEEG reproduz a solução descontínua de forma eficiente.