Capítulo 1
Introdução

Nas últimas décadas, o Método de Elementos Finitos tem sido uma das principais ferramentas da mecânica computacional na representação dos mais diversos tipos de fenômenos físicos presentes na prática da engenharia. Uma das vantagens do método é a simplicidade na construção das funções de forma, base do processo de discretização das variáveis de estado, através de uma subdivisão do domínio de definição do problema em elementos formando uma malha de discretização. Esta estrutura inerente ao MEF é também uma das principais fontes de dificuldades no seu emprego. Problemas envolvendo a evolução temporal da configuração do domínio e da sua subdivisão em elementos resultam na necessidade logística de elaborar-se estratégias sofisticadas de geração e de acompanhamento da malha durante a análise numérica. A busca de uma estratégia automática para a geração e o acompanhamento temporal das malhas levou os pesquisadores ao desenvolvimento de técnicas adaptativas da discretização do domínio de definição do problema. No entanto, apesar do intenso esforço científico nestes temas até o presente, estes constituem-se ainda um problema em aberto na literatura. Não há ainda disponível uma estratégia simples, eficiente e que seja indistintamente aplicável a problemas bi e tridimensionais. Cabe destacar que os procedimentos de geração e reconstrução de malhas constituem-se em um importante percentual no esforço computacional total requerido na análise numérica de problemas de engenharia.

Como resposta a esta dificuldade foi desenvolvida na literatura a abordagem de aproximação que não utiliza a estrutura de malhas própria do método tradicional de elementos finitos. Métodos de partículas são exemplos deste tipo de abordagem. Aplicado inicialmente para a análise de problemas de astrofísica, o método SPH (*Smoothing Particle Hidrodynamics*) [1-8] foi um dos primeiros métodos de partículas propostos na literatura. Posteriormente, este método teve a sua aplicação extendida à mecânica dos sólidos em análises de problemas envolvendo o impacto e a fragmentação [1-7] de projetis em estruturas, e a sua combinação com o MEF tradicional [8]. Trata-se de um método de discretização construído a partir de uma aproximação por kernel para a variável de estado, definida na forma

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x-y,h)\cdot u(y)\cdot d\Omega_y \tag{1.1}$$

Onde $u^h(x)$ é a solução aproximada, $w(x-y,h)$ é a função kernel (função peso, ou ainda, função de suavização), h é uma medida do suporte desta função, $u(y)$ é a solução exata para a variável de estado e Ω o domínio do problema. Para a construção das funções de forma a identidade (1.1) é então discretizada empregando-se uma integração numérica e valores discretos para $u(y)$, definidos em nós irregularmente distribuídos no domínio, com $u_I \equiv u(x_I)$. Com este procedimento, constroem-se as funções de forma Φ_I do método, i.e, $u^h(x) = \sum \phi_I u_I$ [9] . A principal desvantagem deste método é não haver a garantia da propriedade de consistência para as funções de forma, ou ainda, não há a garantia de uma ordem polinomial mínima que seja representada com exatidão e, consequentemente, o método não satisfaz ao *patch test*. A despeito desta deficiência, o método apresenta uma boa convergência nas aplicações específicas nas quais ele tem sido explorado. Em uma outra variante do método, Liu e colaboradores [9] utilizaram uma aproximação por kernel semelhante à do SPH na equação (1.1), introduzindo uma função de correção $C(x,\bar{x})$ na forma

$$u^h(x) = \int_{\Omega} C(x,\bar{x})\cdot w(x-\bar{x},h)\cdot u(y)\cdot d\Omega_{\bar{x}} \tag{1.2}$$

Esta modificação torna a aproximação consistente [9] através da discretização da equação (1.2) usando os valores nodais associados a nós do domínio. Este é o fundamento do método RKPM (reproducing kernel particle method) que tem sido aplicado com sucesso na análise de problemas em diversas áreas de conhecimento como a mecânica dos sólidos [10, 11, 12], o eletromagnetismo[13] e o escoamento de fluidos [14].

Um outro caminho adotado para a construção de discretizações sem malha é o uso do procedimento de mínimos quadrados móveis (MQM), originalmente proposto por Lancaster e Saulkaskas [15], para o ajuste de curvas a partir dos valores da variável de estado associados a um conjunto de pontos (nós) irregularmente distribuídos no domínio. Nayroles *et al* [16] foram os primeiros a utilizar esta técnica, para a formulação de um método, denominado método dos elementos difusos. Belytschko *et al* empregaram esta mesma técnica no contexto de método sem malha [17], formulando o método de Galerkin sem elementos (MGSE). Suas principais características são: a) a construção das funções de forma a partir do método de mínimos quadrados móveis; b) a ausência da conectividade nodal pré-definida associada ao emprego de elementos e c) a integração numérica realizada com o emprego de uma estrutura de células ou de uma malha de fundo. A malha de fundo é uma malha típica de elementos finitos usada apenas durante o procedimento da integração numérica, não contribuindo na definição dos graus de liberdade de discretização. O MGSE é, sem dúvida, o método sem malha de emprego mais frequente na literatura, sendo aplicado em problemas de mecânica dos sólidos, escoamento de fluidos, problemas térmicos, eletro-magnetismo, entre outros[18-25]. Esta vasta gama de aplicações é uma consequência do enorme potencial que o método oferece para a análise de problemas com evolução temporal do domínio. As principais vantagens estão associadas à simplicidade na definição da discretização e a flexibilidade para modificações desta discretização, dispensando o uso de estratégias sofisticadas de geração de malha. As desvantagens do seu emprego são, principalmente, a demanda de significativo esforço computacional para a construção das funções de forma, a necessidade de recursos especiais para a imposição das condições de contorno e dificuldades para a execução da integração numérica. Estes aspectos do MGSE são apresentados e discutidos no Capítulo 2 deste trabalho.

Outros métodos sem malha têm sido propostos na literatura, com o objetivo de reduzir o esforço computacional, especialmente no aspecto da construção das funções de forma. O método de nuvens hp (MN-hp), proposto por Duarte e Oden [34-37], baseia-se também no método de MQM para a construção das funções de forma, mas empregando o conceito de enriquecimento de funções com a partição da unidade, permite construir um processo de discretização com o uso de funções de forma mais simples - as funções de Sheppard - reduzindo o esforço computacional requerido. Este método tem sido aplicado com sucesso em problemas de propagação de trincas , análise de estruturas e escoamento de fluidos, entre outros, o que levou os pesquisadores a aplicar o conceito do enriquecimento através da partição da unidade ao método de elementos finitos tradicional. Assim, Babuska e Melenk propuseram o método da partição da unidade de elementos finitos [40-41], e o método de elementos finitos generalizado [42]. Duarte e Oden apresentaram o método de elementos finitos baseado em nuvens H-p [45], e Belytschko [46-47] apresentou o método estendido (ou enriquecido) de elemento finitos, aplicando-o a análises de propagação de trincas. Todas estas propostas são, na realidade, o mesmo método em que o campo de deslocamentos do MEF tradicional é enriquecido com a incorporação de funções especiais - as funções de enriquecimento - empregando o conceito de enriquecimento da partição de unidade. Belytschiko empregou-a para incorporar, ao MEF tradicional, as duas principais características locais, inerentes ao problema de propagação de trincas: a descontinuidade no campo de deslocamentos e o comportameto assintótico deste campo na vizinhança das pontas de trinca. Esta estratégia permite aumentar a precisão da solução discreta em relação à interpolação lagrangeana tradicional por incorporar ao modelo informações disponíveis sobre a solução analítica do problema. Um outro efeito de grande aplicação prática é também obtido: através da incorporação das descontinuidades ao campo de deslocamentos de elementos finitos torna-se possível representar as faces de uma trinca de forma implícita. Assim, é dispensável o uso de representações explícitas nas quais as arestas dos elementos devem coincidir com as faces da trinca. Estas representações explícitas requerem a atualização do modelo de discretização, sempre que ocorrer a evolução temporal do domínio (propagação da trinca, por exemplo). Esta atualização requer o emprego de métodos sofisticados de reconstrução de malha, representando uma severa penalização quando da análise de problemas tridimensionais [54,55,56,57]. Aplicações possíveis para este métodos estão relacionados à análise da propagação de trincas no contexto da mecânica da fratura [46-47], escoamentos bifásicos na mecânica dos fluidos [70], representação de problemas de mudança de fase [69] , incorporação de efeitos localizados na modelagem da análise estrutural [71, 72], entre outros. Os detalhes deste método são tratados no Capítulo 4 dentro do contexto da mecânica dos sólidos, onde são apresentadas suas principais características, vantagens e dificuldades numéricas.

A motivação para este trabalho é a investigação de métodos numéricos empregados para a análise de problemas que apresentam evolução temporal do domínio. Exemplos típicos são os problemas envolvendo grandes deformações: impacto em estruturas, fragmentação de corpos, problemas de conformação mecânica, problemas envolvendo mudança de fase, propagação de trincas entre outros. Destes, a análise de propagação de trincas no contexto da mecânica da fratura linear elástica (MFLE) é um dos mais adequados problemas para o estudo dos métodos sem malha no sentido de que não envolve dificuldades associadas à: a) não linearidades (material ou geométrica), b) contato entre corpos, c) número excessivo de graus de liberdade, requerendo recurso a supercomputadores.

O objetivo adotado é o de identificar um método mais adequado para a análise da propagação de trincas em estruturas, no contexto da mecânica da fratura linear elástica, sendo esta adequação definida pelos seguintes critérios: a) emprego de uma aproximação baseada no método de Galerkin, de modo a explorar a experiência adquirida com o emprego do MEF tradicional na análise do problema. b) emprego de uma aproximação que evite o uso de procedimentos de reconstrução de malha, tendo em vista o uso futuro em análises tridimensionais para as quais ainda não existem geradores de malha suficientemente robustos [43]. c) a técnica deve permitir a definição de estimativas de erro de modo que se possa estabelecer uma estratégia de análise automática do problema a partir de uma discretização inicialmente definida (malha ou conjunto de nós).

Tendo em vista a procura da identificação de um método para a aplicação específica em problemas de mecânica da fratura torna-se importante, inicialmente, confrontar o desempenho de três classes de métodos de discretização: o MEF tradicional, os Métodos sem malha e o MEF Generalizado, diante de um problema que envolva a representação de características "localizadas". Diante deste objetivo, um problema unidimensional com esta característica é considerado e analisado empregando-se os três métodos. A comparação do desempenho destas três metodologias é apresentada no capítulo 3, em que se discutem as vantagens e desvantagens de cada estratégia e demonstra-se porque o MEFG é uma escolha natural para a análise numérica do problema da propagação de trincas, no contexto da MFLE. O detalhamento da teoria do MEF generalizado é apresentado no capítulo 4, visando a análise da propagação de trincas. No capítulo 5, são apresentados diversos testes numéricos que comprovam a aplicabilidade do método selecionado à classe de problemas proposta, visando qualificá-lo quanto à sua eficácia e robustez. E, finalmente no capítulo 6 apresentam-se as conclusões deste trabalho e algumas sugestões que representam possibilidades da sua extensão a trabalhos futuros neste campo.