

Capítulo 2

Mecânica da Fratura Computacional

Neste capítulo apresenta-se uma revisão dos principais métodos disponíveis na literatura para a análise do problema de propagação de trincas no âmbito da Mecânica da Fratura linear elástica: a) o método de elementos finitos tradicional; b) os métodos sem malha e c) o método de elementos finitos generalizados. Quanto aos métodos sem malha discutem-se as características dos dois métodos de uso mais frequente, o método de Galerkin sem elementos (MGSE) e o método das nuvens hp (MNhp). O método de elementos finitos generalizados foi empregado por Moes *et al* [47] para a discretização de propagação de trincas, baseia-se no conceito de partição da unidade, originalmente proposto por Babuska e Melenk [41], também utilizado no método de nuvens hp.

2.1 Discretização por Elementos Finitos

Nesta seção discute-se a construção da discretização por elementos finitos para a análise do problema de propagação de trincas no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). A figura 2.1 apresenta alguns exemplos de elementos utilizados na mecânica da fratura computacional. Shih *et al*[48] recomenda o elemento lagrangeano biquadrático de nove nós para problemas bidimensionais e o elemento de 27 nós para problemas tridimensionais. Outros elementos também utilizados são os de 8 e de 20 nós para análise bi e tridimensional, respectivamente. Um dos aspectos importantes neste tipo de análise é o comportamento do campo de tensões e de deformações na vizinhança da ponta de trinca. Nesta região, as tensões e deformações apresentam uma singularidade na forma $1/\sqrt{r}$, onde r é a distância radial a partir da ponta de trinca. Para capturar esta singularidade, os elementos quadrilaterais são degenerados na geometria triangular, conforme ilustrado na figura 2.2. Esta é uma forma simples e efetiva de construir elementos que incorporam em seu campo de deformações a singularidade $1/\sqrt{r}$. Note-se na figura 2.2 que os nós 1, 2 e 3 são colapsados em um único nó cujas coordenadas devem coincidir com a

ponta da trinca [49,50] , enquanto os nós 4,5 e 6 são deslocados de um quarto do comprimento de lado do elemento.

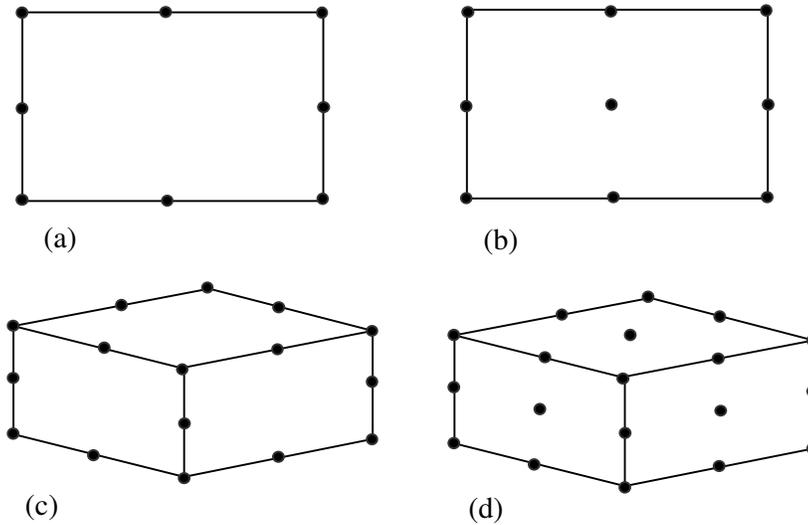


Fig 2.1 Elementos finitos para a análise de Mecânica da Fratura; Elementos bidimensionais: (a) 8 nós e (b) 9 nós; Elementos tridimensionais: (c) 20 nós e (d) 27 nós.

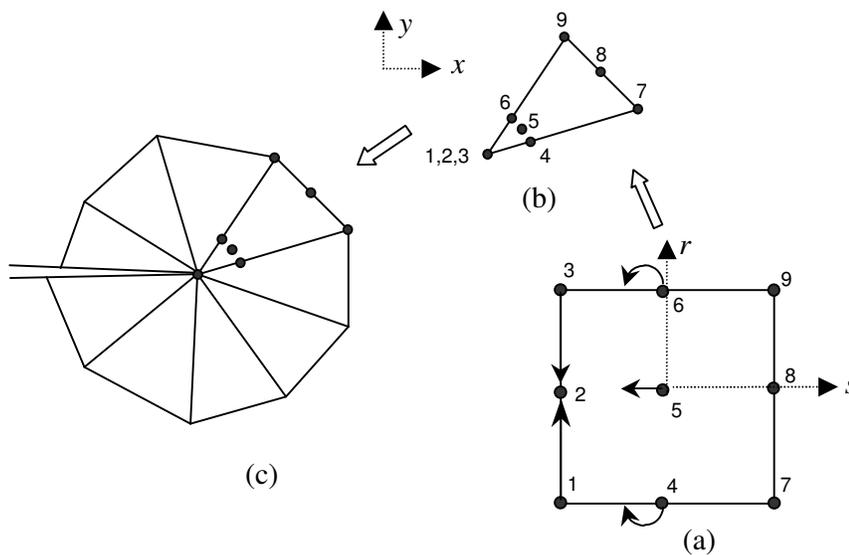


Fig 2.2 Construção da roseta de elementos singulares; (a) Espaço de coordenadas naturais; (b) Espaço físico e (c) Elementos na ponta de trinca.

Este procedimento também pode ser aplicado na análise tridimensional na forma ilustrada na figura 2.3 onde um elemento degenerado é obtido a partir de um elemento hexaedral. No Anexo I, é demonstrado que este procedimento de degeneração do elemento plano quadrilateral para a geometria triangular leva a uma distribuição de tensões variando com $1/\sqrt{r}$.

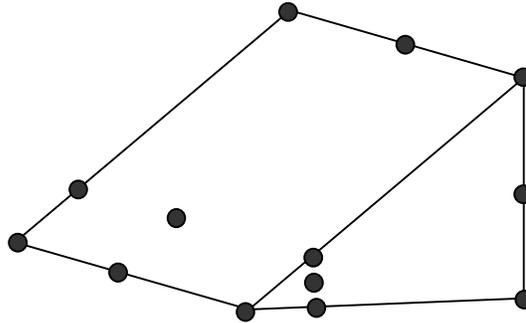


Fig 2.3 Elemento obtido do colapso de nós em uma face (pentaedro) para análise tridimensional.

2.2 Discretização com Métodos Sem Malha

Duas abordagens de discretização que não utilizam malhas para a construção das correspondentes funções de forma de interpolação são mais frequentemente utilizadas. Estas permitem obter-se as equações algébricas que governam o problema sem o emprego de uma estrutura de elementos finitos. As técnicas aqui discutidas são: a) o Método de Galerkin Sem Elementos (MGSE) e b) o Método de nuvens hp. No primeiro método a idéia básica é o uso da técnica de ajuste de curvas por Mínimos Quadrados Móveis (MQM) para a obtenção das funções de forma. Enquanto no segundo método, utiliza-se este ajuste de curvas em conjunto com o conceito de Partição de Unidade (PU) a partir do qual é definida uma família de funções de aproximação.

2.2.1 Método de Mínimos Quadrados Móveis (MQM).

Considerando-se um certo domínio Ω , limitado pelo contorno em Γ , um conjunto de nós é distribuído no domínio e cada nó indicado pelo vetor posição \mathbf{x}_I ,

onde $I = 1, N$. Neste domínio uma aproximação para o campo de deslocamentos é definida na forma:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_i p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é um vetor contendo m monômios que constituem a base de funções para a aproximação. Para o caso unidimensional, esta base de polinômios é definida por exemplo, na forma

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_{m-1}(x)) = (1, x, \dots, x^m) \tag{2.2}$$

enquanto que a base de polinômios para o caso 2 D fica:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^m, xy^{m-1}, y^m) \tag{2.3}$$

Na aproximação por mínimos quadrados móveis, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é um vetor de coeficientes determinado de forma a minimizar um resíduo ponderado R e expresso por:

$$R = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I)^2 \tag{2.4}$$

onde u_I ($I=1, n$) são os valores nodais do campo de deslocamentos a ser interpolado enquanto $w_I = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_I$ é a função peso, definida para cada nó. Por construção a função peso possui valores não nulos positivos apenas no subdomínio Ω_I definido para cada i -ésimo nó, também chamado domínio de influência,

$$w_I = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I. \tag{2.5}$$

Cada subdomínio identifica, então, o *suporte* da função peso e será referenciado ainda como o domínio de influência de cada nó. Este pode, no caso de uma análise bidimensional, e de acordo com a conveniência, ter formas circulares ou

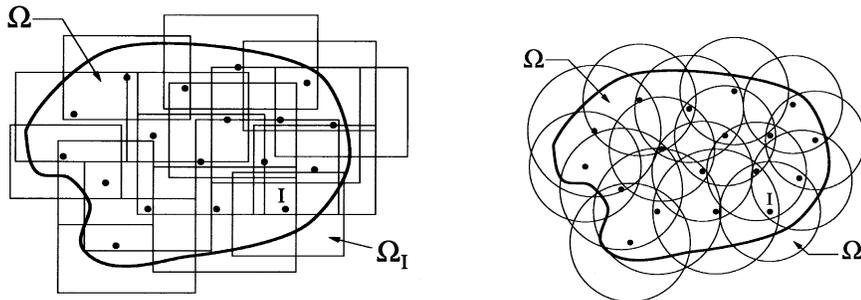


Fig 2.4 : Domínios de influência circulares e retangulares [10]

retangulares , conforme mostrado na figura 2.4. E, no caso tridimensional, pode ainda ser definido por esferas ou cubos. Na equação (2.4), n define o número de nós que possuem funções peso não nulas em cada ponto \mathbf{x} .A equação (2.4) pode ser expressa, também, na seguinte forma matricial

$$R=(\mathbf{P}\mathbf{a}-\mathbf{u})^T \mathbf{W}(\mathbf{P}\mathbf{a}-\mathbf{u}) \quad (2.6)$$

onde

$$\mathbf{u}^T=(u_1,u_2,\dots,u_n) , \quad (2.7)$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \Lambda & p_{m-1}(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \Lambda & p_{m-1}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \Lambda & p_{m-1}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) & \Lambda & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A condição de mínimo para o funcional $R(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$ é estabelecida para determinar-se o vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Assim, a partir da eq. (2.4) tem-se

$$\delta R=(\mathbf{P}\delta\mathbf{a})^T \mathbf{W}(\mathbf{P}\mathbf{a}-\mathbf{u})+(\mathbf{P}\mathbf{a}-\mathbf{u})^T \mathbf{W}(\mathbf{P}\delta\mathbf{a}) \quad (2.10a)$$

em que a condição de mínimo fornece

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{a}^T \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a}-\delta\mathbf{a}^T \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u}+\mathbf{a}^T \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \delta\mathbf{a}-\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \delta\mathbf{a} &= \\ =2\delta\mathbf{a}^T \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a}-2\delta\mathbf{a}^T \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} &=0 \end{aligned} \quad (2.10b)$$

porque \mathbf{W} é simétrica, ou ainda

$$\delta R=\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})-\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}=0 \quad (2.10c)$$

com

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P} \quad (2.11)$$

e

$$\mathbf{B}=\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) . \quad (2.12)$$

Avaliando-se o vetor de coeficientes da equação:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x})=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.13)$$

pode-se expressar a solução aproximada, utilizando (2.1):

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) u_I = \Phi \mathbf{u} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.14)$$

com as funções de forma assim definidas:

$$\Phi = [\Phi_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \Phi_n(\mathbf{x})] = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.15 a)$$

$$\Phi_I = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (2.15 b)$$

A equação (2.14) permite representar-se o campo de deslocamentos no domínio Ω a partir dos valores nodais \mathbf{u} , das funções de aproximação $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ e das funções peso consideradas $\mathbf{w}(\mathbf{x})$.

Na escolha da função peso $w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ duas condições básicas devem ser atendidas: i) ser positiva e ii) as derivadas devem ser contínuas até a ordem $L \in [N]$, ou seja, $w_I(\mathbf{x}) \in C^L$. Desta forma várias funções peso têm sido propostas na literatura; as primeiras funções peso utilizadas no MGSE foram a função Gaussiana truncada:

$$w_I(d_I^{2k}) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_I/c)^{2k}} - e^{-(d_{ml}/c)^{2k}}}{(1 - e^{-(d_{ml}/c)^{2k}})}, & \text{se } d_I \leq d_{ml} \\ 0, & \text{se } d_I > d_{ml} \end{cases} \quad (2.16)$$

e a função cônica:

$$w_I(d_I^{2k}) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_I}{d_{ml}} \right)^{2k}, & \text{se } d_I \leq d_{ml} \\ 0, & \text{se } d_I > d_{ml} \end{cases} \quad (2.17)$$

nas expressões acima $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ e c é uma constante que controla o peso relativo. Note-se que quando c decresce, obtém-se um valor maior para $w_I(\mathbf{x})$ correspondente aos pontos mais próximos a \mathbf{x}_I e menor para os pontos mais afastados. O parâmetro d_{ml} define o domínio (suporte) para a função peso $w_I(d_I^{2k})$ que para valores não nulos define o domínio de influência do nó \mathbf{x}_I . Em Belytschko *et al* [9] demonstra-se que a função peso gaussiana possui derivadas definidas até a ordem $(m-1)$ desde que k seja um valor inteiro positivo. Na literatura utiliza-se o valor $k = 1$. Uma definição para c é dada em [9] por:

$$c = \alpha c_I \quad (2.18)$$

com

$$c_I = \max_{J \in S_J} \|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I\| \quad (2.19)$$

onde S_j é o menor conjunto de nós vizinhos a \mathbf{x}_j que define um polígono envolvente, conforme mostrado na figura 2.5. Se os nós são uniformemente distribuídos no domínio, c_1 corresponde à distância máxima entre nós vizinhos. Valores para α em (2.18) são definidos no intervalo $1 \leq \alpha \leq 2$; valores próximos de 1 são utilizados em problemas envolvendo singularidades e gradientes elevados. A escolha de dm_1 deve garantir que a matriz \mathbf{A} , na equação (2.11), seja inversível.

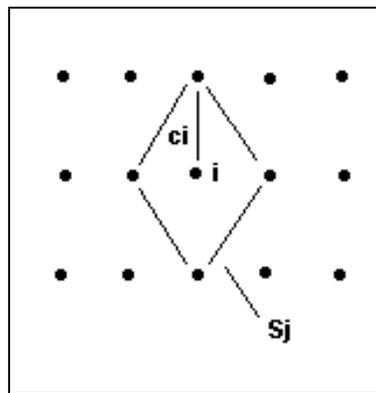


Fig 2.5 : Exemplo típico de definição do domínio S_j

Um domínio maior de influência do nó \mathbf{x}_j , requer maior número de nós inclusos e, portanto, maior quantidade de informação disponível para o processo de MQM. Por exemplo, adota-se em [9] $dm_1 = 4c$ como uma dimensão de domínio de influência que garante um número de amostragens para o qual a matriz \mathbf{A} é inversível. Em um caso unidimensional com base linear $\mathbf{p}^t(\mathbf{x}) = [1, x]$ pelo menos dois nós vizinhos a \mathbf{x}_1 devem ser incluídos com um peso não nulo para que o processo de MQM seja possível. Portanto, quanto maior a dimensão da base $\mathbf{p}^t(\mathbf{x})$, maior será a quantidade de nós exigida no processo. Em problemas 2D não basta apenas observar a quantidade de nós em uma única direção pois os nós inclusos no domínio de influência não devem, também, ser colineares. Por serem muitas as possíveis configurações para uma distribuição nodal arbitrária é necessário ter-se cuidado no critério a utilizar para a escolha do parâmetro dm_1 e uma forma de implementação mais robusta é incluir testes de condicionamento da matriz \mathbf{A} . Há diversos tipos de funções peso para o processo de MQM propostos na literatura.

Lancaster e Salkauskas [15] ao proporem o método de MQM, estudaram uma função peso singular na forma

$$\bar{w}_I(x) = \|x - x_I\|^{-1} w(x - x_I) \quad (2.20)$$

que permite construir-se uma interpolação de MQM na forma $u(\mathbf{x}_I) = u_I$. Em geral o processo de ajuste de curvas por MQM não satisfaz esta propriedade. Kaljevic and Saigal usaram em [20] esta abordagem para estabelecer uma formulação alternativa do MGSE em que a imposição das condições de contorno essenciais é explícita. Observa-se que não há nenhuma exigência para que o suporte da função peso seja uma circunferência, suportes na forma de elipses ou retângulos podem também ser usados como mostra a figura 2.4. Uma função de suporte retangular pode ser definida na forma de um produto

$$w(d) = w(d_x)w(d_y) \quad (2.21)$$

com

$$w(d_x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_{Ix}}{d_{mIx}} \right)^2, & \text{se } d_{Ix} \leq d_{mIx} \\ 0, & \text{se } d_{Ix} > d_{mIx} \end{cases} \quad (2.22a)$$

$$\text{e } w(d_y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_{Iy}}{d_{mIy}} \right)^2, & \text{se } d_{Iy} \leq d_{mIy} \\ 0, & \text{se } d_{Iy} > d_{mIy} \end{cases} \quad (2.22b)$$

onde d_{mIx} e d_{mIy} são as dimensões do domínio de influência em x e y respectivamente. A vantagem destas funções peso, obtidas do produto de duas funções unidimensionais, é a de permitir o uso de uma técnica de integração de maior precisão. Esta técnica está discutida na seção 2.2.5.

Características da aproximação por MQM. Algumas características da aproximação apresentada devem ser identificadas:

a) Pode-se demonstrar que a aproximação por mínimos quadrados móveis reproduz com exatidão polinômios de ordem menor ou igual a m [9], caso os valores para u_I sejam obtidos a partir de um polinômio

$$u_I = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \boldsymbol{\alpha} \quad (2.23)$$

onde α é um vetor de coeficientes. Para que o polinômio arbitrado em (2.1) seja representado com exatidão basta tomar um vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ idêntico ao vetor α . Isto é suficiente para garantir que o resíduo R expresso por (2.4) atinja um valor mínimo. A unicidade dos valores de $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é garantida, no caso unidimensional, pois $m+1$ pontos distintos definem um único polinômio de ordem m . Nos demais casos, esta propriedade pode ser verificada algebricamente. Reescrevendo-se (2.23) em forma matricial

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\alpha \quad (2.24)$$

e utilizando-se as identidades (2.1) e (2.11-2.14) tem-se:

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{P}\alpha = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}\alpha \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) \alpha = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \alpha \end{aligned} \quad (2.25)$$

b) como conseqüência da propriedade anterior, temos as identidades

$$\sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \quad (2.26)$$

$$\sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) x_{Ii} = x_i \quad \forall \mathbf{x} \quad (2.27)$$

$$\sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) x_{Ii}^l = x_i^l \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall l \leq m \quad (2.28)$$

que são propriedades de consistência da aproximação.

c) A identidade (2.26) indica que a aproximação por mínimos quadrados móveis é uma partição da unidade [9].

d) A aproximação por mínimos quadrados móveis não satisfaz a seguinte condição de interpolação

$$\Phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad (2.29)$$

De um modo geral, as funções de forma assim obtidas não são nulas ao longo do contorno Γ , o que dificulta na imposição das condições de contorno essenciais. As estratégias propostas para tratar-se esta dificuldade serão discutidas na terceira seção.

Neste momento, é interessante observar a natureza das funções de forma obtidas pela aplicação da aproximação por mínimos quadrados móveis, através de um exemplo unidimensional. Com esta finalidade, mostraremos também que as funções de forma apresentadas em (2.15) podem ser obtidas a partir das condições

de consistência (2.26-2.28). Considere-se um conjunto de n nós distribuídos no intervalo $[a,b] \in R^1$ e que para a aproximação por MQM uma base linear $\mathbf{p}^T(x) = (1, x)$ é utilizada. Podemos reescrever a função de forma como

$$\Phi_I = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)x_I) w(x - x_I) \quad (2.30)$$

$$\Phi_I = \boldsymbol{\alpha}^T(x) \mathbf{p}(x_I) w(x - x_I) \quad (2.31)$$

onde a função de forma pode ser interpretada como sendo o produto de duas funções: a função peso nodal e uma função de correção dada por $\boldsymbol{\alpha}(x)^T \mathbf{p}(x)$. Ao substituímos a forma (2.31) nas condições de consistência (2.26) e (2.27) obtemos

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{p}(x) \quad (2.32)$$

o que demonstra que as funções de forma obtidas satisfazem as condições de consistência por construção. Este raciocínio pode ser estendido para os casos de aproximações em R^2 ou em R^3 . No caso unidimensional, com a base de funções linear, pode-se escrever

$$A(x) = \left[\sum_I w_I(x - x_I) \begin{bmatrix} 1 & x_I \\ x_I & x_I^2 \end{bmatrix} \right] \quad (2.33)$$

invertendo-se a expressão acima, com o auxílio da identidade em (2.32) obtém-se

$$\alpha_1(x) = \frac{\sum w_I x_I^2 - x \sum w_I x_I}{\sum w_I \sum w_I x_I^2 - (\sum w_I x_I)^2} \quad (2.34a)$$

$$\alpha_2(x) = \frac{x \sum w_I - \sum w_I x_I}{\sum w_I \sum w_I x_I^2 - (\sum w_I x_I)^2} \quad (2.34b)$$

e as funções de forma Φ_I são então obtidas substituindo-se estes resultados em (2.31). Estas funções não são polinômios e sim funções racionais de x . Repetindo-se o desenvolvimento acima para o caso geral verifica-se que as funções de forma obtidas são funções racionais das coordenadas espaciais. Esta característica introduz dificuldades no procedimento de integração numérica.

A comparação destas com as funções de forma do Método de Elementos Finitos permite verificar-se que a diferença fundamental entre as duas técnicas está na avaliação das funções de forma, havendo contudo situações em que as aproximações são semelhantes. No método sem malha, o comportamento das

funções de forma é determinado pela definição do domínio de influência. Se este é escolhido de modo a ter dimensões mínimas e limitadas pelo espaçamento nodal, na forma mostrada na figura 2.6, observa-se que a função de forma do método sem malha será similar à função de forma do MEF.

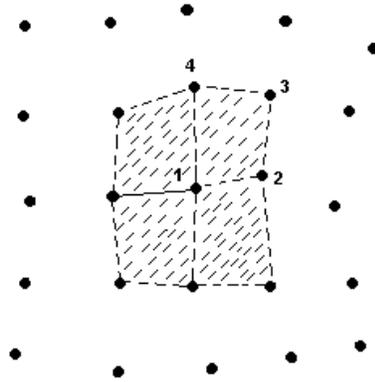


Fig 2.6 : Domínio de influência do nó 1

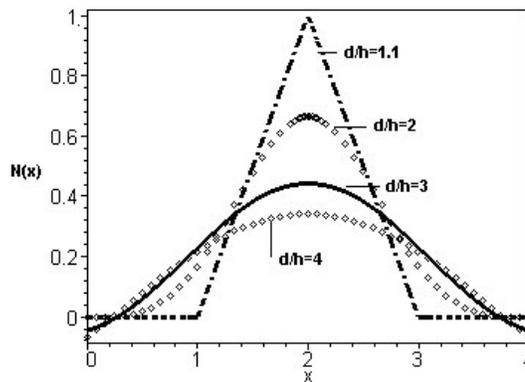


Fig 2.7 : Funções de Forma do MGSE

Como exemplo, considere-se uma distribuição uniforme de 5 nós, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0)$, sobre um intervalo $(0,4) \in R^1$. Uma aproximação por mínimos quadrados móveis será então avaliada. Funções peso são definidas com diferentes suportes para o nó central, $x = 2.0$. A fração entre o raio do domínio de influência e o valor de espaçamento nodal, d/h , é denominada razão de influência. A função de forma do nó central da figura, construída para diversos

valores de d/h , é apresentada no gráfico da figura 2.7. Esta mostra que, para uma razão de influência d/h próxima de 1, a função de forma do MGSE é similar à do MEF. No exemplo mostrado considerou-se uma base linear de funções mas também é possível obter-se funções de forma idênticas às do MEF através da técnica de MQM. Assim, considerando-se a distribuição de nós no plano, mostrada na figura 2.6, tome-se a região hachurada como o domínio de influência do nó 1. As funções peso de cada nó são escolhidas como funções constantes no interior dos domínios de influência. No caso do nó 1, na figura 2.6, a função peso $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ tem valor unitário no domínio de influência e valor nulo nos demais pontos. O domínio de influência do nó 1 é subdividido em 4 áreas retangulares sendo uma delas claramente identificada na figura como o elemento finito definido pelos nós 1,2,3 e 4. Escolhendo um vetor $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x, y, xy)$ como base para a aproximação e aplicando a aproximação por MQM no subdomínio de influência referente ao elemento finito, obtém-se de (2.8)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

a matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ torna-se uma matriz identidade, e rescrevendo-se as equações de (2.11) à (2.15) teremos

$$\Phi = [1, x, y, xy] \mathbf{P}^{-1} \quad (2.36)$$

A equação (2.36) expressa as funções de forma obtidas pela formulação do MGSE e coincide com as funções de forma do MEF para o elemento retangular de quatro nós [21]. Neste caso, o vetor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ escolhido coincide com o campo de deslocamentos deste elemento. É importante enfatizar que a definição do domínio de influência determina o comportamento das funções de forma do MGSE. Se o domínio de influência tem dimensões superiores aos limites impostos pelo espaçamento nodal, a aproximação pelo MGSE terá um comportamento distinto e de maior ordem do que o obtido com o uso do MEF. Entretanto isto é alcançado ao custo de uma maior largura de banda no sistema de equações e a um acréscimo no esforço computacional para obter-se as funções de forma.

Imposição das condições de contorno. Uma das dificuldades inerentes aos métodos sem malha está na dificuldade em impor-se as condições de contorno essenciais, decorrente do fato de que as funções de aproximação não satisfazem a propriedade de interpolação: $\Phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, além das funções de forma, em geral, assumirem valores não nulos no contorno do domínio. Várias estratégias numéricas têm sido propostas na literatura para resolver esta questão:

- i) Multiplicadores de Lagrange [17];
- ii) Princípio Variacional Modificado, PVM [18];
- iii) Método de Penalidades [26];
- iv) Uso de funções peso singulares [20];
- v) Acoplamento com Elementos Finitos [21,22,32].

A primeira abordagem é a que apresenta maior precisão na imposição das condições de contorno apresentando, no entanto, a desvantagem de produzir um sistema de equações não positivo definido com matrizes esparsas. Através de uma modificação no princípio variacional [18] é também possível obter-se um sistema de equações sem estas desvantagens, mas a precisão obtida na imposição das condições de contorno é menor quando comparada com a primeira abordagem. O Método de Penalidades [26] oferece uma precisão comparável ao PVM e não introduz novas incógnitas na formulação, porém exige que se estime, através de experimentações numéricas, o valor do parâmetro de penalização. Kaljevic [20] apresenta uma formulação para o MGSE empregando funções peso singulares para a aproximação por MQM. As funções de forma obtidas satisfazem a propriedade de interpolação e, através de manipulação algébrica, a singularidade é eliminada da expressão para a função de forma. A estratégia mais simples e eficiente para a imposição das condições de contorno utiliza o acoplamento com o MEF. Em Hegen [21] foi utilizado o fato de que a aproximação por MQM equipara-se à formulação de elementos finitos quando o domínio de influência é um elemento. Acoplou-se assim o MGSE ao MEF, arbitrando um domínio de influência coincidente com elementos virtuais na região adjacente ao domínio discretizado pelo MEF. Belytschko et al [32] desenvolveram uma forma alternativa de acoplamento empregando funções de acoplamento para combinar os campos de deslocamento aproximados pelo MEF e pelo MGSE em uma região de fronteira, fig 2.8. Este acoplamento tem a forma

$$u = R_S u^{MGSE}(\mathbf{x}) + (1 - R_S) u^{MEF}(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

onde u^{MGSE} e u^{MEF} são os campos de deslocamento do MGSE e do MEF respectivamente. E $R_S = f(R)$, com $R = \sum_I N_I^{MEF}(\mathbf{x})$, $x_I \in \Gamma_{MGSE}$ onde R é definido em termos das funções de forma do MEF definidas para os nós da interface entre a região discretizada pelo MGSE e a região de acoplamento. Uma

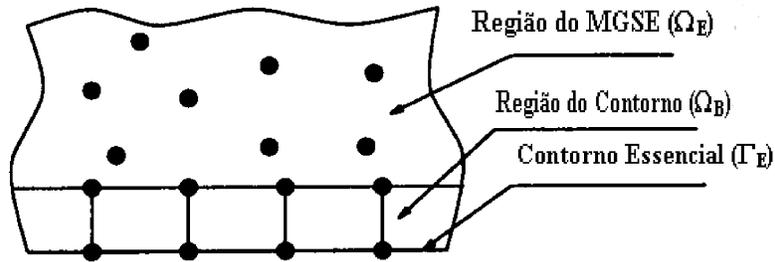


Fig 2.8 – Acoplamento MEF - MGSE [22]

desvantagem desta abordagem refere-se ao procedimento de integração numérica das funções de forma obtidas. Ele exige um esforço computacional maior quando comparado com o esforço de integração das funções de forma do MGSE original.

2.2.2 - Formulação do MGSE

Nesta seção apresenta-se a formulação para a discretização de problemas de valor de contorno pelo MGSE. Para isto, utiliza-se a forma fraca (variacional) do problema de elasto-estática através do método de Galerkin. O princípio variacional emprega multiplicadores de Lagrange para impor as condições de contorno essenciais e é modificado para que o sistema de equações resultante seja representado por uma matriz tipo banda.

Considerando o problema bi-dimensional com pequenos deslocamentos no domínio Ω limitado por Γ , a equação de equilíbrio fornece

$$\nabla \sigma + \mathbf{b} = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.39a)$$

onde σ é o tensor tensão associado ao campo de deslocamentos \mathbf{u} e \mathbf{b} é o vetor força de corpo. As condições de contorno são dadas por

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \Gamma_t \quad (2.39b)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u \quad (2.39c)$$

onde a barra sobreposta indica valores prescritos no contorno e \mathbf{n} indica o vetor unitário normal ao contorno.

A forma fraca (variacional) da equação de equilíbrio é descrita considerando-se as funções de teste $\delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in H^1$ (variações do campo de deslocamento) e $\delta \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) \in H^0$ onde H^1 e H^0 são espaços de Sobolev de ordem 1 e 0 respectivamente [18]. Também considere as funções teste $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1$ e $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) \in H^0$, e prescrições das condições de contorno naturais e essenciais, respectivamente. As equações (2.39 a) e (2.39 b) são satisfeitas desde que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in H^1, \delta \boldsymbol{\lambda} \in H^0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde $\nabla_s \mathbf{v}$ é a parte simétrica de $\nabla \mathbf{v}$. Para obter-se a modificação no princípio variacional integra-se por partes o primeiro termo de (2.40) resultando em

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta v \cdot t d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} : (\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \\ \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

ou

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} : (\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v} \cdot (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \\ \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{t}) \cdot d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ é a intensidade de força aplicada no contorno. A partir de (2.42) observa-se que para quaisquer variações $\delta \mathbf{v}$ e $\delta \boldsymbol{\lambda}$, o primeiro termo fornece a equação de equilíbrio, o segundo termo a condição de contorno natural e o terceiro termo a condição de contorno essencial. O último termo deve ser sempre nulo para uma variação $\delta \mathbf{v}$ arbitrária, portanto

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{t} \quad \text{em} \quad \Gamma_u \quad (2.43)$$

ou seja, os multiplicadores de lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ têm o significado físico de intensidade da força aplicada no contorno Γ_u . Substituindo-se (2.43) em (2.40) resulta no Princípio Variacional Modificado

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta v : \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta v \cdot b \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v \cdot \bar{t} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta v \cdot \lambda \cdot d\Gamma = 0 \quad (2.44)$$

No caso de elasticidade linear onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.45)$$

uma versão discretizada da forma fraca em (2.44) é obtida a partir da aproximação para o vetor solução \mathbf{u} e para a função teste \mathbf{v} através de (1.14) . O sistema de equações resulta na forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.46)$$

onde \mathbf{K} e \mathbf{f} são obtidas da montagem das submatrizes \mathbf{K}_{IJ} (2x2) e \mathbf{f}_I (2x1):

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^t \mathbf{D} \mathbf{B}_J \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \Phi_I \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B}_J \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_I^t \mathbf{D} \mathbf{N}^t \mathbf{S} \Phi_J \, d\Gamma \quad (2.47)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma} \Phi_I \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_I^t \mathbf{D} \mathbf{N}^t \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (2.48)$$

onde

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \text{ no caso de estado plano de tensões } \quad (2.49)$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (2.52a)$$

$$s_x = \begin{cases} 1, \text{ se } u_x \text{ é prescrito em } \Gamma_u \\ 0, \text{ se } u_y \text{ é prescrito em } \Gamma_u \end{cases} \quad (2.52b)$$

$$s_y = \begin{cases} 0, \text{ se } u_x \text{ é prescrito em } \Gamma_u \\ 1, \text{ se } u_y \text{ é prescrito em } \Gamma_u \end{cases} \quad (2.52c)$$

Integração Numérica e Implementação. O procedimento de integração numérica das expressões (2.47) e (2.48) exige a subdivisão do domínio em uma estrutura de células ou de elementos conforme apresentado na figura 2.9, onde são

observadas duas formas de execução de integração numérica. A primeira alternativa, mostrada na fig 2.9(a), foi a utilizada nas implementações iniciais do método [9,17].

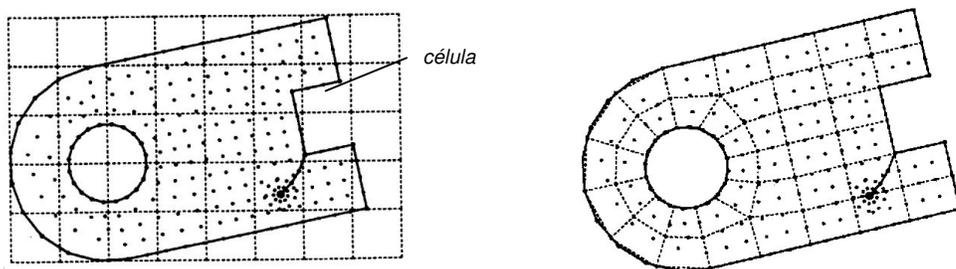


Fig 2.9 : (a) Estrutura de células de integração e (b) Malha de elementos finitos

Nesta, uma estrutura de células uniformes é construída de forma a cobrir todo o domínio e em cada célula são distribuídos pontos de integração. Ao percorrer estes pontos verifica-se se são internos ou não ao domínio da estrutura. Em caso positivo, considera-se a contribuição deste ponto para a integração. Esta alternativa apresenta porém a desvantagem de não representar exatamente a geometria do domínio e os pontos de integração localizados fora do domínio Ω tem de ser desconsiderados, introduzindo erros na integração. Belytschko [9] apresenta exemplos em que esta alternativa é empregada com um erro de 1% na norma de energia e de 0.1% no cálculo de fatores de intensidade de tensão. A segunda alternativa utiliza uma malha de fundo composta de elementos, o que permite representar com melhor precisão a geometria do domínio, a partir desta malha estabelecida, a integração numérica é realizada nos mesmos moldes da integração gaussiana com o MEF tradicional. O recurso ou não a este procedimento de integração baseado em malhas de elementos é que caracteriza um método sem malha como "verdadeiro" (truly meshless) ou não. Observe-se que a malha ou estrutura de células é empregada apenas para a realização da integração numérica não influenciando o número de graus de liberdade da discretização. Nas duas alternativas a integração das funções de forma exige um grande número de pontos de Gauss em comparação com o MEF tradicional. Belytschko [9] sugere que se dê preferência a usar um maior número de células (elementos) com uma menor ordem de integração. O procedimento de integração numérica das expressões do MGSE apresenta basicamente duas dificuldades: a) as

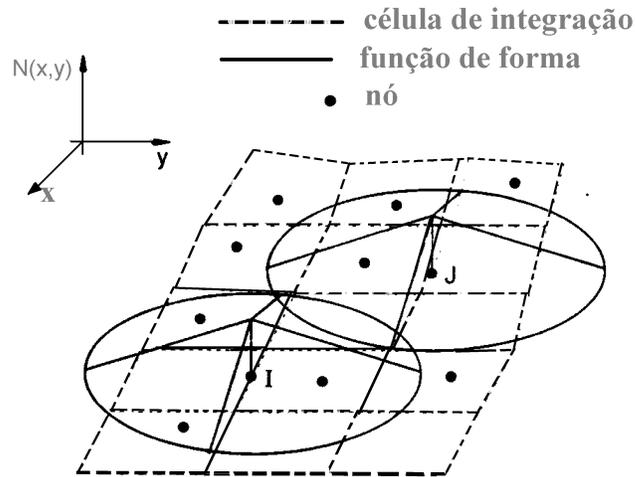


Fig 2.10 – Relação espacial entre domínios radiais de influência (suporte circular) e células de integração.[23]

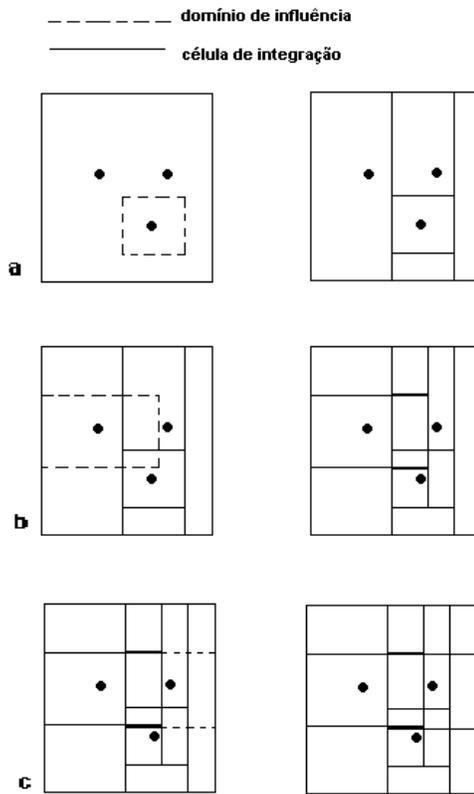


Fig 2.11 – Relação espacial entre domínios de influência retangulares e células de integração. [23]

funções a serem integradas não são polinômios, conforme foi discutido na seção 2.2.2 e b) o suporte destas funções não coincide com o subdomínio de integração. A figura 2.10 ilustra este aspecto da integração para o caso de funções peso de suporte circular. Dolbow e Belytschko [23] apresentam uma investigação do procedimento de integração numérica no contexto do MGSE na qual sugerem que seja dada preferência ao uso de funções de suporte retangular. Estas funções podem ser construídas para o caso 2D, por exemplo, pelo produto de funções peso dependentes de uma única coordenada espacial, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(r_x) \cdot w(r_y)$, onde $r_x = |x - x_I|/dm_x$ e $r_y = |y - y_I|/dm_y$, onde dm_x e dm_y indicam o domínio de influência em x e y respectivamente. O uso deste tipo de suporte permitiria então o uso da técnica de envolvimento do domínio de influência (Bounding Box Technique). Nesta abordagem os subdomínios de integração são determinados em função dos suportes (retangulares) das funções peso. A figura 2.11 apresenta um caso de aplicação desta técnica em um domínio retangular. A desvantagem é que esta técnica gera um número de células de integração maior do que os demais métodos. No entanto este efeito pode ser compensado pelo uso de uma menor ordem de integração em cada célula. Dolbow and Belytschko [23] realizaram testes numéricos em casos 1D e 2D e concluíram que esta técnica é útil, principalmente, nos casos em que ocorre uma grande variação no espaçamento nodal no domínio. Nestes casos os demais métodos de integração levam a soluções com problemas de convergência não monotônica na solução numérica e a uma queda na taxa de convergência do método. A aplicação da técnica de envolvimento de subdomínios elimina estas dificuldades.

Implementação do MGSE. Considerando-se uma malha de células de integração, para a modelagem mostrada na figura 2.12, nota-se que o arranjo de células é independente dos nós e tem um padrão regular. Em alguns casos é conveniente que este arranjo de células seja refinado localmente [26]. As etapas de implementação do método, apresentadas na Tabela 2.1, são muito similares às de um programa geral de elementos finitos. Para obter as equações discretas considera-se uma célula de cada vez e, em cada célula, toma-se cada ponto de Gauss. Neste procedimento é útil definir um domínio de influência para cada ponto de Gauss, ou alternativamente, relacionar em uma lista os nós que possuam valores não nulos de função peso no ponto de Gauss avaliado. Na figura 2.12

estão apresentados dois exemplos de definição de domínios de influência para dois pontos de Gauss (X_G). Observa-se que o domínio de influência é interrompido ao encontrar um contorno ou uma linha de descontinuidade (trinca).

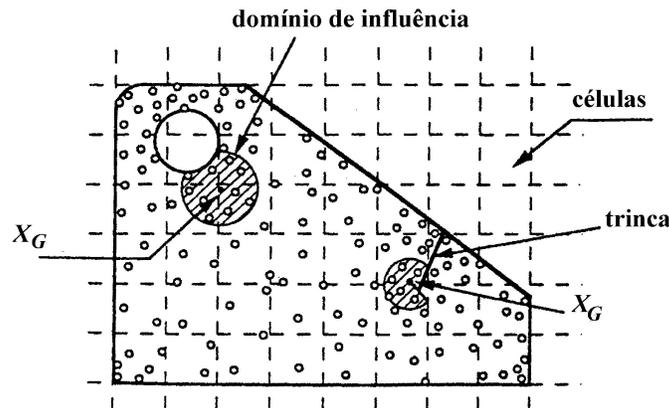


Fig 2.12 – Estrutura de células de integração onde os domínios de influência de dois pontos de Gauss são apresentados [9].

A contribuição do ponto de Gauss X_G ao sistema linear de equações depende dos nós no domínio de influência de X_G ou ainda, dos nós que possuam função peso não nula no ponto de Gauss. Apenas para estes nós o ponto de Gauss fornece uma contribuição não nula para o sistema.

Tabela 2.1 Programa para o MGSE

-
1. Em cada célula do domínio
 2. Em cada ponto de Gauss X_G na célula C
 - a. Se X_G é externo ao domínio, vá para 2 g;
 - b. Verifique todos os nós, na célula e nas células vizinhas, para determinar os m nós, $x_1 = 1 \dots m$, no domínio de influência de X_G ;
 - c. Se há um segmento do contorno na célula C, ou nas células vizinhas, e se $x_1 - X_G$ cruza o segmento do contorno, vá para 2 g;
 - d. Calcule $\Phi_I(X_G)$ e $\Phi_{I,j}(X_G)$
 - e. Calcule as contribuições às expressões (2.47) e (2.48);
 - f. Monte a contribuição de cada nó;
 - g. final da condição em 2.a.
 3. Final da lista de pontos de Gauss.
 4. Final da lista de células.
 5. Resolva o sistema $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$.
 6. Pós – processamento para cálculo de tensões e deformações.
-

A consequência disto é que os nós que estejam suficientemente afastados (dependendo da dimensão do domínio de influência) não são acoplados. Assim, este elemento de acoplamento tem então valor nulo na matriz \mathbf{K} . Da tabela 2.1, observa-se que no passo (2 a) verifica-se a localização do ponto de Gauss no interior do domínio. Ele torna-se desnecessário na alternativa de uso de uma malha de integração composta por elementos finitos. Também, no passo 2c verifica-se se o domínio de influência é interrompido por uma “fronteira interna”, uma trinca ou um furo, por exemplo. Apenas os nós \mathbf{x}_1 que possam ser conectados à \mathbf{X}_G sem cruzar um contorno são incluídos no domínio de influência (critério de visibilidade, cujos detalhes estão descritos na próxima seção). Belytschko [17] determina a ordem de integração em função da quantidade de nós em cada célula e sugere usar $n_G \times n_G$ pontos de Gauss em cada célula onde $n_G = \sqrt{m} + 3$ e m é o número de nós na célula.

Discretização de Descontinuidades. Os Métodos sem malha exigem a implementação de técnicas especiais para a discretização de descontinuidades. Nesta seção discute-se uma das técnicas de discretização propostas na literatura [9] para o tratamento de descontinuidades ocasionadas por trincas. O critério de visibilidade é uma forma simples que permite introduzir a condição de descontinuidade na formulação destes métodos. Este critério consiste em considerar-se que o contorno do corpo e qualquer linha interna de descontinuidade (trinca) são opacos. O significado de ser opaco é de que ao construir o domínio de influência de um nó imagina-se que há um raio de luz entre um ponto qualquer deste domínio e este nó. Se o raio de luz encontra um contorno ou linha de descontinuidade, que são opacos, ele é interrompido e o ponto não é incluído no domínio de influência. Na figura 2.13 é apresentado um exemplo típico do caso de dois nós I e J vizinhos a uma trinca. Observa-se na figura que os pontos existentes na região indicada são descartados pois os raios de luz que unem estes pontos ao centro do domínio de influência cortam a trinca. O uso deste critério introduz uma descontinuidade na função peso e na função de forma, sempre que o domínio de influência de um nó é interrompido por uma linha de descontinuidade (trinca). A figura 2.14 apresenta gráficos em isovalores para as funções peso e funções

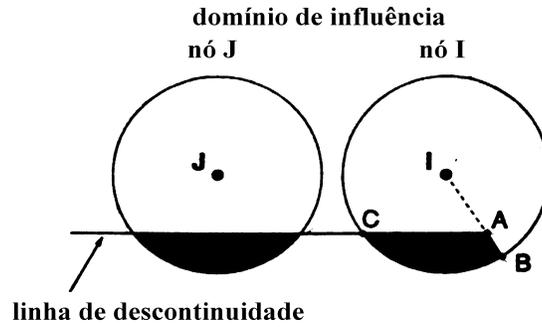


Fig 2.13 – Domínios de influência de nós adjacentes a uma trinca; a região indicada é removida do domínio de influência [26].

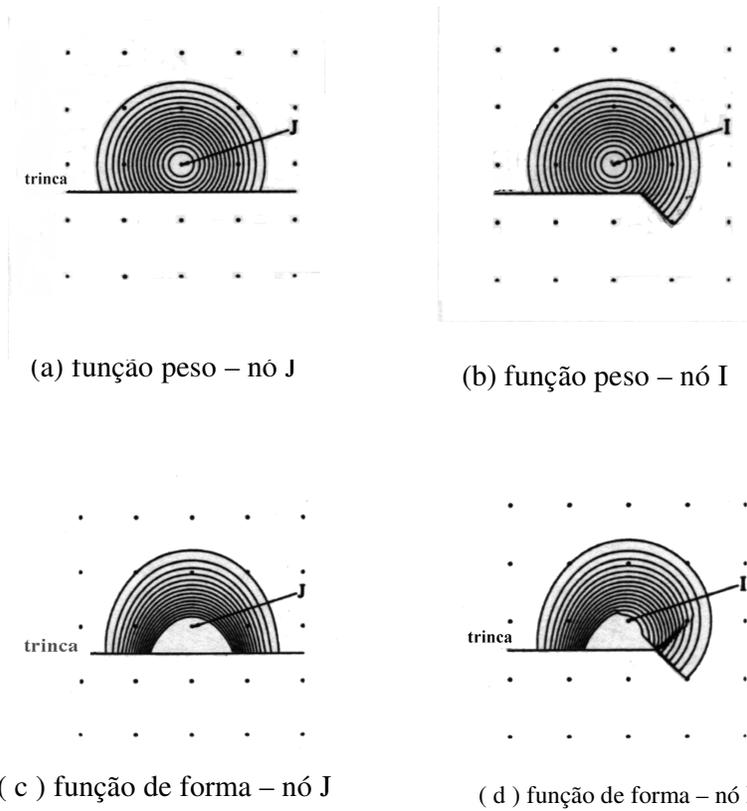


Fig 2.14 – Curvas de isovalores da função peso e da função de forma associada aos nós adjacentes a uma trinca [34].

de forma dos nós I e J da figura 2.13. Pode-se observar na figura que as funções são descontínuas ao longo da trinca. Uma desvantagem do critério de visibilidade é que ele também provoca uma descontinuidade da solução aproximada, no interior do domínio, sem correspondência com a descontinuidade física da trinca. Este efeito indesejável ocorre apenas para os nós vizinhos às pontas de trinca. Observa-se que na figura 2.13 ao longo da reta AB apenas o ponto B apresenta um valor nulo para a função peso. No entanto, em todos os pontos descartados (região hachurada) a função peso é nula. Esta descontinuidade da função peso é herdada pela função de forma e resulta em descontinuidades no interior de Ω . A figura 2.14 apresenta as curvas de isovalores para as funções peso e as funções de forma associadas aos nós I e J. As descontinuidades sem correspondência física com a trinca estão mostradas em 2.14 (b) e (d). As funções de forma dos nós I e J são apresentadas na figura 2.15. Nota-se, em 2.15 (b), as descontinuidades inadequadas. Entretanto, Krysl and Belytschko [34] demonstram que embora estas descontinuidades sejam inconvenientes elas não impedem a convergência do método. Dois critérios foram propostos para eliminar estes efeitos: a) o critério da difração e b) o critério da transparência. Os detalhes destes dois critérios podem ser obtidos na literatura indicada [9].

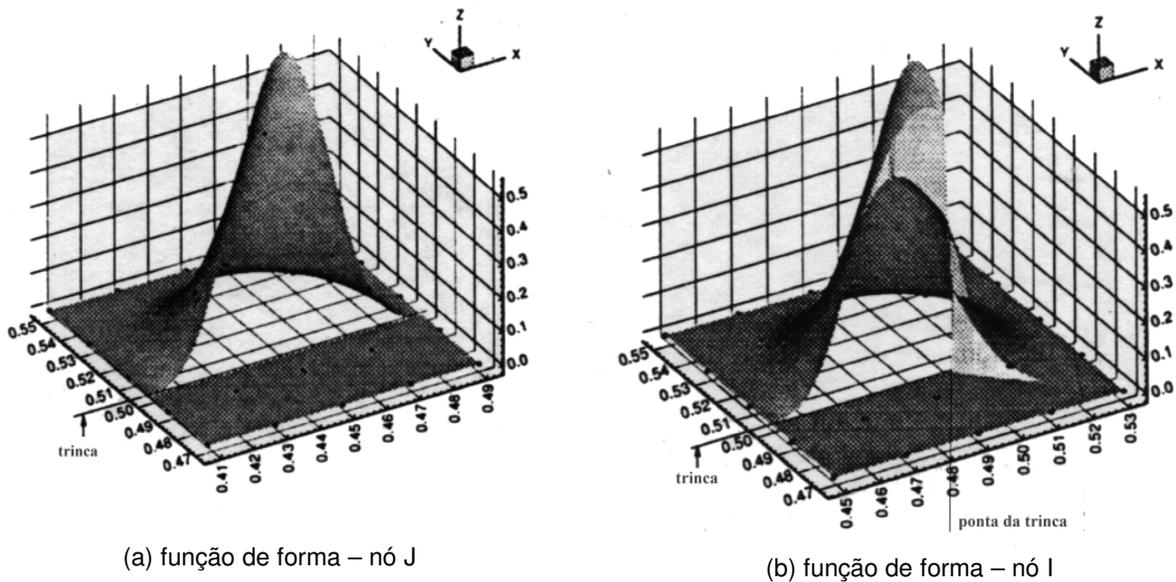


Fig 2.15 – Funções de forma de nós adjacentes a uma trinca (critério de visibilidade) [9]

Enriquecimento. A abordagem até aqui apresentada para o MGSE tem sido usada com sucesso na análise de problemas de mecânica da fratura envolvendo trincas estacionárias e também em problemas de propagação de trincas. No entanto o uso do MGSE em sua forma original apresenta alguns inconvenientes: a) há a necessidade de construir-se uma distribuição nodal suficientemente refinada nas regiões vizinhas às pontas de trinca, b) o campo de tensões obtido nestas regiões apresenta um comportamento de convergência não monotônica quanto ao refinamento, em torno da solução analítica e c) os resultados numéricos para os fatores de intensidade de tensão calculados a partir do conceito de integral J apresentam uma considerável dependência da dimensão do domínio de integração adotado. O primeiro inconveniente listado não chega a ser de grande relevância pois no contexto da abordagem de modelos sem malha o procedimento de adaptação e refinamento da discretização não envolve problemas como distorção de elementos, por exemplo. No entanto, as demais deficiências apresentadas são indesejáveis pois levam à necessidade de um maior número de graus de liberdade (nós) para a solução do problema. Fleming *et al* [35] apresentam uma técnica de enriquecimento da discretização do MGSE que permite a redução do número de graus de liberdade além de melhorar a precisão dos resultados numéricos, eliminando os inconvenientes da formulação original do MGSE indicados acima. Neste trabalho são apresentadas duas alternativas de enriquecimento do MGSE, ambas envolvendo a inclusão, na formulação do método, dos primeiros termos da expansão que descreve o campo de deslocamentos na ponta de uma trinca.

No primeiro método, o campo de deslocamento discretizado (*trial function*) $u_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{x})$, $\alpha = 1, 2$ é aumentado pela inclusão dos termos

$$\sum_{j=1}^{nc} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})], \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.53)$$

onde $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ indica a base de funções descritas na equação (2.2), $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é o vetor das incógnitas para o processo de MQM, α refere-se às componentes cartesianas, nc é o número de trincas, k_1^j e k_2^j são incógnitas associadas à j -ésima trinca. No caso de uma base linear tem-se

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y] \quad \text{e} \quad \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x})] \quad (2.53)$$

enquanto no caso de uma base quadrática

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad \text{e} \quad \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x}), a_4(\mathbf{x}), a_5(\mathbf{x}), a_6(\mathbf{x})] \quad (2.54)$$

e as funções $Q_{1\alpha}(\mathbf{x})$ e $Q_{2\alpha}(\mathbf{x})$, que descrevem o campo de deslocamento na ponta da trinca são [50]

$$Q_{11}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.55 a)$$

$$Q_{12}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.55 b)$$

$$Q_{21}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.55 c)$$

$$Q_{22}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.55 d)$$

onde r é a distância radial para a ponta da trinca, θ é o ângulo indicado na figura 2.16, μ é o módulo de cisalhamento e k é a constante de Kolosov definida por

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{estado plano de deformações} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{estado plano de tensões} \end{cases} \quad (2.56)$$

Assim, os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ são funções das coordenadas espaciais obtidas através da minimização de

$$J = \sum_{I=1}^n \frac{1}{2} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{nc} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})] - u_{I\alpha} \right]^2, \quad (2.57a)$$

onde n é o número de nós na vizinhança de \mathbf{x} que possuem valor não nulo de função peso. A expressão final para a aproximação é dada por

$$u_\alpha^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) \bar{u}_{I\alpha} + \sum_{j=1}^{nc} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})] \quad (2.57b)$$

onde $\bar{u}_{I\alpha} = u_{I\alpha} - \sum_{j=1}^{nc} [k_1^j Q_{1\alpha}^j(\mathbf{x}) + k_2^j Q_{2\alpha}^j(\mathbf{x})]$, e as funções de forma $\Phi_I(x)$ são as descritas em (2.15). Há, portanto, um acréscimo de duas incógnitas para cada ponta de trinca.

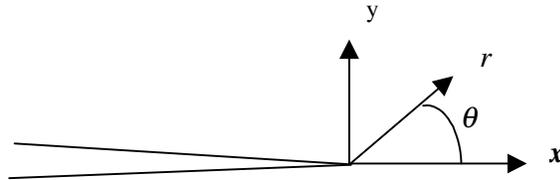


Fig 2.16 Sistema local de coordenadas na ponta da trinca

No segundo método, a base das funções de forma é expandida incluindo-se termos com a variação radial \sqrt{r} e a variação angular em (2.55). Fleming et al demonstram em [41] que as equações em (2.55) podem ser obtidas a partir de combinações lineares dos termos da base de funções

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \left[1, x, y, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right] \quad (2.58)$$

(note-se que os termos lineares não têm relação com o campo de deslocamento na ponta da trinca). O campo de deslocamentos é então definido por

$$u_{\alpha}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) u_{I\alpha} \quad (2.59)$$

Ao contrário do primeiro método, esta alternativa não acrescenta incógnitas no sistema linear de equações. No entanto ao aumentar a dimensão da base de funções há uma demanda por maior esforço computacional a considerar na inversão da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, quando o procedimento de MQM é utilizado. No caso da representação de trincas múltiplas, termos adicionais devem ser acrescentados à base de representação das funções para cada trinca. As duas alternativas exigem ainda uma estratégia de acoplamento entre os campos discretos de deslocamento. Na vizinhança de uma ponta de trinca este campo discreto é enriquecido e, em pontos externos a esta vizinhança, a formulação original do MGSE é utilizada. Na fronteira entre as duas regiões define-se um campo de deslocamentos que acopla as duas formulações. Nos casos envolvendo trincas curvas (formadas por segmentos de reta) é necessário estabelecer-se um mapeamento que alinhe a descontinuidade da formulação enriquecida (2.57b), em $\theta = \pm\pi$, com a descontinuidade real da trinca. Observe-se que nos dois métodos a estratégia de enriquecimento está associada a uma região definida pelos nós que possuem uma base de funções enriquecida.

Exemplo Numérico. Nesta seção apresenta-se um exemplo numérico de aplicação do MGSE que consiste da análise de um problema da viga em balanço apresentada na figura 2.17. A viga é submetida a uma carga P aplicada na extremidade livre. A ação desta carga é representada por uma variação parabólica de intensidade de força correspondente à componente de tensão τ_{xy} . Para o estado plano de tensões a solução analítica para este problema é expressa por [51]

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \quad (2.60)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu)\frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (2.61)$$

onde o momento de inércia I da viga é expresso por

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (2.62)$$

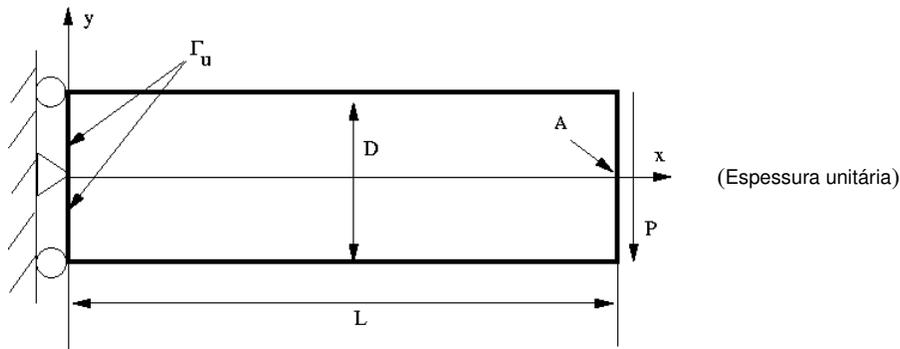


Fig 2.17 – Viga em balanço considerada para comparação com a solução analítica de Timoshenko e Goodier

e as tensões correspondentes ao campo de deslocamento em (2.60) e (2.61) são

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (2.63a)$$

$$\sigma_y(x, y) = 0 \quad (2.63b)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{Py}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (2.63c)$$

Na solução numérica do problema empregam-se os valores: $E = 2.0 \times 10^7$, $\nu = 0.3$, $D = 6$, $L = 24$ e $P = 100$. A figura 2.18 (a) apresenta um exemplo de discretização empregando uma distribuição uniforme de nós. Nela, empregam-se cinco nós ao longo da altura da viga e 15 nós ao longo do comprimento, num total de 75 nós.

Na figura 2.18 (b) observa-se a malha de integração correspondente à este modelo de 75 nós com um total de $4 \times 14 = 56$ células de integração.

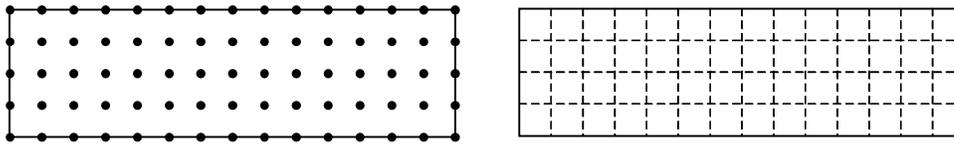


Fig 2.18 (a) distribuição uniforme de nós e (b) malha de integração correspondente.

Para a solução foram usados seis modelos com 27 (3x9), 44 (4x11), 75 (5x15), 100 (5x20), 175 (7x25) e 270 (9x30) nós, respectivamente. Uma comparação do deslocamento $u_y(x=L, y=0)$ do ponto A fornecido pelos modelos numéricos com a solução analítica é apresentada na tabela 2.2 onde se observa que a solução discreta converge monotonicamente com o número de nós para a solução analítica. Em cada célula de integração foram empregados 4×4 pontos de Gauss. Ao longo do contorno em $x = 0$ foram usados 4 pontos de Gauss em cada aresta de célula de integração para a imposição das condições de contorno essenciais pelo método de multiplicadores de Lagrange. No contorno, em $x = L$, o vetor força foi obtido, com esta mesma ordem de integração.

Tabela 2.2 - Soluções discretas para a viga engastada modelada pelo MGSE

| Modelo | Nr de nós | $u_y(L,D/2) \times 100$ (1) | Erro (%) | Nr Células |
|--------|-----------|-----------------------------|----------|------------|
| I | 27 | -0.132 179 | 0.67 | 2x8 |
| II | 44 | -0.133460 | 0.04 | 3x10 |
| III | 75 | -0.133466 | 0.025 | 4x14 |
| IV | 100 | -0.133471 | 0.021 | 4x19 |
| V | 175 | -0.133486 | 0.01 | 6x24 |
| VI | 270 | -0.133491 | 0.0067 | 8x29 |

(1) Solução analítica : $u_y(L,0) \times 100 = -0.1335$

Utilizou-se a spline cúbica como função peso

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4 + 4r^2 - \frac{4}{3}r^2 & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (2.64)$$

definida no plano xy pelo produto

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(r_x)w(r_y) = w_x w_y \quad (2.65)$$

onde

$$r_x = \|x - x_I\|/dm_x \text{ e } r_y = \|y - y_I\|/dm_y \quad (2.66)$$

e as dimensões dos domínios de influência em x e y são expressas, respectivamente, por

$$dm_x = d_{\max} c_{xI} \quad dm_y = d_{\max} c_{yI} \quad (2.67)$$

c_{xI} e c_{yI} definem o espaçamento nodal nas direções x e y respectivamente, o parâmetro d_{\max} foi utilizado com o valor de 3.5. A figura 2.19 apresenta o gráfico para a tensão normal σ_{xx} ao longo da altura da viga, para a posição $x = L/2$. Para a posição $x = 0$ o resultado numérico obtido é idêntico modificando-se apenas a escala de valores da tensão que é multiplicada por dois. Na figura 2.20 apresenta-se o gráfico para a tensão normal ao longo da altura da viga onde são comparados os valores numéricos com a solução analítica $\sigma_{xx} = 0$, para a posição $x = L$. Nota-se que o resultado obtido não reproduz esta solução exata. No entanto, os valores numéricos são pequenos em relação às distribuições obtidas, para outras posições (exemplo $x = L/2$). A figura 2.21 apresenta o gráfico para a tensão cisalhante ao longo da altura da viga. O gráfico é o mesmo para as posições $x = L/2$ e $x = L$. Note-se a boa aproximação obtida pelo MGSE para a condição de contorno natural ($\tau_{xy} = 0$) nas superfícies livres. A figura 2.22 apresenta este resultado para a posição $x=0$. Nesta posição a precisão da solução discreta é prejudicada pelo erro associado à imposição das condições de contorno essenciais pelo método de multiplicadores de Lagrange. Nota-se ainda, nestes gráficos, que a solução discreta do MGSE dispensa o uso do procedimento de suavização de tensões de uso comum no MEF, uma consequência da forma como é construído o campo de tensões. Os resultados acima demonstram uma boa convergência da solução discreta em relação à solução analítica do problema. Os testes realizados na obtenção desta convergência mostraram a sensibilidade do procedimento de integração no emprego de métodos sem malha. Na próxima seção o método de nuvens na forma hp é apresentado. Este oferece a possibilidade de implementação de técnica de solução numérica enriquecida de uma forma mais geral do que as apresentadas anteriormente.

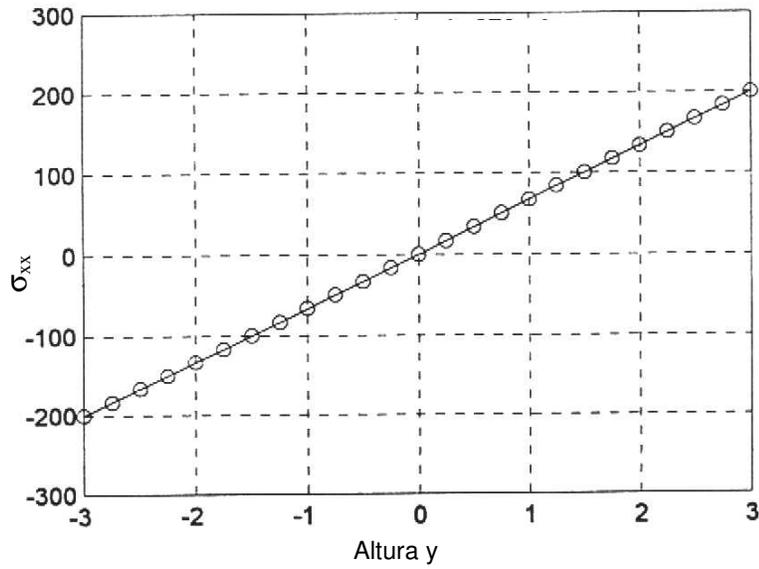


Fig 2.19. Tensão normal (σ_{xx}) ao longo da altura da viga, para $x = L/2$ (modelo de 270 nós). Os círculos indicam a solução discreta e a linha cheia representa a solução analítica.

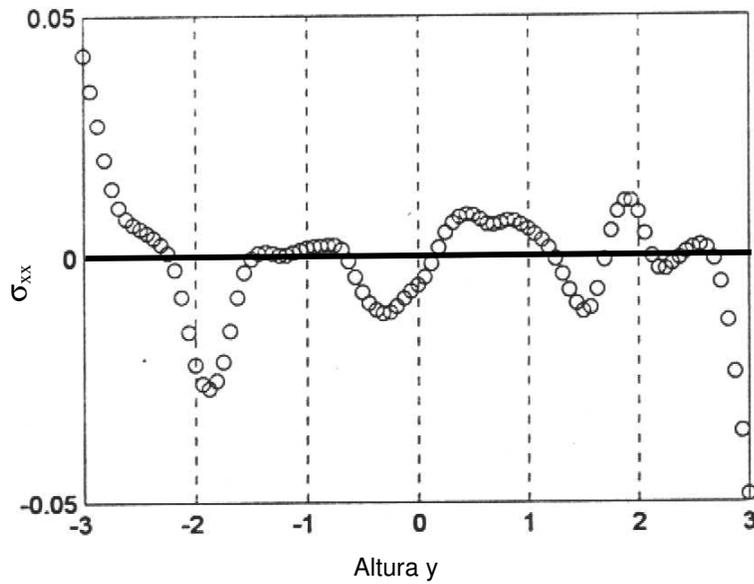


Fig 2.20. Tensão normal (σ_{xx}) ao longo da altura da viga, para $x = L$ (modelo de 270 nós). Solução analítica : $\sigma_{xx} = 0$

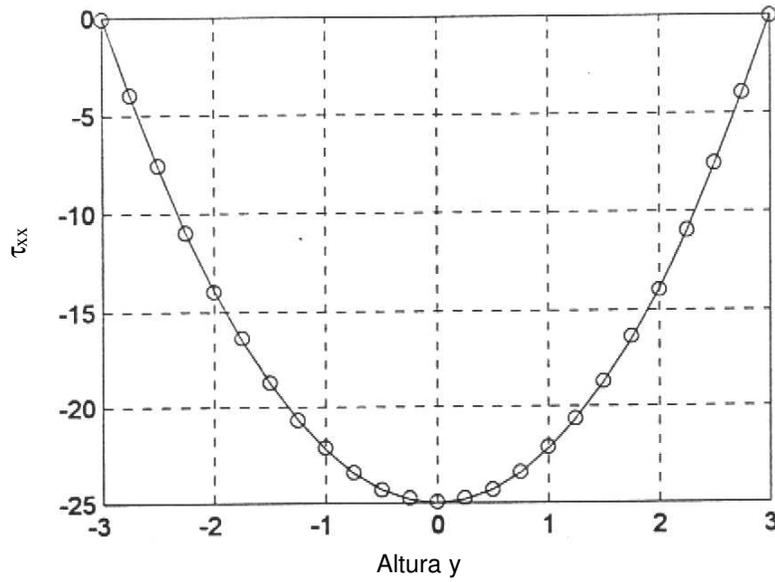


Fig 2.21. Tensão de cisalhamento ao longo da altura da viga (modelo de 270 nós), os gráficos são idênticos para $x= L/2$ e $x=L$.

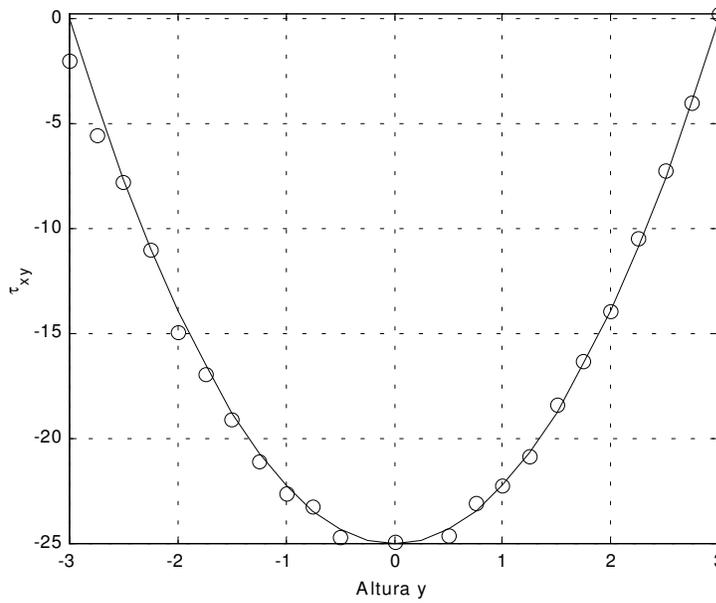


Fig 2.22. Tensão de cisalhamento ao longo da altura da viga, para $x= 0$ (modelo de 270 nós)

2.2.3 Método de Nuvens hp. Nesta seção apresenta-se o método de nuvens hp na forma proposta por Duarte e Oden [36,37,38]. Este método apresenta algumas vantagens em relação ao MGSE onde a mais importante é a facilidade de construção das funções de aproximação que são obtidas com um esforço computacional comparável ao da construção das funções de forma do MEF tradicional. Além desta, o método permite também, a implementação de uma estratégia de adaptação tipo hp com simplicidade e eficiência não oferecidas pelo MGSE. E, também, oferece a possibilidade de utilizar-se uma estratégia de enriquecimento que evita a necessidade do emprego de técnicas de acoplamento. Na primeira parte desta seção apresenta-se o conceito de Partição da unidade das funções de forma e discutem-se as propriedades destas funções no MGSE. Estas funções servem de base para a construção das funções de aproximação do método de nuvens hp cuja construção é discutida na segunda parte.

Partição de Unidade. Considera-se um domínio Ω limitado por um contorno Γ e, sobre este domínio, define-se uma cobertura $\tau_N = \{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ de Ω composta por N subdomínios (segmentos / círculos / esferas) ω_α com centro nos pontos \mathbf{x}_α . O domínio é completamente coberto de forma que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha$.

Uma classe de funções $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ é uma partição de unidade para a cobertura τ_N se ela possuir as seguintes propriedades

$$1) \varphi_\alpha \in C^\infty(\omega_\alpha), \quad 1 \leq \alpha \leq N \tag{2.68}$$

$$2) \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.69}$$

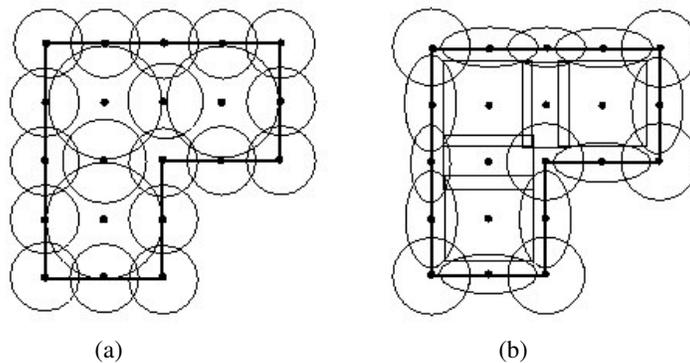


Fig 2.23 – Cobertura de Ω em 2D, (a) com círculos centrados nos nós, (b) com elipses e retângulos [36].

Nas aplicações práticas, a primeira propriedade não é exigida empregando-se frequentemente funções com ordem de continuidade limitada. Há várias formas de se construir uma partição da unidade (PU): o exemplo mais frequente é a obtenção das funções de forma do MEF. Note-se que na construção da cobertura podem ser utilizados círculos (caso R^2) ou ainda elipses, retângulos, etc. As funções de forma do MGSE, também chamadas de funções de MQM são exemplos de partições da unidade. Considere-se como PU, neste estudo, as funções $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ construídas a partir de um procedimento de MQM, na forma descrita na seção 2.2.1. Considere ainda \bar{L}_k o conjunto de polinômios de grau menor ou igual a k . Duas alternativas para a construção de um polinômio podem ser desenvolvidas: a primeira é através de um produto de polinômios na forma

$$L_{ijm} = L_i(x_1)L_j(x_2)L_m(x_3) \ , \ 0 \leq i, j, m \leq k \tag{2.70}$$

onde $L_i(x_1)$ é um polinômio de grau i na coordenada espacial x_1 . A partir da equação (2.70) pode-se construir um polinômio completo de qualquer grau desde que estejam presentes todos os termos necessários. A tabela 2.3 apresenta o retângulo de Pascal para o caso das funções do R^2 , uma visualização dos termos necessários para a construção de um polinômio completo na forma (2.70).

Tabela 2.3 – Retângulo de Pascal. Os elementos $L_{ij} = L_iL_j = x^i y^j$ necessários para formar um polinômio completo (2.70).

| Grau | | $L_0(x_2)$ | $L_1(x_2)$ | $L_2(x_2)$ | $L_3(x_2)$ | ... |
|------|------------|------------|------------|------------|------------|-----|
| 0 | $L_0(x_1)$ | L_{00} | L_{01} | L_{02} | L_{03} | ... |
| 1 | $L_1(x_1)$ | L_{10} | L_{11} | L_{12} | L_{13} | ... |
| 2 | $L_2(x_1)$ | L_{20} | L_{21} | L_{22} | L_{23} | ... |
| 3 | $L_3(x_1)$ | L_{30} | L_{31} | L_{32} | L_{33} | ... |
| | M | M | M | M | M | O |

A segunda alternativa para a construção dos polinômios é através da definição de Π_k ; o conjunto dos menores polinômios completos de ordem k . A tabela 2.4 apresenta o triângulo de Pascal, uma forma de visualizar os termos destes polinômios.

Tabela 2.4 – Triângulo de Pascal. Os elementos $L_{ij} = L_i L_j = x^i y^j$ necessários para formar um polinômio completo (Π_k) em \mathbb{R}^2 .

| | | | | | |
|---|----------|--|----------|----------|----------|
| 0 | | | L_{00} | | |
| 1 | | | L_{10} | L_{01} | |
| 2 | L_{20} | | L_{11} | | L_{02} |
| 3 | L_{30} | | L_{21} | L_{12} | L_{03} |
| M | | | M | | |

Considerando-se agora um conjunto $S_N^k = \{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$, contendo N funções de forma de MQM com as seguintes propriedades:

i) dado um elemento $L_{ijm} \in \bar{L}_k$, ou seja, um polinômio de grau menor ou igual a k .

Tem-se que

$$L_{ijm}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N L_{ijm}(\mathbf{x}_\alpha) \varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) \tag{2.71}$$

a expressão acima indica que as funções $\{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ são capazes de representar, através de combinações lineares, um polinômio de grau menor ou igual a k . Esta propriedade foi demonstrada em (2.23-2.25).

ii) $S_N^k = \{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ é um conjunto de funções linearmente independentes. Esta propriedade é demonstrada em [34]. Na prática, devido ao esforço computacional para inverter a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, o MGSE emprega funções de, no máximo, $k = 2$, que corresponde ao uso de uma base de funções em \mathbb{R}^2

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x, y, x^2, xy, y^2) \tag{2.72}$$

O caso mais simples de funções de MQM ocorre para $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1\}$, ou seja, $k=0$. Neste caso tem-se as funções de forma de Shepard e sua construção não exige a inversão de uma matriz:

$$\varphi_\alpha^{k=0} = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{w_\alpha(\mathbf{x})}{\sum_\beta w_\beta(\mathbf{x})} \tag{2.73}$$

Na expressão acima, indica-se o β – ésimo nó na vizinhança (domínio de influência) do nó x_α . Apesar de facilidade de obtenção, as funções de Shepard têm a desvantagem de representar apenas funções constantes. A seguir, apresenta-se uma nova classe de funções de aproximação, a família de funções do método de nuvens hp. Esta nova classe de funções é obtida a partir do conjunto de funções

$S_N^k = \{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$ e tem a capacidade de representar qualquer polinômio de grau p , onde $p \geq k$.

A Família de funções $F_N^{k,p}$. O problema de estabelecer-se uma base de funções capaz de gerar um espaço de funções polinomiais de grau menor ou igual a $k=1, \bar{L}_{k=1}$, por exemplo, de modo que a expressão $\bar{L}_{k=1} \subset$ espaço gerado { base escolhida } torne-se verdadeira é aqui tratado. Uma escolha possível é tomar o conjunto de monômios indicados na tabela 2.3 .

$$\{L_{00}, L_{10}, L_{01}, L_{11}\} = \{1, x, y, xy\} \tag{2.74}$$

Teremos então que $\bar{L}_{k=1} \subset$ espaço gerado $\{1, x, y, xy\}$. Suponha-se então que deseja-se modificar esta base para que ela seja capaz de gerar um espaço de funções de grau $p=3$. A tabela 2.3 indica os termos a serem acrescentados à base original (2.74). Estes termos formam um conjunto de 12 monômios sublinhados na tabela 2.3, e são os monômios de maior ordem. Podemos então escrever que $\bar{L}_{p=3} \subset$ espaço gerado $\{\{1, x, y, xy\} \cup \{\text{termos de maior ordem}\}\}$. Investiga-se agora o mesmo problema porém, no contexto das funções de métodos sem malha. Supondo-se conhecida uma base para o espaço de polinômio $\bar{L}_{k=1} \subset$ espaço gerado $\{\varphi_\alpha^{k=1}\}_{\alpha=1}^N$, ou seja, uma base formada por funções de MQM, deve-se identificar os termos a serem acrescentados a esta base para que ela torne-se capaz de gerar um espaço de polinômios de grau $p = 3$. Duarte and Oden [37 - 42] demonstram que estes termos são obtidos do produto, $\varphi_\alpha^k L_{ij}(\mathbf{x})$, entre as funções $\varphi_\alpha^{k=1}$ e os monômios de maior ordem indicados na tabela 2.3. Estes termos são funções de maior ordem e a base assim obtida define a família de funções $F_N^{k=1, p=3}$. No caso geral, para valores de k e $p \geq k$ arbitrários, pode-se escrever a definição

$$F_N^{k,p} = \{\{\varphi_\alpha^k(\mathbf{x})\} \cup \{\varphi_\alpha^k(\mathbf{x}) L_{ijm}(\mathbf{x})\}: \tag{2.75}$$

$$1 \leq \alpha \leq N; \quad 0 \leq i, j, m \leq p, \quad i \text{ ou } j \text{ ou } m > k, \quad p \geq k\}$$

onde a idéia para a definição de (2.75) é a de adicionar-se elementos apropriados ao conjunto de funções $S_N^k = \{\varphi_\alpha^k\}_{\alpha=1}^N$, de modo que o conjunto de funções obtido represente, através de combinações lineares, qualquer polinômio de grau $p \geq k$.

Devido a propriedade da PU, $(\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) = 1)$, estes elementos são precisamente o produto $\varphi_{\alpha}^k L_{ij}(\mathbf{x})$, das funções de MQM com os monômios de maior ordem associados ao problema. O conjunto $F_N^{k,p}$, assim formado, possui as seguintes propriedades:

Propriedade i) Se as funções de PU, $S_N^k = \{\varphi_{\alpha}^k\}_{\alpha=1}^N$, são linearmente independentes em R^n , então o conjunto $F_N^{k,p}$ também é um conjunto de funções linearmente independentes em R^n .

Para a demonstração desta propriedade supõe-se que

$$\sum_{\alpha}^N \left(a_{\alpha} \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{0 \leq i,j,m \leq p \\ i \text{ ou } j \text{ ou } m > k}} b_{\alpha ijm} \varphi_{\alpha}^k L_{ijm}(\mathbf{x}) \right) = 0 \quad (2.76)$$

$$\text{ou} \quad \sum_{\alpha}^N \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) \left(a_{\alpha} + \sum_{\substack{0 \leq i,j,m \leq p \\ i \text{ ou } j \text{ ou } m > k}} b_{\alpha ijm} L_{ijm}(\mathbf{x}) \right) = 0 \quad (2.77)$$

Uma vez que $\{\varphi_{\alpha}^k\}_{\alpha=1}^N$ é um conjunto de funções linearmente independentes, de (2.77) obtém-se que

$$a_{\alpha} + \sum_{\substack{0 \leq i,j,m \leq p \\ i \text{ ou } j \text{ ou } m > k}} b_{\alpha ijm} L_{ijm}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.78)$$

observando-se que o conjunto $\{L_{ijm}(\mathbf{x})\}$ é formado por funções linearmente independentes e que não existe combinação linear de funções $L_{ijm}(\mathbf{x})$ que seja igual a uma constante, teremos que

$$a_{\alpha} = 0, \quad b_{\alpha ijm} = 0 \quad (\text{CQD}). \quad (2.79)$$

Propriedade ii) $\bar{L}_p \subset$ espaço gerado $\{F_N^{k,p}\}$.

Para a demonstração, considere-se L_{rst} , $0 \leq r, s, t \leq p \in$ espaço gerado $\{F_N^{k,p}\}$, então $\exists a_{\alpha}$ e $b_{\alpha ijm}$ tais que

$$L_{rst}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha}^N \left(a_{\alpha} \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{0 \leq i,j,m \leq p \\ i \text{ ou } j \text{ ou } m > k}} b_{\alpha ijm} \varphi_{\alpha}^k L_{ijm}(\mathbf{x}) \right) \quad (2.80)$$

Agora, se r, s e $t \leq k$ toma-se

$$a_{\alpha} = L_{rst}(\mathbf{x}_{\alpha}), \alpha = 1K N \quad (2.81)$$

$$b_{\alpha_{ijm}} = 0 \quad (2.82)$$

que corresponde à propriedade (2.71) da PU formada pelas funções de MQM.

Se r, s e $t \geq k$ toma-se

$$a_{\alpha} = 0, \alpha = 1K N \quad (2.83)$$

$$b_{\alpha_{ijm}} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = r, j = s, m = t \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}, \alpha = 1, K N \quad (2.84)$$

e teremos então

$$\sum_{\alpha} \left(a_{\alpha} \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{0 \leq i, j, m \leq p \\ i \text{ ou } j \text{ ou } m > k}} b_{\alpha_{ijm}} \varphi_{\alpha}^k L_{ijm}(\mathbf{x}) \right) = L_{rst}(\mathbf{x}) \quad (2.85)$$

porque $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) = 1$, e

$$\sum_{\alpha} \left(b_{\alpha_{rst}} \varphi_{\alpha}^k L_{rst}(\mathbf{x}) \right) = L_{rst}(\mathbf{x}) \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^k(\mathbf{x}) = L_{rst}(\mathbf{x}) \quad (2.86)$$

A primeira propriedade implica que os elementos de $F_N^{k,p}$ podem ser utilizados para formar uma base de funções enquanto que a segunda propriedade garante que qualquer polinômio de ordem menor ou igual a p está contido no espaço gerado por esta base de funções. Assim, que este polinômio pode ser representado por combinações lineares dos elementos da base de funções. (CQD).

Implementação. Em termos práticos, na implementação do método de nuvens hp não há a necessidade de utilizar-se o caso geral da família de funções $\{F_N^{k,p}\}$, a grande vantagem do método está na construção de uma aproximação com a família de funções $\{F_N^{k=0, p \geq 1}\}$ que corresponde ao uso de uma base de funções composta pelas funções de Shepard, $\varphi_{\alpha}^{k=0} = \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})$, cuja construção demanda pouco esforço computacional, acrescidas por termos de maior ordem $\varphi_{\alpha} L_{ijm}(\mathbf{x})$ que tornam a nova base capaz de representar polinômios de qualquer grau. Desta forma, é possível construir uma discretização sem malha e o esforço computacional associado à construção das funções de aproximação é comparável ao esforço em outras técnicas tradicionais como o MEF. A figura 2.24 (a) ilustra

a função de Shepard , $\varphi_\alpha^{k=0} = \varphi_\alpha(\mathbf{x})$, obtida para uma distribuição nodal com $N = 25$ nós. Nesta mesma figura, os casos (b) e (c) apresentam esta função de Shepard enriquecida.

A implementação das funções de maior ordem $\varphi_\alpha L_{ijm}(\mathbf{x})$ em R^n é feita da seguinte forma:

a) define-se uma subregião mestre (esfera/círculo/segmento) de raio unitário $\hat{\omega}_\alpha$

$$\hat{\omega}_\alpha = \{ \boldsymbol{\xi} \in R^n : \|\boldsymbol{\xi}\| < 1 \} \quad (2.87)$$

em que os monômios de maior ordem podem ser construídos na forma;

$$\hat{L}_{ijm}(\zeta, \psi, \rho) = \zeta^i \psi^j \rho^m \quad (2.88)$$

b) Em seguida faz-se um mapeamento , $\mathbf{F}_\alpha : \hat{\omega}_\alpha \rightarrow \omega_\alpha$, que leva a subregião a uma região de dimensão h_α

$$\omega_\alpha = \{ \mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}\| < h_\alpha \} \quad (2.89)$$

cujas funções de mapeamento tem a forma

$$\mathbf{F}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = h_\alpha \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_\alpha, \quad \boldsymbol{\xi} \in \hat{\omega}_\alpha \quad (2.90)$$

assim as funções são definidas como

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) L_{ijm}(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) (\hat{L}_{ijm} \circ \mathbf{F}_\alpha^{-1}(\mathbf{x})) = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \hat{L}_{ijm}(\mathbf{F}_\alpha^{-1}(\mathbf{x})) = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \hat{L}_{ijm} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)}{h_\alpha} \right) \quad (2.91)$$

$$= \varphi_\alpha(x, y, z) \hat{L}_{ijm} \left(\frac{((x, y, z) - (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha))}{h_\alpha} \right) = \varphi_\alpha \left(\frac{x - x_\alpha}{h_\alpha} \right)^i \left(\frac{y - y_\alpha}{h_\alpha} \right)^j \left(\frac{z - z_\alpha}{h_\alpha} \right)^m \quad (2.92)$$

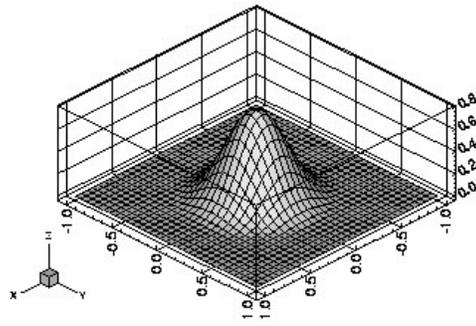
A família de funções $F_N^{k,p}$ representa uma generalização de algumas classes de funções usadas como funções de aproximação na solução de problemas de valor de contorno. As funções de Shepard correspondem à família

$$F_N^{k=0, p=0} = \{ \varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0 \} \quad (2.93)$$

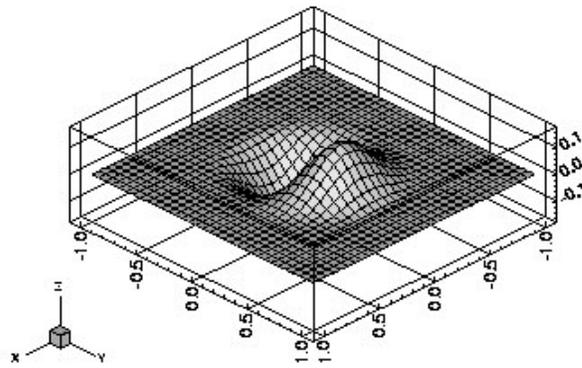
e as funções de MQM utilizadas pelo MGSE correspondem à família

$$F_N^{k, p=k} = \{ \varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_N^k \} \quad (2.94)$$

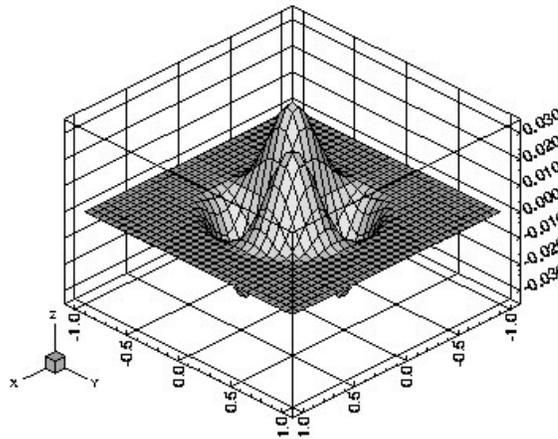
A classe de funções do método de nuvens hp é uma generalização das duas famílias acima citadas e é descrita na forma



(a) função 2D , $\varphi_{\alpha}^{k=0}$ da família $F_{N=25}^{k=0,p}$



(b) função 2D , $y\varphi_{\alpha}^{k=0}$ da família $F_{N=25}^{k=0,p \geq 1}$



(c) função 2D , $xy\varphi_{\alpha}^{k=0}$ da família $F_{N=25}^{k=0,p \geq 2}$

Fig 2.24 – Funções 2D do método de nuvens hp: (a) $\varphi_{\alpha}^{k=0}$; (b) $y\varphi_{\alpha}^{k=0}$ e (c) $xy\varphi_{\alpha}^{k=0}$ [37]

$$F_N^{k,p} = \begin{Bmatrix} \varphi_1^k & \varphi_2^k & \mathbf{K} & \varphi_N^k \\ \varphi_1^k L_{s=1} & \varphi_2^k L_{s=1} & \mathbf{K} & \varphi_N^k L_{s=1} \\ \varphi_1^k L_{s=2} & \varphi_2^k L_{s=2} & \mathbf{K} & \varphi_N^k L_{s=2} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \varphi_1^k L_{s=M} & \varphi_2^k L_{s=M} & \mathbf{K} & \varphi_N^k L_{s=M} \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

Na prática, a implementação numérica do método, faz uso apenas do caso $k=0$, $p \geq 1$. Duarte and Oden mostram em [37] que não há vantagens, em termos de taxa de convergência, em utilizar-se as funções para o caso $k>0$. Outra característica importante do método é de que as funções de maior ordem são incorporadas à partição da unidade nó a nó. Assim $\{\varphi_\alpha L_{ijm}(\mathbf{x})\}$ pode definir um conjunto diferente de funções para cada nó \mathbf{x}_α . Portanto, cada nó pode ter uma função de aproximação capaz de representar polinômios de graus diferentes, independentemente da definição feita para a função de aproximação dos nós vizinhos. Isto torna o procedimento de adaptação tipo p ou mesmo hp muito mais simples e eficaz no método de nuvens hp quando comparado, por exemplo, com o MGSE. É importante observar que não há nenhum impedimento para que se construa uma família de funções $\{F_N^{k,p}\}$, capaz de representar funções não polinomiais, bastando que sejam inseridos os termos corretos na base de funções, este fato permitiria, por exemplo, enriquecer a discretização de nuvens hp com funções associadas ao campo de deslocamento na ponta de uma trinca. Esta estratégia de enriquecimento, no contexto do método de nuvens hp, dispensa o uso de técnicas de acoplamento. Portanto ela é mais simples que no caso do MGSE. Com a família de funções $F_N^{k,p}$ assim obtida, pode-se construir a discretização na forma

$$u^{hp}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \left(u_\alpha + \sum_j a_{\alpha j} L_{\alpha j}(\mathbf{x}) \right) \quad (2.96)$$

onde u_α e $a_{\alpha j}$ são graus de liberdade generalizados, $\{L_{\alpha j}(\mathbf{x})\}$ é um conjunto contendo os termos de maior ordem, funções polinomiais (monômios) ou funções especiais de enriquecimento da discretização. Incorporando-se a função unitária, $f(x) = 1$, que multiplica u_α , ao conjunto $\{L_{\alpha j}(\mathbf{x})\}$ pode-se escrever

$$u^{hp}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i \in I(\alpha)} a_{\alpha i} \left(\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \right) \quad (2.97)$$

onde $I(\alpha)$ é um conjunto de índices. Cada i -ésimo índice de $I(\alpha)$ indica uma função contida no conjunto $\{L_{\alpha i}(\mathbf{x})\}$ o qual está associado ao α -ésimo nó.

2.3 Discretização Com o Método de Elementos Finitos Generalizados

A análise de problemas tridimensionais através do método de elementos finitos tradicional é geralmente realizada através de procedimentos de geração de malhas. Como elemento básico para estes geradores tridimensionais utiliza-se geralmente o elemento tetraédrico para discretizar peças tridimensionais complexas. Busca-se também obter procedimentos que minimizem a necessidade de intervenção do usuário na construção da malha. As principais desvantagens destes códigos de geração automática de malha são:

i) Gera-se um número de elementos, suficiente para manter a razão de aspecto dos elementos dentro de limites que não comprometam a condição da transformação jacobiana. Isto ocorre, por exemplo, na discretização de domínios que possuem zonas de transição entre componentes com variações não suaves das dimensões.

ii) O emprego de uma aproximação polinomial das variáveis de estado no domínio no MEF convencional, requer um número elevado de elementos para representar a solução em pontos de concentração de tensões e regiões de singularidade como os existentes em cantos e arestas do domínio. Frequentemente as malhas obtidas nestas regiões não são adequadamente refinadas, devido a dois motivos: a) é comum que se imponha um limite máximo para o total do número de graus de liberdade criados na malha. b) alguns geradores são incapazes de gerar uma malha adequadamente refinada nestas regiões sem criar um grande número de elementos nas regiões vizinhas. Esta prática leva a resultados imprecisos mesmo em pontos do domínio distantes das singularidades devido ao efeito da “poluição numérica” [43].

iii) Os geradores automáticos de malha 3D impossibilitam o uso de aproximações p – ortotrópicas, especialmente no caso dos elementos tetraédricos. Estas aproximações possuem ordem polinomial diversa nas diferentes direções.

Em análises de componentes com materiais ortotrópicos ou que possuam uma dimensão muito menor que as demais torna-se vantajoso utilizar uma aproximação p – ortotrópica para obter resultados precisos com um menor número de graus de liberdade.

O MEFG, Método de Elementos Finitos Generalizados, foi proposto independentemente por Babuska e colaboradores [40,41,42,44] e por Duarte e Oden [43,45]. Babuska apresentou-o como “método especial de elementos finitos”, “método generalizado de elementos finitos” ou “método de partição da unidade de elemento finito” enquanto Duarte e Oden apresentaram o método com o nome de “método hp de elementos finitos baseado em nuvens”. Os vários métodos sem malha propostos mais recentemente podem ser reconhecidos como casos especiais do método generalizado de elementos finitos. O ponto em comum a todos estes métodos é o emprego da condição de Partição da Unidade (PU) das funções de forma, o que significa empregar um conjunto de funções cuja soma é unitária em qualquer ponto \mathbf{x} de um domínio Ω . Esta propriedade da PU é utilizada para enriquecer a discretização considerada aprimorando sua capacidade de representação polinomial ou capacitando-a a representar funções não polinomiais. Nesta seção apresenta-se a formulação do Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na forma proposta por Duarte, Babuska and Oden [43]. São discutidas as dificuldades associadas ao procedimento de geração de malhas para o caso mais geral de análise tridimensional. Em seguida apresentam-se as formulações uni e bi dimensional incluindo-se as vantagens oferecidas pelo método. Para uma visão geral do potencial do método, apresenta-se uma abordagem genérica tratando o problema de mecânica estrutural no contexto da elastoestática. Nos itens seguintes discute-se com mais detalhes como o método pode ser usado para a análise de problemas de mecânica da fratura.

Se \mathbf{u} é uma função definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, uma cobertura aberta é definida na forma

$$\tau_N = \{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha \quad (2.98)$$

para Ω , união de N subconjuntos abertos ω_α , denominados de suportes ou nuvens, com centro em \mathbf{x}_α . A união destes subconjuntos cobre todo o domínio. Cada intervalo aberto ω_α consiste em um suporte para uma função local \mathbf{u}_α , que

será uma aproximação local para \mathbf{u} . Presume-se que é possível definir, em cada suporte, um espaço de funções $X_\alpha(\omega_\alpha)$ $\alpha=1,\dots,N$, de modo que exista uma função $\mathbf{u}_\alpha \in X_\alpha(\omega_\alpha)$ que seja uma aproximação adequada para a função global \mathbf{u} definida no suporte. A adequação desta aproximação deve ser definida em sentido especificado. Conforme ilustrado na figura 2.25 onde mostram-se os nós x_1, x_α e x_N , localizados no domínio Ω , e suas respectivas nuvens ω_1, ω_α e ω_N .

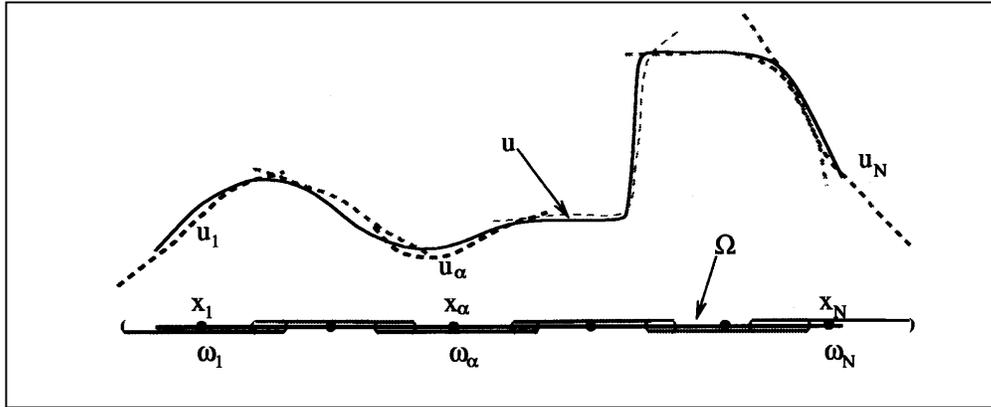


Figura 2.25: Aproximações locais definidas em cada suporte ω_α

As funções locais são definidas nestas nuvens por u_1, u_α e u_N , respectivamente. Assume-se que a função local escolhida representa adequadamente, em cada nuvem, a solução u do problema. As aproximações locais u_α , $\alpha=1,\dots,N$, devem ser combinadas, de forma que se obtenha uma aproximação global u_{hp} para u . É desejável que esta aproximação global seja definida de forma que a diferença entre u_{hp} e u , definida em alguma norma, seja limitada pelo erro local $u - u_\alpha$. Isto pode ser obtido nos métodos de partição da unidade a partir de funções φ_α definidas nos suportes ω_α , $\alpha=1,\dots,N$, as quais satisfazem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
 & i) \quad \varphi_\alpha \in C_0^s(\omega_\alpha), \quad s \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq N \\
 & ii) \quad \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega
 \end{aligned}
 \tag{2.99}$$

e definem uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta τ_N . Exemplos clássicos de partição da unidade são: os elementos finitos lagrangianos, as funções obtidas pelo método de mínimos quadrados móveis e as funções de Shepard. No caso da partição da unidade de elementos finitos, os suportes (nuvens) são definidos pela união de elementos que compartilham um nó vértice x_α e a implementação é essencialmente a mesma do método convencional, com diferenças apenas na definição das funções de forma, como é mostrado adiante. Esta alternativa de partição da unidade elimina as dificuldades de integração numérica associadas à técnica de mínimos quadrados móveis utilizada em alguns métodos sem malha. Pode-se então empregar no MEFG as mesmas rotinas de integração numérica já estabelecidas para o MEF clássico. Uma discretização unidimensional de elementos finitos é mostrada na figura 2.26. As funções de partição da unidade são as funções “chapéu” clássicas (*hat functions*), associadas a cada nó x_α . O suporte (nuvem) ω_α é definido pela união dos elementos τ_α e $\tau_{\alpha-1}$.

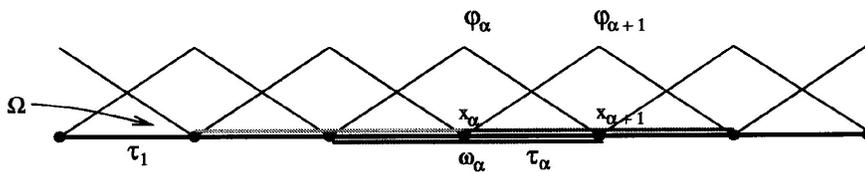


Figura 2.26: Partição da Unidade de um elemento finito unidimensional [43]

Considere-se agora o elemento τ_α com os nós x_α e $x_{\alpha+1}$ indicados nas figura 2.26. Se as seguintes funções de forma estão associadas ao elemento:

$$S_\alpha = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}\} \times \{1, u_\alpha, u_{\alpha+1}\} = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, \varphi_\alpha u_\alpha, \varphi_\alpha u_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+1} u_\alpha, \varphi_{\alpha+1} u_{\alpha+1}\} \quad (2.100)$$

o elemento τ_α terá um total de seis funções de forma (três em cada nó) obtidas do produto entre as funções de forma lagrangianas clássicas do MEF (uma partição da unidade) e as funções locais $u_\alpha, u_{\alpha+1}$ que, por hipótese, aproximam adequadamente a função u no elemento τ_α . Esta idéia pode ser generalizada aumentando-se o número de funções u_α e $u_{\alpha+1}$ o que resultaria em um espaço de funções S_α de dimensão ainda maior, e portanto de maior ordem.

Graças à propriedade da partição da unidade das funções de forma de elementos finitos, combinações lineares das funções de forma, conforme as definidas acima, podem reproduzir as aproximações locais u_α e $u_{\alpha+1}$. Desta forma

$$\varphi_\alpha u_\alpha + \varphi_{\alpha+1} u_\alpha = u_\alpha (\varphi_\alpha + \varphi_{\alpha+1}) = u_\alpha \quad (2.101a)$$

$$\varphi_\alpha u_{\alpha+1} + \varphi_{\alpha+1} u_{\alpha+1} = u_{\alpha+1} (\varphi_\alpha + \varphi_{\alpha+1}) = u_{\alpha+1} \quad (2.101b)$$

i.e.,

$$u_\alpha, u_{\alpha+1} \in \text{espaço gerado por } \{S_\alpha\} \quad (2.102)$$

A idéia básica nos métodos de partição da unidade e em particular no MEFM é usar-se a PU para combinar os espaços que definem aproximações localizadas. As funções de forma são construídas de forma a reproduzir as aproximações locais definidas em cada nuvem ω_α , através de combinações lineares.

Com as funções de discretização definidas em 2.73 pode-se então definir em um elemento τ_α a discretização

$$u_{\tau_\alpha}^h = \varphi_\alpha a_\alpha + \varphi_{\alpha+1} a_{\alpha+1} + \varphi_\alpha u_\alpha b_{\alpha,1} + \varphi_\alpha u_{\alpha+1} b_{\alpha,2} + \varphi_{\alpha+1} u_\alpha b_{\alpha+1,1} + \varphi_{\alpha+1} u_{\alpha+1} b_{\alpha+1,2} \quad (2.103)$$

$$u_{\tau_\alpha}^h = \sum_{i=\alpha}^{\alpha+1} \varphi_i \left(a_i + \sum_{j=1}^2 b_{\alpha,j} u_{\alpha+j-1} \right) \quad (2.104)$$

de modo análogo pode-se definir a contribuição da nuvem ω_α para a discretização

$$u_{\omega_\alpha}^h = \varphi_\alpha \left(a_\alpha + \sum_{j=1}^2 b_{\alpha,j} u_{\alpha+j-1} \right) \quad (2.105)$$

e a discretização no domínio Ω

$$u_\Omega^h = \sum_\alpha u_{\omega_\alpha}^h = \sum_\alpha \varphi_\alpha \left(a_\alpha + \sum_{j=1}^2 b_{\alpha,j} u_{\alpha+j-1} \right) \quad (2.106)$$

nas expressões acima, φ_α define a PU, a_α e $b_{\alpha,j}$ definem graus de liberdade generalizados e $u_{\alpha+j-1}$ são os termos de maior ordem (monômios ou funções especiais) usados para enriquecer a discretização.

Caso bidimensional . Considerando-se as figuras 2.27 e 2.28, definem-se para o caso plano as nuvens ω_α em uma malha de elementos triangulares e quadriláteros

respectivamente. Em cada nuvem define-se uma função de forma global N_α .

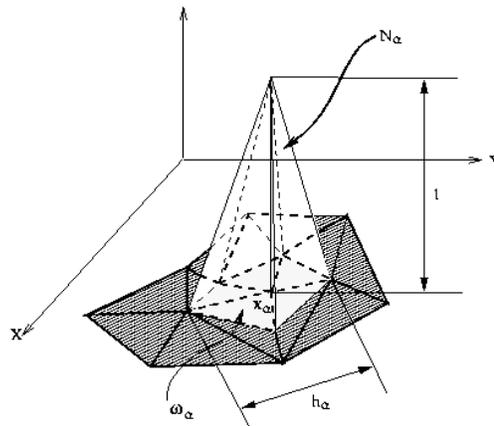


Fig 2.27 Função de forma global N_α definida na nuvem ω_α , elementos triangulares [45]

Adota-se o conjunto de funções de forma lineares ($p=1$) como a PU da discretização, $\varphi_\alpha = N_\alpha$. Observe-se que as nuvens podem ser definidas por polígonos não convexos e o parâmetro h ou h_α da malha define a dimensão da nuvem (um conjunto de elementos) e não a dimensão de um elemento da nuvem. Nesta formulação a imposição das condições de contorno essenciais pode ser feita explicitamente desde que os nós com graus de liberdade prescritos não sejam enriquecidos.

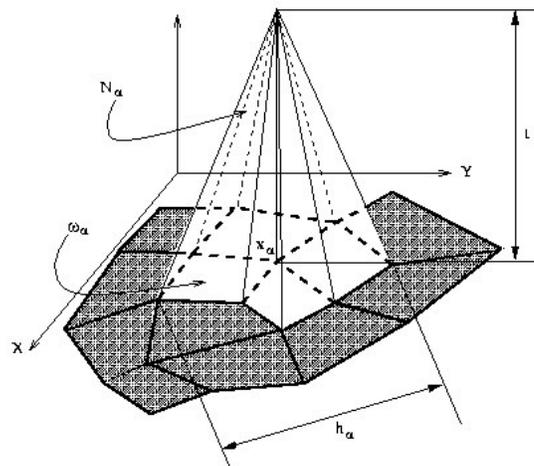


Fig 2.28 Função de forma global N_α definida na nuvem ω_α , elementos quadrilaterais [45]

A partir da PU escolhida pode-se obter uma discretização de ordem $p>1$ acrescentando termos (monômios) de maior ordem

$$\varphi_{\alpha_i} = N_{\alpha} L_i \tag{2.107}$$

onde L_i define um monômio. Observe-se que como as funções N_{α} definem uma PU

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha_i} = \sum_{\alpha} N_{\alpha} L_i = L_i \sum_{\alpha} N_{\alpha} = L_i \tag{2.108}$$

conclui-se então que é possível representar polinômios a partir de combinações lineares das funções φ_{α_i} . A escolha dos monômios (L_i) deve ser cuidadosa para evitar a formação de um conjunto de funções linearmente dependente. Para a PU de elementos finitos é possível definir constantes $a_{x\alpha}, a_{y\alpha} \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, \dots, n$ tais que

$$\sum_{\alpha} a_{x\alpha} N_{\alpha} = x \tag{2.109 a}$$

$$\sum_{\alpha} a_{y\alpha} N_{\alpha} = y \tag{2.109 b}$$

as expressões acima mostram que os polinômios x e y pertencem ao espaço gerado por $\{N_{\alpha}\}$. Não se deve então utilizar os monômios $\{1, x, y\}$ como termos de maior ordem. Observe-se que esta formulação permite construir uma discretização p-hierárquica com ordem $p \geq 1$ distinta em cada nuvem ω_{α} .

Para comparar-se esta forma hierárquica com a formulação tradicional do

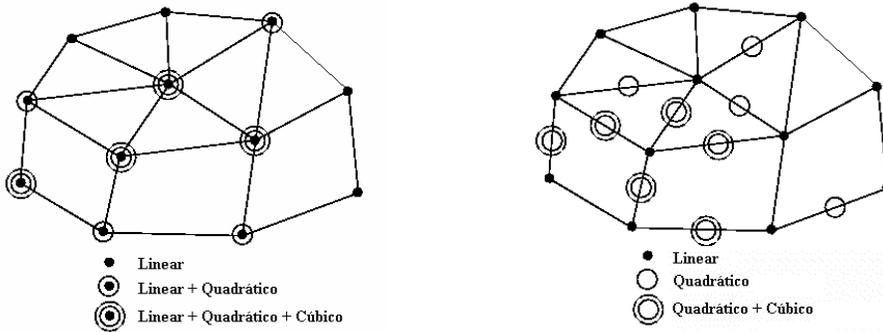


Fig 2.29 (a) Discretização p-hierárquica pelo MNhp e (b) Discretização p-hierárquica tradicional [45]

MEF hierárquico, considere-se a figura 2.29 (b) que apresenta uma discretização típica da formulação tradicional, com o uso de graus de liberdade generalizados, associados às arestas dos elementos. Na discretização do MNhp a adaptação p-hierárquica, mostrada na figura 2.29 (a) envolve apenas graus de liberdade associados aos nós do vértice da malha. Isto propicia uma estrutura de banda mais

compacta na formação das matrizes associadas ao sistema de equações. Esta característica também facilita a implementação da adaptação tipo h pois para qualquer ordem p de discretização as equações de restrição a serem impostas envolvem apenas os graus de liberdade associados aos nós vértices.

A figura 2.30 apresenta a interseção entre duas nuvens ω_α e ω_β . Observe-se que a cada nó \mathbf{x}_α e \mathbf{x}_β pode-se associar funções de aproximação de ordens p_α e p_β distintas de modo que estratégia de adaptação tipo h, p ou hp podem ser implementadas. Uma importante propriedade do MEFG, observada em testes numéricos [43], é a sua insensibilidade à distorção dos elementos. No MEF

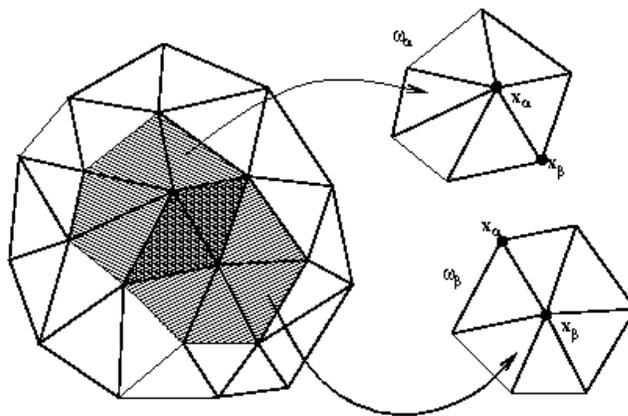


Fig 2.30 Nuvens ω_α e ω_β . Polinômios de ordem distinta p_α e p_β são associados às nuvens ω_α e ω_β [45]

tradicional os termos polinomiais são incorporados à discretização através de coordenadas locais do elemento. Quando o elemento é distorcido, os termos de ordem superior a um perdem a capacidade de representação polinomial, no caso dos elementos triangulares isoparamétricos. Para os elementos quadrilaterais a capacidade de representação polinomial quadrática ($p=2$) pode ser mantida se incluído o termo associado ao nono nó (x^2y^2). Estas observações são válidas para o caso de elementos de baixa ordem para a condição de distorção angular [52]. Na discretização pelo MEFG a capacidade de representação polinomial é mantida para qualquer ordem implementada [45,52]. Isto ocorre porque nos termos de maior ordem $N_\alpha L_i$, o monômio L_i é definido em coordenadas globais do sistema. A formulação também oferece a possibilidade de construir discretizações p – ortotrópicas, bastando construir aproximações de ordem distinta em cada coordenada espacial.

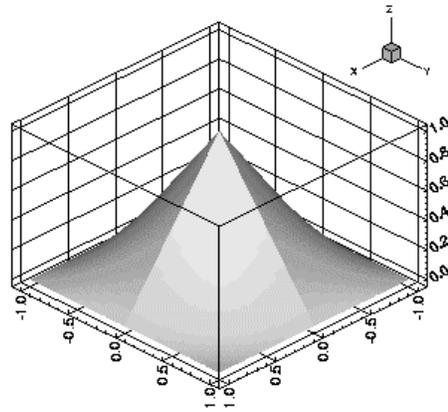


Fig 2.31 $N(x,y)$ bilinear em $\mathbf{x}=(0,0)$

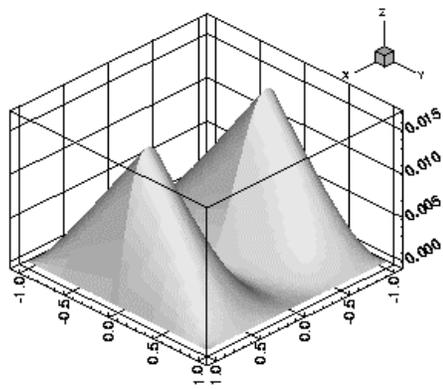


Fig 2.32 $N(x,y)$ na figura 2.6 multiplicada por x^2

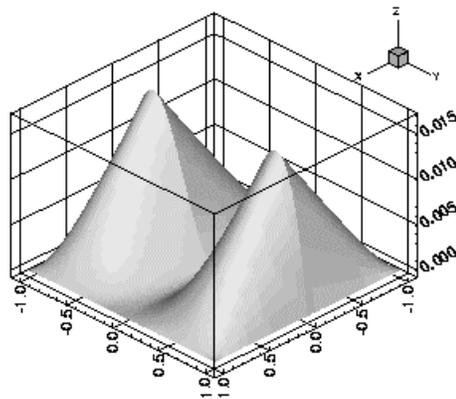


Fig 2.33 $N(x,y)$ na figura 2.6 multiplicada por y^2 [45]

A figura 2.31 apresenta a função bilinear $N(x,y)$ associada ao nó de localização $(0,0)$. As figuras 2.32 e 2.33 ilustram as funções obtidas pela multiplicação de $N(x,y)$, na figura 2.31, pelos monômios x^2 e y^2 respectivamente. Uma segunda

vantagem do método é de que, ao contrário das discretizações sem malha, o MGEF não apresenta dificuldades na representação de domínios compostos por mais de um tipo de material. Também, é possível incluir nos termos de maior ordem funções especiais para a discretização de problemas específicos como a análise de trincas e de pontos de concentração de tensões. Nos próximos capítulos esta possibilidade será explorada em detalhes.