



**Alvaro Gustavo Talavera Lopez**

**Síntese  $H_2$  de Controladores de Dimensão  
Finita para Sistemas Estáveis de Parâmetros  
Distribuídos**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Gilberto Oliveira Corrêa

Orientador: Prof. Carlos Silva Kubrusly

Rio de Janeiro  
Outubro de 2014

**Alvaro Gustavo Talavera Lopez**

**Síntese  $H_2$  de Controladores de Dimensão  
Finita para Sistemas Estáveis de Parâmetros  
Distribuídos**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Gilberto Oliveira Corrêa**

Orientador

Coordenação de Sistemas e Controle — LNCC

**Prof. Carlos Silva Kubrusly**

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

**Prof. Alexandre Loureiro Madureira**

Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional —  
LNCC

**Prof. Paulo César Marques Vieira**

Coordenação de Sistemas e Controle — LNCC

**Prof. Ricardo Tanscheit**

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

**Prof. Marco Antonio Meggiolaro**

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de Outubro de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Alvaro Gustavo Talavera Lopez

Graduou-se em Engenharia Eletrônica na Universidad Católica Santa Maria (Arequipa, Peru). Trabalhou na empresa SIMA-SAE Serviço de Armas e Eletrônica (Callao, Peru) em projetos referidos a sistemas de armas para la Marina de Guerra del Peru. Obteve o título de Mestre em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2010, tendo como área de concentração: Métodos de Apoio à Decisão e como linha de pesquisa: Inteligência Computacional aplicada a controle na produção de Petróleo. Desenvolveu junto com os seus orientadores e centros de pesquisa diversos projetos para a indústria de Petróleo. Atualmente pesquisa temas sobre Controle de Sistemas de Parâmetros Distribuídos e Controle Robusto.

#### Ficha Catalográfica

Talavera Lopez, Alvaro Gustavo

Síntese  $H_2$  de Controladores de Dimensão Finita para Sistemas Estáveis de Parâmetros Distribuídos / Alvaro Gustavo Talavera Lopez; orientadores: Gilberto Oliveira Corrêa, Carlos Silva Kubrusly . — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2014.

v., 129 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. Controle ótimo  $H_2$ . 3. Controle em realimentação. 4. Estabilidade robusta. 5. Sistemas de parâmetros distribuídos. I. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. II. Título.

CDD: 621.3

A ti keisy, mi compañera, por estar conmigo en todo momento.

A mis Abuelos Jacinto Lopez Pajares y Luz Magdalena de Almeida Marquez de Lopez, por su incondicional amor, invalorable consejos y una vida ejemplar. Los amo mucho abuelos. (*in memoriam*)

A mi estimado amigo Oscar Penny Cabrera, muchas gracias por tu amistad, grande ayuda y ser siempre una motivación para mi. Un fuerte abrazo grande amigo. (*in memoriam*)

## Agradecimentos

A Deus por sua ajuda infinita.

A meu orientador Professor Gilberto Corrêa, pela sua paciência, valiosos conselhos e sua grande amizade que vai muito além desse trabalho de tese. Seus elevados conhecimentos em Teoria de Controle e a maneira objetiva e clara em abordar problemas complexos foram essenciais para o presente trabalho de tese e principalmente na minha formação.

Ao professor Carlos Kubrusly, pela sua valiosa amizade e por viabilizar este projeto, suas sempre agradáveis conversações, conselhos e matérias me ajudaram a escolha do presente trabalho de tese.

A minha maravilhosa esposa Keisy Lopez Molina, minha grande companheira, por estar comigo em tudo momento, sua motivação, constante apoio e a felicidade que acrescenta em minha vida.

A minha querida mãe Margarita Lopez de Almeida, por ser a principal motivadora desse trabalho e um grande apoio na minha vida. Meu pai Gustavo Talavera Prado pela sua motivação. A meu irmão Ivan Talavera Lopez e minha cunhada Lourdes Villaviciencio de Talavera, pelo seu grande apoio e carinho e seus maravilhosos e belos filhos, meus sobrinhos Rodrigo Talavera e Alejandro Talavera.

Aos meus amigos e colegas da PUC–Rio, pelas longas conversas e amizade que conservarei sempre, Leonardo Forero, Harold Mello, Marco Silva e Juan Lazo Lazo.

Ao CNPq e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Talavera Lopez, Alvaro Gustavo; Oliveira Corrêa, Gilberto (Orientador); Silva Kubrusly, Carlos (Orientador). **Síntese  $H_2$  de Controladores de Dimensão Finita para Sistemas Estáveis de Parâmetros Distribuídos**. Rio de Janeiro, 2014. 129p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Objetiva-se, nesse trabalho, formular e testar numericamente uma perspectiva computacional, baseada em elementos de controle robusto e índices de desempenho  $H_2$ , para a síntese de controladores de dimensão finita (DF) para sistemas lineares de dimensão infinita (DI) correspondentes a certas equações de evolução parabólicas e, especialmente, a uma versão simplificada da equação do calor. A abordagem aqui utilizada é a de usar modelos aproximantes de DF (modelos “nominais”) e limitantes superiores nas normas  $H_\infty$  dos erros de aproximação correspondentes nas funções de transferência de DI em questão, de modo que o procedimento de síntese baseie-se apenas em funções de transferência racionais e os controladores resultantes sejam de DF. Mais especificamente, uma classe de controladores que asseguram a estabilidade do sistema em malha fechada envolvendo o sistema de DI em questão é definida tomando-se as soluções ótimas de problemas  $H_2/H_\infty$  nos quais o funcional de custo ( $H_2$ ) nominal é minimizado sobre os controladores nominalmente estabilizantes, sob uma restrição ( $H_\infty$ ) de margem de estabilidade mínima definida por um parâmetro de projeto escalar denotado por  $\mu$ . A obtenção de um controlador é então feita pela escolha do valor de  $\mu$  de modo a minimizar um limitante superior (calculado apenas com base em funções racionais) sobre o funcional de custo calculado no sistema de DI original. Esse procedimento é ilustrado por exemplos numéricos envolvendo a versão simplificada da equação do calor.

## Palavras-chave

Controle ótimo  $H_2$  Controle em realimentação Estabilidade robusta Sistemas de parâmetros distribuídos

## Abstract

Talavera Lopez, Alvaro Gustavo; Oliveira Corrêa, Gilberto (Advisor); Silva Kubrusly, Carlos (Advisor).  **$H_2$  Synthesis of Finite-dimensional Controllers for Stable, Distributed-parameter Systems**. Rio de Janeiro, 2014. 129p. PhD Thesis — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A computational perspective based on robust control tools is presented for the  $H_2$  synthesis of finite-dimensional controllers for linear, stable, distributed-parameter systems corresponding to certain evolution equations. The approach pursued here relies on finite-dimensional approximations and error bounds on the  $H_\infty$  norms of the corresponding errors on transfer functions so that the resulting synthesis procedure solely depends on rational transfer functions, thereby yielding finite-dimensional controllers. More specifically, a class of stabilizing controllers for a given infinite-dimensional system is defined taking optimal solutions of  $H_2/H_\infty$  problems - i.e., a nominal  $H_2$  cost is minimized over controllers which satisfy a nominal stability margin defined by a scalar parameter  $\mu$ . A controller is then obtained by choosing  $\mu$  in such a way as to minimize an upper bound on the value taken by the cost functional on the original infinite-dimensional system. This procedure is illustrated by simple numerical examples involving the (simplified) heat equation in one dimension.

## Keywords

$H_2$ -optimal control Feedback control Robust stabilization Distributed parameter systems

# Sumário

1	Introdução	16
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivos e pontos principais desse trabalho	20
1.3	Organização do texto	22
2	Sistema de Controle: Equações de Evolução Parabólicas e Controladores de Dimensão Finita	23
2.1	Equação parabólica	23
2.2	Equação de evolução parabólica: Semigrupos	25
2.3	Sistema de Controle	32
3	Estabilidade em Malha Fechada	35
3.1	Descrição do sistema de controle no domínio da frequência	35
3.2	Estabilidade em malha fechada	38
3.3	Controladores de Dimensão Finita e Estabilidade em Malha Fechada	39
4	Avaliação de Desempenho de Controladores	44
4.1	Índices de desempenho e funcional de custo	44
4.2	Limitantes superiores para os índices de desempenho	49
4.3	Procedimento de síntese de controladores	56
4.4	Calculo dos Limitantes	62
5	Síntese de controladores	65
5.1	Procedimento de síntese	65
5.2	Problema $H_2$ irrestrito	68
5.3	Problema $H_2$ com restrição $H_\infty$	74
6	Resultados	85
7	Considerações finais	116
	Referências Bibliográficas	118
A	Apêndice	126
A.1	Definições gerais	126
A.2	Condução de calor numa barra	128



## Lista de figuras

2.1	Sistema de controle em malha fechada.	32
6.1	Configuração espacial de controle	86
6.2	Resposta em frequência do controlador $H_2$ e $H_2/H_\infty$	91
6.3	Desempenho de cada $\mu$ por meio dos critérios de avaliação - (Exemplo 1)	92
6.4	Resposta em frequência do controlador $Q_{H_2}$ , $Q_{rob}$ e $Q_{dual}$	92
6.5	Resposta da variável controlada $m_{\mathcal{S}_1}$ .	103
6.6	Resposta da variável controlada $m_{\mathcal{S}_2}$ .	103
6.7	Resposta da variável controlada $m_{\mathcal{S}_3}$ .	103
6.8	Desempenho de cada controlador na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 8)	109
6.9	Configuração espacial de controle em uma placa	111
A.1	Barra colocada no eixo $x$	128

## Lista de tabelas

6.1	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 1)	90
6.2	Comparação dos resultados Ex. 2 - Ex. 1.	93
6.3	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 2)	94
6.4	Comparação dos resultados Ex. 3 - Ex. 1	95
6.5	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 3)	96
6.6	Comparação dos resultados Ex. 4 - Ex. 2.	96
6.7	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 4)	97
6.8	Desempenho dos controladores (Ex. 3 e Ex.4).	98
6.9	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 3 com $m_S = 7$ ).	100
6.10	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 4 com $m_S = 7$ )	100
6.11	Comparação dos resultados Ex. 4 - Ex. 2.	101
6.12	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 6)	102
6.13	Desempenho relativo à localização do Sensor	104
6.14	Desempenho relativo à localização dos Atuadores	105
6.15	Desempenho de $Q_{rob}(\mu_*)$ Ex. 3 - Ex. 8	106
6.16	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ para $\beta_1^u$	107
6.17	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ para $\beta_2^u$	108
6.18	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ para $\beta_3^u$	108
6.19	Comparação do desempenho para cada atuador e sensor	110
6.20	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 9)	110
6.21	Desempenho dos controladores	112
6.22	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 10 - $N = 6$ )	114
6.23	Desempenho dos Controladores na classe $S_Q(\mu)$ - (Exemplo 10 - $N = 7$ )	115

## Sumário das notações

- $R_p = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é real-racional e própria}\}$   
 $RH_2 = \left\{f \in R_p : f \text{ é analítica e limitada em } Re(s) > 0 \text{ e } \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |f(jw)|^2 dw < \infty\right\}$   
 $RH_{\infty} = \{f \in R_p : f \text{ é analítica e limitada em } Re(s) > 0\}$   
 $RL_2 = \left\{f \in R_p : f \text{ é limitado em } j\mathbb{R} \text{ e } \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |f(jw)|^2 dw < \infty\right\}$   
 $RL_{\infty} = \{f \in R_p : f \text{ é limitado em } j\mathbb{R}\}$   
 $\|G\|_2^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} tr[G^*(jw)G(jw)] dw, \text{ onde } G \in RL_2^{m \times p}.$   
 $\|G\|_{\infty} :$  norma  $L_{\infty}$  de  $G \in RL_{\infty}$ .  
 $S^{m \times p} :$  conjunto de matrizes  $m \times p$  com elementos no conjunto  $S$ ;  
 $S^q \equiv S^{q \times 1}.$   
 $M(S) :$  conjunto de matrizes com elementos no conjunto  $S$ .  
 $\{M\}_{ij}$  e  $M^T :$  elemento  $(ij)$  da matriz  $M$  e a transposta da matriz  $M$ .  
 $tr(A) :$  traço de  $A \in \mathbb{C}^{m \times p}$ .  
 $\|A\|_S$  e  $\|A\|_F :$  norma espectral e norma de Frobenius de  $A \in \mathbb{C}^{m \times p}$ .  
 $F^{\sim}(s) = F^T(-s)$  onde  $F \in RL_2$   
 $\{\cdot\}_+ :$  projeção ortogonal de  $L_2(j\mathbb{R})$  em  $H_2$ .  
 $\{\cdot\}_- :$  projeção ortogonal de  $L_2(j\mathbb{R})$  no complemento ortogonal de  $H_2$ .  
 $diag(\{M_k\}) :$  matriz bloco-diagonal onde  $M_k$  é o  $k$ -ésimo bloco.  
 $rvec(F) :$  matriz coluna  $\{f_{11} \dots f_{1m} \dots f_{p1} \dots f_{pm}\}^T$  onde  $\{f_{ij}\}$  são os elementos da matriz  $F$  ( $p \times m$ ).  
 $\triangleq :$  igualdade por definição.  
 $\check{h} :$  transformada de Laplace de uma função  $h$ .  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle :$   $\langle x, y \rangle$ , produto interno de  $x$  e  $y$ .  
 $\mathbb{C}, \mathbb{R}$  e  $\mathbb{N} :$  conjuntos dos números complexos, reais e naturais.  
 $\mathbb{C}_{\beta}^+ :$  todos os números complexos com parte real maior que  $\beta$ .  
 $Z :$  espaço de Hilbert separável.  
 $C[0, 1] =$  classe de funções contínuas do intervalo  $[0, 1]$  para  $\mathbb{C}$ .  
 $C([a, b]; X) ;$  classe de funções contínuas do intervalo  $[0, 1]$  para  $X$ .

- $C^1([a, b]; Z)$  : classe de funções contínuas e diferenciáveis do intervalo  $[0, 1]$  para  $Z$ .
- $D(T)$  ; domínio de  $T$ .
- $A^*$  : operador adjunto de  $A$ .
- $L(\Omega; Z)$  : classe de funções Lebesgue mensuráveis.
- $L_2(a; b)$  : classe de funções Lebesgue mensuráveis com  $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ .
- $L_2(\Omega; Z)$  : classe de funções Lebesgue  $Z$ -mensuráveis com  $\int_{\Omega} |f(t)|^2 dt < \infty$ .
- $H_{\infty}$  : espaço de Hardy de funções holomórficas e limitadas em  $\mathbb{C}_0^+$  com valores em  $\mathbb{C}$ .
- $H_2$  : espaço de Hardy de funções holomórficas em  $\mathbb{C}_0^+$  com valores em  $\mathbb{C}$  e de quadrado integráveis.
- $DI$  : dimensão infinita.
- $DF$  : dimensão finita.
- $u$  : variável de controle  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
- $d$  : variável de perturbação  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_d}$ .
- $\mathfrak{d}$  : variável da saída controlada  $\mathfrak{d} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_{\mathfrak{d}}}$ .
- $y$  : variável da saída de medida  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ .
- $v$  : variável de ruído na realimentação da variável de medida  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ .
- $v_u$  : variável de ruído na saída do controlador  $v_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_{v_u}}$
- $r$  : variável do sinal de referência  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_r}$
- $\alpha$  : sinais  $y, \mathfrak{d}$ .
- $\nu$  : sinais  $u, d$ .
- $\xi$  : sinais  $v, v_u, d$ .
- $P_{\alpha\nu}$  : funções de transferência do sistema de DI.
- $\hat{P}_{\alpha\nu}$  : funções de transferência racionais (aproximadas).
- $\hat{P}_{\alpha\nu}^a$  : funções de transferência racionais (aproximação ampliada).
- $(P, [K; K_r])$  : sistema de controle em malha fechada de DI.
- $F_{\alpha\nu}(K, K_r)$  = funções de transferência estáveis do sistema de DI em malha fechada.

- $\Phi_\xi$  = densidade espectral de potencia  $\Phi_\xi \in M(s)$   
 tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [\Phi_\xi^*(jw) \Phi_\xi(jw)] dw < \infty$ .
- $T_K = (I - K P_{yu})^{-1}$ .
- $\hat{T}_K = (I - K \hat{P}_{yu})^{-1}$ .
- $\mathcal{P}(K) = T_K K$  função de transferência estável em malha fechada de DI.
- $\hat{\mathcal{P}}(K) = \hat{T}_K K$  função de transferência estável em malha fechada aproximada de DF.
- $\mathcal{P}_r(K, K_r) = T_K K_r$  função de transferência estável em malha fechada de DI.
- $\hat{\mathcal{P}}_r(K, K_r) = \hat{T}_K K_r$  função de transferência estável em malha fechada aproximada de DF.
- $K = \mathcal{K}(Q) = (I + Q \hat{P}_{yu})^{-1} Q$  função de transferência do controlador de DF de  $y$  para  $u$ .
- $K_r = \mathcal{K}(Q, Q_r) = (I + Q \hat{P}_{yu})^{-1} Q_r$  função de transferência do controlador de DF de  $r$  para  $u$ .
- $[K; K_r]$  = controlador de DF em função de  $Q$  e  $Q_r$
- $E_{\alpha\nu} = P_{\alpha\nu} - \hat{P}_{\alpha\nu}$  erro de aproximação entre  $P_{\alpha\nu}$  e  $\hat{P}_{\alpha\nu}$ .
- $\gamma_{\alpha\nu}$  : limitante superior de  $E_{\alpha\nu}$  na norma  $H_\infty$
- $\mathcal{T}_J(Q)$  : função de transferência em malha fechada de  $(d, v)$  para  $\mathfrak{s}$  para o sistema  $(P; K(Q))$ .
- $\mathcal{T}_{J_r}(Q, Q_r)$  = função de transferência em malha fechada de  $r$  para  $\mathfrak{s}$  para o sistema  $(P; K(Q), K_r(Q, Q_r))$ .
- $J_{cl}^Q(Q) = \|\mathcal{T}_J(Q) \Phi_{ev}\|_2^2$  função de custo com norma quadrática de  $\mathcal{T}_J(Q)$ .
- $J_r^Q(Q, Q_r) = \|\mathcal{T}_{J_r}(Q, Q_r) \Phi_r\|_2^2$  função de custo com norma quadrática de  $\mathcal{T}_{J_r}(Q, Q_r)$ .
- $J_{cl}(Q, Q_r) = J_{cl}^Q(Q) + J_r^Q(Q, Q_r)$
- $\Phi_{ev}$  : fator da densidade espectral de potencia referente a  $d$  e  $v$ .
- $\Phi_r$  : fator da densidade espectral de potencia referente a  $r$ .
- $\mathcal{T}_J^0(Q)$  : funções de transferência em malha fechada de  $(d, v)$  para  $\mathfrak{s}$  para o sistema  $(\hat{P}; K(Q))$ .

$\mathcal{T}_{J_r}^0(Q, Q_r)$  : funções de transferência em malha fechada de  $r$  para  $\mathfrak{d}$  para o sistema  $(\hat{P}; K(Q), K(Q, Q_r))$ .

$$\Delta(E, Q) = \mathcal{T}_J(Q) - \mathcal{T}_J^0(Q).$$

$$\Delta(E, Q, Q_r) = \mathcal{T}_{J_r}(Q, Q_r) - \mathcal{T}_r^0(Q_r).$$

$\hat{\eta}_{er}(Q)$  : limitante superior de  $\|\Delta(E, Q)\Phi_{ev}\|_2$ .

$\hat{\eta}_{ref}(Q)$  : limitante superior de  $\|\Delta(E, Q, Q_r)\Phi_r\|_2$ .

$\hat{\eta}_{av}$  : limitante superior de  $\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 + \hat{\eta}_{er}(Q)$ .

$\hat{\eta}_{av}^r$  : limitante superior de  $\|\mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r)\Phi_r\|_2 + \hat{\eta}_{ref}(Q, Q_r)$ .

$S_Q(\gamma^{-1})$  : classe de controladores  $Q \in RH_\infty^{m \times p} : \|W_R^{-1}QW_L^{-1}\|_{H_\infty} \leq \gamma^{-1}$ .

$N$  : dimensão da aproximação nominal.

$N_a$  : dimensão da aproximação ampliada.

$$J_{cl}^0(Q) = \|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2^2.$$

$$J_{J_r}^0(Q, Q_r) = \|\mathcal{T}_{J_r}^0(Q, Q_r)\Phi_r\|_2^2.$$

$$\frac{1}{\|Q_{H_2}\|} = \text{margem de estabilidade do sistema em malha fechada}$$

$(\hat{P}, K(Q_{H_2}))$  (sistema nominal com controlador ótimo  $H_2$ ).

$\mu$  : termo de regulação do margem de estabilidade, onde  $\mu \leq \gamma_{yu}^{-1}$ .

$S_Q(\mu)$  : classe de vários valores de  $\mu$ .

$Q_{H_2}$  : controlador ótimo para o problema  $H_2$  nominal irrestrito.

$Q_{rob}(\mu)$  : coleção de controladores resultantes de um problema  $H_2/H_\infty$ .

$Q_{rob}(\mu_*)$  : controlador ótimo resultante de um problema  $H_2/H_\infty$ .

$J_{cl}^a(Q(\mu))$  : medida de desempenho do modelo nominal (ampliado) para cada  $\mu$ .

$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  : medida de desempenho do limitante superior para cada valor de  $\mu$ .

*"Se vi mais longe ... é porque me apoiei nos ombros de gigantes."*

**Isaac Newton**, *Carta para Robert Hooke (15 de Fevereiro de 1676)*.

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Motivação

Equações envolvendo derivadas parciais relativas a coordenadas espaciais e à variável tempo são frequentemente utilizadas na descrição matemática de sistemas físicos. Sistemas deste tipo são ditos de parâmetros distribuídos ou de dimensão infinita (DI) em oposição aos sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias (EDOs) em espaços de dimensão finita os quais são denominados sistemas de parâmetros concentrados (*lumped systems*) ou de dimensão finita (DF) (cf. (Brockett, 1970)) e comumente mais estudados.

Problemas de controle envolvendo sistemas de dimensão infinita deram origem a uma vasta literatura produzida ao longo de várias décadas (cf. ((Padhi, 2009)) e o livro-texto ((Curtain e Zwartz, 1995))). Para os propósitos desse trabalho, pode-se distinguir nessa literatura referências que consideram problemas de controle em malha aberta (nos quais a “variável de decisão” é um sinal de controle em um dado intervalo de tempo), problemas associados à formulação LQR (“Linear Quadratic Regulator”) (nos quais a solução para o problema em malha aberta é caracterizada por meio de equações de Ricatti) e problemas de controle em malha fechada (nos quais a “variável de decisão” é um controlador em realimentação) - como, esse trabalho diz respeito apenas a alguns aspectos dos problemas de controle em malha fechada, apenas algumas referências seminais ou fundamentais serão citadas em conexão com os outros tipos de problemas.

No primeiro caso, pode-se citar os trabalhos seminais de ((Butkovsky, 1969)) e ((Lions, 1969)) (ver também o artigo expositório de ((Zuazua, 2002)) e a monografia de ((Troltzsch, 2010))). No segundo pode-se destacar as referências ((Curtain e Pritchard, 1978)) e ((Ahmed e Teo, 1981)) - (ver também o Capítulo 6 de ((Curtain e Zwartz, 1995))).

Questões relativas ao controle em malha fechada de sistemas de DI, especialmente no que diz respeito ao problema de estabilização, foram tratados em (Chen e Desoer, 1982), (Schumacher, 1983), (Curtain e Glover, 1986) e (Ito, 1990). Em (Schumacher, 1983) foram utilizados métodos baseados em equações de estado para sistemas de DI para demonstrar a existência de controladores de DF capazes de estabilizar em malha fechada sistemas de parâmetros distribuídos. Em (Chen e Desoer, 1982) foram



apresentadas condições necessárias e suficientes, envolvendo funções de transferência, para a estabilização robusta de uma ampla classe de sistemas de DI (a classe de funções de transferência correspondente foi introduzida em (Callier e Desoer 1978)). Essas condições foram utilizadas em (Curtain e Glover, 1986) para caracterizar controladores de dimensão finita que asseguram a estabilização robusta em malha fechada de um dado sistema na classe considerada em (Chen e Desoer, 1982) - tais controladores são obtidos a partir de aproximações de dimensão finita para o sistema de que se deseja controlar. Essa perspectiva para a obtenção de controladores é aplicada à estabilização de estruturas flexíveis em (Bontsema et al. 1988). Em (Ito, 1990) soluções aproximadas para o problema LQR e seu dual são utilizadas para gerar controladores de DF que assegurem a estabilidade em malha fechada para um dado sistema de DI.

Problemas de controle  $H_\infty$  para sistemas de DI sob a ação de controladores de DF foram também considerados sob a perspectiva de utilizar aproximações de DF para o sistema original em (Curtain, 1990), (Özgbay e Tannenbaum, 1991), (Rodriguez, 1995), (Curtain e Zhou, 1996), (Xiao e Basar, 1999), (Cifdaloz et al. 2007) e (Cifdaloz et al. 2008). Esses trabalhos consideram índices de desempenho  $H_\infty$  para avaliar o efeito de sinais de perturbação no sistema em malha fechada e visam à obtenção de controladores de DF que assegurem que um valor máximo prescrito para tal efeito seja satisfeito. Essencialmente, os resultados obtidos asseguram que para aproximações de DF “suficientemente precisas” do sistema de DI original os controladores obtidos (por meio das soluções dos correspondentes problemas aproximantes) atingem o objetivo desejado.

Outros estudos para os sistemas de dimensão infinita dizem respeito ao problema de otimização da localização de sensores e atuadores. Uma revisão abrangente dos primeiros trabalhos nesse tópico, considerando diferentes formulações relativas a problemas de identificação de sistemas de DI, estimação de estado e controle ótimo, pode ser encontrada em (Kubrusly e Malebranche, 1985); em (Peng et al. 2005) (Kumar e Narayanan, 2007) são utilizados algoritmos heurísticos (como algoritmos genéticos) na localização ótima de sensores e atuadores no controle de vibrações; métodos de pontos interiores na localização de atuadores foram utilizados em (Demetriou e Grigoriadis, 2004); em (Fahroo e Demetriou, 2000) algoritmos baseados em gradiente são utilizados na localização de sensores e atuadores para problemas de regulação de ruído e seguimento de um sinal de referência. Em (Morris e Demetriou, 2010), (Morris, 2011) e (Kasinathan e Morris, 2013) são formulados problemas de

localização de atuadores tomando-se os valores ótimos de um problema LQR (nas duas primeiras referências) ou de um problema  $H_\infty$  (na terceira referência), em função da localização dos atuadores, como funcional de custo para a escolha da localização ótima.

Novas motivações foram apresentadas para o projeto e implementação de controle de sistemas com parâmetros distribuídos, originados tanto em avanços na tecnologia (como por exemplo na tecnologia eletromecânica *Micro-electro-mechanical systems* MEMS e *Nano-electro-mechanical Systems* NEMS que oferecem micro ou nano sensores e atuadores) quanto em avanços em computação de alto desempenho (Padhi, 2009). Em (Heirari et al. 2010) estuda-se o comportamento da equação de calor em escala nanométrica, propondo-se uma nova abordagem de controlabilidade; em (Vires et al. 2007) apresenta-se o problema de controle para desinfecção de comida e água por meio de raios ultravioletas; (Krstic et al. 2007) abordam o problema de estabilização da equação linear de Schrodinger; em (Hasan et al. 2010) apresenta-se um problema de controle em dimensão infinita relativo a produção de petróleo, tendo em vista que a equação de fluxo é uma equação de derivadas parciais (EDP). Em (Borggaard et al. 2009) utiliza-se o modelo de fluxo de Navier-Stokes, para formular o problema de controle e otimização da temperatura em uma habitação para assim não consumir muita energia. Em (Robu et al. 2009) apresenta-se o problema de redução de vibrações em sistemas de estruturas fluidos-flexíveis.

Frequentemente, o tratamento dado ao problema de controle de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) de dimensão infinita LIT-DI é projetar um controlador de dimensão finita para atuar nos sistemas LIT-DI em questão (embora existam estudos de controladores de dimensão infinita com fins teóricos, como ((Curtain e Zwartz, 1995) seção 5.3), (Orner, 1971), (Balas, 1980), entre outros). Ao projetar um controlador de dimensão finita, duas abordagens podem ser seguidas (Cifdaloz et al. 2007):

(1) Abordagem projeto/aproximação, na qual um controlador é projetado utilizando técnicas de dimensão infinita. Se o controlador resultante é de dimensão infinita então uma aproximação de dimensão finita é obtida para implementação. (cf., (Curtain e Zwartz, 1995) seção 5.3 - ver referências) e (Orner, 1971)

(2) Abordagem aproximação/projeto, na qual o sistema a ser controlado (“planta”) é primeiro aproximado por um modelo de dimensão finita, e então o controlador é projetado com base nesse modelo (esta última abordagem é amplamente utilizada) (ver, por exemplo, (Gu et al. 1989), (Rodriguez, 1995)).

Em ambos casos é necessário analisar o comportamento do sistema em malha fechada definido pelo modelo de DI original e o controlador de DF obtido, especialmente com respeito a estabilidade (em malha fechada) do mesmo. Ademais, surgem, naturalmente, outras questões associadas à convergência da aproximação de sistemas de DI como, por exemplo, quais métodos de aproximação podem ser usadas para projetar controladores que apresentam desempenho satisfatório quando implementados no sistema de DI e quão alta será necessária a ordem de aproximação. (Morris, 1994) menciona o fato da convergência dos semigrupos aproximantes em intervalos limitados não ser, em geral, suficiente para assegurar uma resposta afirmativa a estas perguntas (cf., (Burns et al. 1985)). Sendo assim, um modelo aproximante que dá bons resultados quando usado para a simulação ou identificação pode ser inadequado para o projeto do controlador. Em relação à formulação LQR, vários trabalhos se concentraram em responder perguntas desse tipo, particularmente no que diz respeito ao estudo da convergência de soluções para uma sequência de equações de Riccati. Em (Gibson, 1983) foi demonstrada a convergência uniforme de soluções assumindo hipóteses de estabilizabilidade uniforme e convergência forte dos semigrupos adjuntos; em (Bank e Kunisch, 1984) foi provada a estabilizabilidade uniforme para equações parabólicas simétricas com base na qual foi demonstrada a convergência das soluções da sequência de equações de Riccati. Em (DeSantis et al. 1993) é apresentada convergência uniforme da aproximação do operador de Riccati na norma Hilbert-Schmidt, sob condições relativamente restritivas nas aproximações utilizadas. (Morris, 2011) estende o trabalho de (Gibson, 1983) mostrando que a condição de que operadores de entrada e saída sejam compactos é suficiente para obter convergência uniforme na aproximação do operador de Riccati.

Em (Morris, 1994) considera-se o problema da estabilidade em malha fechada e convergência das funções de transferência em malha fechada para controladores obtidos por meio de problemas de controle  $H_\infty$ , mostrando que a *graph topology* (Vidyasagar, 1984) é apropriada no estudo de convergência de aproximações utilizadas no projeto do controlador.

## 1.2

### Objetivos e pontos principais desse trabalho

Objetiva-se, neste trabalho, investigar problemas relacionados ao controle por realimentação (“feedback”) de sistemas de dimensão infinita (DI) descritos por equações de evolução parabólicas (EEPs), especialmente pela chamada “equação do calor” simplificada, por meio de controladores de dimensão finita (DF).

Mais especificamente, objetiva-se aqui formular e testar numericamente uma perspectiva computacional, baseada em elementos de controle robusto e índices de desempenho definidos por meio de normas  $H_2$ , para o projeto de controladores (em “feedback”) de dimensão finita para sistemas de DI exponencialmente estáveis correspondentes a EEDPs (equações de evolução de derivadas parciais parabólicas) e, especialmente, à equação do calor simplificada. Note-se que índices de desempenho baseadas em normas  $H_2$  são amplamente utilizados e especialmente adequados ao caso de sinais estocásticos (cf., (Dullerud e Paganini, 2000), pg. 190-192).

De modo similar os trabalhos mencionados acima, a abordagem aqui utilizada para a obtenção de controladores de DF para tais sistemas baseia-se na utilização de “aproximações” de DF para um dado sistema de DI e na formulação de um problema de controle ótimo para o sistema de DF correspondente (dito sistema ou modelo nominal) cuja solução caracteriza um controlador de DF.

Um aspecto fundamental dessa abordagem é a necessidade de assegurar que o sistema em malha fechada definido pelo controlador (de DF) assim obtido e o sistema original (de DI) seja estável. Este requisito pode ser satisfeito utilizando-se resultados fundamentais da teoria de controle robusto. Nesse sentido, o problema de controle ótimo no qual se baseia o projeto do controlador deve não só incorporar a restrição usual de estabilidade em malha fechada do sistema nominal como também uma restrição de estabilidade robusta que assegure a estabilidade em malha fechada de qualquer sistema em uma classe na qual está incluído o sistema (de DI) original. Na formulação específica aqui utilizada para EEPs correspondentes a sistemas estáveis em malha aberta, a estabilidade nominal em malha fechada (para o sistema aproximante) será assegurada pela chamada parametrização  $Q$  dos controladores (nominalmente) estabilizantes. Adicionalmente uma restrição que assegure a desejada estabilidade robusta será incluída no problema de otimização formulado.

Uma vez definida uma classe de controladores de DF por meio da parametrização  $Q$  e de uma restrição de estabilidade robusta, serão

introduzidos índices de desempenho baseados em normas quadráticas para o sistema em malha fechada constituído pelo sistema (de DI) original e um controlador na classe mencionada. Esses índices de desempenho dizem respeito à atenuação do efeito de sinais de “perturbação” e de “ruído de medida” e ao rastreamento aproximado de trajetórias de referência para algumas variáveis associadas ao sistema original. Um funcional de custo pode então ser definido combinando estes índices de desempenho de forma a poder buscar controladores que alcancem compromissos satisfatórios entre os vários objetivos de projeto expressos separadamente em cada índice.

Serão, então, consideradas aproximações e limitantes superiores para os índices de desempenho em questão de forma que o problema de controle ótimo a ser numericamente resolvido só envolva funções de transferência racionais (correspondentes a sistemas lineares invariantes no tempo e de DF) e estimativas dos erros de aproximação em questão. Focalizando especificamente o problema de atenuação dos efeitos dos sinais de perturbação, um procedimento de projeto de controladores em dois estágios é formulado tendo por base um limitante superior para o funcional de custo definido para o sistema de DI a ser controlado. Esse procedimento envolve a minimização de um funcional de custo nominal sobre cada classe (de controladores) em uma família uniparmétrica - (cada classe correspondente a um valor mínimo prescrito para a margem de estabilidade em malha fechada do sistema nominal) e uma busca unidimensional relativa à escolha de tal valor mínimo.

Em relação aos trabalhos anteriores envolvendo a solução de problemas definidos por meio de aproximações de DF de um sistema de DI dado, cabe observar que tais trabalhos (i) utilizam índices de desempenho baseados em normas  $H_\infty$ ; (ii) visam à obtenção de controladores de DF que assegurem (além da estabilidade em malha fechada) que o efeito das perturbações no sistema de DI controlado seja menor do que um valor prescrito; (iii) tem, como estratégia para a obtenção de um tal controlador, a resolução dos problemas aproximantes definidos por aproximações de DF do sistema de DI original, assegurando-se então que para aproximações “suficientemente precisas” o valor máximo prescrito para a atenuação de perturbações é satisfeito pelo sistema de DI sob a ação dos controladores de DF obtidos.

Por outro lado, nesse trabalho (a) utilizam-se índices de desempenho baseados em normas  $H_2$  e (b) visa-se à obtenção de um controlador de DF para uma dada aproximação de DF que garanta a estabilidade do sistema de DI controlado e minimize um limitante superior no efeito das perturbações sobre o sistema de DI controlado.

Finalmente, este procedimento é aplicado a alguns exemplos numéricos

relativos à equação do calor simplificada em uma dimensão.

### 1.3

#### Organização do texto

Este documento está dividido em 6 capítulos: No Capítulo 2 utiliza-se a equação do calor para motivar e introduzir sistemas descritos por EDOs em espaços de Hilbert e apresentar alguns elementos básicos da análise de EEPs por meio da teoria de semigrupos. Em seguida, é apresentado o sistema de controle em malha fechada. No Capítulo 3 são apresentadas condições gerais sobre controladores para garantir a estabilidade em malha fechada, e condições baseadas em estabilidade robusta para caracterizar uma classe de controladores de dimensão finita que garantem a estabilidade em malha fechada quando aplicados ao sistema de dimensão infinita original.

No Capítulo 4 são apresentados índices de desempenho  $H_2$  relativos aos objetivos de rastreamento de sinais de referência e atenuação dos efeitos de ruídos e sinais de perturbação. Em seguida, são obtidos índices de desempenho definidos apenas com base em aproximações de dimensão finita para o sistema original e limitantes superiores nas normas  $H_\infty$  dos erros correspondentes na aproximação das funções de transferência do mesmo. Na última seção, são apresentados tais limitantes para o caso da equação do calor em uma dimensão.

No Capítulo 5 é apresentado um procedimento de dois estágios para a escolha de um controlador com o objetivo de atenuar o efeito de perturbação sobre o sistema original de DI. Este procedimento baseia-se na solução de problemas  $H_2$  e  $H_\infty/H_2$  e, portanto, são apresentados métodos computacionais para obtenção de soluções para os mesmos.

No Capítulo 6 são apresentados resultados numéricos para ilustrar a aplicação do procedimento de projeto apresentado no Capítulo 5 bem como dos efeitos da escolha da localização dos sensores e atuadores no desempenho obtido com os controladores correspondentes.

Finalmente, são apresentadas algumas considerações sobre os problemas apresentados, sobre os resultados obtidos e sobre motivações para trabalhos subsequentes.

## 2

### Sistema de Controle: Equações de Evolução Parabólicas e Controladores de Dimensão Finita

Nesse capítulo é apresentado o sistema de controle em malha fechada constituído por um sistema de dimensão infinita correspondente a uma equação de evolução parabólica (com condição de fronteira de Dirichlet) e um controlador (linear) de dimensão finita.

Com essa finalidade, nas duas primeiras seções é apresentado o sistema a controlar (“planta”), isto é, uma equação de evolução parabólica, e a sua correspondente formulação como uma equação diferencial ordinária em um espaço de funções (sistema de dimensão infinita). Na terceira seção, são caracterizados o controlador de dimensão finita e o sistema em malha fechada mencionado acima.

Na primeira seção são apresentados os elementos básicos da análise das equações de evolução parabólicas (EEPs) que são utilizadas no trabalho de tese. O material para esta seção pode ser encontrado em (Gustafson, 1999) e (Evans, 2010). Na segunda seção, se formula a chamada equação do calor simplificada, em uma dimensão e com condição inicial e de fronteira (do tipo Dirichlet), como um problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária em um espaço de dimensão infinita cuja solução é obtida por meio de elementos básicos da teoria de semigrupos.

#### 2.1

##### Equação parabólica

Apresenta-se brevemente a forma clássica da equação de evolução parabólica (EEP) de segunda ordem e o problema de valor inicial e condições de fronteira. Seja  $U$  um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto  $U_T = U \times (0, T]$  para algum tempo fixo  $T > 0$  e considere a equação de derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Lz = f \quad \text{em } U_T \quad (2-1)$$

onde  $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$  é dada, e  $u : \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$  é desconhecida.  $L$  é um operador diferencial parcial de segunda ordem cuja forma não divergente é

$$Lz = - \sum_{i,j} a^{ij}(x, t) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t) \frac{\partial z}{\partial x_i} + k(x, t)z,$$

para funções  $a^{ij}$ ,  $b^i$  e  $k$  ( $i, j = 1 \dots n$ ) dadas.

Comentário: O termo de segunda ordem  $\sum_{i,j}^n a^{ij}(x, t) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$  descreve uma difusão, o termo de primeiro ordem  $\sum_{i=1}^n b^i(x, t) \frac{\partial z}{\partial x_i}$  descreve o fenômeno de transporte e o termo de ordem zero  $k(x, t)z$  descreve a depleção.  $\nabla$

Se  $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$ , (constantes)  $b^i \equiv k \equiv 0$ , então  $L = -\Delta$  e a equação diferencial parcial  $\frac{\partial z}{\partial t} + Lz = f$  torna-se a equação de calor simplificada.

Na procura de soluções de EEPs homogêneas e não-homogêneas, são frequentemente consideradas restrições de condição inicial e de fronteira, as quais são apresentadas a seguir

### 2.1.1

#### Condições de fronteira

Problema de valor da fronteira (PVF) tipo Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + Lz &= f \quad \text{em } U_T, \\ z &= h \quad \text{em } \partial U_T, \end{aligned}$$

onde  $U_T$  é o domínio,  $\partial U$  é a fronteira de  $U$ ,  $\partial U_T = \partial U \times [0, T]$ , e  $h$  é uma função definida em  $\partial U_T$ . Outro PVF com condição de fronteira do tipo Neumann, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + Lz &= f \quad \text{em } U_T, \\ \frac{\partial z}{\partial n} &= h \quad \text{em } \partial U_T, \end{aligned}$$

onde  $\frac{\partial z}{\partial n}$  denota a derivada normal exterior em  $\partial U_T$  (Gustafson, 1999). Por ultimo, o PVF com condição de fronteira do tipo Robin ou mista é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + Lz &= f \quad \text{em } U_T, \\ \frac{\partial z}{\partial n} + kz &= h \quad \text{em } \partial U_T, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Estas condições definem diferentes PVF as quais, podem ocorrer em diferentes fenômenos, como em vibrações, dinâmica de fluidos, problemas de condução de calor em estado estacionário, entre outros (Gustafson, 1999).



### 2.1.2

#### Condições Iniciais

O problema de valor inicial (PVI) está usualmente presente em sistemas físicos. Frequentemente deseja-se impor valores pre-especificados à solução da equação diferencial no instante inicial. Um exemplo pode ser a equação do calor em uma barra infinita

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} + Lz &= f & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ z(x, 0) &= g(x) & -\infty < x < \infty, \quad t = 0,\end{aligned}$$

onde  $g$  é uma distribuição da temperatura inicial e  $z(x, t)$  é a evolução da distribuição da temperatura para um tempo positivo  $t$ . É frequentemente de interesse considerar problemas com condição inicial e de fronteira como o aqui considerado qual seja

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} + L[z] &= f & \text{em } U_T, \\ z(x, 0) &= g(x) & \text{em } U, \\ z &= h & \text{em } \partial U_T,\end{aligned}$$

onde  $U_T = U \times (0, \infty)$ .

## 2.2

### Equação de evolução parabólica: Semigrupos

Nesta seção caracteriza-se a solução da EEP envolvendo condição inicial e de fronteira por meio da teoria de semigrupos para o caso da equação de calor homogênea. Em seguida será apresentada a solução fraca para o caso da equação de calor não-homogênea para uma fonte  $f$ . Para mais detalhes na teoria de semigrupos uma referência fundamental é Pazy (1983) e para a solução fraca ver o trabalho de Ball (1977).

### 2.2.1

#### Formulação EEP Homogênea

É apresentada a seguir a solução do caso particular da equação do calor homogênea de dimensão um com condição inicial e condição de fronteira do tipo Dirichlet homogênea. Uma breve derivação dessa equação seguindo (Figueiredo, 2012) encontra-se no Apêndice (A-2). Para isto, considere-se o problema da condução de calor em uma barra de metal com extremidades mantidas à temperatura zero. Matematicamente, o problema consiste em determinar uma função  $z(x, t)$ , definida para um tempo  $t \geq 0$  e  $0 \leq x \leq L$  (neste caso  $U = (0, L)$ ), tal que

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t), \quad z(x, 0) = z_0(x), \quad (2-2)$$

com uma condição de fronteira tipo Dirichlet homogênea

$$z(0, t) = 0, \quad z(L, t) = 0,$$

onde  $z(x, t)$  representa a temperatura na posição  $x$  no tempo  $t$ ,  $z_0(x)$  é a temperatura inicial. Inicialmente o problema acima é reformulado considerando  $z$  como uma aplicação de  $t$  no espaço  $L_2(0, L)$  de funções de  $x$  (a variável  $z$  é formulada desta maneira em todo o trabalho de tese), isto é,

$$z : [0, T] \rightarrow L_2(0, L)$$

é definida por

$$[z(t)](x) := z(x, t) \quad (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

Toma-se  $Z = L_2(0, L)$  como o espaço de estados e a função  $z(t) \in L_2(0, L)$  como o estado no instante  $t$ . Objetiva-se aqui formular o problema da equação (2-2) como uma equação diferencial ordinária definida em  $L_2(0, L)$  com condição inicial  $z(0)$ , i.e.,

$$\dot{z}(t) = A_0[z(t)], \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0. \quad (2-3)$$

Para isto definiremos o operador  $A_0$  em  $Z$ , da seguinte maneira

$$A_0[h] = \frac{d^2 h}{dx^2},$$

sendo o domínio de  $A_0$ ,

$$D(A) = \{h \in L_2(0, L) | h, \frac{dh}{dx} \text{ absolutamente contínua},$$

$$\frac{d^2h}{dx^2} \in L_2(0, L) \quad e \quad h(0) = 0 = h(L)\},$$

onde a função  $z_0 \in L_2(0, L)$ . Note-se que o domínio de  $A_0$  contém as condições de fronteira do problema. Note-se ainda que se  $\frac{dh}{dx}$  é absolutamente contínua em  $(0, L)$  então  $\frac{dh}{dx}$  é diferenciável em quase toda parte em  $(0, L)$  ((Curtain e Zwart, 1995), pg. 15-16) - assim sendo a derivada segunda na definição de  $A_0$  pode ser tomada como a derivada clássica (restrita aos pontos onde  $\frac{dh}{dx}$  é diferenciável) ou como a derivada fraca de  $\frac{dh}{dx}$ .

Neste ponto deseja-se obter uma solução da equação

$$\dot{z}(t) = A[z(t)], \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0 \quad (2-4)$$

onde  $A$  é um operador definido em um espaço de Hilbert  $Z$ .

No caso de  $Z$  ser de dimensão finita, a solução seria  $z(t) = e^{(At)}z_0$  [cf. (Brockett, 1970)]. Em dimensão infinita se deseja uma extensão de  $e^{(At)}$ , onde  $A$  é um operador não limitado. A análise da equação diferencial ordinária (EDO) resultante da reformulação pode ser feita por meio da teoria de semigrupos [cf. (Pazy, 1983)], cujos elementos mais básicos são apresentados a seguir.

### Resultados Auxiliares

Suponha-se que  $z_0 \in Z$  é o estado do sistema dinâmico definida no espaço de Hilbert  $Z$  no tempo zero, e que o estado no tempo  $t$  é  $z(t)$ . Assuma-se que a dinâmica que governa a evolução de  $z_0$  a  $z(t)$  é linear, invariante no tempo e autônomo, então para cada tempo  $t$  definimos o operador linear  $T(t)$  tal que

- $T(t) : Z \rightarrow Z, \quad T(0) = I$
- $z(t) = T(t)z_0$ .

Assumimos que o estado de nosso sistema dinâmico satisfaz as condições de boa colocação “well posedness”

- Tenha solução única,
- $z(t) = T(t)z_0$  varia continuamente com a condição inicial.

Se  $z(t)$  é a única solução, então  $z(t+s)$  é o mesmo ponto em  $Z$  alcançado pela dinâmica para evoluir de  $z(s)$  no tempo  $t$ , para todos os pontos iniciais  $z_0 \in Z$ , então

$$z(t+s) = T(t+s)z_0 = T(t)T(s)z_0,$$

ou

$$T(t+s) = T(t)T(s).$$

Se assumimos que o estado em  $t$  varia continuamente com o estado inicial  $z_0$ , então  $T(t)$  é um mapeamento limitado em  $Z$ . Finalmente se impõe alguma condição de suavidade na trajetória  $z(t)$  e assumimos que  $z(t) \rightarrow z_0$  quando  $t \rightarrow 0^+$  para todo  $z_0 \in Z$ , isto é

$$\|T(t)z_0 - z_0\|_Z \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Pode-se perceber que o conceito de um sistema dinâmico leva naturalmente ao conceito de semigrupo fortemente contínuo. Apresenta-se em seguida a definição formal de semigrupo fortemente contínuo. Todas as demonstrações dos teoremas podem ser encontradas em (Pazy, 1983) e (Curtain e Zwart, 1995).

**Definição 2.1** ((Curtain e Zwart, 1995) pg. 15). *Seja  $Z$  um espaço de Hilbert. Uma família  $T(t)_{t \geq 0}$  de operadores lineares limitados em  $Z$ , é chamado de semigrupo fortemente contínuo ou  $C_0$  - semigrupo, se satisfaz as seguintes propriedades*

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad (2-5)$$

$$T(0) = I, \quad (2-6)$$

$$\|T(t)z_0 - z_0\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+ \quad \forall z_0 \in Z. \quad (2-7)$$

▽

Até agora somente se assumiu que  $T(t)z$  é contínuo, o que geralmente não é suficiente para obter a diferencial de  $T(t)z$  - o que, por sua vez, é fundamental para caracterizar uma solução da equação diferencial abstrata (2-3). Para resolver este problema é que se apresenta a seguinte definição.

**Definição 2.2** ((Curtain e Zwart, 1995) pg. 20). *Seja  $T(t)_{t \geq 0}$  um  $C_0$  - semigrupo em um espaço de Hilbert  $Z$ . O gerador infinitesimal do semigrupo é o operador  $A$  definido*

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = \frac{dT(t)z}{dt}$$

e o domínio de  $A$ ,  $D(A)$  é o conjunto de todos os vetores  $z \in Z$  para o qual o limite existe, i.e.,

$$D(A) = \left\{ z \in Z : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} \text{ existe em } Z \right\}.$$

▽

**Teorema 2.3** ((Curtain e Zwartz, 1995) pg. 21-24. Theorem 2.1.10). *Seja  $T(t)$  um semigrupo fortemente contínuo em um espaço de Hilbert  $Z$  com gerador infinitesimal  $A$ . Então:*

1. Para  $z_0 \in D(A)$ ,  $T(t)z_0 \in D(A) \forall t \geq 0$ ,
2.  $\frac{d}{dt}(T(t)z_0) = AT(t)z_0 = T(t)Az_0$  para  $z_0 \in D(A)$ ,  $t > 0$ .

▽

As demais proposições do Teorema 2.3 estão apresentadas no Apêndice. Segue-se do Teorema 2.3 que, se  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$  – semigrupo  $T(t)_{t \geq 0}$ , pode-se caraterizar a solução da equação (2-4) por

$$z(t) = T(t)[z_0], \quad \text{para } z_0 \in D(A).$$

A última observação motiva a procura por condições sobre um dado operador  $A$  que assegurem que o mesmo é gerador infinitesimal de um  $C_0$  – semigrupo  $T(t)_{t \geq 0}$ . Estas condições são dadas pelo Teorema de Hille-Yosida (cf. Apêndice).

Retornando ao caso da equação de calor (em uma dimensão) homogênea com condição de fronteira de Dirichlet (2-2) e a sua formulação como um problema de valor inicial (EDO) dado por (2-3), note-se que, para aplicar os resultados sumarizados na obtenção de uma solução, basta demonstrar que  $A_0$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $T_0$ . Então a solução única de (2-3) será dada por  $z(t) = T_0(t)z_0$ . De fato, introduzindo a base  $\{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi x}{L})\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n \geq 1$  (ou conjunto ortogonal completo) no espaço de Hilbert separável  $Z = L_2(0, L)$  e sendo  $\{\lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n \geq 1$  uma sequência de números reais,  $A_0$  é dado por (cf. (Curtain e Zwartz, 1995) pg. 31)

$$A_0 z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \phi_n \rangle \phi_n,$$

e o semigrupo gerado por  $A_0$  é (cf. Apêndice)

$$T_0(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n,$$

onde, para  $z_1$  e  $z_2$  em  $L_2(0, L)$ ,  $\langle z_1, z_2 \rangle \triangleq \int_0^L z_1^*(x) z_2(x) dx$ .

## 2.2.2

### Formulação EEP Não-Homogênea

Considere-se agora a versão não-homogênea do problema dado na seção anterior i.e.,

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad z(x, 0) = z_0(x), \quad (2-8)$$

com a mesma condição de fronteira (Dirichlet-homogenea) considerada anteriormente, só que agora adiciona-se um termo  $f(x, t)$ , o qual é uma fonte de calor ao longo da barra de metal. Como no caso homogêneo, formula-se o problema como uma equação diferencial ordinária em  $L_2(0, L)$ . A EDO em dimensão infinita da equação de calor (2-8) é dada por

$$\dot{z} = A_0[z(t)] + f(t), \quad t \geq 0 \quad z(0) = z_0. \quad (2-9)$$

onde  $f(t) \in Z$ . Deseja-se então obter a solução da equação de evolução abstrata

$$\dot{z} = A[z(t)] + f(t), \quad t \geq 0 \quad z(0) = z_0, \quad (2-10)$$

onde  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$  – semigrupo  $T(t)_{t \geq 0}$ . Primeiro vai-se definir o que se entende por uma solução da equação (2-10), começando com a noção de uma solução clássica (note que  $C^1([0, \tau]; Z)$  denota as classes das funções contínuas em  $[0, \tau]$  cujas derivadas são também contínuas).

**Definição 2.4** ((Curtain e Zwartz, 1995) pg. 101). Considere a equação (2-9) no espaço de Hilbert  $Z$ . A função  $z$  é uma solução clássica de (2-9) em  $[0, \tau]$  se  $z \in C^1([0, \tau]; Z)$ ,  $z(t) \in D(A)$  para todo  $t \in [0, \tau]$  e  $z(t)$  satisfaz (2-9) para todo  $t \in [0, \tau]$ .  $\nabla$

A função  $z$  é uma solução clássica em  $[0, \infty)$  se  $z$  é uma solução clássica em  $t \in [0, \tau]$  para cada  $\tau \geq 0$ .

**Teorema 2.5** ((Curtain e Zwartz, 1995) pg. 103-104, Theorem. 3.1.3). Se  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$  – semigrupo  $T(t)_{t \geq 0}$  no espaço de Hilbert  $Z$ ,  $f \in C^1([0, \tau]; Z)$  e  $z_0 \in D(A)$ , então

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (2-11)$$

é continuamente diferenciável em  $[0, \tau]$  e é a única solução clássica da equação (2-9).  $\nabla$

Pode-se observar que a equação (2-11) é formalmente análoga à solução de uma EDO linear no  $\mathbb{R}^n$ , mas neste caso a EDO é de dimensão infinita e a integral envolve funções que tomam valores no espaço de Hilbert  $Z$ .

As condições do Teorema 2.5 ( $f \in C^1([0, \tau]; Z)$  e  $z_0 \in D(A)$ ) são restritivas do ponto de vista de controle. Contudo introduzindo uma noção de solução fraca à EDO (2-10), Ball (1997) demonstra que a expressão (2-11)

define a solução de (2-10) sob condições menos restritivas em  $z_0$  e  $f$  do que aquelas mencionadas no Teorema acima.

A proposta de Ball (1977) é estabelecer uma equivalência abstrata entre a função  $z$  dada pela equação (2-11) e uma solução fraca adequadamente definida na equação (2-10), para oferecer uma caracterização relacionada com a teoria de semigrupos fortemente contínuos.

**Definição 2.6** (Ball, 1977) Uma função  $z \in C([0, \tau]; Z)$  é a solução fraca da equação (2-9), se e somente se, para cada  $v \in D(A^*)$  a função  $\langle z(t), v \rangle$  é absolutamente contínua em  $[0, \tau]$  e

$$\frac{d}{dt} \langle z(t), v \rangle = \langle z(t), A^* v \rangle + \langle f(t), v \rangle$$

para quase todo  $t \in [0, \tau]$ , onde  $A^*$  é o operador adjunto de  $A$ .  $\nabla$

**Teorema 2.7** (Ball, 1977) Seja  $f \in L^p([0, \tau]; Z)$ ,  $p \geq 1$ . Existe para cada  $z_0 \in Z$  uma única solução fraca  $z(t)$  de (2-9) que satisfaz  $z(0) = z_0$  (sendo  $Z$  um espaço de Hilbert separável) se e somente se  $A$  é um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo  $\{T(t)\}$  de operadores lineares limitados em  $Z$ . Nesse caso,  $z(t)$  é dado por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (2-12)$$

$\nabla$

Retornando ao caso da equação de calor (em uma dimensão) não homogênea (2-8) com condição de fronteira de Dirichlet e a sua formulação pela equação diferencial abstrata (2-9), onde  $A_0$  é o gerador infinitesimal do  $C_0$ -semigrupo  $T_0(t)_{t \geq 0}$ , introduzindo a base  $\{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi x}{L})\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n \geq 1$  em  $Z = L_2(0, L)$  e sendo  $\{\lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n \geq 1$  uma sequência de números reais, a solução de (2-9) pode ser caracterizada da seguinte forma (lembrando que  $T_0(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n$ )

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \langle \phi_n, z_0 \rangle + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(t-\tau)} \phi_n(x) \langle \phi_n, f(\cdot, \tau) \rangle d\tau \\ &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n^*(\xi) f(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(t-\tau)} \phi_n(x) \phi_n^*(\xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^L G(x, \xi; t) f(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L G(x, \xi; t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

onde  $G$  é a função de Green

$$G(x, \xi; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n^*(\xi).$$

### 2.3 Sistema de Controle

Nesta seção, será caracterizada a ação de um controlador sobre o sistema a controlar o qual é descrito pela EDO com condição inicial

$$\dot{z}(t) = A[z(t)] + f(t) \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0 \quad (2-13)$$

onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo  $T$  ((Curtain e Zwartz, 1995), pg. 101).

Denominaremos  $u, f_d, \mathfrak{J}$  e  $y$  as chamadas variáveis de controle, perturbação, controlada e de medida. Consideram-se duas variáveis adicionais  $v_u$  e  $v$  - a primeira leva em conta erro/ruídos no processo de impor à variável  $\hat{u}$  os valores prescritos pelo controlador para  $u$ ; enquanto que  $v$  leva em conta erro/ruídos no processo de tornar  $y$  fisicamente acessível ao controlador ou no processo de medir os valores assumidos por  $y$ ;  $r$  é uma referência da trajetória desejada para a variável  $\mathfrak{J}$ . O sistema de controle em malha fechada da figura 2.1 é descrito pela aplicação que leva nas variáveis dependentes as variáveis externas (ou exógenas), i.e.,  $(r(\cdot), v_u(\cdot), v(\cdot), f_d(\cdot)) \rightarrow (\mathfrak{J}(\cdot), u(\cdot), y(\cdot))$ .

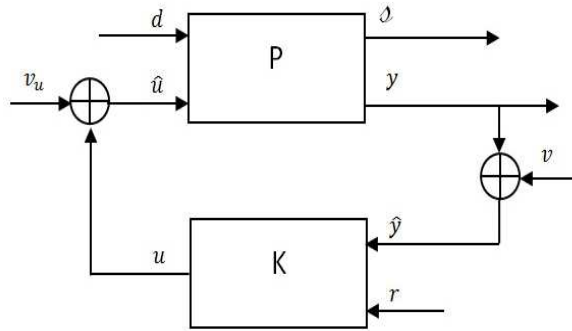


Figura 2.1: Sistema de controle em malha fechada.

A ação de sinais exógenos sobre  $(\mathfrak{J}, u, y)$  se dá por meio do termo de fonte  $f$  na EEP original, o qual se supõe ser constituído por sinais manipuláveis e sinais de perturbação da seguinte forma:

$$f(t) = f_d(t) + B[u(t) + v_u(t)]$$

onde  $u$  é o sinal de controle,  $v_u$  é um sinal de ruído ( $u(t) \in \mathbb{R}^m, v_u(t) \in \mathbb{R}^m$ ),  $f_d$  corresponde a sinais de perturbações,  $B: \mathbb{R}^m \rightarrow Z$  e, portanto,

$$\dot{z}(t) = A[z(t)] + f_d(t) + B[u(t) + v_u(t)]$$



### Atuador

O atuador correspondente ao operador  $B$  é caracterizado da seguinte maneira

$$B[u(t)] = \beta_u^T u(t) = \sum_{i=1}^m \beta_{ui} u_i(t)$$

onde  $\beta_{ui} \in Z$ .

Comentário: No caso da equação do calor unidimensional  $\beta_{ui} : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser visto como “distribuindo espacialmente” a ação de  $u_i$  sobre o domínio  $(0, L)$ .  $\nabla$

Os sinais de perturbação  $f_d$  considerados são analogamente definidos por meio de variáveis  $d_i, i = 1, \dots, m_d, d_i(t) \in \mathbb{R}$  cujo efeito “espacial” é caracterizado por meio de  $\beta_{d_i} \in Z, i.e., f_d(t) = \sum_{i=1}^{m_d} \beta_{d_i} d_i(t)$ .

### Sensor

O sinal  $y$  que é inserido no controlador  $K$  é definido por funcionais lineares aplicados ao estado  $z$  do sistema  $P$ , i.e.,

$$y(t) = [y_1(t) \dots y_p(t)]^T \in \mathbb{R}^p,$$

onde

$$y_i(t) = \langle \varphi_{M_i}, z(t) \rangle_Z, i = 1, \dots, p.$$

$\varphi_{M_i} \in Z$ , i.e,  $y(t) = \mathcal{C}_M[z(t)]$ ,  $\mathcal{C}_M : Z \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Portanto,  $y$  é dado por

$$\mathcal{C}_M[y] = \begin{bmatrix} \langle \varphi_{M_1}, z(t) \rangle_Z \\ \vdots \\ \langle \varphi_{M_p}, z(t) \rangle_Z \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2.8** No caso da equação do calor unidimensional  $y_i(t)$  poderia ser a media da temperatura  $z(x, t)$  em uma pequena região do domínio, i.e.

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) &= \frac{1}{b_l - a_l} & \forall x \in [a_l, b_l], \\ \varphi_l(x) &= 0 & \forall x \notin [a_l, b_l]. \end{aligned}$$

$\nabla$

As variáveis controladas  $\mathfrak{z}_i, i = 1, \dots, m_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{z} = [\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_m]^T$  são também definidas como funcionais lineares aplicados a  $Z$  i.e.,  $\mathfrak{z}(t) = \langle \varphi_{\mathfrak{z}_i}, z(t) \rangle$ .

Em termos gerais, os objetivos de controle correspondem a tornar a evolução de  $\mathfrak{s}$  próxima a de um sinal de referência  $r$  a despeito dos efeitos do sinal de perturbação  $\mathfrak{s}$  e ruído  $v$ .

### Controlador

O controlador  $C$  gera o sinal de controle  $u$  a partir do sinal “medido”  $y$  e de um sinal de referência  $r$ , todos de dimensão finita, sendo descrito da seguinte maneira:

$$\dot{z}_K(t) = A_K z_K(t) + B_{Ky}(y(t) + v(t)) + B_{Kr}(t), \quad (2-14)$$

$$u(t) = C_K z_K(t) + D_{Ky}(y(t) + v(t)) + D_{Kr}(t). \quad (2-15)$$

Substituindo  $u$  no sistema de dimensão infinita dado pela equação (2-13) e sendo  $w(t) = [v(t) r(t)]^T$ ;  $D_{Kw} = [D_{Ky}; D_{Kr}]$  e  $B_{Kw} = [B_{Ky}; B_{Kr}]$  obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A + \beta_u^T D_{Ky} C_M)[z(t)] + \beta_u^T C_K z_K(t) \\ &\quad + \beta_u^T \{D_{Kw} w(t) + v_u(t)\} + \beta_d^T d(t) \end{aligned} \quad (2-16)$$

$$\dot{z}_K(t) = A_K z_K(t) + B_{Ky} C_M [z(t)] + B_{Kw} w(t). \quad (2-17)$$

onde  $A_K \in \mathbb{R}^{n_K \times n_K}$ ,  $B_{Ky} \in \mathbb{R}^{n_K \times p}$ ,  $C_K \in \mathbb{R}^{m \times n_K}$ ,  $B_{Kr} \in \mathbb{R}^{n_K \times m_r}$ ,  $D_{Ky} \in \mathbb{R}^{n_K \times p}$  e  $D_{Kr} \in \mathbb{R}^{n_K \times m_r}$ .

As equações (2-16) e (2-17) descrevem a evolução do estado da planta e do controlador sob a ação dos sinais externos (ou entradas)  $r, f_d, v$  e  $v_u$ . Uma condição para que o sistema em malha fechada descrito por (2-16)-(2-17) seja “bem posto” é que o operador

$$(\xi, \chi) \mapsto ((A + \beta_u^T D_{Ky} C_M)[\xi] + \beta_u^T C_K \chi, B_{Ky} C_M[\xi] + A_K \chi).$$

seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, o que decorre do fato do operador  $(\xi, \chi) \mapsto (\beta_u^T D_{Ky} C_M[\xi] + \beta_u^T C_K \chi, B_{Ky} C_M[\xi])$  ser limitado e do Teorema 3.2.1 ((Curtain e Zwartz, 1995), pg. 110).

### 3

## Estabilidade em Malha Fechada

Esse capítulo é dividido em três seções. Na primeira seção apresenta-se o sistema de controle em malha fechada no domínio da frequência. Na segunda seção, considera-se uma definição de estabilidade do tipo entrada-limitada/saída-limitada para o sistema em malha fechada e são apresentadas condições para que tal estabilidade seja assegurada, assumindo que o sistema em malha aberta é estável. Na terceira seção é caracterizada uma classe de controladores de dimensão finita, para um dado sistema de dimensão finita, que asseguram a estabilidade do correspondente sistema de controle em malha fechada.

### 3.1

#### Descrição do sistema de controle no domínio da frequência

O sistema em malha fechada descrito no domínio do tempo pelas equações (2-16) e (2-17) será a seguir caracterizado no domínio da frequência.

Nesse sentido, considere o conjunto resolvente  $S_{res}(A)$  do gerador  $A$  e o operador resolvente  $R_A(s) \triangleq (sI - A)^{-1}$  onde  $s \in S_{res}(A)$  (cf. (Curtain e Zwartz, 1995), pp. 608-609). Para todo  $s \in S_{res}(A)$  pode-se tomar a transformada de Laplace da equação (2-13), o que leva a

$$\tilde{z}(s) = R_A(s)[z_0] + R_A(s)[\check{f}(s)],$$

onde  $\tilde{z}(\cdot)$  é a transformada de Laplace de  $z(\cdot)$  (cf. (Curtain e Zwartz, 1995), pp. 175-178). Como  $f(t) = f_d(t) + B[u(t) + v_u(t)]$  e  $\check{f}_d(s) = \beta_d^T \check{d}(s)$ , segue-se que

$$\tilde{z}(s) = R_A(s)[z_0] + R_A(s)[\beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T (\check{u}(s) + \check{v}_u(s))]$$

e definindo

$$\begin{aligned} P_{zu}(s) &\triangleq R_A(s)[\beta_u^T] \\ &= [R_A(s)[\beta_{ui}] \dots R_A(s)[\beta_{um}]], \end{aligned}$$

(função de transferência que leva  $u$  no estado  $z$ ), os estados da planta e do controlador no domínio da frequência são descritos por

$$\tilde{z}(s) = R_A(s)[z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)] + P_{zu}(s) \check{u}(s), \quad (3-1)$$

$$\check{z}_K(s) = R_K(s) z_{K0} + R_K(s) B_{Ky} \check{C}_M[\tilde{z}(s)] + R_K(s) B_{Kw} w(s). \quad (3-2)$$

onde  $R_K(s) = (sI - A_K)^{-1} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}$ .

Como se pode observar, as equações (3-1) e (3-2) estão relacionadas pela realimentação de  $\tilde{u}(t)$ , a qual é caracterizada por meio da transformada de Laplace da equação (2-15). De fato, com  $K_r(s) = C_K R_K(s) B_{Kr} + D_{Kr}$ , e  $K(s) = C_K R_K(s) B_{Ky} + D_{Ky}$ , obtém-se

$$\tilde{u}(s) = C_K R_K(s) z_{K0} + K_w(s) \tilde{w}(s) + K(s) \tilde{y}(s). \quad (3-3)$$

onde  $w(t)^T = [v(t)^T r(t)^T]$  e  $K_w = [K; K_r]$ .

Note-se que se pode escrever  $\tilde{y}(s) = \check{C}_M[\check{z}(s)] = \text{Lap}\{C_M[z(t)](s)\}$  substituindo  $z$  pela equação (3-1), i.e.,

$$\tilde{y}(s) = \check{C}_M[R_A(s)[z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)]] + \check{C}_M P_{zu}(s) \tilde{u}(s) \quad (3-4)$$

ou, equivalentemente

$$\tilde{y}(s) = P_{yz}(s)[z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)] + P_{yu}(s) \tilde{u}(s). \quad (3-5)$$

onde

$$\begin{aligned} P_{yz}(s)[z_0] &= \check{C}_M[R_A(s)[z_0]], \quad \text{e} \\ P_{yu}(s) &= \check{C}_M[P_{zu}(s)] = \check{C}_M[R_A(s)[\beta_u^T]]. \end{aligned}$$

Analogamente

$$P_{\mathfrak{d}u}(s) = \check{C}_{\mathfrak{d}}[R_A(s)[\beta_u^T]].$$

**Exemplo 3.1** No caso da equação do calor (operador  $A_0$ )

$R_{A_0}(s)[z_0] = \sum_{k=1}^{\infty} (s - \lambda_k)^{-1} \langle z_0, \phi_k \rangle \phi_k$  i.e.,  $R_A(s)[z_0]$  é a transformada de Laplace de  $T_0(t)[z_0]$  (cf. (Curtain e Zwart, 1995) pp. 24). A função de transferência  $P_{yu}$  é então dada por

$$\begin{aligned} P_{yu}(s) &= \check{C}_M[R_A(s)[\beta_u^T]] = \check{C}_M \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (s - \lambda_k)^{-1} [\langle \beta_{u1}, \phi_k \rangle \dots \langle \beta_{um}, \phi_k \rangle] \phi_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_M[\phi_k] (s - \lambda_k)^{-1} [\langle \beta_{u1}, \phi_k \rangle \dots \langle \beta_{um}, \phi_k \rangle] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \langle \varphi_{M1}, \phi_k \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_{Mp}, \phi_k \rangle \end{bmatrix} (s - \lambda_k)^{-1} [\langle \beta_{u1}, \phi_k \rangle \dots \langle \beta_{um}, \phi_k \rangle] \end{aligned}$$

onde  $\phi_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ . Note-se que  $P_{yu} \in \mathbb{C}^{p \times m}$  não

é racional (já que possui uma infinidade de polos).  $\nabla$

Finalmente, utilizando as equações (3-3) e (3-5),  $\tilde{u}$  é dado pela equação abaixo

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s) = & C_K R_K(s) z_{K0} + K_w(s) \tilde{w}(s) + K(s) P_{yz}(s) [z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)] \\ & + P_{yu}(s) \tilde{u}(s),\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}(I - K(s) P_{yu}(s)) \tilde{u}(s) = & C_K R_K(s) z_{K0} + K_w(s) \tilde{w}(s) + \\ & K(s) P_{yz}(s) [z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)].\end{aligned}$$

Se  $(I - K(s) P_{yu}(s))^{-1}$  é “bem definido”,  $\tilde{u}$  pode ser explicitamente caracterizado da seguinte forma

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s) = & T_K(s) C_K R_K(s) z_{K0} + T_K(s) K_w(s) \tilde{w}(s) \\ & + T_K(s) K(s) P_{yz}(s) [z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)].\end{aligned}\quad (3-6)$$

onde  $T_K(s) = (I - K(s) P_{yu}(s))^{-1}$ .

Concluindo, o sistema de controle em malha fechada é caracterizado no domínio da frequência pelas equações

$$\check{z}(s) = R_A(s) [z_0 + \beta_d^T \check{d}(s) + \beta_u^T \check{v}_u(s)] + P_{\mathfrak{A}u}(s) \tilde{u}(s),$$

$$\check{z}_K(s) = R_K(s) z_{K0} + R_K(s) B_{Ky} \check{C}_M [\check{z}(s)] + R_K(s) B_{Kw} w(s),$$

com  $\tilde{u}$  dado pela equação (3-6).

Note-se que para, condições iniciais nulas (i.e.  $z(0) = 0$  e  $z_K = 0$ ), o sistema de controle em malha fechada pode ser visto como uma aplicação que leva os sinais exógenos  $(d, v_u, v, r)$  nos sinais  $(\mathfrak{A}, y, u)$ .

Esta aplicação é caracterizada no domínio da frequência pela seguintes

equações: para  $\alpha = y, \mathfrak{d}$

$$\begin{aligned}\check{\alpha}(s) &= (P_{\alpha d}(s) + P_{\alpha d}(s)T_K(s)K(s)P_{\alpha d}(s))\check{d}(s) \\ &\quad + P_{\alpha u}(s)(I + T_K(s)K(s)P_{yu}(s))\check{v}_u(s) \\ &\quad + P_{\alpha u}(s)T_K(s)(K(s)\check{v}(s) + K_r(s)\check{r}(s))\end{aligned}\quad (3-7)$$

$$\begin{aligned}\check{u}(s) &= T_K(s)K(s)[P_{yd}(s)\check{d}(s) + P_{yu}(s)\check{v}_u(s)] \\ &\quad + T_K(s)(K(s)\check{v}(s) + K_r(s)\check{r}(s))\end{aligned}\quad (3-8)$$

i.e.

$$\check{\alpha}(s) = F_{\alpha d}(s; K)\check{d}(s) + F_{\alpha v_u}(s; K)\check{v}_u(s) + F_{\alpha v}(s; K)\check{v}(s) + F_{\alpha r}(s; K, K_r)\check{r}(s)$$

$$\check{u}(s) = F_{ud}(s; K)\check{d}(s) + F_{uv_u}(s; K)\check{v}_u(s) + F_{uv}(s; K)\check{v}(s) + F_{ur}(s; K, K_r)\check{r}(s)$$

Note-se que as equações acima dependem apenas das funções de transferência (em malha aberta) do sistema original  $P = \begin{bmatrix} P_{\mathfrak{d}d} & P_{\mathfrak{d}u} \\ P_{yd} & P_{yu} \end{bmatrix}$  e do controlador  $[K; K_r]$ .

### 3.2

#### Estabilidade em malha fechada

Nesta seção é formulada uma condição de estabilidade em malha fechada que envolvendo o comportamento entrada-saída do sistema em malha fechada  $(P, [K; K_r])$  (figura 2.1), com o objetivo de que, quando as variáveis externas (ou exógenas)  $(d, v_u, v, r)$  forem limitadas em  $[0, \infty)$ , as correspondentes variáveis dependentes  $(\mathfrak{d}, u, y)$  sejam também limitadas em  $[0, \infty)$ . A definição correspondente de estabilidade em malha fechada é enunciada a seguir (as demonstrações relativas às proposições desta e da próxima seção encontram-se em (Corrêa e Talavera, 2014)).

**Definição 3.2** *O sistema em malha fechada definido por (2-16) e (2-17) é dito estável (no sentido entrada limitada-saída limitada) se, sempre que  $d, v_u, v$  e  $r$  forem limitadas em  $[0, \infty)$ , as respostas correspondentes a partir do estado zero  $\mathfrak{d}, y$  e  $u$  serão também limitadas em  $[0, \infty)$ .*  $\nabla$

Daqui em diante, serão apenas considerados sistemas de DI estáveis em malha aberta, isto é, aqueles que satisfazem a hipótese abaixo - O semigrupo  $T_A$  gerado pelo operador  $A$  é exponencialmente estável, i.e.,  $\exists \mu_A \in \mathbb{R}_+$  e  $\sigma_T \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$\forall t \in [0, \infty), \quad \|T(t)\| \leq \mu_A e^{-\sigma_T t}.$$

▽

Uma condição suficiente para estabilidade em malha fechada sob a hipótese 3.2 pode-ser deduzida de (3-7) e (3-8).

Nesse sentido, seja  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}_\beta^+ = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \beta\}$ ,  $H_\infty(\beta) = \{f : \mathbb{C}_\beta^+ \rightarrow \mathbb{C} | f \text{ é holomórfica e limitada em } \mathbb{C}_\beta^+\}$  e considere a definição apresentada a seguir (ver no apêndice definição de função holomórfica).

**Definição 3.3** (*Função de transferência estável*)

- a  $f \in H_\infty(\beta)$  com  $\beta < 0$  é dita estável se existem  $h_f \in L_1(0, \infty)$  e  $d_f \in \mathbb{R}$  tais que  $f = \check{h}_f + d_f$ , onde  $\check{h}_f$  é a transformada de Laplace de  $h_f$
- b Uma matriz  $F$  de funções em  $H_\infty(\beta)$  com  $\beta < 0$  é dita estável se todos seus elementos são estáveis.

▽

O seguinte resultado simples é utilizado na sequência:

**Fato 1** : Se  $\mathfrak{s} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua por partes e limitada e  $f$  é estável, então  $\check{r} = f\check{\mathfrak{s}}$  é a transformada de Laplace da função contínua por partes e limitada  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $r(t) = d_f \mathfrak{s}(t) + \int_0^t h_f(t) \mathfrak{s}(t - \tau) d\tau$ .

A proposição enunciada a seguir apresenta condições suficientes para que o sistema em malha fechada definido por (3-7)-(3-8) (denotada por  $(P, [K:K_r])$ ) seja estável (no sentido entrada limitada-saída limitada).

**Proposição 3.4** *Suponha que a Hipótese 3.2 seja verificada. O sistema em malha fechada  $(P, [K:K_r])$  é estável se a matriz de funções  $T_K[K:K_r]$  é estável.*

▽

### 3.3

#### Controladores de Dimensão Finita e Estabilidade em Malha Fechada

Nesta seção será apresentada uma ampla classe de controladores de dimensão finita constituída apenas por controladores estabilizantes para o sistema de dimensão infinita original (suposto estável em malha aberta) - cada controlador dessa classe quando aplicado ao sistema de DI original dá origem a um sistema estável em malha fechada. Esta classe é caracterizada com base em uma aproximação  $\hat{P}_{yu}$  para  $P_{yu}$  e em condições de estabilidade robusta relativa a uma bola  $H_\infty$  ponderada, centrada em  $\hat{P}_{yu}$ , a qual contém  $P_{yu}$ .

Mais especificamente sejam  $P_{yu} = \hat{P}_{yu} + E_{yu}$ ,  $\hat{P}_{yu}$  e  $E_{yu}$  funções de transferência estáveis e seja  $\hat{T}_K = (I - K\hat{P}_{yu})^{-1}$  tem-se então que

$$T_K = (I - KP_{yu})^{-1} = (I - K\hat{P}_{yu} - KE_{yu})^{-1} = \{(I - K\hat{P}_{yu})(I - \hat{T}_K KE_{yu})\}^{-1}$$

$$\iff T_K = (I - \hat{T}_K KE_{yu})^{-1} \hat{T}_K.$$

Segue-se então da Proposição 3.4 que o sistema em malha fechada  $(P, [K:K_r])$  é estável se  $(I - \hat{T}_K KE_{yu})^{-1} \hat{T}_K [K:K_r]$  é estável. Uma condição suficiente para que isto aconteça é dada por

$$(I - \hat{T}_K KE_{yu})^{-1} \quad \text{e} \quad \hat{T}_K [K:K_r] \quad \text{são estáveis} \quad (3-9)$$

**Exemplo 3.5** No caso da equação do calor uma aproximação racional e estável para  $P_{yu}$  é dada por

$$\hat{P}_{yu}(s) = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \langle \varphi_{M1}, \phi_k \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_{Mp}, \phi_k \rangle \end{bmatrix} (s - \lambda_k)^{-1} [\langle \beta_{u1}, \phi_k \rangle \dots \langle \beta_{um}, \phi_k \rangle]$$

(para um dado  $N$ ) ou, equivalentemente

$$\hat{P}_{yu}(s) = C_{yN}(sI - A_N)^{-1}[B_{yN}],$$

onde

$$C_{yN} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_{M1}, \phi_k \rangle & \dots & \langle \varphi_{M1}, \phi_N \rangle \\ \vdots & & \\ \langle \varphi_{Mp}, \phi_k \rangle & \dots & \langle \varphi_{Mp}, \phi_N \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times N},$$

$$A_N = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$B_{yN} = \begin{bmatrix} \langle \beta_{u1}, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \beta_{um}, \phi_1 \rangle \\ \vdots & & \\ \langle \beta_{u1}, \phi_N \rangle & \dots & \langle \beta_{um}, \phi_N \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times N}.$$

▽

Considere-se agora o lema.

**Lema 3.6 (Zwart e Bontsema, 1997)** *Seja  $\check{A}_{sp}(\beta) = \{g \in H_\infty(\beta) : a \text{ função } s \mapsto sg(s) \in H_\infty(\beta)\}$ . Se  $g \in \check{A}_{sp}(\beta_0)$  para algum  $\beta_0 < 0$  então existe  $h_g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall \beta > \beta_0$ , a função  $t \mapsto e^{-\beta t} h_g(t) \in L_1(0, \infty)$ .* ▽

Uma consequência imediata deste lema é enunciada a seguir,



**Corolário 3.7** *Seja  $f \in H_\infty(\beta)$  para  $\beta < 0$ . Se existem  $g_f \in \check{A}_{sp}(\beta)$  e  $d_f \in \mathbb{R}$  tais que  $f = g_f + d_f$  então  $f$  é estável.*  $\nabla$

Tendo em vista que  $(I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} = I - \hat{T}_K K E_{yu} (I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1}$ , se  $\hat{T}_K K$  é estável,  $E_{yu}$  é uma matriz de elementos em  $\check{A}_{sp}(\beta_A)$  para  $\beta_A < 0$  e  $(I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} \in H_\infty(\beta)$  para  $\beta < 0$  então  $(I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1}$  é estável.

Portanto se  $E_{yu}$  é uma matriz de elementos  $\check{A}_{sp}(\beta_A)$  para  $\beta_A < 0$ , segue-se de (3-9) da condição dada acima que uma condição suficiente para que  $(P, [K:K_r])$  seja estável é

$$(I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} \in H_\infty(\beta) \quad \text{para} \quad \beta < 0 \quad \text{e} \quad \hat{T}_K [K:K_r] \quad \text{é estável} \quad (3-10)$$

Note-se que a segunda parte da condição (3-10) depende apenas da aproximação  $\hat{P}_{yu}$  para  $P_{yu}$ . A primeira parte, por outro lado, depende de  $E_{yu} = P_{yu} - \hat{P}_{yu}$  e como  $P_{yu}$  não é, em geral, racional, se  $\hat{P}_{yu}$  for racional  $E_{yu}$  não o será. Assim sendo, ao invés de garantir que  $(I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} \in H_\infty(\beta)$  para uma dada  $E_{yu}$  não-racional, procura-se garantir que  $(I - \hat{T}_K K E_a)^{-1} \in H_\infty(\beta)$  para todo  $E_a$  em um conjunto que contenha  $E_{yu}$  e que seja caracterizada apenas por meio de funções racionais.

Neste sentido suponha que um limitante em uma norma  $H_\infty$  ponderada de  $E_{yu} \in \check{A}_{sp}(\beta_A)$  seja satisfeito, i.e.,  $\|W_L E_{yu} W_R\|_{H_\infty} < \gamma$  para um dado par  $(W_L, W_R)$  de matrizes quadradas de funções racionais estáveis tais que  $W_L^{-1}$  e  $W_R^{-1}$  sejam também estáveis ( $H_\infty = H_\infty(0)$ ) e um dado  $\gamma > 0$ .

Neste caso

$$\begin{aligned} (I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} &= (I - \hat{T}_K K W_L^{-1} \overline{E}_{yu} W_R^{-1})^{-1} \\ &= \{(W_R - \hat{T}_K K W_L^{-1} \overline{E}_{yu}) W_R^{-1}\}^{-1} \\ &= W_R \{W_R (I - W_R^{-1} \hat{T}_K K W_L^{-1} \overline{E}_{yu})\}^{-1} \\ (I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} &= W_R \{I - (W_R^{-1} \hat{T}_K K W_L^{-1}) \overline{E}_{yu}\}^{-1} W_R^{-1} \end{aligned} \quad (3-11)$$

onde  $\overline{E}_{yu} = W_L E_{yu} W_R$  é tal que  $\|\overline{E}_{yu}\|_{H_\infty} < \gamma$ .

Considere-se agora o Lema

**Lema 3.8** *Seja  $G$  uma matriz de elementos em  $\check{A}_{sp}(\beta_0)$  para algum  $\beta_0 < 0$  e  $\|G\|_\infty < 1$ . Então existe  $\beta < 0$  tal que  $(I - G)^{-1} \in H_\infty(\beta)$ .*  $\nabla$

Segue-se do Lema 3.8 que, se  $E_{yu}$  é uma matriz de elementos em  $\check{A}_{sp}(\beta_A)$ ,  $\hat{T}_K K$  é estável e  $\|W_R^{-1} \hat{T}_K K W_L^{-1}\|_{H_\infty} < \gamma^{-1}$ , então  $(I - \hat{T}_K K E_{yu})^{-1} \in H_\infty(\beta)$  para  $\beta < 0$ . Esta conclusão juntamente com (3-10), leva a condições de estabilidade robusta enunciadas a seguir.

**Proposição 3.9** *Seja  $P_{yu} = \hat{P}_{yu} + E_{yu}$  onde  $\hat{P}_{yu}$  e  $E_{yu}$  são matrizes de elementos em  $\check{A}_{sp}(\beta_A)$ , ( $\beta_A < 0$ ),  $\|W_L E_{yu} W_R\|_{H_\infty} < \gamma$ ,  $W_L$  e  $W_R$  como acima. O sistema em malha fechada  $(P, [K:K_r])$  é estável se*

$$\hat{T}_K[K:K_r] \quad \text{é estável e} \quad \|W_R^{-1}(\hat{T}_K K)W_L^{-1}\|_{H_\infty} \leq \gamma^{-1}. \quad (3-12)$$

▽

Note-se que a condição (3-12) é expressa em termos das funções

$$\hat{P}(K) = \hat{T}_K K \text{ e } \hat{P}_r(K, K_r) = \hat{T}_K K_r \text{ de } (K, K_r), \text{ onde } \hat{T}_K(K) = (I - K \hat{P}_{yu})^{-1}.$$

Observe-se que  $(\hat{P}(K), \hat{P}_r(K, K_r)) = (Q, Q_r)$  se e somente se

$$\begin{aligned} Q &= (I - K \hat{P}_{yu})^{-1} K \quad \text{e} \quad Q_r = (I - K \hat{P}_{yu})^{-1} K_r \iff \\ (I - K \hat{P}_{yu})Q &= K \quad \text{e} \quad Q_r = (I + (I - K \hat{P}_{yu})^{-1} K \hat{P}_{yu})K_r \iff \\ Q &= K + K \hat{P}_{yu}Q = K(I + \hat{P}_{yu}Q) \quad \text{e} \quad Q_r = (I + Q \hat{P}_{yu})K_r \iff \\ K &= Q(I + \hat{P}_{yu}Q)^{-1} = (I + Q \hat{P}_{yu})^{-1}Q \quad \text{e} \quad K_r = (I + Q \hat{P}_{yu})^{-1}Q_r, \end{aligned}$$

e, portanto, se  $\hat{P}_{yu}$ ,  $Q$  e  $Q_r$  forem matrizes de funções racionais,  $K$  e  $K_r$  também o serão. Segue-se que uma classe de controladores de DF que asseguram estabilidade em malha fechada pode ser explicitamente parametrizada conforme descrito na Proposição enunciada a seguir.

**Proposição 3.10** *Suponha que a Hipótese 1 seja verificada. Seja  $P_{yu} = \hat{P}_{yu} + E_{yu}$ , onde  $\hat{P}_{yu}$  e  $E_{yu}$  são matrizes com elementos em  $\check{A}_{sp}(\beta)$  ( $\beta < 0$ ) e  $E_{yu}$  é tal que*

$$\|W_L E_{yu} W_R\|_{H_\infty} < \gamma$$

onde  $W_L$  e  $W_R$  são matrizes de ponderação conforme definições acima. Sejam as funções  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}_r$

$$\mathcal{K}(Q) = (I + Q \hat{P}_{yu})^{-1}Q \text{ e } \mathcal{K}_r(Q, Q_r) = (I + Q \hat{P}_{yu})^{-1}Q_r$$

e defina o conjunto

$$S_Q(\gamma) = \{Q \in RH_\infty^{m \times p} : \|W_R^{-1} Q W_L^{-1}\|_{H_\infty} \leq \gamma^{-1}\}.$$

Para qualquer par  $(Q, Q_r)$  de matrizes de elementos em  $RH_\infty$  tal que  $Q \in S_Q(\gamma)$ , o sistema em malha fechada  $(P, [\mathcal{K}(Q); \mathcal{K}_r(Q, Q_r)])$  é estável. Ademais, se  $\hat{P}_{yu}$  é uma matriz de funções racionais,  $\mathcal{K}(Q)$  e  $\mathcal{K}_r(Q, Q_r)$  são também matrizes de funções racionais.  $\nabla$

## 4

### Avaliação de Desempenho de Controladores

Nesse capítulo, será considerada a avaliação de desempenho dos controladores  $(K, K_r)$  que asseguram a estabilidade do sistema em malha fechada definido com as funções de transferência  $P_{av}$  (não-rationais) do sistema de DI original. Mais especificamente, um funcional de custo será definido (como uma função de  $(K, K_r)$ ) com base no qual serão buscados controladores tendo em vista o objetivo de rastreamento aproximado de sinais de referência na presença de ruído e de sinais de perturbação. Na seção 4.1 é formulado um problema de otimização para a escolha de um controlador estabilizante de dimensão finita na classe definida no Capítulo 3. Como o funcional de custo em questão depende de funções de transferência não-rationais, limitantes superiores para os mesmos, os quais podem ser obtidos apenas de funções racionais, são apresentados na seção 4.2. Na seção 4.3 é apresentado um procedimento de dois estágios para a escolha de um controlador de DF. Finalmente, na seção 4.4 são apresentados limitantes superiores para as normas  $H_\infty$  dos erros de aproximação das funções de transferência não-rationais associadas à equação do calor simplificada.

#### 4.1

##### Índices de desempenho e funcional de custo

Seja  $\mathfrak{J}(t) = \mathcal{C}_{\mathfrak{J}}[z(t)]$  onde  $\mathcal{C}_{\mathfrak{J}} : Z \rightarrow \mathbb{R}^{m_{\mathfrak{J}}}$  é definido por  $\mathcal{C}_{\mathfrak{J}}[z_0] = [\langle \phi_{\mathfrak{J}1}, z_0 \rangle \dots \langle \phi_{\mathfrak{J}m_{\mathfrak{J}}}, z_0 \rangle]^T$  e  $\phi_{\mathfrak{J}i} \in Z$ . Tanto os objetivos de rastreamento per se quanto os de atenuação dos efeitos de ruído e perturbações serão formulados em termos de  $\mathfrak{J}$ . Nas derivações que se seguem os sinais de perturbação  $f_d$  considerados serão confinados a uma classe de “dimensão finita”, qual seja:

$$f_d(t) = \beta_d^T d(t) \text{ onde } \beta_d^T = [\beta_{d1} \dots \beta_{dm_d}], \beta_{di} \in Z, d(t) \in \mathbb{R}^{m_d}$$

Assim sendo, com relação aos objetivos de projeto explicitamente levados em conta no funcional de custo, o sistema em malha fechada pode ser visto como uma aplicação levando  $(r, v_u, v, d)$  em  $(\mathfrak{J}, u)$  o qual pode ser descrito no domínio da frequência pelas seguintes equações:

$$\check{\mathfrak{J}} = F_{\mathfrak{J}d}(K)\check{d} + F_{\mathfrak{J}v_u}(K)\check{v}_u + F_{\mathfrak{J}v}(K)\check{v} + F_{\mathfrak{J}r}(K, K_r)\check{r}.$$

$$\check{u} = F_{ud}(K)\check{d} + F_{uv_u}(K)\check{v}_u + F_{uv}(K)\check{v} + F_{ur}(K, K_r)\check{r}.$$

nas quais as funções de transferência  $F_{\alpha\nu}$  do sistema em malha fechada constituído pela “planta”  $P$  e o controlador  $(K, K_r)$  são dadas em termos de

$$\mathcal{P}(K) = T_K K, \quad \mathcal{P}_r(K, K_r) = T_K K_r, \quad T_K = (I - K P_{yu})^{-1}$$

pelas expressões

$$F_{ud}(K) = \mathcal{P}(K) P_{yd}, \quad F_{uv_u}(K) = \mathcal{P}(K) P_{yu}, \quad F_{uv}(K) = \mathcal{P}(K),$$

$$F_{ur}(K) = \mathcal{P}_r(K, K_r), \quad F_{\mathfrak{A}d}(K) = P_{\mathfrak{A}d} + P_{\mathfrak{A}u} \mathcal{P}(K) P_{yd}, \quad F_{\mathfrak{A}v_u}(K) = P_{\mathfrak{A}u} (I + \mathcal{P}(K) P_{yu}),$$

$$F_{\mathfrak{A}v}(K) = P_{\mathfrak{A}u} \mathcal{P}(K), \quad F_{\mathfrak{A}r}(K, K_r) = P_{\mathfrak{A}u} \mathcal{P}_r(K, K_r),$$

e as funções de transferência em malha aberta são dadas por

$$\begin{aligned} P_{yd}(s) &= \check{\mathcal{C}}_M [R_A(s) [\beta_d^T]], \\ P_{\mathfrak{A}u}(s) &= \check{\mathcal{C}}_{\mathfrak{A}} [R_A(s) [\beta_u^T]], \quad \text{e} \\ P_{\mathfrak{A}d}(s) &= \check{\mathcal{C}}_{\mathfrak{A}} [R_A(s) [\beta_d^T]]. \end{aligned}$$

Para controladores estabilizantes, i.e., para  $K$  e  $K_r$  tais que  $\mathcal{P}(K)$  e  $\mathcal{P}_r(K, K_r)$  são funções de transferência estáveis (cf. Proposição 3.4), é possível definir índices de desempenhos com base em normas  $H_2$  ponderadas, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\varsigma}(K, K_r) &= \|F_{\alpha\varsigma}(K) \Phi_{\varsigma}\|_2^2, \quad \alpha = \mathfrak{A}, u \quad \varsigma = v, v_u, d \\ \eta_{\mathfrak{A}r}(K, K_r) &= \|(I - F_{\mathfrak{A}r}(K, K_r)) \Phi_r\|_2^2 \quad \text{e} \\ \eta_{ur}(K, K_r) &= \|F_{ur}(K, K_r) \Phi_r\|_2^2 \end{aligned}$$

onde  $\Phi_{\varsigma}$  é uma matriz com elementos em  $RH_2$  (densidade espectral de potencia ou “envoltória de frequências” associadas ao sinal  $\varsigma$ ), pois, neste caso,  $F_{\alpha\varsigma}(K)$  e  $F_{\alpha r}(K, K_r)$  são todas matrizes de funções estáveis.

Um funcional de custo pode então ser definido pela expressão

$$J(K, K_r) = \sum_{\varsigma=v, v_u, d, r} \rho_{\varsigma} \{ \eta_{\mathfrak{A}\varsigma}(K, K_r) + \rho_u \eta_{u\varsigma}(K, K_r) \}, \quad \rho_r = 1.$$

ou, equivalentemente,  $J(K, K_r) = J_{cl}(K) + J_r(K, K_r)$ , onde

$$\begin{aligned} J_{cl}(K) &= \sum_{\varsigma=v, v_u, d} \rho_{\varsigma} \{ \eta_{\mathfrak{A}\varsigma}(K) + \rho_u \eta_{u\varsigma}(K) \}, \quad \text{e} \\ J_r(K, K_r) &= \eta_{\mathfrak{A}r}(K, K_r) + \rho_u \eta_{ur}(K, K_r). \end{aligned}$$

Note-se também que

$$J_{cl}(K) = \sum_{\varsigma=v,v_u,d} \left\| \begin{bmatrix} F_{\mathcal{S}d}(K) \\ \bar{\rho}_u F_{ud}(K) \end{bmatrix} \Phi_{\varsigma} \right\|_2^2$$

ou, equivalentemente,  $J_{cl}(K) = \|(F_0 + F_L \mathcal{P}(K) F_R) \Phi_{ev}\|_2^2$  onde

$$\Phi_{ev} = \text{diag}(\bar{\rho}_d \Phi_d, \bar{\rho}_{v_u} \Phi_{v_u}, \bar{\rho}_v \Phi_v) \text{ sendo } \bar{\rho}_\alpha = \rho_\alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$F_R = [P_{yd} : P_{yu} : I],$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{S}d}(K) & P_{\mathcal{S}u}(K) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$F_L = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{S}u} \\ \bar{\rho}_u I \end{bmatrix}.$$

Analogamente,  $J_r(K, K_r) = \|(F_{r0} + F_L \mathcal{P}_r(K, K_r)) \Phi_r\|_2^2$ , onde

$$F_{r0} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se também que o funcional de custo depende de  $(K, K_r)$  apenas por meio de  $\mathcal{P}(K)$  e  $\mathcal{P}(K, K_r)$ . Como visto anteriormente, a estabilidade destes últimos assegura que o sistema em malha fechada seja estável. Pode-se então introduzir a mudança de variáveis  $(K, K_r) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{Q}_r) = (\mathcal{P}(K), \mathcal{P}_r(K, K_r))$  e reescrever o funcional de custo como

$$\bar{J}_{cl}(\bar{Q}) = \|(F_0 + F_L \bar{Q} F_R) \Phi_{ev}\|_2^2 \quad \text{e} \quad \bar{J}_r(\bar{Q}_r) = \|(F_{r0} + F_L \bar{Q}_r) \Phi_r\|_2^2$$

de forma que os objetivos de rastreamento e os de atenuação de perturbações podem ser associados separadamente a cada uma das novas “variáveis de decisão”  $\bar{Q}$  e  $\bar{Q}_r$ . Segue-se que, para classes de funções de transferência estáveis  $S_{\bar{Q}}$  e  $S_{\bar{Q}_r}$  pode-se formular um problema de controle ótimo

$$\min_{\bar{Q} \in S_{\bar{Q}}, \bar{Q}_r \in S_{\bar{Q}_r}} \bar{J}_{cl}(\bar{Q}) + \bar{J}_r(\bar{Q}_r)$$

ou, equivalentemente, dois problemas independentes, quais sejam

$$\min_{\bar{Q} \in S_{\bar{Q}}} \bar{J}_{cl}(\bar{Q}) \quad e \quad \min_{\bar{Q}_r \in S_{\bar{Q}_r}} \bar{J}_r(\bar{Q}_r).$$

Quando um par  $(\bar{Q}, \bar{Q}_r)$  de soluções aproximadas é obtido, o controlador correspondente  $(K, K_r)$  é dado por

$$\bar{K} = \bar{Q}(I + P_{yu}\bar{Q})^{-1} = (I + \bar{Q}P_{yu})^{-1}\bar{Q} \quad e \quad \bar{K}_r = (I + \bar{Q}P_{yu})^{-1}\bar{Q}_r$$

sempre que  $(I + \bar{Q}P_{yu})^{-1}$  é “bem definido”.

Note-se, entretanto, que como  $P_{yu}$  não é uma matriz de funções racionais, não se pode assegurar em geral que  $\bar{K}$  e  $\bar{K}_r$  sejam matrizes de funções racionais mesmo que  $\bar{Q}$  e  $\bar{Q}_r$  o sejam. Assim sendo, para obter um controlador de DF seria necessário aproximar  $\bar{K}$  e  $\bar{K}_r$  por matrizes de funções racionais (digamos,  $\hat{K}$  e  $\hat{K}_r$ ) e verificar se o sistema em malha fechada  $(P, [\hat{K}; \hat{K}_r])$  é estável. No desenvolvimento a seguir, ao invés de tentar obter inicialmente controladores com funções de transferência não-racionais e depois aproximá-las por matrizes de funções racionais, a escolha de um controlador será restrita à uma classe de controladores estabilizantes de DF definida no capítulo anterior por meio de aproximações racionais para  $P_{\alpha\nu}$  e com base em considerações de controle robusto.

Nesse sentido, serão formulados problemas de controle ótimo com base no funcional de custo introduzido acima, o qual é agora visto como uma função dos novos “parâmetros de projeto”  $Q$  e  $Q_r$  introduzidos no Capítulo 3 (ao invés de  $K$  e  $K_r$  como era anteriormente o caso).

Mais especificamente, como

$$J(K, K_r) = J_{cl}(K) + J_r(K, K_r) \quad \text{onde}$$

$$J_{cl}(K) = \|(F_0 + F_L \mathcal{P}(K) F_R) \Phi_{ev}\|_2^2 \quad e \quad J_r(K, K_r) = \|(F_{r0} + F_L \mathcal{P}_r(K, K_r)) \Phi_r\|_2^2,$$

um problema de controle ótimo pode ser formulado com base na Proposição 3.9 envolvendo controladores estabilizantes de DF, qual seja:

$$\min_{(K, K_r) \in S_K} J(K, K_r)$$

onde  $S_K = \{(\mathcal{K}(Q), \mathcal{K}_r(Q, Q_r)) : Q \in S_Q \text{ e } Q_r \in RH_\infty^{m \times m_r}\}$

ou, equivalentemente,

**Prob. 1:**  $\min_{Q \in S_Q(\gamma), Q_r \in RH_\infty^{m \times m_r}} J_Q(Q, Q_r)$

onde  $J_Q(Q, Q_r) \triangleq J(\mathcal{K}(Q), \mathcal{K}_r(Q, Q_r))$ , i.e.

$$\begin{aligned} J_Q(Q, Q_r) &= J_{cl}^Q(Q) + J_r^Q(Q, Q_r), \quad \text{onde} \\ J_{cl}^Q(Q) &\triangleq J_{cl}(K(Q)) \\ J_r^Q(Q, Q_r) &\triangleq J_r(K(Q), K_r(Q, Q_r)) \end{aligned}$$

onde  $Q = (I - K\hat{P}_{yu})^{-1}K$  e  $Q_r = (I - K\hat{P}_{yu})^{-1}K_r$ .

Para escrever  $J_Q(Q, Q_r)$  explicitamente em termos de  $Q$  e  $Q_r$ , note-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(K) &= (I - KP_{yu})^{-1}K = (I - K\hat{P}_{yu} - KE_{yu})^{-1}K \\ &= \{(I - K\hat{P}_{yu})(I - (I - K\hat{P}_{yu})^{-1}KE_{yu})\}^{-1}K \\ &= (I - \hat{\mathcal{P}}(K)E_{yu})^{-1}\hat{\mathcal{P}}(K) \quad \text{o que implica em} \\ \mathcal{P}(\mathcal{K}(Q)) &= (I - QE_{yu})^{-1}Q \quad (\text{já que } \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{K}(Q)) = Q). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r(K, K_r) &= (I - \hat{\mathcal{P}}(K)E_{yu})^{-1}\hat{\mathcal{P}}_r(K, K_r) \Rightarrow \\ \mathcal{P}_r(\mathcal{K}(Q), K_r(Q, Q_r)) &= (I - QE_{yu})^{-1}Q_r \quad (\text{já que } \hat{\mathcal{P}}_r(\mathcal{K}(Q), \mathcal{K}_r(Q, Q_r)) = Q_r). \end{aligned}$$

Segue-se que,  $J_{cl}^Q(Q)$  e  $J_r^Q(Q, Q_r)$  podem ser escritos como

$$\begin{aligned} J_{cl}^Q(Q) &= \|(F_0 + F_L T_E(Q)Q F_R)\Phi_{ev}\|_2^2 \\ J_r^Q(Q, Q_r) &= \|(F_{r0} + F_L T_E(Q)Q_r)\Phi_r\|_2^2 \end{aligned}$$

onde  $T_E(Q) = (I - QE_{yu})^{-1}$ .

Observa-se, então, que embora o Prob. I tenha sido formulado sobre uma classe de matrizes de funções racionais ( $Q$  e  $Q_r$ ), as matrizes de funções  $P_{\mathcal{A}d}$ ,  $P_{\mathcal{A}u}$ ,  $P_{yd}$ ,  $P_{yu}$  e  $E_{yu}$  que aparecem no funcional de custo não são necessariamente racionais.

Uma dificuldade adicional é a presença dos termos não-lineares  $T_E(Q)Q$  e  $T_E(Q)Q_r$  em  $(Q, Q_r)$  as quais se devem ao erro de aproximação  $E_{yu}$  (se  $E_{yu} \rightarrow 0$ , então  $T_E(Q) \rightarrow I$  e, portanto,  $T_E(Q)[Q:Q_r] \rightarrow [Q:Q_r]$ ).

Torna-se então natural aproximar cada  $P_{\alpha\varsigma}$ ,  $\alpha = \mathcal{A}, y$ ,  $\varsigma = d, u$  por uma



matriz de funções racionais  $\hat{P}_{\alpha\varsigma}$  e, com base em limitantes superiores para normas dos erros de aproximação  $E_{\alpha\varsigma}$  correspondentes, definir problemas de otimização envolvendo apenas funções racionais, os quais devem se constituir em aproximações progressivamente melhores para o Prob. I a medida que  $E_{\alpha\varsigma}$  se torna menor. Isso é feito na próxima seção.

## 4.2

### Limitantes superiores para os índices de desempenho

As funções

$$\mathcal{T}_J(Q) = F_0 + F_L T_E(Q) Q F_R \quad e \quad \mathcal{T}_{J_r}(Q, Q_r) = F_{r0} + F_L T_E(Q) Q_r$$

são agora reescritas em uma forma conveniente, i.e., separando os termos “nominais” (que só dependem de  $\hat{P}_{\alpha\nu}$ ) dos que dependem de  $E_{\alpha\nu} = P_{\alpha\nu} - \hat{P}_{\alpha\nu}$ .

**Proposição 4.1** *Seja  $\hat{P}_{\alpha\varsigma} \in \mathcal{M}(RH_\infty)$ ,  $P_{\alpha\varsigma} = \hat{P}_{\alpha\varsigma} + E_{\alpha\varsigma}$ ,  $\alpha = \mathfrak{d}, y$   $\varsigma = d, u$  e*

$$E = \begin{bmatrix} E_{\mathfrak{d}d} & E_{\mathfrak{d}u} \\ E_{yd} & E_{yu} \end{bmatrix}. \quad \text{Seja} \quad \hat{F}_R = [\hat{P}_{yd} : \hat{P}_{yu} : I], \quad \hat{F}_L = \begin{bmatrix} \hat{P}_{\mathfrak{d}u} \\ \rho_u^{\frac{1}{2}} I \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}_0 = \begin{bmatrix} \hat{P}_{\mathfrak{d}d} & \hat{P}_{\mathfrak{d}u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{F}_{r0} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então  $\mathcal{T}_J(Q) = \mathcal{T}_J^0(Q) + \Delta(E, Q)$  e  $\mathcal{T}_{J_r}(Q, Q_r) = \mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r) + \Delta_r(E, Q, Q_r)$  onde  $\mathcal{T}_J^0(Q)$  e  $\mathcal{T}_{J_r}^0(Q)$  são funções afins dadas por

$$\mathcal{T}_J^0(Q) = \hat{F}_0 + \hat{F}_L Q \hat{F}_R \quad e \quad \mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r) = \hat{F}_{r0} + \hat{F}_L Q_r$$

(as quais dependem apenas de funções racionais),

$$\begin{aligned} \Delta(E, Q) &= \hat{F}_{\Delta L}(Q) E (I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q) E)^{-1} \hat{F}_{\Delta R}(Q), \\ \Delta_r(E, Q, Q_r) &= \hat{F}_{\Delta L}(Q) E (I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q) E)^{-1} M_a Q_r, \end{aligned}$$

$$M_a = \begin{bmatrix} 0_{m_d \times m} \\ I_m \end{bmatrix}, \quad \hat{M}_a^T = \begin{bmatrix} 0_{p \times m_{\mathfrak{d}}} & \vdots & I_p \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_{\Delta Q}(Q) = M_a Q \hat{M}_a^T,$$

$$\hat{F}_{\Delta L}(Q) = M_L + \hat{F}_L Q \hat{M}_a^T, \quad \hat{F}_{\Delta R}(Q) = M_R + M_a Q \hat{F}_R,$$

$$M_L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad M_R = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

▽

*Demonstração:*

Note-se, inicialmente, que

$$\mathcal{T}_J(Q) = F_0 + F_L \mathcal{P}(K) F_R = F_0 + F_L T_E(Q) Q F_R$$

onde  $T_E(Q) \triangleq (I - Q E_{yu})^{-1}$ ,  $E = \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}d} & E_{\mathcal{S}u} \\ E_{yd} & E_{yu} \end{bmatrix}$ . Assim sendo, para escrever,

$$\mathcal{T}_J(Q) = \mathcal{T}_J^0(Q) + \Delta(E, Q)$$

onde  $\mathcal{T}_J^0(Q)$  depende somente das funções de transferência nominais  $\{\hat{P}_{\alpha\beta} : \alpha = \mathcal{S}, y, \beta = d, u\}$ , reescreve-se  $\mathcal{T}_J(Q)$  na forma

$$\mathcal{T}_J(Q) = (\hat{F}_0 + E_{F_0}) + (\hat{F}_L + E_{F_L}) T_E(Q) Q (\hat{F}_R + E_{F_R})$$

o que leva imediatamente a  $\mathcal{T}_J(Q) = \mathcal{T}_J^0(Q) + \Delta(E, Q)$  (já que  $T_E(Q) = I + Q E_{yu} (I - Q E_{yu})^{-1}$ ) onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_J^0(Q) &\triangleq \hat{F}_0 + \hat{F}_L Q \hat{F}_R \quad \text{e} \\ \Delta(E, Q) &= E_{F_0} + \hat{F}_L T_E(Q) Q E_{F_R} + E_{F_L} T_E(Q) Q \hat{F}_R + \\ &\quad E_{F_L} T_E(Q) Q E_{F_R} + \hat{F}_L Q E_{yu} T_E(Q) Q \hat{F}_R. \end{aligned}$$

Observa-se, a seguir, que

$$E_{F_0} = \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}d} & E_{su} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_L E M_R,$$

$$M_L \triangleq \begin{bmatrix} I_{m_{\mathcal{S}}} & 0_{m_{\mathcal{S}} \times p} \\ 0_{m \times m_{\mathcal{S}}} & 0_{m_{\mathcal{S}} \times p} \end{bmatrix}, \quad M_R \triangleq \begin{bmatrix} I_{m_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0_{m \times p} \end{bmatrix},$$

$$E_{F_L} = \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}u} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} = M_L E M_a, \quad M_a = \begin{bmatrix} 0_{m_d \times m} \\ I_m \end{bmatrix},$$

$$E_{F_R} = \begin{bmatrix} E_{yd} & E_{yu} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{p \times m_{\mathcal{S}}} & \vdots & I_p \end{bmatrix} E M_R$$

$$E_{F_R} = \hat{M}_a^T E M_R \quad \text{onde} \quad \hat{M}_a^T \triangleq \begin{bmatrix} 0_{p \times m_{\mathcal{S}}} & \vdots & I_p \end{bmatrix}, \quad \text{e}$$

finalmente que  $E_{yu} = \hat{M}_a^T E M_a$ . Segue-se que  $\Delta(E, Q)$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\Delta(E, Q) = & M_L E M_R + \hat{F}_L T_E(Q) Q (\hat{M}_a^T E M_R) + \hat{F}_L Q (\hat{M}_a^T E M_a) T_E(Q) Q \hat{F}_R \\ & + (M_L E M_a) T_E(Q) Q \hat{F}_R + (M_L E M_a) T_E(Q) Q (\hat{M}_a^T E M_R)\end{aligned}$$

Adicionando o primeiro e o ultimo termo do lado direito da equação de acima obtém-se

$$M_L E (I + M_a T_E(Q) Q \hat{M}_a^T E) M_R \quad (4-1)$$

Como

$$\begin{aligned}M_a T_E(Q) Q \hat{M}_a^T E &= M_a (I - Q \hat{M}_a^T E M_a)^{-1} Q \hat{M}_a^T E \\ &= (I - M_a Q \hat{M}_a^T E)^{-1} M_a Q \hat{M}_a^T E \\ &= - (I + (-M_a Q \hat{M}_a^T E))^{-1} (-M_a Q \hat{M}_a^T E) \\ &= - \left\{ I - (I - M_a Q \hat{M}_a^T E)^{-1} \right\},\end{aligned}$$

a equação (4-1) pode ser expressa da seguinte maneira

$$M_L E (I - M_a Q \hat{M}_a^T E)^{-1} M_R = M_L (I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1} E M_R$$

Sendo assim,  $\Delta(E, R)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Delta(E, R) = & M_L (I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1} E M_R + \hat{F}_L Q \hat{M}_a^T E M_a T_E(Q) Q \hat{F}_R \\ & + \hat{F}_L T_E(Q) Q (\hat{M}_a^T E M_R) + (M_L E M_a) T_E(Q) Q \hat{F}_R\end{aligned}$$

Note-se agora que

$$T_E(Q) Q \hat{M}_a^T = (I - Q \hat{M}_a^T E M_a)^{-1} Q \hat{M}_a^T = Q \hat{M}_a^T (I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1}$$

de modo que o terceiro termo de  $\Delta(E, R)$  acima, pode ser escrito como

$$\hat{F}_L Q \hat{M}_a^T (I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1} E M_R;$$

Consequentemente,

$$\Delta(E, Q) = (M_L + \hat{F}_L Q \hat{M}_a^T) (I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1} E M_R + (M_L + \hat{F}_L Q \hat{M}_a^T) E M_a T_E(Q) Q \hat{F}_R.$$

Finalmente,

$$E M_a T_E(Q) Q = E M_a (I - Q \hat{M}_a^T E M_a)^{-1} Q = (I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1} E M_a Q,$$

$$\Delta(E, Q) = (M_L + \hat{F}_L Q M_a^T)(I - E M_a Q \hat{M}_a^T)^{-1} E (M_R + M_a Q \hat{F}_R),$$

$$\Delta(E, Q) = \hat{F}_{\Delta L}(Q) E (I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q) E)^{-1} \hat{F}_{\Delta R}(Q),$$

onde

$$\hat{F}_{\Delta L}(Q) \triangleq M_L + \hat{F}_L Q \hat{M}_a^T,$$

$$\hat{F}_{\Delta R}(Q) \triangleq M_R + M_a Q \hat{F}_R, \quad \text{e}$$

$$\hat{F}_{\Delta Q}(Q) \triangleq M_a Q \hat{M}_a^T.$$

■

Com base na Proposição 4.1, o Prob. 1 pode ser reescrito da seguinte forma

$$\min_{Q \in S_Q(\gamma), Q_r \in RH_\infty^{m \times m_r}} \|\mathcal{T}_J^0(Q) \Phi_{ev} + \Delta(E, Q) \Phi_{ev}\|_2^2 + \|\mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r) \Phi_r + \Delta_r(E, Q, Q_r) \Phi_r\|_2^2$$

Na expressão acima para o funcional de custo aparecem os termos nominais  $\mathcal{T}_J^0(Q) \Phi_{ev}$  e  $\mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r) \Phi_r$  que dependem apenas das funções de transferência racionais  $\hat{P}_{\alpha\nu}$  tomadas como aproximações para  $P_{\alpha\nu}$ . Contudo, os termos de perturbação  $\Delta(E, Q) \Phi_{ev}$  e  $\Delta_r(E, Q, Q_r) \Phi_r$  dependem de  $E_{\alpha\nu} = P_{\alpha\nu} - \hat{P}_{\alpha\nu}$  e, portanto, envolvem funções de transferência não-rationais. Assim sendo, para considerar apenas funções racionais em procedimentos de síntese de controladores faz-se aqui necessário substituir as funções de transferência  $E_{\alpha\nu}$  por limitantes superiores em suas normas  $H_\infty$  (como foi feito no Capítulo 3 para fins de estabilização em malha fechada). Essa mudança equivale a substituir nos “cálculos de projeto” cada função de transferência  $E_{\alpha\nu}$  pelo conjunto de funções de transferência cujas normas  $H_\infty$  são menores do que os limitantes mencionados.

Uma consequência imediata dessa abordagem é que a restrição de estabilidade em malha fechada  $\|Q\|_\infty \leq \gamma_{yu}^{-1}$ ,  $\gamma_{yu} > \|E_{yu}\|_\infty$  pode não ser suficiente para assegurar desempenho adequado de um controlador que a satisfaça. Isso se deve ao fato de que

$$I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q) E = I - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} E_{yd} & E_{yu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -Q E_{yd} & I - Q E_{yu} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1}\|_{\infty} \geq \|(I - QE_{yu})^{-1}\|_{\infty}$$

e, portanto, quando  $\|Q\|_{\infty}$  se aproxima de  $\gamma_{yu}^{-1}$ ,  $\|(I - QE_{yu})^{-1}\|_{\infty}$  pode-se tornar arbitrariamente grande, se  $\|E_{yu}\|_{\infty} \approx \gamma_{yu}$ , o que poderia levar a valores correspondentemente grandes de  $\|\Delta(E, Q)\|_{\infty}$  e de  $\|\Delta_r(E, Q, Q_r)\|_{\infty}$  (já que  $[\Delta(E, Q); \Delta_r(E, Q, Q_r)] = \hat{F}_{\Delta L}(Q)E(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1}[\hat{F}_{\Delta R}(Q); M_a Q_r]$ ) e, portanto, a valores grandes de  $\|\Delta(E, Q)\Phi_{ev}\|_2$  e de  $\|\Delta_r(E, Q, Q_r)\Phi_r\|_2$ . Para evitar essa possibilidade, consideram-se, então limitantes superiores sobre essas normas  $H_2$  com base nos quais podem ser definidos limitantes superiores para o funcional de custo acima. A síntese de controladores será então abordada por meio dos últimos.

A proposição enunciada a seguir apresenta esses limitantes para o caso simplificado em que  $W_L = I$ ,  $W_R = I$  (que será considerado a seguir).

**Proposição 4.2 (Limitantes  $\hat{\eta}_{er}$  e  $\hat{\eta}_{ref}$ )**

a) Os termos de perturbação  $\Delta(E, Q)\Phi_{ev}$  e  $\Delta_r(E, Q, Q_r)\Phi_r$  são limitados da seguinte forma:

$$\|\Delta(E, Q)\Phi_{ev}\|_2 \leq \hat{\eta}_{er}(Q)$$

$$\|\Delta_r(E, Q, Q_r)\Phi_r\|_2 \leq \hat{\eta}_{ref}(Q, Q_r)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{er}(Q) &= \|\hat{F}_{\Delta L}(Q)\|_{\infty} \left\{ (\gamma_{\beta d}^2 + \gamma_{yd}^2)^{\frac{1}{2}} \|\Phi_d\|_2 + \right. \\ &\quad \left. \mu_{er}(Q) \left\{ (\|Q\hat{P}_{yd}\Phi_d\|_2 + \|Q\|_{\infty} \gamma_{yd} \|\Phi_d\|_2)^2 + \|Q\Phi_v\|_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\hat{\eta}_{ref}(Q, Q_r) = \|\hat{F}_{\Delta L}(Q)\|_{\infty} \mu_{er}(Q) \|Q_r \Phi_r\|_2^2,$$

$$\text{sendo } \mu_{er}(Q) \triangleq (\gamma_{\beta u}^2 + \gamma_{yu}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \|Q\|_{\infty} \gamma_{yu})^{-1}.$$

b) Os funcionais  $J_{cl}^Q(\cdot)$  e  $J_r^Q(\cdot, \cdot)$  são correspondentemente limitados da seguinte forma:

$$J_{cl}^Q(Q) \leq (\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 + \hat{\eta}_{er}(Q))^2 \quad e$$

$$J_r^Q(Q, Q_r) \leq (\|\mathcal{T}_{Jr}^0(Q_r)\Phi_r\|_2 + \hat{\eta}_{ref}(Q, Q_r))^2.$$

▽

*Demonstração:*

Note-se inicialmente, que

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\Delta Q}(Q)E &= M_a Q \hat{M}_a^T E = \begin{bmatrix} 0_{m_d \times p} \\ Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{yd} & E_{yu} \end{bmatrix} & \Longleftrightarrow \\ \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E &= \begin{bmatrix} 0_{m_d \times m_d} & 0_{m_d \times m} \\ QE_{yd} & QE_{yu} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Segue-se que

$$I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E = \begin{bmatrix} I_{m_d \times m_d} & 0_{m_d \times m} \\ -QE_{yd} & I - QE_{yu} \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$$(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Z & (I - QE_{yu})^{-1} \end{bmatrix}$$

onde  $Z - (I - QE_{yu})^{-1}QE_{yd} = 0 \Leftrightarrow Z = (I - QE_{yu})^{-1}QE_{yd}$ . Assim sendo,

$$(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (I - QE_{yu})^{-1}QE_{yd} & (I - QE_{yu})^{-1} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (I - QE_{yu})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ QE_{yd} & I \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Note-se também que

$$\hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_e = \begin{bmatrix} \Phi_d & 0 \\ Q\hat{P}_{yd}\Phi_d & Q\Phi_v \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ QE_{yd} & I \end{bmatrix} \hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_e = \begin{bmatrix} \Phi_d & 0 \\ QE_{yd}\Phi_d + Q\hat{P}_{yd}\Phi_d & Q\Phi_v \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{cf. (4-2)}}$$

$$\begin{aligned}
E(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1}\hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_e &= E \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (I - QE_{yu})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_d & 0 \\ QE_{yd}\Phi_d + Q\hat{P}_{yd}\Phi_d & Q\Phi_v \end{bmatrix} \iff \\
E(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1}\hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_e &= \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}d} \\ E_{yd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}u} \\ E_{yu} \end{bmatrix} \times \\
&\quad (I - QE_{yu})^{-1} \begin{bmatrix} QE_{yd}\Phi_d + Q\hat{P}_{yd}\Phi_d & Q\Phi_v \end{bmatrix} \quad (4-3)
\end{aligned}$$

Tendo em vista que

$$\| QE_{yd}\Phi_d + Q\hat{P}_{yd}\Phi_d \quad Q\Phi_v \|_2^2 \leq \| QE_{yd}\Phi_d + Q\hat{P}_{yd}\Phi_d \|_2^2 + \| Q\Phi_v \|_2^2,$$

$$\| QE_{yd}\Phi_d + Q\hat{P}_{yd}\Phi_d \|_2 \leq \| Q\hat{P}_{yd}\Phi_d \|_2 + \| QE_{yd}\Phi_d \|_2 \leq \| Q\hat{P}_{yd}\Phi_d \|_2 + \| Q \|_\infty \gamma_{yd} \| \Phi_d \|_2,$$

e que

$$\left\| \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}d} \\ E_{yd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_d & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left\| \begin{bmatrix} E_{\mathcal{S}d} \\ E_{yd} \end{bmatrix} \right\|_\infty \| \Phi_d \|_2 \leq (\gamma_{\mathcal{S}d}^2 + \gamma_{yd}^2)^{\frac{1}{2}} \| \Phi_d \|_2,$$

segue-se de (4-3) que

$$\begin{aligned}
\| \Delta(E, Q)\Phi_{ev} \|_2 &\leq \| \hat{F}_{\Delta L}(Q) \|_\infty \left\{ (\gamma_{\mathcal{S}d}^2 + \gamma_{yd}^2)^{\frac{1}{2}} \| \Phi_d \|_2 + \right. \\
&\quad \left. \mu_{er}(Q) \left\{ (\| Q\hat{P}_{yd}\Phi_d \|_2 + \| Q \|_\infty \gamma_{yd} \| \Phi_d \|_2)^2 + \| Q\Phi_v \|_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

A demonstração de (a) é concluída observando-se que

$$J_{cl}^Q(Q) \leq (\| \mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev} \|_2 + \| \Delta(E, Q)\Phi_{ev} \|_2)^2$$

Uma derivação análoga permite demonstrar (b). ■

## 4.3

## Procedimento de síntese de controladores

Os limitantes

$$\hat{\eta}_{av} \triangleq \|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 + \hat{\eta}_{er}(Q) \quad \text{e} \quad (4-4)$$

$$\hat{\eta}_{av}^r \triangleq \|\mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r)\Phi_r\|_2 + \hat{\eta}_{ref}(Q, Q_r) \quad (4-5)$$

são critérios naturais para a avaliação dos controladores  $(K(Q), K_r(Q, Q_r))$  com  $Q \in S_Q(\gamma^{-1})$  que dependem apenas das funções de transferência racionais  $\hat{P}_{\alpha\nu}$  (modelo nominal) e dos limitantes  $\gamma_{\alpha\nu}$  nas normas  $H_\infty$  dos erros de aproximação (i.e.,  $\|P_{\alpha\nu} - \hat{P}_{\alpha\nu}\|_\infty \leq \gamma_{\alpha\nu}$ ). Contudo, otimizar globalmente tais critérios sobre o conjunto dos  $(Q, Q_r)$  admissíveis é bastante difícil dadas as formas pelos quais  $\hat{\eta}_{er}(Q)$  e  $\hat{\eta}_{ref}(Q, Q_r)$  dependem de  $Q$  e  $Q_r$ . Como consequência, considera-se a seguir um procedimento heurístico de dois estágios que consistem em:

- (a) Resolver um problema de otimização sobre a classe  $S_{Q, Q_r}(\mu) = \{(Q, Q_r) : Q \in S_Q(\mu), Q_r \in RH_\infty^{m \times m_r}\}$ , para vários valores de  $\mu$  (digamos,  $\mu \in S_\mu$ ), cujo funcional de custo depende apenas do modelo nominal  $\{\hat{P}_{\alpha\nu} : \alpha = d, y, \nu = d, u\}$ , i.e.,

$$\min_{S_{Q, Q_r}(\mu)} J_{cl}^0(Q) + J_{J_r}^0(Q_r)$$

o qual é equivalente a dois problemas independentes quais sejam

$$\textbf{Prob. a} \quad \min_{Q \in S_Q(\mu)} J_{cl}^0(Q) \quad \text{e} \quad \textbf{Prob. a}_r \quad \min_{Q_r \in \mathcal{M}(RH_\infty)} J_r^0(Q_r).$$

onde  $J_{cl}^0(Q) = \|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2$  e  $J_r^0(Q_r) = \|\mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r)\Phi_r\|_2$ , obtendo-se um subconjunto de controladores dados por

$$\{Q_{rob}(\mu) : \mu \in S_\mu\} \quad \text{e} \quad Q_r^0$$

- (b) Otimizar o funcional de custo

$$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu))^2 + \hat{\eta}_{av}^r(Q_{rob}(\mu), Q_r^0)^2$$

com respeito a  $\mu \in S_\mu$ .



A motivação para o passo (a) acima é que para “boas aproximações para  $P_{\alpha\nu}$ ”, (i.e.,  $\gamma_{\alpha\nu}$  “pequeno”) e  $\|W_{La}QW_{Ra}\|_{\infty} \ll \gamma^{-1}$

$$J_{cl}^0(Q) \approx J_{cl}^Q(Q) \quad \text{e} \quad J_r^0(Q) \approx J_r^Q(Q, Q_r)$$

(ou seja, o custo nominal “aproxima bem o custo ideal”).

A motivação para o passo (b) é a possível amplificação dos efeitos dos erros de aproximação medidos por  $\hat{\eta}_{er}$  e  $\hat{\eta}_{ref}$ , quando  $\|W_{La}QW_{Ra}\|_{\infty} \approx \gamma^{-1}$ ; assim sendo, escolhe-se um valor  $\mu_{\star} < \gamma^{-1}$  que define um controlador  $Q_{rob}(\mu_{\star})$  levando em conta, por meio de  $\hat{\eta}_{av}$  e  $\hat{\eta}_{av}^*$ , os efeitos dos erros de aproximação no funcional de custo ideal (i.e., no desempenho dos controladores atuando sobre o sistema de DI original).

Comentário O procedimento acima pode ser visto como um refinamento do processo de escolha de um controlador baseado apenas na minimização do custo nominal sob a restrição de estabilidade robusta. A manipulação da margem de estabilidade nominal  $\mu^{-1}$  no procedimento acima é uma maneira sistemática de escolher uma margem maior do que a mínima ( $\gamma_{yu}$ ) de modo a evitar valores relativamente grandes para  $\|\Delta(E, Q)\Phi_{ev}\|_2$  e de  $\|\Delta_r(E, Q, Q_r)\Phi_r\|_2$ , conforme discutido acima.  $\nabla$

Comentário O procedimento em dois estágios apresentado acima pode ser relacionado com a otimização, sobre os controladores estabilizantes, de um índice de desempenho obtido com um limitante um pouco mais conservador do que  $\hat{\eta}_{er}$ . Nesse sentido, note-se que  $\forall Q \in RH_{\infty}^{m \times p}$ ,

sendo  $[M_a \quad : \quad \hat{F}_{\Delta L}(Q)]$ , onde  $M_a = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ , obtêm-se,

$$\|\hat{F}_{\Delta L}(Q)\|_{\infty}^2 = \left\| \begin{bmatrix} M_a & : & \hat{F}_{\Delta L}(Q) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}^2 \leq 1 - \|\hat{F}_L Q\|_{\infty}^2 \leq 1 + \|\hat{F}_L\|_{\infty}^2 \|Q\|_{\infty}^2$$

$$\|Q\hat{P}_{yd}\Phi_d\|_2 \leq \|Q\|_{\infty} \|\hat{P}_{yd}\Phi_d\|_2 \quad \text{e} \quad \|Q\Phi_v\|_2 \leq \|Q\|_{\infty} \|\Phi_v\|_2$$

e, portanto,  $\forall Q$  tal que  $\|Q\|_{\infty} < \gamma_{yu}^{-1}$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{er}(Q) \leq \bar{\eta}_{er}(\|Q\|_{\infty}) &= (1 + \|\hat{F}_L\|_{\infty}^2 \|Q\|_{\infty}^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ (\gamma_{\mathcal{A}d}^2 + \gamma_{yd}^2)^{\frac{1}{2}} \|\Phi_d\|_2 + \right. \\ &\quad \left. (\gamma_{\mathcal{A}u}^2 + \gamma_{yu}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \|Q\|_{\infty} \gamma_{yu})^{-1} \|Q\|_{\infty} \left\{ (\|\hat{P}_{yd}\Phi_d\|_2 + \gamma_{yd} \|\Phi_d\|_2)^2 + \|\Phi_v\|_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

A escolha ótima de  $Q$  utilizando o limitante obtido com  $\bar{\eta}_{er}$  para avaliar o desempenho relativo a atenuação de perturbações corresponde a obter uma solução para o problema

$$\min_{\|Q\|_{\infty} < \gamma_{yu}^{-1}} \bar{\eta}_{av}(Q) \quad (4-6)$$

onde  $\bar{\eta}_{av}(Q) = \|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 + \bar{\eta}_{er}(\|Q\|_{\infty})$  ou, equivalentemente,

$$\min_{\mathcal{X} < \gamma_{yu}^{-1}} \min_{\|Q\|_{\infty} = \mathcal{X}} \|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 + \bar{\eta}_{er}(\mathcal{X}) \quad (4-7)$$

ou, ainda,

$$\min_{\mathcal{X} < \gamma_{yu}^{-1}} \left\{ \bar{\eta}_{er}(\mathcal{X}) + \min_{\|Q\|_{\infty} = \mathcal{X}} \|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 \right\} \quad (4-8)$$

Por outro lado, o procedimento acima consiste em escolher  $\mu$  resolvendo o problema  $\min_{\mu < \gamma_{yu}^{-1}} \hat{\eta}_{er}(Q_{rob}(\mu)) + \|\mathcal{T}_J^0(Q_{rob}(\mu))\Phi_{ev}\|_2$ .

Para comparar o desempenho dos controladores obtidos com os dois procedimentos, seja  $\mathcal{X}_{\star}$  o valor ótimo do problema dado por (4-8), e  $\bar{Q}_{\star}(\mathcal{X}_{\star})$  o controlador ótimo correspondente. Segue-se que

$$\bar{\eta}_{av}(\bar{Q}_{\star}(\mathcal{X}_{\star})) = \bar{\eta}_{er}(\mathcal{X}_{\star}) + \|\mathcal{T}_J^0(\bar{Q}_{\star}(\mathcal{X}_{\star}))\Phi_{ev}\|_2$$

onde  $\|\mathcal{T}_J^0(\bar{Q}_{\star}(\mathcal{X}_{\star}))\Phi_{ev}\|_2 = \min\{\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 : \|Q\|_{\infty} = \mathcal{X}_{\star}\}$ .

Observe-se que

$$\min\{\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 : \|Q\|_{\infty} \leq \mathcal{X}\} \leq \min\{\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev}\|_2 : \|Q\|_{\infty} = \mathcal{X}\}$$

e que, portanto,  $\tilde{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star})) \triangleq \bar{\eta}_{er}(\mathcal{X}_{\star}) + \|\mathcal{T}_J^0(Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star}))\Phi_{ev}\|_2 \leq \bar{\eta}_{av}(\bar{Q}_{\star}(\mathcal{X}_{\star}))$ .

Além disso  $\hat{\eta}_{er}(Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star})) \leq \bar{\eta}_{er}(\|Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star})\|_{\infty}) \leq \bar{\eta}_{er}(\mathcal{X}_{\star})$ .

Decorre então das últimas duas desigualdades que

$$\hat{\eta}_{er}(Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star})) + \|\mathcal{T}_J^0(Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star}))\Phi_{ev}\|_2 \leq \tilde{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mathcal{X}_{\star})) \leq \bar{\eta}_{av}(\bar{Q}_{\star}(\mathcal{X}_{\star})).$$

Seque-se que

$$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*)) = \min \{ \bar{\eta}_{er}(Q_{rob}(\mu)) + \|\mathcal{T}_J^0(Q_{rob}(\mu))\Phi_{ev}\|_2 : \mu < \gamma_{yu}^{-1} \} \leq \bar{\eta}_{av}(Q_*(\mathcal{X}_*)).$$

Comparando, então, o efeito de perturbações sobre os sistemas em malha fechada constituídos pelo sistema de DI dado por  $P$  sob a ação dos controladores dados por  $Q_{rob}(\mu_*)$  (procedimento acima) e  $\bar{Q}_*(\mathcal{X}_*)$  (solução ótima da equação (4-6)), pode-se assegurar um menor (ou igual) valor para tal efeito no caso de  $Q_{rob}(\mu_*)$  do que com o controlador ótimo para o problema dado por (4.6) (já que  $\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*)) \leq \bar{\eta}_{av}(\bar{Q}_*(\mathcal{X}_*))$ ).  $\nabla$

Esta formulação relativamente simples pode ser um pouco refinada considerando aproximações de primeira ordem (com relação a  $E$ ) para  $\Delta(E, Q)\Phi_{ev}$  e  $\Delta_r(E, Q, Q_r)\Phi_r$  quais sejam:

$$\begin{aligned} \Delta(E, Q)\Phi_{ev} &= \hat{F}_{\Delta L}(Q)E(\hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_{ev}) \quad e \\ \Delta_r(E, Q, Q_r)\Phi_r &= \hat{F}_{\Delta L}(Q)E(M_a Q_r \Phi_r), \end{aligned}$$

e modificando os *Prob. a* e *Prob. a<sub>r</sub>* com a introdução de funções de  $(Q, Q_r)$  baseadas nos coeficientes a direita é a esquerda dos termos de primeira ordem acima. Uma possibilidade nesta linha é substituir, no procedimento acima, a minimização dos funcionais de custo nominais, i.e. os problemas *Prob. a* e *Prob. a<sub>r</sub>* por *Prob. b* e *Prob. b<sub>r</sub>* dados por

$$\textbf{Prob. b} \quad \min_{Q \in \bar{S}_Q(\gamma)} J_{cl}^0(Q) + \mu_J \|W_{Ra}^{-1} \hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_{ev}\|_2^2$$

$$\textbf{Prob. br} \quad \min_{Q_r \in \mathcal{M}(RH_\infty)} J_r^0(Q_r) + \mu_{J_r} \|W_{Ra}^{-1} M_a Q_r \Phi_r\|_2^2$$

e então ajustar  $\mu$ ,  $\mu_J$  e  $\mu_{J_r}$  conforme sugerido no segundo estágio do procedimento em questão.

Um novo procedimento em dois passos seria então formulado da seguinte forma

- Resolver os *Prob. b* e *Prob. b<sub>r</sub>* para vários valores de  $\bar{\mu} = (\mu, \mu_J, \mu_{J_r}), \mu < \gamma^{-1}$  (digamos,  $\bar{\mu} \in S_{\bar{\mu}}$ ) obtendo  $\bar{Q}_{rob}(\bar{\mu}), \bar{Q}_r$ .
- Minimizar o funcional de custo em (b) com respeito a  $\bar{\mu} \in S_{\bar{\mu}}$ .

Alternativamente, outras formulações podem ser consideradas no sentido de levar em conta a priori os efeitos dos termos de perturbação, seguindo o problema de controle robusto estudado em (Corrêa e Freire, 2008).

Neste sentido, note-se que

$$\Delta(E, Q) = \mathcal{X}(E, Q)\hat{F}_{\Delta R}(Q) \quad e \quad \Delta_r(E, Q, Q_r) = \mathcal{X}(E, Q)M_a Q_r$$

onde  $\mathcal{X}(E, Q) = \hat{F}_{\Delta L}(Q)E(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1}$ .

$$\text{Ademais, } X = \mathcal{X}(E, Q) \Leftrightarrow X = \hat{F}_{\Delta L}(Q)E(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E)^{-1}$$

$$\Rightarrow X(I - \hat{F}_{\Delta Q}(Q)E) = \hat{F}_{\Delta L}(Q)E \Leftrightarrow X = (X\hat{F}_{\Delta Q}(Q) + \hat{F}_{\Delta L}(Q))E$$

$$\Rightarrow X = (X\hat{F}_{\Delta Q}(Q) + \hat{F}_{\Delta L}(Q))W_{La}^{-1}(W_{La}EW_{Ra})W_{Ra}^{-1}$$

$$\Rightarrow XW_{Ra} = (X\hat{F}_{\Delta Q}(Q) + \hat{F}_{\Delta L}(Q))W_{La}^{-1}\overline{E} \quad \text{onde } \overline{E} = W_{La}EW_{Ra}.$$

Condições necessárias em  $X$  podem ser obtidas se  $E \in S_E(\epsilon)$ , onde  $S_E(\epsilon) = \{E \text{ estável: } \|W_{La}EW_{Ra}\|_\infty \leq \epsilon\}$ , tais como

$$\|XW_{Ra}\|_\infty \leq \|A_c(X, Q)\|_\infty \epsilon,$$

$$\forall w \in \mathbb{R}, \|(XW_{Ra})(jw)\|_s \leq \|A_c(X, Q)(jw)\|_s \epsilon,$$

$$\|g_0 XW_{Ra}\|_2^2 \leq \|g_0 A_c(X, Q)\|_2^2 \epsilon^2 \text{ ou}$$

$$\forall i = 1, \dots, \forall w \in \mathbb{R}, \|(e_i^T g_0 XW_{Ra})(jw)\|_E^2 \leq \|(e_i^T g_0 A_c(X, Q))(jw)\|_E^2 \epsilon^2$$

$$\text{onde } A_c(X, Q) = (X\hat{F}_{\Delta Q}(Q) + \hat{F}_{\Delta L}(Q))W_{La}^{-1}$$

o que leva a definições correspondentes do conjunto dos  $X$  que satisfazem a condição escolhida, o qual é denotado por  $S_X(\epsilon, Q)$ .

Pode-se então formular problemas de “desempenho pior-caso” tais como:

$$\textbf{Prob. c: } \min_{Q \in S_Q(\gamma^{-1}), Q_r \in \mathcal{M}(RH_\infty)} \overline{J}(Q, Q_r),$$

onde

$$\overline{J}(Q, Q_r) = \sup\{\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev} + X\hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_{ev}\|_2^2 + \|\mathcal{T}_{J_r}^0(Q_r)\Phi_r + XM_a Q_r \Phi_r\|_2^2 : X \in S_X(\epsilon, Q)\}$$

ou, para recuperar a separação dos objetivos associados a  $Q$  e  $Q_r$  (ainda que isto corresponda a uma avaliação mais conservadora de  $(Q$  e  $Q_r)$ ).

Comentário Como os problemas acima são de fato problemas *min – max* bem mais difíceis de resolver do que os problemas anteriormente considerados, surge a possibilidade de usar  $\overline{J}(Q, Q_r)$  apenas como um limitante superior potencialmente menos conservador do que

$$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu))^2 + \hat{\eta}_{av}^r(Q_{rob}(\mu), Q_r^0)^2$$

no procedimento sugerido acima. Nesse caso, o estágio (b) do referido procedimento seria dado por

$$\min_{\mu \in S_u} \overline{J}(Q_{rob}(\mu), Q_r^0)$$

▽

$$\mathbf{Prob. d:} \min_{Q \in S_Q(\gamma)} \overline{J}_{cl}(Q) \quad \mathbf{Prob. d_r:} \min_{Q_r \in \mathcal{M}(RH_\infty)} \overline{J}_r(Q_r).$$

onde

$$\overline{J}_{cl}(Q) = \sup\{\|\mathcal{T}_J^0(Q)\Phi_{ev} + X\hat{F}_{\Delta R}(Q)\Phi_{ev}\|_2^2 : X \in S_X(\epsilon, Q)\},$$

$$\overline{J}_r(Q_r) = \sup\{\|\mathcal{T}_r^0(Q_r)\Phi_r + X_r M_a Q_r \Phi_r\|_2^2 : X_r \in S_X(\epsilon, Q_*)\}$$

e  $Q_*$  é uma solução aproximada para o **Prob. d**.

No próximo capítulo, será examinado em detalhe o primeiro procedimento em dois passos apresentado acima, considerando-se apenas o caso de atenuação de perturbações (portanto, apenas  $Q$  deverá ser escolhido) e o caso particular ( $W_L = I$ ,  $W_R = I$ ).

Nesse trabalho, será explorado em detalhe o caso da atenuação de perturbações (para  $W_L = I$  e  $W_R = I$ ) usando o procedimento de dois estágios esboçados acima. A aplicação desse procedimento ao caso em que se considera também objetivos de rastreamento bem como as formulações alternativas (e computacionalmente mais complexas) expressas pelos problemas b - d constituem-se em temas para trabalhos subsequentes.

## 4.4

## Calculo dos Limitantes

Nessa seção, serão obtidos limitantes superiores  $\gamma_{\alpha\nu}$  para as normas  $H_\infty$  das diferenças  $E_{\alpha\nu}$  entre as funções de transferência  $P_{\alpha\nu}$  do sistema de DI original correspondente a equação do calor simplificada e as aproximações “nominais”  $\hat{P}_{\alpha\nu}$ .

**Proposição 4.3 (Calculo de  $\gamma_{\alpha\nu}$ )** *Considere as funções de transferência*

$$P_{\alpha\nu}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} C_\alpha[\phi_k](sI - \lambda_k)^{-1} B_\nu[\phi_k] \quad e$$

$$\hat{P}_{\alpha\nu}(s) = \sum_{k=1}^N C_\alpha[\phi_k](sI - \lambda_k)^{-1} B_\nu[\phi_k].$$

*O limitante superior  $\gamma_{\alpha\nu}$  para  $\|E_{\alpha\nu}\|_\infty$  é caraterizado da seguinte maneira:*

Seja  $E_{\alpha\nu} \triangleq P_{\alpha\nu} - \hat{P}_{\alpha\nu}$ , i.e.,

$$E_{\alpha\nu}(s) = \sum_{k=N+1}^{\infty} C_\alpha[\phi_k](s - \lambda_k)^{-1} B_\nu[\phi_k],$$

ou, equivalentemente,

$$E_{\alpha\nu}(s) = E_{\alpha\nu}^a(s) + E_{\alpha\nu}^b(s).$$

Então,  $\|E_{\alpha\nu}\|_\infty \leq \gamma_{\alpha\nu} \triangleq \|E_{\alpha\nu}^a\|_\infty + \gamma_{\alpha\nu}^b$ , onde

$$E_{\alpha\nu}^a = \sum_{k=N+1}^{N_a} C_\alpha[\phi_k](s - \lambda_k)^{-1} B_\nu[\phi_k], \quad (4-9)$$

$$\gamma_{\alpha\nu}^b = \frac{1}{(N_a + 1)^2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{m_\alpha} \|\varphi_{\alpha i}\|_\chi^2 \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{m_\nu} \|\beta_{\nu i}\|_\chi^2 \right\}, \quad (m_y = p, \quad m_u = m) \quad (4-10)$$

e

$$\|E_{yu}^b\|_\infty \leq \gamma_{\alpha\nu}^b \triangleq \frac{1}{(N_a + 1)^2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{1}{b_{yi} - a_{yi}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4-11)$$

▽

*Demonstração:*

$$\begin{aligned}
\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} &\leq \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \|C_{\alpha}[\phi_k]g_k B_{\nu}[\phi_k]\|_{\infty} \Rightarrow \\
\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} &\leq \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \|g_k\|_{\infty} \|C_y[\phi_k]B_u[\phi_k]\|_S \quad \text{onde } g_k(s) \triangleq (s - \lambda_k)^{-1} \Rightarrow \\
\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} &\leq \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \left( \frac{1}{|\lambda_k|} \right) \|C_{\alpha}[\phi_k]B_{\nu}[\phi_k]\|_S \\
\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} &\leq \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \left( \frac{1}{|\lambda_k|} \right) \|C_{\alpha}[\phi_k]\|_E \|B_{\nu}[\phi_k]\|_E
\end{aligned}$$

assim sendo,

$$\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} \leq \left\{ \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \left( \frac{1}{|\lambda_k|} \right) \|C_{\alpha}[\phi_k]\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \left( \frac{1}{|\lambda_k|} \right) \|B_{\nu}[\phi_k]\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

então

$$\begin{aligned}
\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} &\leq \frac{1}{|\lambda_{N_a+1}|} \left\{ \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^p |\langle \varphi_{\alpha i}, \phi_k \rangle|^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \sum_{j=1}^m |\langle \beta_{\nu j}, \phi_k \rangle|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} &\leq \frac{1}{|\lambda_{N_a+1}|} \left\{ \sum_{i=1}^p \sum_{k=N_a+1}^{\infty} |\langle \varphi_{\alpha i}, \phi_k \rangle|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=N_a+1}^{\infty} \sum_{j=1}^m |\langle \beta_{\nu j}, \phi_k \rangle|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4-12)
\end{aligned}$$

Finalmente, observando-se que

$$\|\varphi_{\alpha i}\|_{\chi}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \varphi_{\alpha i}, \phi_k \rangle|^2 \quad \text{e} \quad \|\beta_{\nu i}\|_{\chi}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \beta_{\nu i}, \phi_k \rangle|^2$$

segue-se que

$$\sum_{k=N_a+1}^{\infty} |\langle \varphi_{\alpha i}, \phi_k \rangle|^2 \leq \|\varphi_{\alpha i}\|_{\chi}^2 - \sum_{k=1}^{N_a} |\langle \varphi_{\alpha i}, \phi_k \rangle|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{k=N_a+1}^{\infty} |\langle \beta_{\nu i}, \phi_k \rangle|^2 \leq \|\beta_{\nu i}\|_{\chi}^2 - \sum_{k=1}^{N_a} |\langle \beta_{\nu i}, \phi_k \rangle|^2,$$

e, portanto,

$$\sum_{k=N_a+1}^{\infty} |\langle \varphi_{\alpha\nu}, \phi_k \rangle|^2 \leq \|\varphi_{\alpha\nu}\|_{\chi}^2 \quad \text{e} \quad \sum_{k=N_a+1}^{\infty} |\langle \beta_{\nu i}, \phi_k \rangle|^2 \leq \|\beta_{\nu i}\|_{\chi}^2.$$

Substituindo em 4-12 obtem-se

$$\|E_{\alpha\nu}^b\|_{\infty} \leq \gamma_{\alpha\nu}^b \triangleq \frac{1}{|\lambda_{N_a+1}|} \left\{ \sum_{i=1}^p \|\varphi_{\alpha i}\|_{\chi}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^m \|\beta_{\nu j}\|_{\chi}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4-13)$$

e, como  $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ , (4-10) segue imediatamente de (4-13).

No caso particular do trabalho da tese,  $\varphi_y$  é a medida do sensor sobre uma região a qual é expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \varphi_{y_i}(x) &= \frac{1}{b_{y_i} - a_{y_i}} \quad \forall x \in [a_{y_i} - b_{y_i}], \\ \varphi_{y_i}(x) &= 0 \quad \forall x \notin [a_{y_i} - b_{y_i}]. \end{aligned}$$

Assim sendo

$$\|\varphi_{y_i}\|_{\chi}^2 = \left( \frac{1}{b_{y_i} - a_{y_i}} \right)^2 \int_{a_{y_i}}^{b_{y_i}} dx = \frac{1}{b_{y_i} - a_{y_i}} \quad (4-14)$$

Da mesma maneira, a ação espacial do atuador é caracterizada por  $\beta(x)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \beta_{a_i}(x) &= 1 \quad \forall x \in [a_i, b_i], \\ \beta_{a_i}(x) &= 0 \quad \forall x \notin [a_i, b_i] \end{aligned}$$

então

$$\|\beta_{a_i}\|_{\chi}^2 = \int_{a_i}^{b_i} dx = (b_i - a_i) \quad (4-15)$$

Finalmente,  $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ , segue-se de 4-13 - 4-15 que

$$\|E_{yu}^b\|_{\infty} \leq \gamma_{yu}^b \triangleq \frac{1}{(N_a + 1)^2} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{1}{b_{y_i} - a_{y_i}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4-16)$$

■

Comentário: O termo  $\|E_{\alpha\nu}^a\|_{\infty}$  que só depende do modelo aumentado (funções de transferência racionais) é avaliado numericamente para a obtenção de  $\gamma_{\alpha\nu}$ .

▽



## 5

### Síntese de controladores

Nesse capítulo será apresentado em detalhe um procedimento em dois passos para a escolha de um controlador  $K$  que estabilize o sistema em malha fechada  $(P, K)$  (envolvendo o sistema original com funções de transferência  $P_{\alpha\nu}$  não-rationais) e tenha um bom desempenho no que diz respeito à atenuação das respostas a sinais de perturbação, conforme esboçado no Capítulo 4. Esse procedimento que é apresentado na seção 5.1 baseia-se em problema  $H_2$  irrestritos e problemas com funcional de custo  $H_2$  e restrição dada em termos de uma norma  $H_\infty$ . Assim sendo, as seções 5.2 e 5.3 tratam, respectivamente, do problema  $H_2$  irrestrito e do problema  $H_2$  (custo)/  $H_\infty$  (restrição). Em particular, na subseção 5.3.1 o problema  $H_2/H_\infty$  sobre um subespaço de dimensão finita (de possíveis  $Q$ ) é convertido em um problema de programação semi-definida cuja solução numérica é o ponto central na implementação computacional do procedimento de síntese considerado.

#### 5.1

##### Procedimento de síntese

Conforme mencionado anteriormente, um critério natural para avaliar o desempenho na atenuação de perturbações, de um controlador  $K$ , é dado por

$$J_{cl}(K) = \|(P_{\mathcal{S}d} + P_{\mathcal{S}u}\mathcal{P}(K)P_{yd})\Phi_d\|_2^2 + \|P_{\mathcal{S}u}\mathcal{P}(K)\Phi_v\|_2^2$$

( $J_{cl}(K)$  mede o efeito da perturbação e do ruído de medida na saída controlada  $\mathcal{S}$ ), onde  $\mathcal{P}(K) = (I - KP_{yu})^{-1}K$ , ou, equivalentemente, para controladores estabilizantes  $K(Q)$  parametrizados por  $Q \in RH_\infty^{m \times p}$  (cf. Capítulo 3),

$$J_{cl}(K(Q)) = \|F_{cl}(Q)\Phi_{dv}\|_2^2$$

onde a função de transferência  $F_{cl}(Q)$  de  $(d, v)$  para  $\mathcal{S}$  do sistema em malha fechada  $(P, K(Q))$  é dada (em função de  $Q$ ) por

$$F_{cl}(Q) \triangleq [P_{\mathcal{S}d} : 0] + P_{\mathcal{S}u}P_Q(Q)[P_{yd} : I_p]$$

onde  $P_Q(Q) = P(K(Q)) = (I - QE_{yu})^{-1}Q$ ,  $E_{yu} = P_{yu} - \hat{P}_{yu}$ ,  $\Phi_{dv} = \text{diag}(\Phi_d, \Phi_v)$ .

Contudo, devido à dependência de  $J_{cl}(K(Q))$  nas funções não-rationais  $P_{\alpha\nu}$ , foi apresentado no Capítulo 4 um limitante superior para o mesmo no qual

deve-se basear o procedimento de síntese de controladores, qual seja,  $\hat{\eta}_{av}(Q)^2$  dado por

$$\hat{\eta}_{av}(Q) = [\hat{J}_{cl}^Q(Q)]^{\frac{1}{2}} + \hat{\eta}_{er}(Q)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{J}_{cl}^Q(Q) &= \|\hat{F}_{cl}(Q)\Phi_{dv}\|_2^2 \quad \text{ou} \\ \hat{J}_{cl}^Q(Q) &= \|\hat{F}_{cl}(Q)\Phi_{dv}\|_2^2 + \rho_u\{\|Q\Phi_v\|_2^2 + \rho_d\|(Q\hat{P}_{yd})\Phi_d\|_2^2\}.\end{aligned}$$

$\hat{F}_{cl}(Q) = [\hat{P}_{sd} : 0] + \hat{P}_{su}Q[\hat{P}_{yd} : I_p]$ ,  $\hat{P}_{\alpha\nu}$  é a aproximação nominal (de dimensão  $N$ ) para  $P_{\alpha\nu}$  e  $\hat{\eta}_{er}$  é dado no Capítulo 4.

Seria então natural formular os problemas de síntese de controladores como (nesse caso,  $W_L = I$  e  $W_R = I$ )

$$\min_{Q \in RH_{\infty}^{m \times p}} \hat{\eta}_{av}(Q) \quad \text{sujeito a} \quad \|Q\|_{\infty} \leq \mu_{\max}$$

onde  $\mu_{\max}$  é menor do que (e próximo a)  $\gamma_{yu}^{-1}$  (note-se que quando  $\|Q\|_{\infty} \rightarrow \gamma_{yu}^{-1}$ ,  $\hat{\eta}_{er}(Q) \rightarrow \infty$ ).

Contudo, embora  $F_{cl}(Q)\Phi_{dv}$  seja uma função afim de  $Q$  a dependência não-linear de  $\hat{\eta}_{er}$  em  $Q$  tomaria tal otimização muito difícil.

Considera-se, então, um procedimento em dois passos, cuja motivação se baseia na observação heurística de que para “boas aproximações” de  $P_{\alpha\nu}$  (i.é.,  $\gamma_{\alpha\nu}$  “pequenos”)  $\hat{\eta}_{er}(Q)$  é “pequeno” desde que  $\|Q\|_{\infty}$  não seja “grande” e  $\|Q\|_{\infty}\gamma_{yu}$  não seja “muito próximo” de 1. Assim sendo, considera-se o seguinte procedimento em dois passos:

Seja  $S_{\mu}$  um subconjunto de  $0 < \mu \leq \mu_{\max}$ .

– 1º passo Resolver o problema:

$$\text{Prob. I}(\mu) : \min_{Q \in RH_{\infty}^{m \times p}} \hat{J}_{cl}^Q(Q) \quad \text{sujeito a} \quad \|Q\|_{\infty} \leq \gamma$$

para todo  $\mu \in S_{\mu}$  obtendo uma coleção de controladores estabilizantes dados por  $\{Q_{rob}(\mu) : \mu \in S_{\mu}\}$ .

– 2º passo Resolver o problema:

$$\min_{\mu \in S_{\mu}} \hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu))$$

obtendo  $\mu_*$  e o correspondente  $Q_{rob}(\mu_*)$  que define o controlador estabilizante escolhido  $K(Q_{rob}(\mu_*))$ .

Comentário: Como as demandas computacionais relativas à solução numérica do Prob. I( $\mu$ ) são bem maiores do que aquelas requeridas para avaliar  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))$ , pode-se utilizar um modelo nominal “ampliado” (i.é. de dimensão  $N_a > N$ ) para as aproximações requeridas na avaliação de  $Q(\mu)$  com vistas a obter limitantes mais precisos do que  $\hat{\eta}_{av}$ .

Mais, precisamente, pode-se substituir  $\hat{\eta}_{av}(Q)$  no segundo passo por  $\eta_{av}^a(Q)$  onde  $\eta_{av}^a(Q) = \|F_{cl}^a(Q)\Phi_{dv}\|_2 + \eta_{er}^a(Q)$  onde

$$F_{cl}^a(Q) = [P_{sd}^a : 0] + P_{su}^a P_Q^a(Q) [P_{yd}^a : I]$$

$P_Q^a = (I - QE_{yu}^a)^{-1}Q$ ,  $E_{yu}^a = P_{yu} - P_{yu}^a$ ,  $\{P_{\alpha\nu}^a\}$  são as aproximações de dimensão “ampliada”  $N_a > N$  ( $N$  é a dimensão das aproximações  $\hat{P}_{\alpha\nu}$ ) e  $\eta_{er}^a(Q)$  é a versão de  $\hat{\eta}_{er}(Q)$  (cf. Proposição 4.2) obtida pela substituição de  $\hat{P}_{\alpha\nu}$  por  $P_{\alpha\nu}^a$  e de  $E_{\alpha\nu}$  por  $E_{\alpha\nu}^a$ .  $\nabla$

O ponto central do procedimento descrito acima é a solução do problema Prob.I( $\mu$ ) para  $\mu \leq \mu_{\max}$ . Note-se que se a solução do problema irrestrito

$$\text{Prob. II : } \min_{Q \in RH_{\infty}^{m \times p}} \hat{J}_{cl}^Q(Q)$$

denotada por  $Q_{H_2}$ , for tal que  $\|Q_{H_2}\|_{\infty} < \gamma_{yu}^{-1}$ , então  $\mu_{\max} \leq \|Q_{H_2}\|_{\infty}$ . Assim sendo, em geral, pode-se, definir

$$\mu_{\max} = \gamma_{\mu} \min(\|Q_{H_2}\|_{\infty}, \gamma_{yu}^{-1})$$

onde  $\gamma_{\mu}$  é um número real menor do que e próximo a 1, de modo que é necessário resolver o Prob II antes de iniciar o primeiro passo do procedimento de síntese. Além disso, a obtenção de  $Q_{H_2}$  permite definir um subespaço de  $RH_{\infty}^{m \times p}$  digamos  $S_Q^0$  sobre o qual o problema

$$\min_{Q \in S_Q^0} \hat{J}_{cl}(Q), \quad \text{sujeito a } \|Q\|_{\infty} \leq \mu$$

(para  $\mu \leq \mu_{\max}$ ) pode ser efetivamente resolvido sem que o valor ótimo obtido seja muito superior ao do Prob. I( $\mu$ ).

Tal subespaço pode ser definido da seguinte forma: seja  $(A_{H_2}, B_{H_2}, C_{H_2})$  uma realização mínima para  $Q_{H_2}$  (i.e.,  $Q_{H_2}(s) = C_{H_2}(sI - A_{H_2})^{-1}B_{H_2}$ ). O

subespaço  $S_Q^0$  pode ser definido por

$$S_Q^0 = \{Q(C) : C \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}\}$$

onde  $Q(C)(s) = C(sI - A_{H_2})^{-1}B_{H_2}$  e  $A_{H_2} \in \mathbb{R}^{n_{H_2} \times n_{H_2}}$ .

Nas seções subsequentes desse capítulo são apresentados os resultados que possibilitam a obtenção de soluções aproximadas para os problemas  $H_2$  e  $H_2/H_\infty$  utilizados no procedimento de síntese descrito acima.

## 5.2

### Problema $H_2$ irrestrito

Nessa seção, resolve-se o seguinte problema irrestrito

$$\text{Prob. II: } \min_{Q \in RH_2^{m \times p}} \hat{J}_{cl}(Q) \quad (5-1)$$

Note-se que  $\hat{J}_{cl}(Q)$  contém um termo de regularização  $\rho_u \{\|Q\Phi_v\|_2^2 + \rho_d \|(Q\hat{P}_{yd})\Phi_d\|_2^2\}$  o qual garante a existência de uma única solução e pode impedir que o sinal de controle tome valores excessivamente grandes (o que pode ser útil por razões de segurança, conservação de equipamento, consumo de energia, etc).

Tem-se, então,

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|(\hat{P}_{\mathcal{S}u}Q)\Phi_v\|_2^2 + \rho_d \|(\hat{P}_{\mathcal{S}d} + \hat{P}_{\mathcal{S}u}Q\hat{P}_{yd})\Phi_d\|_2^2 + \rho_u \{\|Q\Phi_v\|_2^2 + \rho_d \|(Q\hat{P}_{yd})\Phi_d\|_2^2\}.$$

$\hat{J}_{cl}(Q)$  (no caso  $\rho_u \neq 0$ ) pode ser reescrito como

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \left\| \begin{bmatrix} \hat{P}_{\mathcal{S}u} \\ \rho_u^{\frac{1}{2}} I \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{yd} \Phi_d : \Phi_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{\mathcal{S}d} \Phi_d \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{cl}(Q) &= \left\langle \left( \hat{P}_{\mathcal{S}u} + \rho_u^{\frac{1}{2}} I \right) Q \left( \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{yd} \Phi_d + \Phi_v \right), \left( \hat{P}_{\mathcal{S}u} + \rho_u^{\frac{1}{2}} I \right) Q \left( \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{yd} \Phi_d + \Phi_v \right) \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \left( \hat{P}_{\mathcal{S}u} + \rho_u^{\frac{1}{2}} I \right) Q \left( \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{yd} \Phi_d + \Phi_v \right), \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{\mathcal{S}d} \Phi_d \right\rangle + \left\langle \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{\mathcal{S}d} \Phi_d, \rho_d^{\frac{1}{2}} \hat{P}_{\mathcal{S}d} \Phi_d \right\rangle \end{aligned}$$

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \left\langle \left( \hat{P}_{\mathcal{S}u}^{\sim} \hat{P}_{\mathcal{S}u} + \rho_u I \right) Q \left( \rho_d \hat{P}_{yd} \Phi_d \left( \hat{P}_{yd} \Phi_d \right)^{\sim} + \Phi_v \Phi_v^{\sim} \right), Q \right\rangle$$

$$+ 2 \left\langle Q, \rho_d \hat{P}_{\mathcal{S}u}^{\sim} \hat{P}_{\mathcal{S}d} \Phi_d \left( \hat{P}_{yd} \Phi_d \right)^{\sim} \right\rangle + \rho_d \left\| \hat{P}_{\mathcal{S}d} \Phi_d \right\|_2^2$$

ou, equivalentemente

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \langle \Gamma_a Q \Gamma_b, Q \rangle + 2\langle Q, \Xi_{cl} \rangle + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2 \quad (5-2)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \hat{P}_{su}^\sim \hat{P}_{su} + \rho_u I, \\ \Gamma_b &= \rho_d \hat{P}_{yd} \Phi_d (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim + \Phi_v \Phi_v^\sim, \\ \Xi_{cl} &= \rho_d \hat{P}_{su}^\sim \hat{P}_{sd} \Phi_d (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim. \end{aligned}$$

Para obter uma solução explícita do problema de otimização (5-1), são utilizadas fatorações espectrais das funções de transferências  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_b$ , da seguinte forma:  $\Gamma_a = \phi_a^\sim \phi_a$  e  $\Gamma_b = \phi_b \phi_b^\sim$ , onde  $\phi_a$ ,  $\phi_a^{-1}$ ,  $\phi_b$  e  $\phi_b^{-1} \in RH_\infty$  (Francis, 1987), sendo caracterizado  $\hat{J}_{cl}(Q)$  em função desses fatores espectrais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{J}_{cl}(Q) &= \langle \phi_a^\sim \phi_a Q \phi_b \phi_b^\sim, Q \rangle + 2\langle (\phi_a^{-1} \phi_a) Q (\phi_b \phi_b^{-1}), \Xi_{cl} \rangle + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2 \\ \hat{J}_{cl}(Q) &= \langle \phi_a Q \phi_b, \phi_a Q \phi_b \rangle + 2\langle \phi_a Q \phi_b, (\phi_a^{-1})^\sim \Xi_{cl} (\phi_b^{-1})^\sim \rangle + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2 \\ \hat{J}_{cl}(Q) &= \|\phi_a Q \phi_b\|_2^2 + 2\langle \phi_a Q \phi_b, \Xi_{ab} \rangle + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2 \end{aligned}$$

onde  $\Xi_{ab} = (\phi_a^{-1})^\sim \Xi_{cl} (\phi_b^{-1})^\sim$ . Completando quadrados,  $\hat{J}_{cl}(Q)$  ser reescrito como

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|\phi_a Q \phi_b + \Xi_{ab}\|_2^2 - \|\Xi_{ab}\|_2^2 + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2$$

Note-se, que  $\Xi_{ab}$  possui uma decomposição em uma função estável  $(\Xi_{ab})_+$  (onde  $\{\}_+$  denota a projeção ortogonal de  $\mathcal{M}(RL_2)$  em  $\mathcal{M}(RH_2)$ ) e em uma função instável  $(\Xi_{ab})_-$ , i.e.,  $\Xi_{ab} = (\Xi_{ab})_+ + (\Xi_{ab})_-$ , de modo que

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|\phi_a Q \phi_b + (\Xi_{ab})_+ - (\Xi_{ab})_-\|_2^2 - \|\Xi_{ab}\|_2^2 + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|\phi_a Q \phi_b + \hat{\Xi}_{ab}\|_2^2 - 2\langle \phi_a Q \phi_b + \hat{\Xi}_{ab}, (\Xi_{ab})_- \rangle + \|(\Xi_{ab})_-\|_2^2 - \|\Xi_{ab}\|_2^2 + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2.$$

Como  $\langle \phi_a Q \phi_b + \hat{\Xi}_{ab}, (\Xi_{ab})_- \rangle = 0$  (Ver Lema A.1. (Corrêa, 1992)), tem-se

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|\phi_a Q \phi_b + \hat{\Xi}_{ab}\|_2^2 + \|(\Xi_{ab})_-\|_2^2 - \|\Xi_{ab}\|_2^2 + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2,$$

como  $\|\Xi_{ab}\|_2^2 = \|(\Xi_{ab})_+\|_2^2 + \|(\Xi_{ab})_-\|_2^2$ ,

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|\phi_a Q \phi_b + \hat{\Xi}_{ab}\|_2^2 - \|\hat{\Xi}_{ab}\|_2^2 + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2$$

onde  $\hat{\Xi}_{ab} = (\Xi_{ab})_+$ .

Definindo-se  $\hat{Q} = \phi_a Q \phi_b$ , o problema da equação (5-1) é reformulado da seguinte forma:

$$\min_{\hat{Q} \in RH_\infty} \hat{J}_{ab}(\hat{Q}) \quad (5-3)$$

onde  $\hat{J}_{ab}(\hat{Q}) = \|\hat{Q} + \hat{\Xi}_{ab}\|_2^2 - \|\hat{\Xi}_{ab}\|_2^2 + \rho_d \|\hat{P}_{sd} \Phi_d\|_2^2$ .

Comentário: Note-se que a transformação  $Q \in RH_2^{m \times p} \Leftrightarrow \hat{Q} = \phi_a Q \phi_b$  é bijetora pois, como  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são fatores espectrais,  $\forall \hat{Q} \in RH_2^{m \times p}$ ,  $\phi_a^{-1} \hat{Q} \phi_b^{-1} \in RH_2^{m \times p}$  e  $\phi_a Q \phi_b = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ .  $\nabla$

Dessa maneira, a condição para otimalidade depende somente pela expressão  $\|\hat{Q} + \hat{\Xi}_{ab}\|_2^2$ , já que os demais termos não dependem de  $\hat{Q}$ . Note-se que  $\forall \hat{Q} \in RH_\infty^{m \times p}$ ,  $\hat{J}_{ab}(\hat{Q}) \geq \hat{J}_{ab}(\hat{Q}_{H_2})$  onde  $\hat{Q}_{H_2} = -\hat{\Xi}_{ab}$ . Sendo assim  $Q_{H_2} \in RH_\infty$  é solução do problema da equação (5-1) se e somente se  $Q_{H_2} = \phi_a^{-1} \hat{Q}_{H_2} \phi_b^{-1}$ , i.e.,

$$Q_{H_2} = -\phi_a^{-1} \{(\phi_a^{-1})^\sim \hat{\Xi}_{ab} (\phi_b^{-1})^\sim\}_+ \phi_b^{-1} \quad (5-4)$$

Segundo o exposto pode-se enunciar o seguinte Teorema.

**Teorema 5.1** *Suponha que  $\rho_u > 0$  e que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\forall w \in \mathbb{R}$ ,  $\Gamma_b(jw) \geq \epsilon I$  e sejam  $\phi_a$  e  $\phi_b$  fatores espectrais de  $\Gamma_a = \phi_a^\sim \phi_a$  e  $\Gamma_b = \phi_b \phi_b^\sim$ . Então a única solução  $Q_{H_2}$  do Problema II é dada por*

$$Q_{H_2} = -\phi_a^{-1} \{(\phi_a^{-1})^\sim \Xi_{ab} (\phi_b^{-1})^\sim\}_+ \phi_b^{-1}.$$

$\nabla$

As principais operações envolvidas na obtenção de uma realização para  $Q_{H_2}$  (isto é,  $A_{Q_2}$ ,  $B_{Q_2}$  e  $C_{Q_2}$  tais que  $Q_{H_2}(s) = C_{Q_2}(sI - A_{Q_2})^{-1} B_{Q_2}$ ), são a obtenção de realizações para os fatores espectrais ( $\phi_a$  e  $\phi_b$ ) e para a projeção  $\{(\phi_a^{-1})^\sim \hat{\Xi}_{ab} (\phi_b^{-1})^\sim\}_+$ .

Assim sendo, cabe observar que a obtenção de uma realização para a projeção  $\{G_1^\sim G G_2^\sim\}_+$  com  $G \in MRH_2$  e  $G_i \in MRH_\infty$  consiste basicamente da resolução de uma equação linear matricial do tipo  $AX + XB = C$  com  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidos pelas matrizes das realizações de  $G$ ,  $G_1$  e  $G_2$ , como expressa o seguinte Lema.

**Lema 5.2** *(Corrêa et al. 1997) Seja  $G = G_3^\sim G_2 G_1^\sim$  onde  $G_l \in \mathcal{M}(RH_\infty)$ ,*

$G_2 \in \mathcal{M}(RH_2)$ ,  $G_l(s) = C_l(sI - A_l)^{-1}B_l + D_l$ ,  $D_2 = 0$ ,  $A_l$  é estável. Então,

$$(G)_+(s) = (D_3^T C_2 + B_3^T M_3^2)(sI - A_2)^{-1}(M_1^1 C_1^T + B_2 D_1^T)$$

onde  $M_1^1 A_1^T + A_2 M_1^1 = -B_2 B_1^T$  e  $M_3^2 A_2^T + A_3^T M_3^2 = -C_3^T C_2$ .  $\nabla$

Por outro lado a obtenção de realizações de fatores espectrais consiste fundamentalmente da resolução de equações de Ricatti da seguinte maneira

**Definição 5.3** (Francis, 1987) Considere uma matriz quadrada  $\Gamma(s)$  com as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\Gamma, \Gamma^{-1} &\in RL_\infty^{q \times q} \\ \Gamma^\sim &= \Gamma \quad (\text{onde } \Gamma^\sim(s) = \Gamma(-s)) \\ \Gamma(\infty) &> 0\end{aligned}$$

Tais matrizes possuem polos e zeros simétricos em relação ao eixo imaginário. O objetivo é obter um fator espectral  $\phi$  de  $\Gamma$  i.e.,  $\phi$  tal que

$$\begin{aligned}\Gamma &= \phi^\sim \phi \\ \phi, \phi^{-1} &\in RH_\infty^{q \times q}.\end{aligned}$$

$\nabla$

Para calcular a fatoração espectral, obtêm-se primeiramente uma decomposição aditiva de  $\Gamma$  na forma

$$\Gamma = D + \Gamma_0 + \Gamma_0^\sim$$

onde  $\Gamma_0 \in RH_2^{q \times q}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{q \times q}$  e  $\Gamma_0^\sim(s) = \Gamma_0(-s)$ . Para uma realização mínima  $(A_0, B_0, C_0)$  de  $\Gamma_0$ , são calculados as matrizes  $A = A_0 - B_0 D^{-1} C_0$ ,  $R = B_0 D^{-1} B_0^T$  e  $Q = -C_0^T D^{-1} C_0$ . Obtém-se então  $X$  que satisfaz a seguinte equação de Ricatti  $A^T X + X A - X R X + Q = 0$ . Finalmente é obtido uma realização para o fator espectral  $\phi$ , qual seja,

$$(A_0, B_0, D^{-\frac{1}{2}}(C_0 + B_0^T X), D^{\frac{1}{2}}).$$

No caso em questão, deseja-se obter os fatores espectrais de

$$\Gamma_a = \hat{P}_{\mathcal{A}u}^\sim \hat{P}_{\mathcal{A}u} + \rho_u I \quad \text{e} \quad \Gamma_b = \rho_d \hat{P}_{y_d} \Phi_d (\hat{P}_{y_d} \Phi_d)^\sim + \Phi_v \Phi_v^\sim$$

Inicialmente, como  $\hat{P}_{\mathcal{A}u}$  é estritamente própria deve-se escrever  $\Gamma_a$  na forma  $\Gamma_a = \{(\hat{P}_{\mathcal{A}u})^\sim \hat{P}_{\mathcal{A}u}\}_+ + \{(\hat{P}_{\mathcal{A}u})^\sim \hat{P}_{\mathcal{A}u}\}_- + \rho_u I$ . Pode-se obter uma realização para

$\{(\hat{P}_{\mathcal{D}u})^\sim \hat{P}_{\mathcal{D}u}\}_+$  por meio do Lema 5.2 com  $G = \hat{P}_{su}^\sim \hat{P}_{su}$ , i.e.,

$$G = G_3^\sim G_2 G_1^\sim$$

onde  $G_3^\sim = \hat{P}_{\mathcal{D}u}^\sim$ ,  $G_2 = \hat{P}_{\mathcal{D}u}$  e  $G_1 = I$ . Segue-se do Lema 5.2 que

$$(G)_+(s) = B_3^T M_3^2 (sI - A_2)^{-1} B_2$$

onde  $M_3$  é obtida resolvendo-se a equação de Lyapunov

$$A_3^T M_3^2 + M_3^2 A_2^T + C_3^T C_2 = 0.$$

Obtêm-se, assim, a realização  $(A_p, B_p, C_p)$  de  $(G)_+(s)$  onde

$$A_p = A_2, \quad B_p = B_2, \quad \text{e} \quad C_p = B_3^T M_3^2$$

calculam-se então as matrizes:

$$\begin{aligned} A &= A_p - B_p D^{-1} C_p, \\ R &= B_p D^{-1} B_p^{-T} \\ Q &= -C_p^T D^{-1} C_p \end{aligned}$$

sendo  $D = \rho_u I$ . Obtêm-se então, a solução da equação de Ricatti

$$A^T X + X A - X R X + Q = 0$$

Finalmente uma realização para o fator espectral  $\phi_a$  é dada por

$$(A_p, B_p, D^{-\frac{1}{2}}(C_p + B_p^T X), D^{\frac{1}{2}}).$$



Para obter a fatoração espectral de

$$\Gamma_b = \rho_d \hat{P}_{yd} \Phi_d (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim + \Phi_v \Phi_v^\sim$$

no caso de ruído branco (i.e.,  $\Phi_v \Phi_v^\sim = D_v \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ), primeiramente escreve-se  $\Gamma_b$  da seguinte forma  $\Gamma_b = \{\rho_d \hat{P}_{yd} \Phi_d (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim\}_+ + \{\rho_d \hat{P}_{yd} \Phi_d (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim\}_- + \Phi_v \Phi_v^\sim$  e como no caso anterior é obtida uma realização para  $\{\rho_d \hat{P}_{yd} \Phi_d (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim\}_+$  por meio do Lema 5.2, onde

$$G = G_3^\sim G_2 G_1^\sim$$

sendo  $G_3^\sim = I$ ,  $G_2 = \hat{P}_{yd} \Phi_d$  e  $G_1 = (\hat{P}_{yd} \Phi_d)^\sim$ . Segue-se do Lema 5.2 que

$$(G)_+(s) = C_2(sI - A_2)^{-1} M_1^1 C_1^T$$

onde  $M_1^1$  é obtida resolvendo-se a equação de Lyapunov. Para utilizar a definição 5.3 onde  $\Gamma = \phi^\sim \phi$ , calculamos a transposta de  $\{G\}_+(s)$  sendo a realização  $(A_{p2}, B_{p2}, C_{p2})$  de  $\{G\}_+^\sim(s)$

$$A_{p2} = -A_2^T, \quad B_{p2} = -C_2^T, \quad \text{e} \quad C_{p2} = (M_1^1 C_1^T)^T$$

Calculam-se as matrizes

$$\begin{aligned} A &= A_{p2} - B_{p2} D_v^{-1} C_{p2}, \\ R &= B_{p2} D_v^{-1} B_{p2}^{-T} \\ Q &= -C_{p2}^T D_v^{-1} C_{p2} \end{aligned}$$

obtendo-se as equação de Ricatti  $A^T X + X A - X R X + Q = 0$ , sendo finalmente a realização para o fator espectral  $\phi_b$  dada por

$$(A_{p2}, B_{p2}, D_v^{-\frac{1}{2}}(C_{p2} + B_{p2}^T X), D_v^{\frac{1}{2}}).$$

### 5.3

#### Problema $H_2$ com restrição $H_\infty$

Nesta seção é resolvido o seguinte problema com restrição

$$\min_{Q \in S_Q^0} \hat{J}_{cl}(Q) \quad \text{sujeito a} \quad \|Q\|_\infty \leq \mu. \quad (5-5)$$

Problemas de minimização com funcional de custo dado pela norma  $H_2$  de uma função afim da variável de decisão (digamos)  $Q$  e uma restrição dada pela norma  $H_\infty$  de outra função afim de  $Q$  foram abordadas de diversas maneiras na literatura existente, conforme a breve revisão apresentada a seguir.

- (i) Foram estudadas modificações da formulação original nas quais o funcional de custo é substituído por um limitante superior relacionando uma função afim com a restrição ((Bernstein e Haddad, 1989), (Khargonekar e Rotea, 1991), (Doyle et al. 1990), (Zhou et al. 1990), (Yeh et al. 1990), (Mustafa, 1989), (Glover e Mustafa, 1989)) - essa mudança do funcional de custo dá origem a chamada medida de desempenho mista  $H_2/H_\infty$  ou no caso de Mustafa (1989) e Glover, et. al (1989) a um funcional de custo baseado em uma definição de entropia. No primeiro caso, Khargonekar e Rotea (1991) mostram que tal modificação do problema original pode ser decomposta em um problema de estimação  $H_\infty$  e um problema de dimensão finita convexa para assim determinar um controlador por meio de uma realimentação de estado.
- (ii) Seguindo uma abordagem distinta, em (Scherer, 1995) considera-se uma solução subótima do problema  $H_2/H_\infty$  para controladores de ordem pré-especificada. Essa abordagem consiste, basicamente, em substituir duas desigualdades matriciais envolvendo dois distintos conjuntos de parâmetros desconhecidos (tais desigualdades expressam condições necessárias e suficientes para que um dado controlador seja solução subótima) por duas desigualdades matriciais envolvendo o mesmo conjunto de parâmetros desconhecidos (passando portanto a sob-condições apenas suficientes para subotimalidade), dando origem a um problema, LMI. As duas desigualdades matriciais correspondem as índices de desempenho  $H_2$  e de viabilidade de uma  $H_\infty$  em questão.
- (iii) Em (Corrêa e Sales, 2003) é explorada a estrutura convexa do problema original e a simplicidade do funcional de custo quadrático, por meio a um procedimento baseado no gradiente do funcional de custo que evolui no espaço linear das matrizes de funções racionais próprias e estáveis. Este procedimento gera uma sequência de soluções factíveis com

decrecimento do valor do funcional custo por meio do deslocamento ao longo das direções descendentes factíveis, as quais são escolhidas a cada passo com base em projeções do gradiente no conjunto factível. A correspondente sequência dos valores do funcional custo convergem para valor ótimo do problema  $H_2/H_\infty$ .

- (iv) Uma abordagem por dualidade é explorada em (Corrêa e Sales, 2010), na minimização do problema  $H_2$  com restrição  $H_2$  e  $H_\infty$ . Esta abordagem envolve a geração de sequências de multiplicadores de Lagrange dinâmicos (tomados em classes lineares de dimensão finita) para obter limites inferiores do valor ótimo do problema original. É demonstrado que a maximização do funcional dual pode ser convertida em um problema de programação linear semi-definida.

Uma outra abordagem para a obtenção de soluções aproximadas para problemas  $H_2/H_\infty$  baseia-se no confinamento do parâmetro de Youla a um subespaço de dimensão finita pré-especificado (conforme sugerido em (Boyd et al. 1988)). Nesse caso, obtém-se uma versão do problema em questão que é equivalente a um problema de programação (linear) semidefinida (SDLP) - para esse tipo de problema existem métodos numéricos eficientes para a obtenção de soluções aproximadas. Essa abordagem, por ser computacionalmente mais atraente, será seguida nesse trabalho. Conforme sugerido em (Corrêa e Sales, 2010), uma escolha natural para o subespaço em questão é definido por meio de um problema  $H_2$  irrestrito (ver detalhes na seção 5.3.1). Contudo, é conveniente poder estimar o quanto a escolha de um determinado subespaço de dimensão finita acarreta de perda de desempenho e, quando necessário, gerar outras possíveis escolhas para um tal subespaço. A formulação dual mencionada acima responde naturalmente à primeira questão já que gera limitantes inferiores para o custo ótimo do problema  $H_2/H_\infty$  e pode também ser útil em relação ao segundo ponto levantado.

Assim sendo, as próximas sub-seções tratam da conversão para um SDLP do problema  $H_2/H_\infty$  restrito a um dado subespaço de dimensão finita pré-especificado e da formulação dual acima mencionada.

### 5.3.1

#### Problema $H_2/H_\infty$ em um subespaço de dimensão finita

Da solução do Prob. II (cf. (5-1)) é obtida a realização mínima

$$(A_{H_2}, B_{H_2}, C_{H_2}) \quad \text{de} \quad Q_{H_2}$$

a qual é aproveitada para definir o subespaço  $S_Q^0$  da seguinte maneira

$$S_Q^0 = \{Q = CY_{H_2}B_{H_2} : C \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}\}$$

onde  $Y_{H_2}(s) = (sI - A_{H_2})^{-1}$ , sendo  $A_{H_2} \in \mathbb{R}^{n_{H_2} \times n_{H_2}}$ . Na procura de soluções nesse subespaço é parametrizada a classe de controladores estabilizantes robustas da seguinte forma:  $Q(s) = C(sI - A_{H_2})^{-1}B_{H_2} : C \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}$ , onde  $C$  é um parâmetro livre e pode ser escrito como

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_{H_2}} c_{ij} e_i(m) e_j(n_{H_2})^T$$

onde  $e_i(m)$  e  $e_j(m)$  são, respectivamente vetores das bases canônicas do  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , e  $c_{ij}$  os coeficientes. Sendo assim  $Q$  pode ser escrito em função de  $\{c_{ij}\}$  da seguinte forma:

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_{H_2}} c_{ij} e_i(m) e_j(n_{H_2})^T \right\} Y_{H_2} B_{H_2}.$$

A seguir será reparametrizada a classe  $S_Q^0$  em termos de  $\theta = [c_{11} \dots c_{1n_{H_2}} \cdot c_{21} \dots c_{2n_{H_2}} \dots c_{m1} \dots c_{mn_{H_2}}]^T$ , para ser incluída na solução do problema da equação (5-5), (a dimensão de  $C$  é a mesma dimensão de  $C_{H_2}$ ).  $\theta$  é definido como:  $\theta_{(i-1)n_{H_2}+j} = c_{ij}$  e, introduzindo  $E_{(i-1)n_{H_2}+j}^c = e_i(m) e_j(n_{H_2})^T$ , a parametrização de  $C$  em termos de  $\theta$  é dada por

$$C = \sum_{k=1}^{m \times n_{H_2}} \theta_k E_k^c$$

sendo assim, o subespaço  $S_Q^0$  é definido como

$$S_Q^0 = \left\{ Q(\theta) = \left( \sum_{k=1}^{m \times n_{H_2}} \theta_k E_k^c \right) Y_{H_2} B_{H_2} : \theta \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}} \right\}$$

Em seguida, será utilizada a mesma expressão de  $\hat{J}_{cl}(Q)$  usada na seção 8.1, mas incluindo a classe de controladores estabilizantes  $Q$  em termos de  $\theta$ .

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \|P_a Q P_b + P_0\|_2^2 \quad (5-6)$$

onde

$$\begin{aligned} P_a &= \begin{bmatrix} \hat{P}_{\mathfrak{A}u} \\ \rho_u^{1/2} I \end{bmatrix} \\ P_b &= \begin{bmatrix} \rho_d^{1/2} \hat{P}_{yd} \Phi_d \mid \Phi_v \end{bmatrix} \\ P_0 &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \rho_d^{1/2} \hat{P}_{\mathfrak{A}d} \Phi_d \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\hat{J}_{cl}(Q)$  pode ser rescrito (em termos de  $\theta$ )

$$\begin{aligned} \hat{J}_{cl}(Q) &= \langle P_a Q P_b, P_a Q P_b \rangle + 2 \langle P_0, P_a Q P_b \rangle + \|P_0\|_2^2 \\ \hat{J}_{cl}(Q(\theta)) &= \sum_{l=1}^{m \times n_{H_2}} \sum_{k=1}^{m \times n_{H_2}} \theta_l \theta_k \langle P_a E_l^c(Y_{H_2} B_{H_2}) P_b, P_a E_k^c(Y_{H_2} B_{H_2}) P_b \rangle \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{m \times n_{H_2}} \theta_k \langle P_0, P_a E_k^c(Y_{H_2} B_{H_2}) P_b \rangle + \|P_0\|_2^2 \end{aligned}$$

reescrevendo

$$\hat{J}_{cl}(Q(\theta)) = \theta^T R_\theta \theta + 2\theta_0^T \theta + \|P_0\|_2^2 \quad (5-7)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_0 &\in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}, \quad \{\theta_0\}_k = \langle P_0, P_a E_k^c(Y_{H_2} B_{H_2}) P_b \rangle \quad e \\ R_\theta &\in \mathbb{R}^{(m \times n_{H_2}) \times (m \times n_{H_2})}, \quad \{R_\theta\}_{l,k} = \langle P_a E_l^c(Y_{H_2} B_{H_2}) P_b, P_a E_k^c(Y_{H_2} B_{H_2}) P_b \rangle. \end{aligned}$$

O problema de otimização pode ser então definido como ( $W_R = I$  e  $W_L = I$ )

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}} \theta^T R_\theta \theta + 2\theta_0^T \theta + \|P_0\|_2^2 \quad \text{sujeito a} \quad \|Q(\theta)\|_\infty \leq \mu. \quad (5-8)$$

O problema definido em (5-8) tem funcional de custo linear e restrição dada por uma desigualdade envolvendo a norma infinita da matriz de funções racionais  $Q(\theta)$ . A restrição  $\|Q(\theta)\|_\infty \leq \mu$  pode ser formulada como uma desigualdade matricial linear (LMI) por meio do chamado “*Bounded Real Lemma*” apresentado a seguir para facilitar a leitura:

**Lema 5.4 (Bounded Real Lemma)** (cf. (Boyd et al. 1994) pg. 26)

Seja a LMIs  $P > 0$  e

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5-9)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , e  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , são matrizes dadas e  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a variável. Suponha-se que  $A$  é estável e ainda que  $(A, B, C)$  é uma realização controlável. Então a LMI dada é viável se e somente se o sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$ ,  $x(0) = 0$  é não expansivo, isto é,  $\int_0^T y(t)'y(t)dt \leq \int_0^T u(t)'u(t)dt$  para todo  $u$  e  $T \geq 0$ , ou, equivalentemente, se e somente se  $H_\infty \leq \gamma$  onde  $H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ .  $\nabla$

A equação (5-9) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} - I \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \leq 0,$$

de modo que, utilizando-se o chamado “complemento de Schur” (cf. (Zhou and Doyle, 1998) pg. 14), esta última desigualdade é convertida em

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & I \end{bmatrix} \leq 0$$

(note-se que agora tem uma desigualdade matricial definida por uma função afim da “variável de decisão”  $C$ ).

Sendo  $(A_{H_2}, B_{H_2}, C(\theta))$  uma realização de  $Q(\theta)$ , a restrição  $\|Q_{rob}(\theta)\|_\infty \leq \mu$  pode ser então reformulada como: existe  $S = S^T$  tal que  $S > 0$  e

$$R_H(S, \theta) = \begin{bmatrix} A_{Q_2}^T S + S A_{Q_2} & S B_{Q_2} & C(\theta) \\ B_{Q_2}^T S & -\mu^2 I & 0 \\ C(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

i.e., a restrição  $\|Q_{rob}(\theta)\|_\infty \leq \mu$  que defina a classe de controladores estabilizantes pode ser convertido em uma LMI envolvendo a matriz  $R_H(S, \theta)$ . Chega-se então ao problema

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}, S = S^T} \theta^T R_\theta \theta + 2\theta_0^T \theta + \|P_0\|_2^2 \quad \text{sujeito a} \quad R_H(S, \theta) \leq 0. \quad (5-10)$$

Finalmente, deve-se converter o problema acima em um outro com funcional de custo linear. Nesse sentido, note-se que

$$\theta^T R_\theta \theta = \min \{x : x \geq \theta^T R_\theta \theta\} = \min \{x : x - \theta^T R_\theta \theta \geq 0\}$$

ou equivalentemente, usando-se “complemento de Schur”

$$\theta^T R_\theta \theta = \min \{x : R_G(x, \theta) \geq 0\}$$

onde

$$R_G(x, \theta) = \begin{bmatrix} x & \theta^T R_\theta^{\frac{1}{2}} \\ R_\theta^{\frac{1}{2}} \theta & I \end{bmatrix}$$

Segue-se que o problema dado em (5-10) pode ser reformulado como um problema de minimização de um funcional linear sob restrições dadas por desigualdades matriciais lineares, qual seja

$$\begin{aligned} & \min_{\theta \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}, S = S^T \in \mathbb{R}^{n_{H_2} \times n_{H_2}}, x \in \mathbb{R}} x + 2\theta_0^T \theta \\ & \text{sujeito a } R_H(S, \theta) \leq 0, S \geq 0, R_G(x, \theta) \geq 0. \end{aligned} \quad (5-11)$$

Para obter soluções aproximadas para esse tipo de problemas, existem métodos numéricos muito eficientes (cf., (Gahinet e Nemirovski, 1997)).

Comentário: O calculo de  $\{\theta_0\}_k$  e  $\{R_\theta\}_{l,k}$  é realizado utilizando o seguinte Lema.  $\nabla$

**Lema 5.5** *Seja  $F(s) = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F$  e  $G(s) = C_G(sI - A_G)^{-1}B_G$  matrizes de funções em  $RH_2$  e  $(A_F, B_F, C_F)$  e  $(A_G, B_G, C_G)$  realizações mínimas das mesmas. Então*

$$\langle F, G \rangle = \text{tr}(C_F Q_{FG} C_G^T)$$

onde  $Q_{FG}$  é a única solução de  $A_F Q_{FG} + Q_{FG} A_G^T = -B_F B_G^T$ .  $\nabla$

O valor ótimo do Problema  $H_2/H_\infty$  com  $Q$  restrito a  $S_Q^0$  é um limitante superior sobre o valor ótimo do mesmo próprio sobre o conjunto de todos os  $Q$  estáveis. Assim sendo, é interessante obter estimativas do “perda de otimalidade” resultado do confinamento de  $Q$  a  $S_Q^0$ . Para essa finalidade e também para gerar outras classes lineares de  $Q$  pode-se recorrer uma abordagem do problema  $H_2/H_\infty$  por meio de dualidade Lagrangiana, conforme será explicado na próxima seção.

### 5.3.2

#### Abordagem por dualidade para o problema $H_2/H_\infty$

Será agora apresentada a abordagem por dualidade para obtenção de limitantes inferiores para o valor ótimo do seguinte problema, dado por (5-12) abaixo. A dedução a seguir é uma adaptação para o caso de uma única restrição  $H_2$  do tratamento dado em (Corrêa e Sales, 2010) para o caso de várias restrições  $H_2$  e  $H_\infty$ .

$$\min_{Q \in RH_2^{m \times p}} \hat{J}_{cl}(Q) \quad \text{sujeito a} \quad \|\mathcal{A}(Q)\|_\infty \leq \mu. \quad (5-12)$$

onde  $\hat{J}_{cl}(Q) = \|P_a Q P_b + P_0\|_2^2$  e  $\mathcal{A}(Q) = FQG + H$ .

Observe-se, inicialmente, que  $\|\mathcal{A}(Q)\|_\infty \leq \mu \iff$

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}(Q)^*(jw)\mathcal{A}(Q)(jw) \leq \mu^2 I \iff \forall \Lambda \in S_\Lambda, \quad \langle \Lambda, \mathcal{R}(Q) \rangle \leq 0.$$

Onde  $\mathcal{R}(Q) \triangleq \mathcal{A}(Q)^*(jw)\mathcal{A}(Q)(jw) - \mu^2 I$  e  $S_\Lambda$  (conjunto cujo interior é não vazio) é dado por

$$S_\Lambda \triangleq \left\{ R \in RL_\infty^{C_a \times C_a} : \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad R(jw) \geq 0 \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[R(jw)]dw < \infty \right\}$$

Note que  $\langle \Lambda, \mathcal{R}(Q) \rangle$  pode ser reescrito em termos de multiplicadores biprípios  $\bar{\Lambda}$  já que

$$\begin{aligned} \langle \Lambda, \mathcal{R}(Q) \rangle &= \langle \Lambda, \mathcal{A}(Q)^* \mathcal{A}(Q) \rangle - \mu^2 \langle \Lambda, I \rangle \\ \langle \Lambda, \mathcal{R}(Q) \rangle &= \langle g_0^{-1}(g_0^{-1})^* \Lambda, (g_0 \mathcal{A}(Q))^* (g_0 \mathcal{A}(Q)) \rangle - \mu^2 \langle g_0^{-1}(g_0^{-1})^* \Lambda, g_0 g_0^* I \rangle \\ \langle \Lambda, \mathcal{R}(Q) \rangle &= \langle \bar{\Lambda}, \bar{\mathcal{A}}(Q)^* \bar{\mathcal{A}}(Q) \rangle - \mu^2 \langle \bar{\Lambda}, g_0 g_0^* I \rangle \end{aligned}$$

onde  $\bar{\Lambda} \triangleq g_0^{-1}(g_0^{-1})^* \Lambda$ ,  $\bar{\mathcal{A}}(Q) = g_0 \mathcal{A}(Q)$  e  $g_0 = (s+1)^{-1}$ .

Definindo o funcional Lagrangiano

$$Lag(Q; \bar{\Lambda}) = \hat{J}_{cl}(Q) + \langle \bar{\Lambda}, \bar{\mathcal{A}}(Q)^* \bar{\mathcal{A}}(Q) \rangle - \mu^2 \langle \bar{\Lambda}, g_0 g_0^* I \rangle$$

e o funcional dual  $\varphi_D(\bar{\Lambda}) = \min \{ Lag(Q, \bar{\Lambda}) : Q \in RH_\infty^{m \times p} \}$ .

Segue-se que  $\forall \bar{\Lambda} \in S_{\bar{\Lambda}} \triangleq \{ R \in RL_\infty^{C_a \times C_a} : \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad R(jw) \geq 0 \}$  e que, portanto,  $\forall S_{\bar{\Lambda}}^a \subset S_{\bar{\Lambda}}$ ,

$$\inf \{ \hat{J}_{cl}(Q) : Q \in RH_2^{m \times p} \text{ e } \|\mathcal{A}(Q)\|_\infty \leq \mu \} \geq \sup \{ \varphi_D(\bar{\Lambda}) : \bar{\Lambda} \in S_{\bar{\Lambda}}^a \}.$$

Para obter limitantes inferiores eficientemente computáveis considera-se a seguir classes lineares de multiplicadores.

Nesse sentido, seja a classe linear de multiplicadores

$$S_\varphi = \{ \bar{\Lambda} = \varphi \beta \varphi^* : \beta = \beta^T \} \cap S_{\bar{\Lambda}}$$

onde  $S_{\bar{\Lambda}} = \{ R \in RL_\infty^{C_a \times C_a} : \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad R(jw) \geq 0 \}$ ,  $\varphi = [c_\varphi Y_\varphi : I_{c_a}]$ ,  $Y_\varphi =$



$(sI - A_\varphi)^{-1}$ ,  $Re(\lambda(A_\varphi)) < 0$  e  $(A_\varphi, C_\varphi)$  observável. Para  $\bar{\Lambda} \in S_\varphi$ ,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\Lambda}, \bar{A}(Q) \sim \bar{A}(Q) \rangle &= \langle \bar{A}(Q) \varphi \beta, \bar{A}(Q) \varphi \rangle \quad \text{e} \\ \langle \bar{\Lambda}, g_0 g_0^T I \rangle &= \langle g_0 \varphi \beta, g_0 \varphi \rangle\end{aligned}$$

Utilizando produtos de Kronecker, pode-se reescrever  $\hat{J}_{cl}(Q)$  na forma

$$\hat{J}_{cl}(Q) = \Theta_J T + T_{J_0} \quad \text{onde} \quad \Theta_J \triangleq F_J \otimes G_J^T, \quad T_{J_0} \triangleq \text{rvec}(H_J) \quad \text{e} \quad T = \text{rvec}(Q).$$

De forma análoga,

$$\text{rvec}(\bar{A}(Q) \varphi) = [(g_0 F) \otimes (G \varphi)^T] T + T_a \quad \text{e}$$

$$\text{rvec}(\bar{A}(Q) \varphi \beta) = [I_{r_a} \otimes \beta^T] \{[(g_0 F) \otimes (G \varphi)^T] T + T_a\}$$

onde  $T_a \triangleq \text{rvec}(g_0 H \varphi)$ .

Como resultado,  $Lag(Q, \bar{\Lambda})$  pode ser reescrito como

$$Lag(Q; \bar{\Lambda}) = \langle \Theta_J T + T_{J_0}, \Theta_J T + T_{J_0} \rangle + \langle \beta_K (\Theta_a T + T_a), \Theta_a T + T_a \rangle - \mu^2 \langle g_0 \varphi \beta, g_0 \varphi \rangle$$

onde  $\Theta_a \triangleq (g_0 F) \otimes (G \varphi)^T$  e  $\beta_K = I_{r_a} \otimes \beta^T$ , ou equivalentemente

$$Lag(Q; \bar{\Lambda}) = \langle M_a(\beta)(\Theta T + T_0, \Theta T + T_0) \rangle - \mu^2 \langle g_0 \varphi \beta, g_0 \varphi \rangle \quad (5-13)$$

$$\text{onde } \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_J \\ \Theta_a \end{bmatrix}, \quad T_0 = \begin{bmatrix} T_{J_0} \\ T_a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_a(\beta) = \begin{bmatrix} I_{r_J} & 0 \\ 0 & \beta_K \end{bmatrix}.$$

Observe-se ainda que, sendo  $(A_{g\varphi}, B_{g\varphi}, C_{g\varphi})$  uma realização mínima de  $g_0 \varphi$ ,

$$\langle g_0 \varphi \beta, g_0 \varphi \rangle = \text{tr} \{ \beta^T B_{g\varphi}^T Q_{g\varphi} B_{g\varphi} \}$$

onde  $Q_{g\varphi}$  é a única solução de  $A_{g\varphi}^T Q + Q A_{g\varphi} = -C_{g\varphi}^T C_{g\varphi}$  de modo que  $Lag(Q; \bar{\Lambda})$  pode ser rescrito como

$$Lag(Q; \bar{\Lambda}) = \langle M_a(\beta)(\Theta T + T_0, \Theta T + T_0) \rangle - \mu^2 \{ \beta^T B_{g\varphi}^T Q_{g\varphi} B_{g\varphi} \}$$

Para converter a maximização de  $\varphi_D(\cdot)$  sobre  $S_\varphi$  em um SDLP, é necessário inicialmente converter o problema  $\min \{ Lag(Q; \bar{\Lambda}) : Q \in RH_2^{m \times p} \}$  em um problema LQR. Isso é feito com base nas seguintes proposições.

**Proposição 5.6** *Sejam  $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$  e  $(A_{T_0}, B_{T_0}, C_{T_0})$  realizações mínimas de  $\Theta$  e  $T_0$ .*

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_\Theta & 0 \\ 0 & A_{T_0} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} B_\Theta \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{T_0} \end{bmatrix}, \hat{R} = \begin{bmatrix} C_\Theta & C_{T_0} & D_\Theta \end{bmatrix} e$$

$R(\beta) = \hat{R}^T M_a(\beta) \hat{R}$ , e seja  $\check{u}$  a transformada inversa de Laplace de  $T \in RH_2^{m \times p}$ . Então para cada  $\bar{\Lambda}$

$$Lag(Q; \bar{\Lambda}) = \int_0^\infty [x(t) \ u(t)]^T R(\beta) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (5-14)$$

onde  $\forall t \geq 0, \dot{x} = A_0 x(t) + B_0 u(t), x(0) = x_0$ .  $\nabla$

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [x(t) \ u(t)]^T R(\beta) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt &= \left\langle R(\beta) \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{u} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{u} \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle M_a(\beta) \hat{R} \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{u} \end{bmatrix}, \hat{R} \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{u} \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (5-15)$$

onde  $\check{x}$  e  $\check{u}$  denotam a transformada de Laplace de  $x$  e  $u$ . Calculando para

$$\hat{R} \begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{u} \end{bmatrix} = \check{R} \left\{ \begin{bmatrix} (sI - A_0)^{-1} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (sI - A_0)^{-1} B_0 \\ 1 \end{bmatrix} \check{u}(s) \right\}$$

resolvendo para cada subespaço

$$\begin{aligned} \hat{R} \begin{bmatrix} (sI - A_0)^{-1} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \hat{R} \begin{bmatrix} (sI - A_\Theta)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_{T_0})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_{T_0} \end{bmatrix} \\ &= C_{T_0} (sI - A_{T_0})^{-1} B_{T_0} = T_0(s) \end{aligned}$$

e para

$$\begin{aligned} \hat{R} \begin{bmatrix} (sI - A_0)^{-1} B_0 \\ I \end{bmatrix} &= \hat{R} \begin{bmatrix} (sI - A_\Theta)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_{T_0})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\Theta \\ 0 \end{bmatrix} + D_\Theta \\ &= C_\Theta (sI - A_\Theta)^{-1} B_\Theta + D_\Theta \end{aligned}$$

então tem-se

$$\begin{bmatrix} \check{x} \\ \check{u} \end{bmatrix} = \Theta(s) \check{u}(s) + T_0(s) \quad (5-16)$$

Combinando a equação 5-15 com a equação 5-16 (note-se que  $\tilde{u} = T$ )

$$\int_0^\infty [x(t) \ u(t)]^T R(\beta) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt = \langle M_a(\beta)(\Theta T + T_0, \Theta T + T_0) \rangle = \text{Lag}(Q; \bar{\Lambda}, \gamma)$$

■

O resultado desejado é dado pela seguinte proposição (ver demonstração em (Corrêa e Sales, 2010)) que estabelece a equivalência entre o limitante inferior  $\sup \{\varphi_D(\bar{\Lambda}(\beta)) : \bar{\Lambda}(\beta) \in S_\varphi\}$  para o valor ótimo do problema dado por (5-12) e o valor ótimo de um SDLP.

**Proposição 5.7**  $\sup \{\varphi_D(\bar{\Lambda}(\beta)) : \bar{\Lambda}(\beta) \in S_\varphi\}$  é igual ao valor ótimo do seguinte problema

$$\max_{P=P^T, \beta=\beta^T, \beta \geq 0} x_0^T P x_0 - \mu^2 \text{tr} \{ \beta^T B_{g\varphi}^T Q_{g\varphi} B_{g\varphi} \} \quad \text{sujeito a} \quad Q(P; \beta) \geq 0 \quad (5-17)$$

sendo

$$Q(P, B) = \begin{bmatrix} A_0 P + P B_0 & P B_0 \\ B_0^T P & 0 \end{bmatrix} + \hat{R}^T M_a(\beta) \hat{R} \quad (5-18)$$

▽

Para nosso caso em particular  $F_J = P_a$ ,  $G_J = P_b$ ,  $H_J = P_0$ ,  $F = I_m$ ,  $G = I_p$  e  $H = 0$ . Sendo

$$\begin{aligned} \Theta_J &= F_J \otimes G_J^T, \\ \Theta_a &= (g_0 F) \otimes (G\varphi)^T \quad \text{sendo} \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \Theta_J \\ \Theta_a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Onde  $\varphi$  é calculado da seguinte maneira: Seja  $\varphi_i$  a projeção estável de  $\varphi_i = \{g_0 Q_{H2}\}_+$ ,  $(g_0(s) = \frac{1}{s+1})$  sendo sua realização mínima  $\varphi_i = [A_{\varphi_i}, B_{\varphi_i}, C_{\varphi_i}, D_{\varphi_i}]$ , cujas dimensões são:  $A_{\varphi_i} \in \mathbb{R}^{n_{\varphi_i} \times n_{\varphi_i}}$ ,  $B_{\varphi_i} \in \mathbb{R}^{m_{\varphi_i} \times n_{\varphi_i}}$ ,  $C_{\varphi_i} \in \mathbb{R}^{n_{\varphi_i} \times p_{\varphi_i}}$  e  $D_{\varphi_i} \in \mathbb{R}^{m_{\varphi_i} \times p_{\varphi_i}}$ . Sendo assim a realização de  $\varphi = [A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi, D_\varphi]$  é a seguinte

$$\begin{aligned} A_\varphi &= A_{\varphi_i}, \\ B_\varphi &= B_{\varphi_i}, \\ C_\varphi &= \begin{bmatrix} I_{n_\varphi \times n_\varphi} \\ 0_{m_\varphi \times n_\varphi} \end{bmatrix}, \\ D_\varphi &= \begin{bmatrix} 0_{n_\varphi \times m_\varphi} \\ I_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} T_{J0} &= H_J \\ T_a &= 0_{n_\varphi+m \times p} \\ T_0 &= \begin{bmatrix} T_{J0} \\ T_a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim sendo obtém-se as realizações mínimas de  $\Theta$  e  $T_0$ . A equação de  $M_a(\beta)$  é

$$M_a(\beta) = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m \times n_\beta} \\ 0_{n_\beta \times m} & \beta \end{bmatrix}.$$

O controlador (digamos  $Q_{dual}$ ) que minimiza o Lagrangiano  $Lag = (\cdot; \bar{\Lambda}(\beta_\star))$ , onde  $\beta_\star$  e  $P_\star$  são as soluções obtidas para o problema dado por (5-18), é obtido por meio das seguintes formulas:

$$\begin{aligned} S_{uu} &= \begin{bmatrix} 0_{m \times n_{A_0}} & I_m \end{bmatrix} \hat{R}^T M_a(\beta) \hat{R} \begin{bmatrix} 0_{n_{A_0} \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \\ S_{ux} &= \begin{bmatrix} 0_{m \times n_{A_0}} & I_m \end{bmatrix} \hat{R}^T M_a(\beta) \hat{R} \begin{bmatrix} I_{n_{A_0} \times n_{A_0}} \\ 0_{m \times n_{A_0}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo o controlador ótimo quadrático

$$F_\star = -S_{uu}^{-1} (S_{ux} + B_0^T (-P)) \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} A_{dual} &= A_0 + B_0 * F_\star, \\ B_{dual} &= x_0, \\ C_{dual} &= F_\star, \\ Q_{dual} &= C_{dual} (sI - A_{dual})^{-1} B_{dual}. \end{aligned}$$

Uma heurística utilizada para “aumentar” a dimensão da classe  $S_Q^0$  com base em  $Q_{dual}$  é tomar  $S_Q^a = \{Q = CY_a B_a : C \in \mathbb{R}^{m \times (n_{H_2} + n_{dual})}\}$ . sendo  $Y_a = \text{diag}(A_{H_2}, A_{dual})$  e  $B_a = \text{diag}(B_{H_2}, B_{dual})$ .

## 6

### Resultados

Nesse capítulo, são apresentados exemplos numéricos, envolvendo a equação do calor simplificada em uma dimensão, para ilustrar o procedimento de síntese de controladores, em dois passos, apresentado no capítulo anterior.

Em cada exemplo são inicialmente fixadas as dimensões  $m_d$ ,  $p$ ,  $m$  e  $m_d$ , das seguintes variáveis:  $\mathfrak{d}$  (variável controlada),  $y$  (saída realimentada),  $u$  (saída de controle) e  $d$  (sinal de perturbação). São também fixadas as funções

$$\{\varphi_{\mathfrak{d}i}\}, i = 1, \dots, m_d, \{\varphi_{yi}\}, i = 1, \dots, p, \{\beta_i^u\}, i = 1, \dots, m \text{ e } \{\beta_i^d\}, i = 1, \dots, m_d.$$

que definem as variáveis  $\mathfrak{d}_i(t) = \langle \varphi_{\mathfrak{d}i}, z(t) \rangle$  e  $y_i(t) = \langle \varphi_{pi}, z(t) \rangle$ . Nos exemplos que se seguem,

$$\begin{aligned} \varphi_{pi}(x) &= \frac{1}{b_i - a_i} & \forall x \in [a_i, b_i], \\ \varphi_{pi}(x) &= 0 & \forall x \notin [a_i, b_i]. \end{aligned}$$

correspondendo a uma media sobre uma pequena região do domínio espacial. A ação espacial dos sinais de controle e perturbação é dada por

$$f_u(x, t) = \sum_{i=1}^m \beta_i^u(x) u(t) \quad \text{e} \quad f_d(x, t) = \sum_{i=1}^{m_d} \beta_i^d(x) d(t)$$

Comentário: No sentido de visualizar alguns aspectos espaciais dos problemas tratados nos exemplos a seguir, suponha que  $p = 1$  (um sensor),  $m = 3$  (três atuadores) e  $m_s = 5$  (cinco variáveis controladas). Nesse caso, a Figura 6.1 abaixo mostra esquematicamente a configuração correspondente à ação direta de controle sobre três pequenas regiões da barra ( $\beta_1^u(x)$ ,  $\beta_2^u(x)$  e  $\beta_3^u(x)$ ) com base em medidas tomadas em uma outra região ( $\varphi_y(x)$ ) com vistas a atenuar o efeito de perturbação ( $\beta^d(x)$ ) sobre outras cinco pequenas regiões na barra ( $\varphi_{\mathfrak{d}1}(x)$ ,  $\varphi_{\mathfrak{d}2}(x)$ ,  $\varphi_{\mathfrak{d}3}(x)$ ,  $\varphi_{\mathfrak{d}4}(x)$  e  $\varphi_{\mathfrak{d}5}(x)$ ). Consideram-se, nesse caso, 1 sensor localizado, 3 atuadores localizados, 5 saídas controladas (S.C.) localizadas e uma perturbação cujo efeito se propaga por toda a barra.  $\nabla$

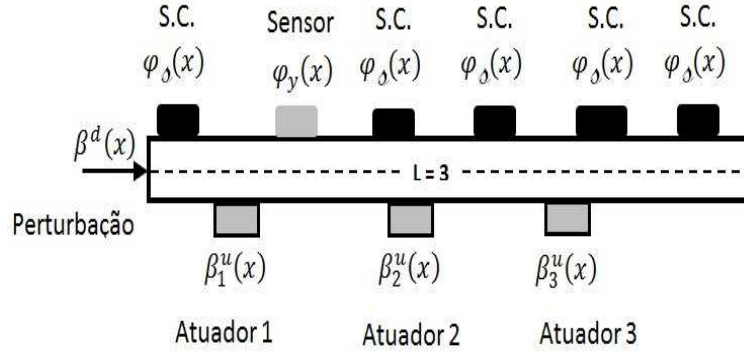


Figura 6.1: Configuração espacial de controle

Em cada um dos exemplos considerados a seguir, são também escolhidas as “envoltórias” (ou densidades espectrais de potência) das classes de sinais  $d$  e  $v$  consideradas, i.e.,  $\Phi_d$  e  $\Phi_u$ . Em seguida é fixada a dimensão  $N$  do modelo nominal (usado no procedimento de síntese) e são determinadas as funções de transferência nominais

$$\{\hat{P}_{\alpha\nu} : \nu = u, d \text{ e } \alpha = \delta, y\}, \quad \hat{P}_{\alpha\nu}(s) = C_{\alpha N}(sI - A_N)^{-1}B_{\nu N}$$

onde  $A_N = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_a})$ ,  $\{C_{\alpha N}\}_{qr} = \langle \varphi_{\alpha q}, \phi_r \rangle$ ,  $\{B_{\nu N}\}_{qr} = \langle \beta_{\nu r}^q, \phi_q \rangle$ , onde  $\{\lambda_k\}$  e  $\{\phi_k\}$  são autovalores e autovetores do operador  $A$  correspondente à equação do calor simplificada 1-D i.e.,

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad \text{e} \quad \phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

para o valor fixado de  $L$ .

São calculados os limitantes superiores  $\{\gamma_{\alpha\nu}\}$  para as normas  $H_\infty$  dos erros  $E_{\alpha\nu} = P_{\alpha\nu} - \hat{P}_{\alpha\nu}$  relativos à aproximação de  $P_{\alpha\nu}$  por  $\hat{P}_{\alpha\nu}$  (i.e.,  $\|E_{\alpha\nu}\|_\infty \leq \gamma_{\alpha\nu}$ ), conforme as expressões para  $\gamma_{\alpha\nu}$  apresentadas no Capítulo 4 - nos exemplos apresentados  $W_L$  e  $W_R$  são tomados como identidades. Como o primeiro passo do procedimento de síntese consiste em resolver os problemas  $H_2/H_\infty$  (minimização do custo nominal com restrição de estabilidade robusta)

Problema. I ( $\mu$ ):

$$\min_{Q \in S_Q^0} \|\hat{F}_{cl}(Q)\Phi_{ev}\|_2^2 \quad \text{sujeito a} \quad \|Q\|_\infty \leq \mu$$

para vários valores de  $\mu$  menores do que  $\gamma_{yu}^{-1}$ , onde  $S_Q^0$  é um subespaço de  $RH_\infty^{m \times p}$ , resolve-se inicialmente um problema  $H_2$  (minimização do custo

nominal) sem restrição

$$\text{Prob. a:} \quad \min_{Q \in RH_2^{m \times p}} \|F_{cl}(Q)\Phi_{ev}\|_2^2$$

(conforme a seção 5.2 do Capítulo 5), obtendo-se  $Q_{H_2} = C_{H_2}Y_{H_2}B_{H_2}$  onde  $Y_{H_2} = (sI - A_{H_2})^{-1}$  e  $A_{H_2}$  tem dimensão (digamos)  $n_{H_2}$ .

Define-se então a classe linear

$$S_Q^0 \doteq \{Q = CY_{H_2}B_{H_2} : C \in \mathbb{R}^{m \times n_{H_2}}\}$$

e calcula-se  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ , com base no que se define  $\mu_{max}$  da seguinte forma:  $\mu_{max} \approx 0.95 \min(\gamma_{yu}^{-1}, \|Q_{H_2}\|_\infty)$ .

Resolve-se, então, o Problema I ( $\mu$ ), por meio de um SDLP, (conforme os resultados do Capítulo 5), para uma grade de valores  $S_\mu$  em  $(0, \mu_{max}]$  obtendo-se uma coleção  $\{Q_{rob}(\mu) : \mu \in S_\mu\}$  de controladores estabilizantes, cada um dos quais minimiza o custo nominal sob a restrição  $\|Q_{H_2}\|_\infty \leq \mu$ .

O segundo passo do procedimento consiste em resolver o seguinte problema

Problema. II:

$$\min_{\mu \in S_\mu} \|F_{cl}^a(Q(\mu))\Phi_{ev}\|_2 + \eta_{er}^a(Q(\mu))$$

onde  $\eta_{er}^a(Q(\mu))$  e  $F_{cl}^a(Q)$  são introduzidos no capítulo 4 - cabe lembrar que  $F_{cl}^a(Q(\mu))$  é uma aproximação para a função de transferência de  $(d, v)$  para  $s$  do sistema em malha fechada  $(P, K(Q))$  obtida por meio de aproximações  $\{P_{\alpha\nu}^a : \nu = u, d \text{ e } \alpha = \mathfrak{d}, y\}$  de dimensão  $N_a > N$  para as funções de transferência  $P_{\alpha\nu}$  do sistema original.

Os resultados da avaliação de  $Q(\mu)$  pelo critério

$$\hat{\eta}_{av}(\mu) = \|F_{cl}^a(Q(\mu))\Phi_{ev}\|_2 + \eta_{er}^a(Q(\mu))$$

são apresentados (em tabelas) para  $\mu \in S_\mu$  e apontado o valor  $\mu_*$  que minimiza  $\hat{\eta}_{av}$  sobre  $S_\mu$ . São também apresentados (nas mesmas tabelas) os valores  $\{\|F_{cl}^a(Q(\mu))\Phi_{ev}\|_2 : \mu \in S_\mu\}$ . Note-se que, para  $N_a$  “grande”,  $\|F_{cl}^a(Q(\mu))\Phi_{ev}\|_2$  é um critério natural para a avaliação da atenuação de perturbações alcançada pelo controlador  $Q(\mu)$ ; contudo, esse critério tem um caráter algo “otimista” já que são desprezados os efeitos dos modos excluídos  $\{(\lambda_k, \phi_k) : k > N_a\}$  na resposta em malha fechada.

Ressalta-se ainda que para estimar o efeito do controle em malha fechada pode-se comparar as normas  $\|P_{\mathfrak{d}d}^a\Phi_d\|_2$  e  $\|F_{cl}^a(Q(\mu))\Phi_{ev}\|_2$  correspondentes aos efeitos de perturbação com e sem a ação do controlador escolhido.

Finalmente, cabe observar que, além de ilustrar o procedimento de síntese de controladores apresentados no Capítulo 5, os exemplos apresentados a seguir são gerados de forma a ilustrar o efeito das seguintes mudanças na definição dos mesmos:

- na dimensão das aproximações utilizadas para as mesmas escolhas das demais variáveis sendo as variáveis controladas (Exemplo 1 ( $N = 5$ ) e Exemplo 2 ( $N = 2$ )) tomadas como projeções em autofunções, i.e.  $\mathfrak{d}_i = \langle \phi_i, z \rangle$ ,  $m_{\mathfrak{d}} = 5$ .
- na dimensão das aproximações (Exemplo 3 ( $m_{\mathfrak{d}} = 5$  e  $N = 5$ ) e Exemplo 4 ( $m_{\mathfrak{d}} = 5$  e  $N = 2$ )) - como no caso anterior, só que sendo as variáveis controladas tomadas como média espaciais.
- no número de variáveis controladas (Exemplo 5 ( $m_{\mathfrak{d}} = 7$ )).
- no número de variáveis controladas (Exemplo 6 ( $m_{\mathfrak{d}} = 3$  e  $N = 5$ )).
- na localização dos sensores (Exemplo 7).
- no número e localização dos atuadores (Exemplo 8).
- na escolha conjunta do atuador e do sensor (Exemplo 9 ( $p = 1$  e  $m = 1$ )).

O último exemplo refere-se à equação do calor em duas dimensões.

### Exemplo 1

Neste exemplo são considerados 5 variáveis controladas (i.e.,  $m_{\mathfrak{d}} = 5$ ) definidas da seguinte forma:  $\mathfrak{d}_i(t) = \langle \varphi_{\mathfrak{d}_i}, z(t) \rangle$ , onde  $\varphi_{\mathfrak{d}_i} = \phi_i$ , correspondendo a projeções nas funções da base de autovetores. A variável de medida ( $p = 1$ ) usada para a realimentação é definida como  $y(t) = \langle \varphi_y, z(t) \rangle$  onde  $\varphi_y$  é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_y(x) &= \frac{1}{0.6 - 0.5} & \forall x \in [0.5, 0.6], \\ \varphi_y(x) &= 0 & \forall x \notin [0.5, 0.6]. \end{aligned}$$

Consideram-se 3 variáveis de controle (i.e.,  $m = 3$ ) cuja ação espacial é caracterizada por  $\beta_i^u$  e  $\beta_i^d$  dadas por

$$\begin{aligned} \beta_1^u(x) &= 1 & \forall x \in [0.8, 0.9], \\ \beta_2^u(x) &= 1 & \forall x \in [1.8, 1.9], \\ \beta_3^u(x) &= 1 & \forall x \in [2.8, 2.9], \\ \beta^d(x) &= 1 & \forall x \in [0, L], \end{aligned}$$

com  $L = 3$ .



A dimensão da aproximação para o modelo de DI é  $N = 5$ , i.e.  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , e a dimensão da aproximação maior (estendida) é  $N_a = 10$ , i.e.  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_a})$ . O sinal de perturbação no domínio da frequência é caracterizado pela “envoltória”  $\Phi_d$ , que neste caso é dada por:  $\Phi_d(s) = \frac{125}{s+0.3}$ . Os índices de desempenho nominais com respeito aos efeitos dos sinais de perturbação e ruído são dados por:

$$\begin{aligned}\eta_{\mathfrak{A}d}(Q_{H_2}) &= \|(\hat{P}_{\mathfrak{A}d} + \hat{P}_{\mathfrak{A}u}Q_{H_2}\hat{P}_{yd})\Phi_d\|_2^2, \\ \eta_{\mathfrak{A}v}(Q_{H_2}) &= \|\hat{P}_{\mathfrak{A}u}Q_{H_2}\Phi_v\|_2^2.\end{aligned}$$

onde  $\hat{P}_{\alpha\nu}$  sendo  $\nu = u, d$  e  $\alpha = \mathfrak{A}, y$ .

Como foi explicado acima, primeiramente se calcula  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ . Como, nesse caso, a norma infinita do controlador ótimo  $Q_{H_2}$  é 32.2090, a margem de estabilidade de  $(\hat{P}, K(Q_{H_2}))$ ,  $\frac{1}{\|Q_{H_2}\|_\infty}$ , é igual a 0.031, sendo então maior do que o limitante  $\gamma = 0.0140$  no erro de aproximação  $\|E_{yu}\|_\infty$ , o que garante a estabilidade do sistema em malha fechada  $(\hat{P}, K(Q_{H_2}))$  - assim, é possível considerar  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_\infty$ . Como indicado na seção 5.3.1, é aproveitada a “dinâmica”  $(A_{H_2}, B_{H_2})$  do controlador ótimo  $Q_{H_2}$  para o projeto do controlador robusto  $Q_{rob}$ .

A Tabela 6.1 mostra, para os vários valores de  $\mu$  considerados, os valores de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ , onde  $J_{cl}^a(Q(\mu)) = \|\hat{F}_{cl}^a(Q)\Phi_{ev}\|_2^2$  (primeira coluna), e  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  (segunda coluna). Observa-se que a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  pelo critério “nominal estendido” (primeira coluna) aponta como melhor  $\mu$  o valor mas próximo de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ . Ou seja, como nesse caso  $Q_{H_2} < \gamma_{yu}^{-1}$ , o próprio controlador  $Q_{H_2}$  corresponde a um sistema estável em malha fechada  $(P, K(Q_{H_2}))$  e, além disso, a aproximação “nominal” com  $N = 5$  é próxima da aproximação com  $N_a = 10$  ( $\|E_{yu}^a\| < 9.824 \times 10^{-4}$ , onde  $\|E_{yu}^a\| = \|P_{\mathfrak{A}u} - \hat{P}_{\mathfrak{A}u}\|_\infty$ ), o critério “otimista” (que não leva em conta os erros de aproximação) leva à escolha do próprio  $Q_{H_2}$  como melhor controlador.

Por outro lado, a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  por meio do limitante  $\hat{\eta}_{av}$  (segunda coluna), que leva em consideração o erro de aproximação entre  $P_{\alpha\nu}$  e  $P_{\alpha\nu}^a$ , aponta como melhor  $\mu$  o valor  $\mu_* = 15$  (o valor de  $\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$  aparece em negrito).

É importante observar que, ainda que  $\hat{\eta}_{av}$  seja um critério conservador, ao selecionar o controlador  $Q_{rob}(15)$  o que se perderia em desempenho medido pelo critério otimista com respeito ao controlador  $Q_{rob}(32)$  seria somente 3%, ou seja, perde-se muito pouco em uma avaliação “otimista” ao se escolher o controlador por meio de um critério que leva em conta (ainda que de forma

conservadora) os erros relativos aos modos excluídos  $\{(\lambda_k, \phi_k) : k > N_a\}$ .

Finalmente, no sentido de avaliar o efeito do controlador  $Q(\mu_*)$  na atenuação do sinal de perturbação  $\Phi_d$ , pode-se comparar as respostas na variável  $\mathfrak{z}$  em malha aberta (por meio de  $\|P_{\mathfrak{z}d}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas

$$\|P_{\mathfrak{z}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 4.1420 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 1.5709 \times 10^4$$

ou usando os limitantes nos erros de aproximação, (nesse caso  $\|P_{\mathfrak{z}d} - P_{\mathfrak{z}d}^a\|_\infty = 0.0046$ )

$$(\|P_{\mathfrak{z}d}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{\mathfrak{z}d}^a \|\Phi_d\|_2)^2 = 4.1421 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 2.4656 \times 10^4$$

No primeiro caso, a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 62 % o efeito da perturbação e, no segundo caso (medida conservadora), em aproximadamente 40.4 %.

Tabela 6.1: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 1)

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$2.7177 \times 10^4$	$3.2444 \times 10^4$
10	$1.7612 \times 10^4$	$2.5659 \times 10^4$
11	$1.7134 \times 10^4$	$2.5346 \times 10^4$
12	$1.6713 \times 10^4$	$2.5084 \times 10^4$
13	$1.6332 \times 10^4$	$2.4873 \times 10^4$
14	$1.5994 \times 10^4$	$2.4727 \times 10^4$
15	$1.5709 \times 10^4$	<b><math>2.4656 \times 10^4</math></b>
16	$1.5672 \times 10^4$	$2.4792 \times 10^4$
17	$1.5635 \times 10^4$	$2.4923 \times 10^4$
18	$1.5600 \times 10^4$	$2.5057 \times 10^4$
19	$1.5564 \times 10^4$	$2.5209 \times 10^4$
20	$1.5529 \times 10^4$	$2.5377 \times 10^4$
25	$1.5360 \times 10^4$	$2.6373 \times 10^4$
30	$1.5206 \times 10^4$	$2.7712 \times 10^4$
32	$1.5153 \times 10^4$	$2.8364 \times 10^4$

Na Figura 6.2 são apresentadas as respostas em frequência do controlador ótimo  $Q_{H_2}$  para o problema  $H_2$  irrestrito e do controlador  $Q_{rob}(\mu_*)$ , exibindo o efeito da restrição  $H_\infty$  (i.e.,  $\|Q\|_\infty \leq \mu$  para  $\mu = \mu_* = 15$ ). Na Figura 6.3 é apresentada o desempenho para cada  $\mu$  por meio do critério “otimista”  $J_{cl}^a(Q(\mu))$  e o critério “conservador”  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  (que leva em consideração o erro de aproximação entre  $P_{\alpha\nu}$  e  $P_{\alpha\nu}^a$ ). A Figura 6.4 apresenta uma comparação

entre o  $Q_{rob}$  e  $Q_{dual}$  para  $\mu = 20$  - pode-se observar que a classe aumentada pelo método dual permite encontrar uma solução que satisfaz a restrição  $H_\infty$  alterando significativamente a resposta em frequência do controlador ótimo  $Q_{H_2}$  apenas na região em que a restrição  $H_\infty$  foi violada pelo mesmo.

Note-se, finalmente, que

$$\begin{aligned}\eta_{\mathcal{H}d}(Q_{H_2}) + \eta_{\mathcal{H}v}(Q_{H_2}) &= 1.5146 \times 10^4 \\ \eta_{\mathcal{H}d}(Q_{rob}(\mu_*)) + \eta_{\mathcal{H}v}(Q_{rob}(\mu_*)) &= 1.5702 \times 10^4\end{aligned}$$

Assim sendo, o desempenho nominal sob uma restrição  $H_\infty$  e com  $Q$  restrito a classe  $S_Q^0$  se deteriora apenas 3.5% em relação ao ótimo irrestrito obtido sobre todos os  $Q \in RH_2^{m \times p}$ , indicando que não há necessidade de se buscar uma classe de dimensão maior para a obtenção de  $Q_{rob}(\mu_*)$ .

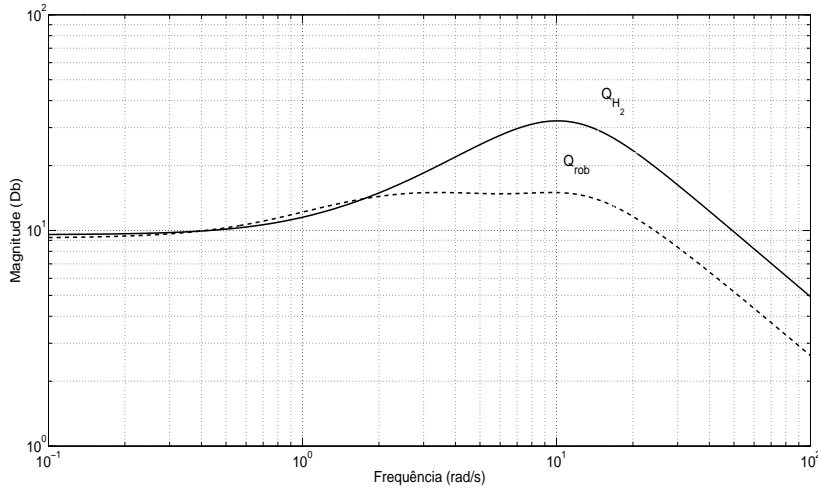


Figura 6.2: Resposta em frequência do controlador  $H_2$  e  $H_2/H_\infty$

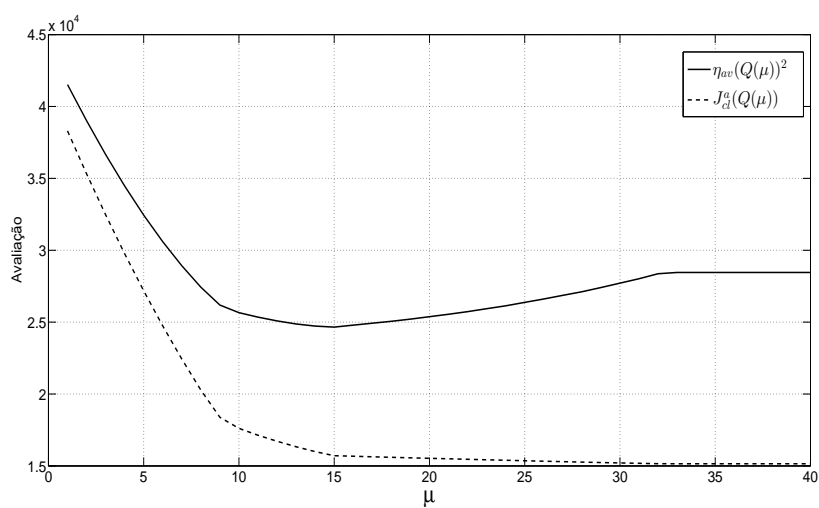


Figura 6.3: Desempenho de cada  $\mu$  por meio dos critérios de avaliação - (Exemplo 1)

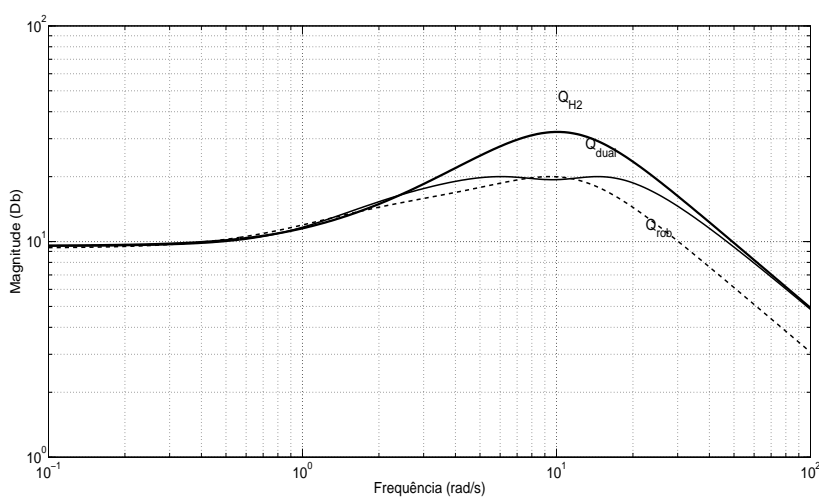


Figura 6.4: Resposta em frequência do controlador  $Q_{H2}$ ,  $Q_{rob}$  e  $Q_{dual}$

Exemplo 2

Neste exemplo são consideradas as mesmas configurações do Exemplo 1. A única mudança é a aproximação nominal que, nesse caso, corresponde a  $N = 2$ . Nesse caso  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  é igual a 39.4083, a margem de estabilidade é 0.025, sendo maior do que o limitante  $\gamma_{yu} = 0.0150$  no erro de aproximação. Da mesma forma que no exemplo anterior é possível considerar  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_\infty$  (já que  $\|Q_{H_2}\|_\infty < \gamma_{yu}^{-1}$ ).

Note-se (Tabela 6.2) que, como a dimensão de aproximação é menor do que no Exemplo 1 (maior erro de aproximação), a margem de estabilidade mínima  $\gamma$  requerido dos controladores estabilizantes é agora maior.

Tabela 6.2: Comparação dos resultados Ex. 2 - Ex. 1.

	$\ Q_{H_2}\ _\infty$	$\gamma_{yu}^{-1}$
Exemplo 1 ( $N = 5$ )	32.2090	71.4286
Exemplo 2 ( $N = 2$ )	39.4083	66.6667

Observa-se na Tabela 6.3 que a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  pelo critério nominal estendido (primeira coluna) aponta como melhor  $\mu$  o valor mais próximo de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  (como no exemplo anterior). A aproximação nominal com  $N = 2$  continua sendo próxima à aproximação com  $N_a = 10$  ( $\|P_{su}^a - \hat{P}_{su}\| < 0.0020$ ) e, portanto, o critério “otimista” leva à escolha do próprio  $Q_{H_2}$  como melhor controlador.

A avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  por meio de  $\hat{\eta}_{av}$  aponta como melhor  $\mu$  o valor  $\mu_\star = 17$ . Ao selecionar o controlador  $Q_{rob}(17)$  por meio do critério “conservador” ( $\hat{\eta}_{av}$ ), o que se perderia pelo critério otimista ( $J_{cl}^a$ ) com  $Q_{rob}(39)$  seria somente 2.6 %.

Como no exemplo anterior, avalia-se o efeito do controlador  $Q(\mu_\star)$  na atenuação do sinal de perturbação  $\Phi_d$  comparando as respostas na variável  $\mathfrak{d}$  em malha aberta (por meio de  $\|P_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas

$$\|P_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 4.1420 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_\star)) = 1.5108 \times 10^4$$

ou usando os limitantes nos erros de aproximação (nesse caso  $\|P_{\mathfrak{d}d} - P_{\mathfrak{d}d}^a\|_\infty = 0.0046$ )

$$(\|P_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{\mathfrak{d}d}^a \|\Phi_d\|_2)^2 = 4.1421 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_\star))^2 = 2.4635 \times 10^4$$

Tabela 6.3: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 2)

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$2.7332 \times 10^4$	$3.2593 \times 10^4$
10	$1.7081 \times 10^4$	$2.5525 \times 10^4$
11	$1.6760 \times 10^4$	$2.5330 \times 10^4$
12	$1.6448 \times 10^4$	$2.5149 \times 10^4$
13	$1.6148 \times 10^4$	$2.4999 \times 10^4$
14	$1.5860 \times 10^4$	$2.4842 \times 10^4$
15	$1.5587 \times 10^4$	$2.4746 \times 10^4$
16	$1.5334 \times 10^4$	$2.4665 \times 10^4$
17	$1.5108 \times 10^4$	<b><math>2.4635 \times 10^4</math></b>
18	$1.4915 \times 10^4$	$2.4640 \times 10^4$
19	$1.4760 \times 10^4$	$2.4691 \times 10^4$
20	$1.4640 \times 10^4$	$2.4789 \times 10^4$
25	$1.4316 \times 10^4$	$2.5660 \times 10^4$
30	$1.4139 \times 10^4$	$2.6951 \times 10^4$
35	$1.4001 \times 10^4$	$2.8743 \times 10^4$
39	$1.3904 \times 10^4$	$3.0644 \times 10^4$

No primeiro caso, a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 63.7% o efeito da perturbação e no segundo caso (medida conservadora) em aproximadamente 40.5%.

Cabe observar que face ao maior erro de aproximação o critério  $\hat{\eta}_{av}(\cdot)$  determina que se escolha um controlador com norma  $H_\infty(\mu_*)$  mais longe de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ ,  $(39 - 17 = 22)$  do que no Exemplo 1  $(32 - 15 = 17)$ .

### Exemplo 3

Neste exemplo, são considerados os mesmo dados do Exemplo 1 com exceção da definição das variáveis controladas (como é apresentada da Figura 6.1). Nesse caso, são consideradas 5 variáveis controladas (i.e.,  $m_{\mathcal{J}} = 5$ ) definidas em regiões na barra da seguinte forma:  $\mathfrak{J}_i(t) = \langle \varphi_{\mathfrak{J}_i}, z(t) \rangle$ , onde  $\varphi_{\mathfrak{J}_i}$ , é dada por

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\mathfrak{J}_1}(x) &= \frac{1}{0.5 - 0.4} & \forall x \in [0.4, 0.5], \\
 \varphi_{\mathfrak{J}_2}(x) &= \frac{1}{1.1 - 1.0} & \forall x \in [1.0, 1.1], \\
 \varphi_{\mathfrak{J}_3}(x) &= \frac{1}{1.7 - 1.6} & \forall x \in [1.6, 1.7], \\
 \varphi_{\mathfrak{J}_4}(x) &= \frac{1}{2.3 - 2.2} & \forall x \in [2.2, 2.3], \\
 \varphi_{\mathfrak{J}_5}(x) &= \frac{1}{2.9 - 2.8} & \forall x \in [2.7, 2.8].
 \end{aligned}$$

Nesse caso  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  é igual a 45.3800, a margem de estabilidade é 0.022 sendo maior do que o limitante  $\gamma_{yu} = 0.0140$  no erro de aproximação. Da mesma forma que no exemplo anterior, é possível considerar  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_\infty$ . Note-se que, comparando com o exemplo 1 (na tabela 6.4), o margem de estabilidade do sistema nominal ótimo (i.e.,  $\|Q_{H_2}\|_\infty^{-1}$ ) está mais perto do limitante  $\gamma_{yu}$ .

Tabela 6.4: Comparação dos resultados Ex. 3 - Ex. 1

	$\ Q_{H_2}\ _\infty$	$\gamma_{yu}^{-1}$
Exemplo 1 ( $N = 5$ )	32.2090	71.4286
Exemplo 3 ( $N = 5$ )	45.3800	71.4286

De igual maneira que nos casos anteriores, a Tabela 6.5 mostra que a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  pelo critério nominal estendido (primeira coluna) aponta como melhor  $\mu$  o valor mais próximo de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ . A avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  por meio de  $\hat{\eta}_{av}$  aponta como melhor  $\mu$  o valor  $\mu_* = 19$ . Ao selecionar o controlador  $Q_{rob}(19)$  por meio do critério “conservador” ( $\hat{\eta}_{av}$ ) o que se perderia pelo critério otimista ( $J_{cl}^a$ ) com  $Q_{rob}(43)$  seria 10 %.

Como nos exemplos anteriores, avalia-se o efeito do controlador  $Q(\mu_*)$  na atenuação do sinal de perturbação  $\Phi_d$ , comparando-se as respostas na variável  $\mathfrak{d}$  em malha aberta (por meio de  $\|P_{\mathfrak{d}}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu_*))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas

$$\|P_{\mathfrak{d}}^a \Phi_d\|_2^2 = 6.8970 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 1.8117 \times 10^4$$

ou usando os limitantes nos erros de aproximação (nesse caso  $\gamma_{sd}^b = 0.0092$ )

$$(\|P_{\mathfrak{d}}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{sd}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 6.8972 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 3.5717 \times 10^4$$

No primeiro caso, a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 73.7 % o efeito da perturbação e, no segundo caso (medida conservadora), em aproximadamente 48.2 %.

Tabela 6.5: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 3)

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$4.5362 \times 10^4$	$5.2661 \times 10^4$
10	$2.7380 \times 10^4$	$4.0272 \times 10^4$
11	$2.4499 \times 10^4$	$3.8735 \times 10^4$
12	$2.2385 \times 10^4$	$3.7669 \times 10^4$
13	$2.1461 \times 10^4$	$3.7125 \times 10^4$
14	$2.0772 \times 10^4$	$3.6724 \times 10^4$
15	$2.0157 \times 10^4$	$3.6404 \times 10^4$
16	$1.9588 \times 10^4$	$3.6150 \times 10^4$
17	$1.9057 \times 10^4$	$3.5910 \times 10^4$
18	$1.8566 \times 10^4$	$3.5753 \times 10^4$
19	$1.8117 \times 10^4$	<b><math>3.5717 \times 10^4</math></b>
20	$1.7717 \times 10^4$	$3.5856 \times 10^4$
25	$1.7100 \times 10^4$	$3.7529 \times 10^4$
30	$1.6868 \times 10^4$	$3.9920 \times 10^4$
35	$1.6652 \times 10^4$	$4.3407 \times 10^4$
43	$1.6341 \times 10^4$	$5.2396 \times 10^4$

Exemplo 4

Para explorar os resultados do exemplo anterior são considerados as mesmas configurações do Exemplo 3 (Figura 6.1), sendo a única mudança a aproximação nominal que nesse caso corresponde a  $N = 2$ . Sendo assim,  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  é igual a 55.6096, a margem de estabilidade é 0.0180, sendo maior do que o limitante  $\gamma_{yu} = 0.0150$  no erro de aproximação. Da mesma forma que no exemplo anterior, é possível considerar  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_\infty$ . Note-se que, comparando com o exemplo 2 (na tabela 6.6), a margem de estabilidade do sistema nominal ótimo fica mais perto do limitante  $\gamma_{yu}$ .

Tabela 6.6: Comparação dos resultados Ex. 4 - Ex. 2.

	$\ Q_{H_2}\ _\infty$	$\gamma_{yu}^{-1}$
Exemplo 3 ( $N = 5$ )	45.3800	71.4286
Exemplo 4 ( $N = 2$ )	55.6096	66.6667

De mesma forma que nos casos anteriores, a Tabela 6.7 mostra que a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  pelo critério nominal estendido (primeira coluna) aponta como melhor  $\mu$  o valor mais próximo de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ . A avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  por meio de  $\hat{\eta}_{av}$  aponta como melhor  $\mu$  o valor  $\mu_\star = 20$ . Ao selecionar o controlador  $Q_{rob}(20)$  por meio do critério “conservador” ( $\hat{\eta}_{av}$ ), o que se perderia pelo critério otimista ( $J_{cl}^a$ ) com  $Q_{rob}(52)$  seria 19 %.



Avalia-se o efeito do controlador  $Q(\mu_*)$  na atenuação do sinal de perturbação  $\Phi_d$  comparando-se as respostas na variável  $\mathfrak{J}$  em malha aberta (por meio de  $\|P_{\mathfrak{J}d}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas

$$\|P_{\mathfrak{J}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 6.8970 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 1.7786 \times 10^4$$

ou usando os limitantes nos erros de aproximação (nesse caso  $\gamma_{sd}^b = 0.0092$ )

$$(\|P_{\mathfrak{J}d}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{sd}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 6.8972 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 3.6542 \times 10^4$$

No primeiro caso, a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 74% o efeito da perturbação e, no segundo caso (medida conservadora), em aproximadamente 47%.

Tabela 6.7: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 4)

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$4.5611 \times 10^4$	$5.2902 \times 10^4$
10	$2.7933 \times 10^4$	$4.0786 \times 10^4$
11	$2.5079 \times 10^4$	$3.9308 \times 10^4$
12	$2.2452 \times 10^4$	$3.8156 \times 10^4$
13	$2.0689 \times 10^4$	$3.7479 \times 10^4$
14	$2.0238 \times 10^4$	$3.7278 \times 10^4$
15	$1.9798 \times 10^4$	$3.7063 \times 10^4$
16	$1.9370 \times 10^4$	$3.6914 \times 10^4$
17	$1.8954 \times 10^4$	$3.6794 \times 10^4$
18	$1.8551 \times 10^4$	$3.6702 \times 10^4$
19	$1.8161 \times 10^4$	$3.6638 \times 10^4$
20	$1.7786 \times 10^4$	<b><math>3.6542 \times 10^4</math></b>
21	$1.7428 \times 10^4$	$3.6559 \times 10^4$
22	$1.7088 \times 10^4$	$3.6624 \times 10^4$
23	$1.6769 \times 10^4$	$3.6724 \times 10^4$
24	$1.6475 \times 10^4$	$3.6899 \times 10^4$
25	$1.6210 \times 10^4$	$3.7146 \times 10^4$
30	$1.5360 \times 10^4$	$3.9189 \times 10^4$
35	$1.4975 \times 10^4$	$4.2679 \times 10^4$
40	$1.4729 \times 10^4$	$4.7368 \times 10^4$
45	$1.4535 \times 10^4$	$5.4422 \times 10^4$
52	$1.4306 \times 10^4$	$7.1229 \times 10^4$

Cabe observar ainda que, devido ao maior erro de aproximação, nesse caso  $\mu_*$  é mais distante de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  ( $55 - 20 = 35$ ) do que no Exemplo 3 ( $45 - 19 = 26$ ).

Exemplo 5

Nesse exemplo são consideradas as mesmas configurações do exemplo 3 ( $N = 5$ ) e do exemplo 4 ( $N = 2$ ), com um maior número de variáveis controladas (nesse caso  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ) definidas em regiões na barra da seguinte forma:  $\mathfrak{d}_i(t) = \langle \varphi_{\mathfrak{d}_i}, z(t) \rangle$ , onde  $\varphi_{\mathfrak{d}_i}$ , é dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{d}_1}(x) &= \frac{1}{0.5000 - 0.4000} & \forall x \in [0.4000, 0.5000], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_2}(x) &= \frac{1}{0.9286 - 0.8286} & \forall x \in [0.8286, 0.9286], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_3}(x) &= \frac{1}{1.3571 - 1.2571} & \forall x \in [1.2571, 1.3571], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_4}(x) &= \frac{1}{1.7857 - 1.6857} & \forall x \in [1.6857, 1.7857], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_5}(x) &= \frac{1}{2.2143 - 2.1143} & \forall x \in [2.1143, 2.2143], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_6}(x) &= \frac{1}{2.6429 - 2.5429} & \forall x \in [2.5429, 2.6429], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_7}(x) &= \frac{1}{3.0000 - 2.9714} & \forall x \in [2.9714, 3.0000],\end{aligned}$$

com a finalidade de ilustrar o efeito do maior número de variáveis controladas no “esforço de controle” ( $\|Q_{H_2}\|_{\infty}$ ).

Na tabela 6.8 apresentam-se os resultados das simulações dos controladores para cada exemplo. A primeira coluna apresenta cada exemplo em questão com  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ; na segunda coluna é apresentada a norma infinito do controlador nominal ótimo projetado para cada exemplo; na terceira coluna é mostrada a inversa do limitante  $\gamma_{yu}^{-1}$  do erro de aproximação para cada exemplo; a quarta coluna apresenta o melhor  $\mu_{\star}$  para o controlador  $Q_{rob}$ ; a quinta coluna mostra a avaliação do critério otimista  $J_{cl}^a(Q(\mu_{\star}))$  para o melhor  $\mu$  e finalmente na sexta coluna é apresentada a avaliação do critério conservador  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu_{\star}))^2$  para o melhor  $\mu$ .

Tabela 6.8: Desempenho dos controladores (Ex. 3 e Ex.4).

	$\ Q_{H_2}\ _{\infty}$	$\gamma_{yu}^{-1}$	$\mu_{\star}$	$J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_{\star}))$	$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_{\star}))^2$
Ex. 3: $N = 5$ com ( $m_{\mathcal{J}} = 7$ )	55.2944	71.2470	21	$1.9579 \times 10^4$	$4.7519 \times 10^4$
Ex. 4: $N = 2$ com ( $m_{\mathcal{J}} = 7$ )	68.0893	66.5012	20	$2.0319 \times 10^4$	$4.9647 \times 10^4$

Observa-se que a norma  $H_{\infty}$  do controlador quadrático ótimo está mais perto do limite máximo de aproximação  $\gamma_{yu}^{-1}$  do que nos dois exemplos anteriores. Note-se que  $\mu_{\star}$  é mais distante de  $\|Q_{H_2}\|_{\infty}$  no primeiro exemplo ( $N = 5$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ) ( $55 - 21 = 34$ ) do que no Exemplo 3 ( $45 - 19 = 26$ ). No

segundo exemplo ( $N = 2$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ )  $\mu_*$  é mais distante de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  (66 - 20 = 46) do que no Exemplo 4 (55 - 20 = 36). Note-se ainda que nesse caso  $\|Q_{H_2}\|_\infty < \gamma_{yu}^{-1}$ .

Como nos casos anteriores, são comparadas as respostas na variável  $\mathfrak{d}$  em malha aberta (por meio de  $\|\hat{P}_{\mathcal{J}d}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas, para o primeiro exemplo ( $N = 5$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ )

$$\|\hat{P}_{\mathcal{J}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 9.6554 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 1.9579 \times 10^4$$

e para o segundo exemplo ( $N = 2$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ )

$$\|\hat{P}_{\mathcal{J}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 9.6554 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 2.0319 \times 10^4$$

ou usando os limitantes nos erros de aproximação para o primeiro caso ( $N = 5$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ) onde  $\gamma_{sd}^b = 0.0109$

$$(\|\hat{P}_{\mathcal{J}d}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{sd}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 9.6558 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 4.7519 \times 10^4$$

e para o segundo caso ( $N = 2$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ) onde  $\gamma_{sd}^b = 0.0109$

$$(\|\hat{P}_{\mathcal{J}d}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{sd}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 9.6558 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 4.9647 \times 10^4.$$

No primeiro caso ( $N = 5$ ), a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 79.72% o efeito da perturbação e por meio do limitante superior (medida conservadora) em aproximadamente 50.78%. No segundo caso ( $N = 2$ ), a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 78.95% o efeito da perturbação e por meio do limitante superior (medida conservadora) em aproximadamente 48.58%.

Na Tabela 6.9 é apresentada para os vários valores de  $\mu$  considerados, os valores de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$  (primeira coluna), e  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  (segunda coluna) para o primeiro caso ( $N = 5$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ). A Tabela 6.10 apresenta, para os vários valores de  $\mu$  considerados, os valores de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$  (primeira coluna), e  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  (segunda coluna) para o primeiro caso ( $N = 2$  e  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ). Observa-se que a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  pelo critério “nominal estendido” (primeira coluna) aponta como melhor  $\mu$  o valor mas próximo de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$ .

Tabela 6.9: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 3 com  $m_{\mathcal{J}} = 7$ ).

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$6.3352 \times 10^4$	$7.2479 \times 10^4$
10	$3.8100 \times 10^4$	$5.5144 \times 10^4$
15	$2.3841 \times 10^4$	$4.8815 \times 10^4$
16	$2.2985 \times 10^4$	$4.8402 \times 10^4$
17	$2.2211 \times 10^4$	$4.8076 \times 10^4$
18	$2.1490 \times 10^4$	$4.7827 \times 10^4$
19	$2.0813 \times 10^4$	$4.7669 \times 10^4$
20	$2.0176 \times 10^4$	$4.7522 \times 10^4$
21	$1.9579 \times 10^4$	<b><math>4.7519 \times 10^4</math></b>
22	$1.9023 \times 10^4$	$4.7567 \times 10^4$
23	$1.8512 \times 10^4$	$4.7836 \times 10^4$
24	$1.8052 \times 10^4$	$4.8253 \times 10^4$
25	$1.7648 \times 10^4$	$4.8940 \times 10^4$
52	$1.5944 \times 10^4$	$1.0849 \times 10^5$
53	$1.5906 \times 10^4$	$1.1521 \times 10^5$
54	$1.5869 \times 10^4$	$1.2287 \times 10^5$
55	$1.5831 \times 10^4$	$1.3164 \times 10^5$

Tabela 6.10: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 4 com  $m_{\mathcal{J}} = 7$ )

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$6.3693 \times 10^4$	$7.2807 \times 10^4$
10	$3.8861 \times 10^4$	$5.5823 \times 10^4$
15	$2.2982 \times 10^4$	$5.0079 \times 10^4$
16	$2.2423 \times 10^4$	$4.9963 \times 10^4$
17	$2.1876 \times 10^4$	$4.9876 \times 10^4$
18	$2.1343 \times 10^4$	$4.9760 \times 10^4$
19	$2.0824 \times 10^4$	$4.9684 \times 10^4$
20	$2.0319 \times 10^4$	<b><math>4.9647 \times 10^4</math></b>
21	$1.9828 \times 10^4$	$4.9735 \times 10^4$
22	$1.9352 \times 10^4$	$4.9779 \times 10^4$
23	$1.8891 \times 10^4$	$4.9956 \times 10^4$
24	$1.8445 \times 10^4$	$4.9918 \times 10^4$
25	$1.8016 \times 10^4$	$5.0204 \times 10^4$
65	$1.3208 \times 10^4$	$3.3809 \times 10^5$
66	$1.3176 \times 10^4$	$3.9726 \times 10^5$

Exemplo 6

Neste exemplo são considerados as mesmas configurações do Exemplo 3. A diferença é no menor número de variáveis controladas. Nesse caso, são

consideradas 3 variáveis controladas (i.e.,  $m_{\mathfrak{d}} = 3$ ) definidas da seguinte forma:  $\mathfrak{d}_i(t) = \langle \varphi_{\mathfrak{d}_i}, z(t) \rangle$ , onde  $\varphi_{\mathfrak{d}_i}$ , é dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{d}_1}(x) &= \frac{1}{0.5 - 0.4} \quad \forall x \in [0.4, 0.5], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_2}(x) &= \frac{1}{1.5 - 1.4} \quad \forall x \in [1.4, 1.5], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_3}(x) &= \frac{1}{2.5 - 2.4} \quad \forall x \in [2.4, 2.5].\end{aligned}$$

Nesse caso  $\|Q_{H_2}\|_{\infty}$  é igual a 32.9585, a margem de estabilidade é 0.030 sendo maior do que o limitante  $\gamma_{yu} = 0.0140$  no erro de aproximação. Da mesma forma que os exemplos anteriores é considerado  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_{\infty}$ .

Comparando com os exemplos 3 e 6 (na tabela 6.11) nota-se, inicialmente, que o “esforço de controle” medido por  $\|Q_{H_2}\|_{\infty}$  é menor no exemplo 6 do que no exemplo 3 (o que é natural já que deseja-se controlar três médias espaciais e não cinco como no caso do exemplo 3). Como consequência a margem de estabilidade do sistema nominal ótimo fica mais afastada do limitante  $\gamma_{yu}$ .

Tabela 6.11: Comparação dos resultados Ex. 4 - Ex. 2.

	$\ Q_{H_2}\ _{\infty}$	$\gamma_{yu}^{-1}$
Exemplo 3 ( $N = 5$ )	45.3800	71.4286
Exemplo 5 ( $N = 6$ )	32.9585	71.4286

Como nos casos anteriores, a Tabela 6.12 mostra que a avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  pelo critério nominal estendido (primeira coluna) aponta como melhor  $\mu$  o valor mais próximo de  $\|Q_{H_2}\|_{\infty}$ .

A avaliação de  $Q_{rob}(\mu)$  por meio de  $\hat{\eta}_{av}$  aponta como melhor  $\mu$  o valor  $\mu_{\star} = 15$ . Ao selecionar o controlador  $Q_{rob}(15)$  por meio do critério “conservador” ( $\hat{\eta}_{av}$ ) o que se perderia pelo critério otimista ( $J_{cl}^a$ ) com  $Q_{rob}(30)$  seria 3%. Como nos exemplo anteriores perde-se muito pouco com uma avaliação “otimista”.

Comparam-se as respostas na variável  $\mathfrak{d}$  em malha aberta (por meio de  $\|\hat{P}_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas

$$\|\hat{P}_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 4.1840 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_{\star})) = 1.7045 \times 10^4$$

ou usando os limitantes nos erros de aproximação (nesse caso  $\gamma_{sd}^b = 0.0071$ )

$$(\|\hat{P}_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{\mathfrak{d}d}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 4.1841 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_{\star}))^2 = 2.6284 \times 10^4$$

No primeiro exemplo, a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 60 % o efeito da perturbação e no segundo exemplo (medida conservadora) em aproximadamente 37.2%.

Tabela 6.12: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 6)

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$2.8215 \times 10^4$	$3.3613 \times 10^4$
10	$1.8941 \times 10^4$	$2.7200 \times 10^4$
11	$1.8469 \times 10^4$	$2.6897 \times 10^4$
12	$1.8052 \times 10^4$	$2.6660 \times 10^4$
13	$1.7673 \times 10^4$	$2.6459 \times 10^4$
14	$1.7334 \times 10^4$	$2.6322 \times 10^4$
15	$1.7045 \times 10^4$	<b><math>2.6284 \times 10^4</math></b>
16	$1.6996 \times 10^4$	$2.6392 \times 10^4$
17	$1.6959 \times 10^4$	$2.6532 \times 10^4$
18	$1.6922 \times 10^4$	$2.6672 \times 10^4$
19	$1.6886 \times 10^4$	$2.6829 \times 10^4$
20	$1.6850 \times 10^4$	$2.6988 \times 10^4$
25	$1.6676 \times 10^4$	$2.7991 \times 10^4$
30	$1.6516 \times 10^4$	$2.9367 \times 10^4$

Nesse caso, observa-se que com o mesmo erro de aproximação (com respeito ao Exemplo 3) mas com um número menor de variáveis controladas, nesse caso  $\mu_*$  é menos distante de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  ( $32 - 15 = 17$ ) do que no Exemplo 3 ( $45 - 19 = 26$ ).

A Figura 6.5 apresenta a resposta no tempo da variável  $\mathfrak{J}_1$  em malha aberta por meio de  $\|\hat{P}_{\mathfrak{J}d}^a \Phi_d\|_2^2$  e em malha aberta por meio de  $\|(\hat{P}_{\mathfrak{J}d} + \hat{P}_{\mathfrak{J}u} \mathcal{P}^a(K) \hat{P}_{yd}) \Phi_d\|_2^2$  relativas as sinais de perturbação. As Figuras 6.6 - 6.7 apresentam os mesmos resultados para  $\mathfrak{J}_2$  e  $\mathfrak{J}_3$ .

Note-se que além da atenuação de aproximadamente 60% no efeito de perturbação medido pela norma  $H_2$  das respostas  $\mathfrak{J}$  ao sinal  $\Phi_d$ , o valor de pico das respostas no tempo de cada uma das variáveis  $\mathfrak{J}_i$  aumenta aproximadamente 45 % a 50 % quando não sem tem controlador.

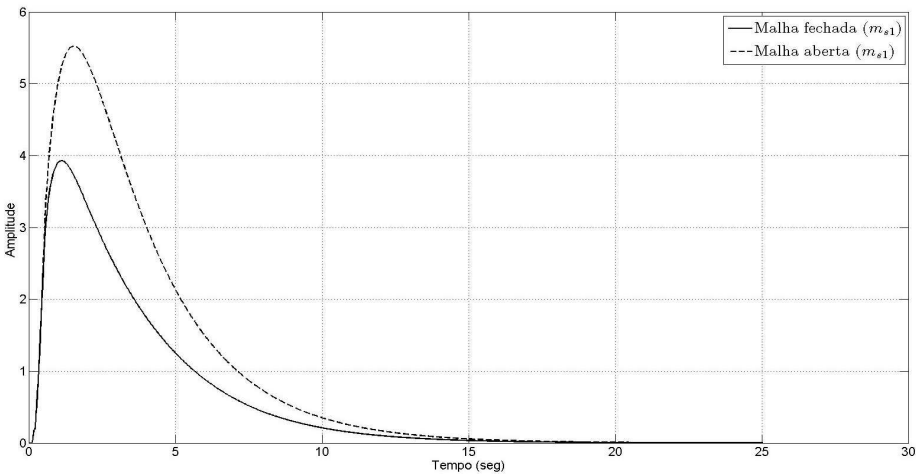


Figura 6.5: Resposta da variável controlada  $m_{d1}$ .

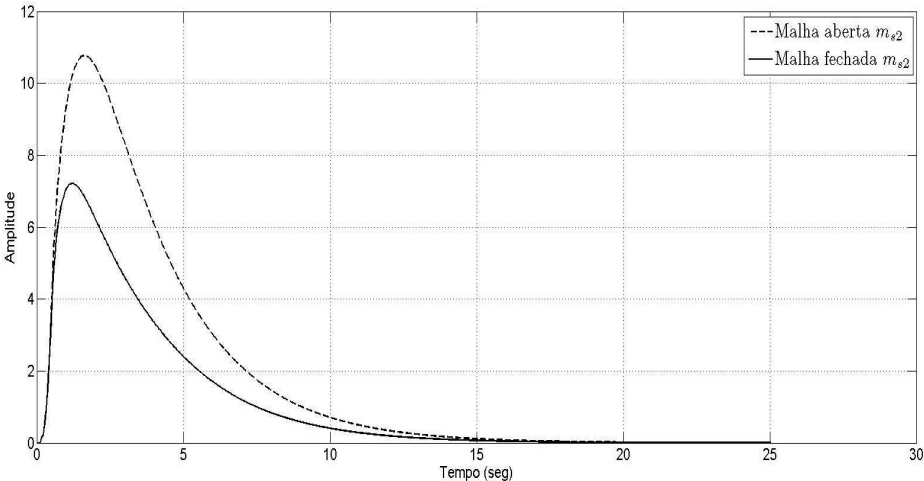


Figura 6.6: Resposta da variável controlada  $m_{d2}$ .

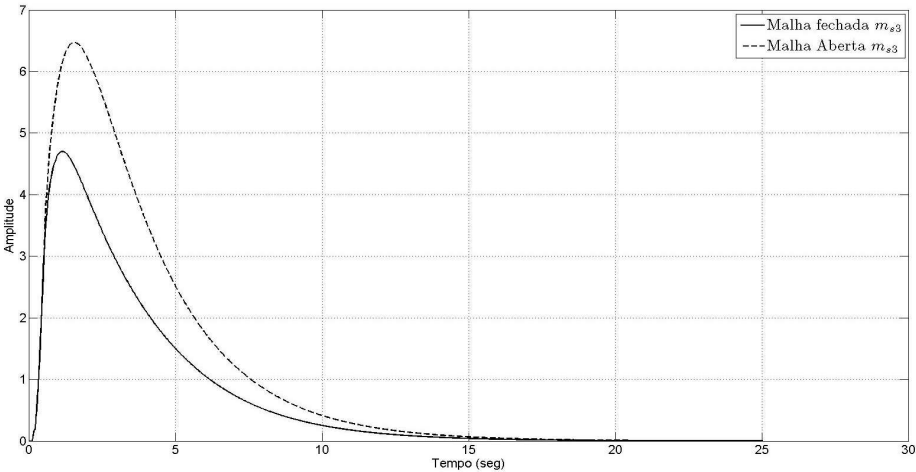


Figura 6.7: Resposta da variável controlada  $m_{d3}$ .

Exemplo 7

Neste exemplo são realizados experimentos para avaliar o efeito da localização do sensor na barra. É avaliado o sensor  $\varphi_y(x)$  em três posições, isto seguindo a mesma configuração do Exemplo 4 (i.e.  $m_d = 5$  e  $N = 2$ ).

Na Tabela 6.13 são mostradas as medidas de desempenho de cada posição do sensor  $\varphi_y(x)$  na barra. A primeira coluna apresenta a posição espacial de cada sensor (a primeira linha da tabela é o resultado do Exemplo 4), na segunda coluna é apresentado a norma infinito do controlador nominal ótimo projetado para cada posição do sensor; na terceira coluna é mostrada a inversa do limitante  $\gamma_{yu}$  do erro de aproximação; a quarta coluna apresenta o melhor  $\mu_*$  para o controlador  $Q_{rob}$ ; a quinta coluna mostra a avaliação do critério otimista  $J_{cl}^a(Q(\mu_*))$  para o melhor  $\mu$  e finalmente na sexta coluna é apresentada a avaliação do critério conservador  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2$  para o melhor  $\mu$ .

Note-se na tabela 6.13, que somente o no terceiro caso (ou seja o sensor localizado em  $[2.7, 2.8]$ ) o margem de estabilidade ( $\frac{1}{\|Q_{H_2}\|_\infty}$ ) é menor que o limitante  $\gamma_{yu}$ , sendo assim é escolhido  $\mu_{max} = 55 < \gamma_{yu}^{-1}$  para garantir estabilidade do sistema em malha fechada. Nos demais casos é considerado  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_\infty$ .

Tabela 6.13: Desempenho relativo à localização do Sensor

	$\ Q_{H_2}\ _\infty$	$\gamma_{yu}^{-1}$	$\mu_*$	$J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$	$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$
1) $\varphi_y(x), x \in [0.5, 0.6]$	55.6096	66.6667	20	$1.7786 \times 10^4$	$3.6542 \times 10^4$
2) $\varphi_y(x), x \in [1.7, 1.8]$	39.7134	46.7289	10	$2.2544 \times 10^4$	$3.3311 \times 10^4$
3) $\varphi_y(x), x \in [2.7, 2.8]$	65.1465	57.8034	16	$3.3230 \times 10^4$	$5.2809 \times 10^4$

É avaliado o efeito dos controladores  $Q_{rob}(\mu_*)$  para cada posição do sensor) na atenuação de perturbação  $\Phi_d$ , comparando a resposta na variável  $d$  em malha aberta (por meio de  $\|P_{3d}^a \Phi_d\|_2^2 = 6.8970 \times 10^4$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$ ). A atenuação de perturbação alocando o sensor na primeira posição é de 74 %, na segunda posição é de 67 % e na terceira posição é de 51 %. Da mesma maneira, usando os limitantes nos erros de aproximação, (por meio de  $\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$ ) a atenuação de perturbação alocando o sensor na primeira posição é de 47 %, na segunda posição é de 52 % e na terceira posição é de 24 %.

Pode-se concluir que para a atenuação da perturbação  $\Phi_d$  avaliada somente pelo critério otimista a localização do sensor é ótima na primeira posição, mas considerando o critério conservador, é melhor escolher o sensor aproximadamente no meio da barra. Note-se que uma má escolha da posição do



sensor pode degradar significativamente o desempenho do controlador obtido ( $\approx 50 - 60 \%$  na comparação da terceira com a segunda localização).

### Exemplo 8

Neste exemplo são realizados experimentos para avaliar o efeito das localizações dos atuadores na barra. Cada atuador  $\beta_i^u$  será avaliado isoladamente, isto seguindo a mesma configuração do exemplo 3 (i.e.  $m_d = 5$  e  $N = 2$ ).

Na Tabela 6.14 é mostrado o desempenho de cada atuador  $\beta_1^u$ ,  $\beta_2^u$  e  $\beta_3^u$  na barra, para isto é apresentada a norma infinito do controlador ótimo projetado para cada atuador (primeira linha), a inversa do limitante  $\gamma_{yu}$  do erro de aproximação ou  $\mu$  (segunda linha), o melhor  $\mu_*$  para o controlador  $Q_{rob}$  (terceira linha), a avaliação do critério otimista  $J_{cl}^a(Q(\mu_*))$  para o melhor  $\mu$  (quarta coluna), a avaliação do critério conservador  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2$  para o melhor  $\mu$  (quinta coluna).

Observa-se na Tabela 6.14, que nos três casos o margem de estabilidade ( $\frac{1}{\|Q_{H_2}\|_\infty}$ ) é maior que o limitante  $\gamma_{yu}$  no erro de aproximação, o que garante a estabilidade do sistema em malha fechada, porem em todos os casos é considerado  $\mu_{max} \approx \|Q_{H_2}\|_\infty$ .

Avaliando pelo critério conservador ao selecionar  $Q_{rob}(\mu_*)$  o que se perderia pelo critério otimista com  $Q_{rob}(\mu_{max})$  para  $\beta_1^u$  seria 2.9 %, para  $\beta_2^u$  seria 4.23 % e para  $\beta_3^u$  seria somente 0.15 %. Note-se que à avaliação por meio do critério otimista, a escolha do atuador ( $\beta_3^u$ ) mais afastado do sensor é muito desfavorável.

Tabela 6.14: Desempenho relativo à localização dos Atuadores

	$\beta_1^u$	$\beta_2^u$	$\beta_3^u$
$\ Q_{H_2}\ _\infty$	44.9394	49.9706	11.8000
$\gamma_{yu}^{-1}$	113.5278	123.7863	105.9735
$\mu_*$	22	25	5
$J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$	$3.4087 \times 10^4$	$2.6116 \times 10^4$	$6.6440 \times 10^4$
$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$	$4.4485 \times 10^4$	$3.7314 \times 10^4$	$7.1662 \times 10^4$

Como nos exemplos anteriores, é avaliado o desempenho dos controladores  $Q_{rob}(\mu_*)$  (para cada  $\beta_i^u$ ) na atenuação da perturbação  $\Phi_d$ , comparando-se a resposta na variável  $\mathfrak{d}$  em malha aberta (por meio de  $\|P_{sd}^a \Phi_d\|_2^2 = 6.8970 \times 10^4$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$ ). A atenuação da perturbação utilizando somente o atuador  $\beta_1^u$  é de 50.5 %, para o atuador  $\beta_2^u$  seria 62.3 % e para o atuador  $\beta_3^u$  seria somente 3.6 %. Da mesma maneira, usando os limitantes nos erros de aproximação (por meio

de  $\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*)^2)$ , a atenuação da perturbação utilizando o atuador  $\beta_1^u$  é de 35.5 %, utilizando o atuador  $\beta_2^u$  seria 45.8 % e finalmente para  $\beta_3^u$  piora 3.7 % com relação a perturbação em malha aberta.

Pode-se concluir que para a atenuação da perturbação  $\Phi_d$  (avaliado tanto pelo critério otimista como pelo critério conservador) utilizando apenas um atuador, é melhor escolher o atuador aproximadamente no meio da barra e a pior escolha é o atuador ( $\beta_3^u$ ) localizado no final da barra. Da mesma forma que no caso do sensor, conclui-se que uma má escolha na localização de um atuador pode acarretar uma degradação significativa no desempenho do controlador correspondente.

Comparando este Exemplo com desempenho do controlador do Exemplo 3 (onde se tem os três atuadores), se observa que a atenuação da perturbação tanto pelo critério otimista, e quanto pelo critério conservador é melhor no Exemplo 3; entretanto se a escolha fosse utilizar somente um atuador ( $\beta_2^u$ , como o recomendado nesse exemplo) pelo critério otimista a perda com respeito ao Exemplo 3, seria de 30 % e pelo critério conservador seria de 4.8 % - ou seja (ver Tabela 6.15) com mais atuadores o sistema de controle pode ser mais sensível a erros de modelo. As Tabelas 6.16, 6.17 e 6.18 apresentam o desempenho dos controladores na classe  $S_Q(\mu)$  para  $\beta_1^u$ ,  $\beta_2^u$  e  $\beta_3^u$ . Na Figura 6.8, é apresentada o desempenho de cada controlador na classe  $S_Q(\mu)$  para cada  $\beta_i^u$ .

Tabela 6.15: Desempenho de  $Q_{rob}(\mu_*)$  Ex. 3 - Ex. 8

	$J_{cl}^a(Q(\mu_*))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2$
Exemplo 3 (3 atuadores)	$1.8117 \times 10^4$	$3.5753 \times 10^4$
Exemplo 8 (1 atuador $\beta_2^u$ )	$2.6116 \times 10^4$	$3.7314 \times 10^4$

Tabela 6.16: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  para  $\beta_1^u$ 

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$5.3550 \times 10^4$	$5.9125 \times 10^4$
10	$4.0701 \times 10^4$	$4.8943 \times 10^4$
11	$3.8443 \times 10^4$	$4.7306 \times 10^4$
12	$3.7142 \times 10^4$	$4.6390 \times 10^4$
13	$3.6707 \times 10^4$	$4.6051 \times 10^4$
14	$3.6287 \times 10^4$	$4.5720 \times 10^4$
15	$3.5883 \times 10^4$	$4.5410 \times 10^4$
16	$3.5501 \times 10^4$	$4.5132 \times 10^4$
17	$3.5149 \times 10^4$	$4.4895 \times 10^4$
18	$3.4838 \times 10^4$	$4.4711 \times 10^4$
19	$3.4577 \times 10^4$	$4.4596 \times 10^4$
20	$3.4371 \times 10^4$	$4.4531 \times 10^4$
21	$3.4211 \times 10^4$	$4.4492 \times 10^4$
22	$3.4087 \times 10^4$	<b><math>4.4485 \times 10^4</math></b>
23	$3.3988 \times 10^4$	$4.4495 \times 10^4$
24	$3.3905 \times 10^4$	$4.4553 \times 10^4$
25	$3.3833 \times 10^4$	$4.4589 \times 10^4$
30	$3.3567 \times 10^4$	$4.4934 \times 10^4$
35	$3.3363 \times 10^4$	$4.5442 \times 10^4$
40	$3.3186 \times 10^4$	$4.6095 \times 10^4$
44	$3.3057 \times 10^4$	$4.6719 \times 10^4$

Tabela 6.17: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  para  $\beta_2^u$ 

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$5.0771 \times 10^4$	$5.6342 \times 10^4$
10	$3.5939 \times 10^4$	$4.4293 \times 10^4$
15	$2.9076 \times 10^4$	$3.9203 \times 10^4$
20	$2.7211 \times 10^4$	$3.7788 \times 10^4$
21	$2.6913 \times 10^4$	$3.7598 \times 10^4$
22	$2.6652 \times 10^4$	$3.7478 \times 10^4$
23	$2.6435 \times 10^4$	$3.7397 \times 10^4$
24	$2.6258 \times 10^4$	$3.7341 \times 10^4$
25	$2.6116 \times 10^4$	<b><math>3.7314 \times 10^4</math></b>
26	$2.6000 \times 10^4$	$3.7315 \times 10^4$
27	$2.5903 \times 10^4$	$3.7357 \times 10^4$
28	$2.5820 \times 10^4$	$3.7403 \times 10^4$
29	$2.5747 \times 10^4$	$3.7444 \times 10^4$
30	$2.5682 \times 10^4$	$3.7497 \times 10^4$
35	$2.5427 \times 10^4$	$3.7896 \times 10^4$
40	$2.5224 \times 10^4$	$3.8444 \times 10^4$
45	$2.5049 \times 10^4$	$3.9152 \times 10^4$
49	$2.4920 \times 10^4$	$3.9779 \times 10^4$

Tabela 6.18: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  para  $\beta_3^u$ 

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
1	$6.8282 \times 10^4$	$7.2325 \times 10^4$
2	$6.7602 \times 10^4$	$7.2061 \times 10^4$
3	$6.6934 \times 10^4$	$7.1811 \times 10^4$
4	$6.6545 \times 10^4$	$7.1676 \times 10^4$
5	$6.6440 \times 10^4$	<b><math>7.1662 \times 10^4</math></b>
6	$6.6396 \times 10^4$	$7.1680 \times 10^4$
7	$6.6374 \times 10^4$	$7.1710 \times 10^4$
8	$6.6358 \times 10^4$	$7.1744 \times 10^4$
9	$6.6345 \times 10^4$	$7.1784 \times 10^4$
10	$6.6333 \times 10^4$	$7.1826 \times 10^4$
11	$6.6321 \times 10^4$	$7.1871 \times 10^4$

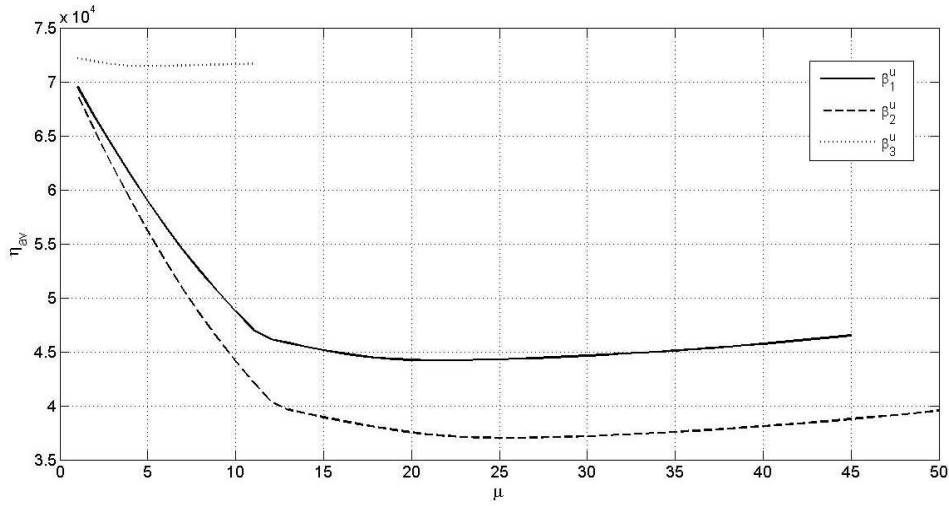


Figura 6.8: Desempenho de cada controlador na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 8)

### Exemplo 9

Neste exemplo é realizado um experimento para avaliar a melhor alocação conjunta de um sensor e de um atuador. Para isto é avaliado o efeito de cada par de posições de atuador e do sensor. A ação espacial de cada atuador é localizada na seguinte maneira (como no exemplo 1)

$$\begin{aligned}\beta_1^u(x) &= 1 & \forall x \in [0.8, 0.9], \\ \beta_2^u(x) &= 1 & \forall x \in [1.8, 1.9], \\ \beta_3^u(x) &= 1 & \forall x \in [2.8, 2.9],\end{aligned}$$

e as medidas dos sensores são localizadas em

$$\begin{aligned}\varphi_{y1}(x) &= \frac{1}{0.6 - 0.5} & \forall x \in [0.5, 0.6], \\ \varphi_{y2}(x) &= \frac{1}{1.8 - 1.7} & \forall x \in [1.7, 1.8], \\ \varphi_{y3}(x) &= \frac{1}{2.8 - 2.7} & \forall x \in [2.7, 2.8].\end{aligned}$$

As configurações das variáveis controladas e a dimensão da aproximação são como no exemplo 4 (i.e.,  $m_d = 5$  e  $N = 2$ ).

A tabela 6.19 apresenta as medidas de desempenho para cada posição do atuador e do sensor. Na primeira coluna é apresentado o atuador e sensor utilizado para cada simulação; a segunda coluna apresenta a norma infinito do controlador nominal ótimo projetado para cada posição do atuador e sensor, na terceira coluna apresenta a inversa do limitante  $\gamma_{yu}$  do erro de aproximação; na quarta coluna é mostrada o melhor  $\mu_*$  para o controlador  $Q_{rob}$ , a quinta

coluna mostra a avaliação do critério otimista  $J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$  para o melhor  $\mu$  e finalmente na sexta coluna é apresentada a avaliação do critério conservador  $\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$  para o melhor  $\mu$ .

Tabela 6.19: Comparação do desempenho para cada atuador e sensor

	$\ Q_{H_2}\ _\infty$	$\gamma_{yu}^{-1}$	$\mu_*$	$J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$	$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$
$(\varphi_{y1}, \beta_1^u)$	44.9394	113.5278	22	$3.4087 \times 10^4$	$4.4485 \times 10^4$
$(\varphi_{y1}, \beta_2^u)$	49.9706	123.7863	25	$2.6116 \times 10^4$	<b><math>3.731410^4</math></b>
$(\varphi_{y1}, \beta_3^u)$	11.8000	105.9735	5	$6.6440 \times 10^4$	$7.1534 \times 10^4$
$(\varphi_{y2}, \beta_1^u)$	32.3216	96.6828	17	$3.5514 \times 10^4$	$4.3587 \times 10^4$
$(\varphi_{y2}, \beta_2^u)$	35.8688	67.4131	19	$3.0340 \times 10^4$	$3.8143 \times 10^4$
$(\varphi_{y2}, \beta_3^u)$	8.5463	95.1530	3	$6.6608 \times 10^4$	$7.1653 \times 10^4$
$(\varphi_{y3}, \beta_1^u)$	69.7439	101.8386	29	$3.5774 \times 10^4$	$5.2737 \times 10^4$
$(\varphi_{y3}, \beta_2^u)$	77.8804	83.2420	22	$3.0015 \times 10^4$	$4.8831 \times 10^4$
$(\varphi_{y3}, \beta_3^u)$	18.2386	58.6514	8	$6.6545 \times 10^4$	$7.1856 \times 10^4$

Note-se que, comparando com o exemplo 7, onde o melhor desempenho foi utilizando três atuadores e um sensor aproximadamente no meio na barra, a perda em utilizar um sensor e um atuador (ambos aproximadamente no meio da barra) foi de 12 % avaliada pelo critério conservador e a perda avaliando pelo critério otimista 16 %. Na tabela 6.20 é apresentada o desempenho de cada controlador na classe  $S_Q(\mu)$  para a configuração de alocação de sensor e atuador que teve melhor desempenho  $(\varphi_{y2}, \beta_2^u)$ .

Tabela 6.20: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 9)

$\mu$	$J_{cl}^a(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$4.2230 \times 10^4$	$4.8319 \times 10^4$
15	$3.0669 \times 10^4$	$3.8225 \times 10^4$
16	$3.0558 \times 10^4$	$3.8183 \times 10^4$
17	$3.0472 \times 10^4$	$3.8159 \times 10^4$
18	$3.0401 \times 10^4$	$3.8145 \times 10^4$
19	$3.0340 \times 10^4$	<b><math>3.8143 \times 10^4</math></b>
20	$3.0283 \times 10^4$	$3.8147 \times 10^4$
21	$3.0231 \times 10^4$	$3.8156 \times 10^4$
22	$3.0182 \times 10^4$	$3.8171 \times 10^4$
23	$3.0136 \times 10^4$	$3.8190 \times 10^4$
24	$3.0091 \times 10^4$	$3.8207 \times 10^4$
25	$3.0048 \times 10^4$	$3.8233 \times 10^4$
30	$2.9849 \times 10^4$	$3.8382 \times 10^4$
35	$2.9667 \times 10^4$	$3.8561 \times 10^4$

Exemplo 10

Neste exemplo são apresentados dois experimentos considerando a equação de calor 2D, i.e.,

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y, t), \quad z(x, y; 0) = z_0(x, y),$$

para ilustrar o procedimento de síntese dos controladores com aproximações de dimensão  $N = 6$  e  $N = 7$ . Na Figura 6.9 é apresentada a configuração dos sensores (1), atuadores (3) e da variável controlada (7) em uma placa de dimensão  $L_1 \times L_2$  ( $L_1 = L_2 = 3$ ). Nesse experimento não é considerada a aproximação aumentada (i.e.,  $N_a$ ).

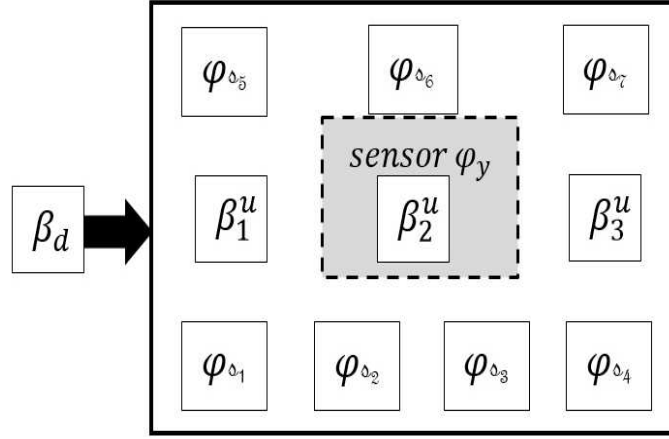


Figura 6.9: Configuração espacial de controle em uma placa

Nesse exemplo, a ação espacial de cada atuador é localizada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \beta_1^u(x_1, x_2) &= 1 & \forall (x_1, x_2) \in [0.50, 1.00] \times [1.25, 1.75], \\ \beta_2^u(x_1, x_2) &= 1 & \forall (x_1, x_2) \in [1.25, 1.75] \times [1.25, 1.75], \\ \beta_3^u(x_1, x_2) &= 1 & \forall (x_1, x_2) \in [2.00, 2.50] \times [1.25, 1.75]. \end{aligned}$$

As medidas dos sensores são localizadas em

$$\begin{aligned} \varphi_{y1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.5)^2} & \forall (x_1, x_2) \in [1, 2] \times [1, 2] \\ \varphi_y(x_1, x_2) &= 0 & \forall (x_1, x_2) \notin [1, 2] \times [1, 2]. \end{aligned}$$

A perturbação é aplicada em toda a placa da seguinte maneira

$$\beta^d(x_1, x_2) = 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in [0, L_1] \times [0, L_2],$$

onde  $L_1$  e  $L_2$  são os comprimentos de cada lado da barra. Finalmente as variáveis controladas ( $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_4, \mathfrak{d}_5, \mathfrak{d}_6$ , e  $\mathfrak{d}_7$ ) são localizadas em

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{d}_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [0.35, 0.85] \times [0.35, 0.85], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [0.95, 1.45] \times [0.35, 0.85], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_3}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [1.55, 2.05] \times [0.35, 0.85], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_4}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [2.15, 2.65] \times [0.35, 0.85], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_5}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [0.50, 1.00] \times [2.00, 2.50], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_6}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [1.25, 1.75] \times [2.00, 2.50], \\ \varphi_{\mathfrak{d}_7}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4 * (0.25)^2} \quad \forall (x_1, x_2) \in [2.00, 2.50] \times [2.00, 2.50],\end{aligned}$$

Na tabela 6.21 apresentam-se os resultados das simulações dos controladores para cada caso ( $N = 7$  e  $N = 6$ ). A primeira coluna apresenta cada caso em questão com; na segunda coluna é apresentada a norma infinito do controlador nominal ótimo projetado para cada caso; na terceira coluna é mostrada a inversa do limitante  $\gamma_{yu}$  do erro de aproximação para cada caso; a quarta coluna apresenta o melhor  $\mu_*$  para o controlador  $Q_{rob}$ ; a quinta coluna mostra a avaliação do critério otimista  $J_{cl}^a(Q(\mu_*))$  para o melhor  $\mu$  e finalmente na sexta coluna é apresentada a avaliação do critério conservador  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2$  para o melhor  $\mu$ .

Tabela 6.21: Desempenho dos controladores

	$\ Q_{H_2}\ _\infty$	$\gamma_{yu}^{-1}$	$\mu_*$	$J_{cl}^a(Q_{rob}(\mu_*))$	$\hat{\eta}_{av}(Q_{rob}(\mu_*))^2$
Caso 1: $N = 6$	28.1915	241.7798	11	$1.3389 \times 10^4$	$2.3612 \times 10^4$
Caso 2: $N = 7$	27.9589	415.5197	19	$1.2503 \times 10^3$	$1.7666 \times 10^4$

No primeiro caso ( $N = 6$ ), como o limite máximo de aproximação  $\gamma_{yu}^{-1}$  é menor do que no segundo caso ( $N = 7$ ),  $\mu_*$  é mais distante de  $\|Q_{H_2}\|_\infty$  ( $28 - 11 = 17$ ) do que segundo caso ( $28 - 19 = 9$ ).

Compara-se as respostas na variável  $\mathfrak{d}$  em malha aberta (por meio de  $\|\hat{P}_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2^2$ ) e em malha fechada (por meio de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$ ) relativas aos sinais de perturbação e ruído usando as avaliações nominais estendidas, para o primeiro caso ( $N = 6$ )

$$\|\hat{P}_{\mathfrak{d}d}^a \Phi_d\|_2^2 = 2.5797 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 1.3389 \times 10^4$$



e para o segundo exemplo ( $N = 7$ )

$$\|\hat{P}_{sd}^a \Phi_d\|_2^2 = 2.5511 \times 10^4 \quad \text{e} \quad J_{cl}^a(Q(\mu_*)) = 1.2503 \times 10^4.$$

Ou usando os limitantes nos erros de aproximação para o primeiro caso ( $N = 6$ ) onde  $\gamma_{sd}^b = 0.0634$

$$(\|\hat{P}_{sd}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{sd}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 2.5902 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 2.3612 \times 10^4$$

e para o segundo caso ( $N = 7$ ) onde  $\gamma_{sd}^b = 0.0360$

$$(\|\hat{P}_{sd}^a \Phi_d\|_2 + \gamma_{sd}^b \|\Phi_d\|_2)^2 = 2.5545 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \hat{\eta}_{av}(Q(\mu_*))^2 = 1.7666 \times 10^4.$$

No primeiro caso ( $N = 6$ ), a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 48 % o efeito da perturbação e por meio do limitante superior (medida conservadora) em aproximadamente 8.8 %. No segundo caso ( $N = 7$ ), a presença do controlador diminuiu em aproximadamente 51 % o efeito da perturbação e por meio do limitante superior (medida conservadora) em aproximadamente 31 %.

Na Tabela 6.22 são apresentados para os vários valores de  $\mu$  considerados, os valores de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$  (primeira coluna) e  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  (segunda coluna) para o primeiro caso ( $N = 6$ ). A Tabela 6.23 apresenta, para os vários valores de  $\mu$  considerados, os valores de  $J_{cl}^a(Q(\mu))$  (primeira coluna), e  $\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$  (segunda coluna) para o segundo caso ( $N = 7$ ).

Tabela 6.22: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 10 -  $N = 6$ )

$\mu$	$J_{cl}(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$1.7129 \times 10^4$	$2.4950 \times 10^4$
10	$1.3548 \times 10^4$	$2.3624 \times 10^4$
11	$1.3389 \times 10^4$	<b><math>2.3612 \times 10^4</math></b>
12	$1.3252 \times 10^4$	$2.3665 \times 10^4$
13	$1.3206 \times 10^4$	$2.3688 \times 10^4$
14	$1.3185 \times 10^4$	$2.3705 \times 10^4$
15	$1.3164 \times 10^4$	$2.3728 \times 10^4$
16	$1.3143 \times 10^4$	$2.3751 \times 10^4$
17	$1.3122 \times 10^4$	$2.3772 \times 10^4$
18	$1.3102 \times 10^4$	$2.3798 \times 10^4$
19	$1.3082 \times 10^4$	$2.3823 \times 10^4$
20	$1.3062 \times 10^4$	$2.3858 \times 10^4$
21	$1.3042 \times 10^4$	$2.3898 \times 10^4$
22	$1.3022 \times 10^4$	$2.3942 \times 10^4$
23	$1.3003 \times 10^4$	$2.3990 \times 10^4$
24	$1.2984 \times 10^4$	$2.4034 \times 10^4$
25	$1.2965 \times 10^4$	$2.4082 \times 10^4$
26	$1.2947 \times 10^4$	$2.4133 \times 10^4$
27	$1.2929 \times 10^4$	$2.4181 \times 10^4$
28	$1.2911 \times 10^4$	$2.4232 \times 10^4$

Tabela 6.23: Desempenho dos Controladores na classe  $S_Q(\mu)$  - (Exemplo 10 -  $N = 7$ )

$\mu$	$J_{cl}(Q(\mu))$	$\hat{\eta}_{av}(Q(\mu))^2$
5	$1.6688 \times 10^4$	$2.0689 \times 10^4$
10	$1.3068 \times 10^4$	$1.8028 \times 10^4$
11	$1.2929 \times 10^4$	$1.7920 \times 10^4$
12	$1.2823 \times 10^4$	$1.7846 \times 10^4$
13	$1.2747 \times 10^4$	$1.7795 \times 10^4$
14	$1.2689 \times 10^4$	$1.7756 \times 10^4$
15	$1.2640 \times 10^4$	$1.7728 \times 10^4$
16	$1.2598 \times 10^4$	$1.7703 \times 10^4$
17	$1.2561 \times 10^4$	$1.7684 \times 10^4$
18	$1.2529 \times 10^4$	$1.7674 \times 10^4$
19	$1.2503 \times 10^4$	<b><math>1.7666 \times 10^4</math></b>
20	$1.2489 \times 10^4$	$1.7667 \times 10^4$
21	$1.2481 \times 10^4$	$1.7677 \times 10^4$
22	$1.2473 \times 10^4$	$1.7684 \times 10^4$
23	$1.2466 \times 10^4$	$1.7690 \times 10^4$
24	$1.2459 \times 10^4$	$1.7697 \times 10^4$
25	$1.2452 \times 10^4$	$1.7708 \times 10^4$
26	$1.2446 \times 10^4$	$1.7718 \times 10^4$
27	$1.2439 \times 10^4$	$1.7729 \times 10^4$

Comentário: O conjunto dos resultados numéricos obtidos sugerem que:

- i Embora potencialmente conservador o critério  $\hat{\eta}_{av}$  permite a escolha cautelosa quanto ao efeito de “dinâmicas não-modeladas” sem sacrificar significativamente o desempenho medido de forma mais otimista sem levar em conta tais erros.
- ii As escolhas das localizações de sensores e atuadores podem ter consequências significativas no desempenho dos controladores obtidos a partir das mesmas.

▽

## 7

### Considerações finais

Nesse trabalho, foi apresentada uma perspectiva computacional para a síntese de controladores lineares de DF para sistemas lineares de DI e estáveis (em malha aberta) com base em

- (i) índices de desempenho  $H_2$  para o sistema em malha fechada constituído por um dado sistema de DI a ser controlado ( $P$ ) e um controlador de DF ( $K$ ) (denotados genericamente por  $\eta(P, K)$ ).
- (ii) aproximações “nominais” de DF para o sistema de DI dado ( $\hat{P}$ ).
- (iii) limitantes superiores para os índices de desempenho  $H_2$  em questão, os quais podem ser calculados apenas com base em função de transferência racionais ( $\hat{P}$ ) e limitantes superiores ( $\gamma_{yu}$ ) em normas dos erros de aproximação das funções de transferência não-rationais do sistema de DI dado (digamos,  $\bar{\eta}(\hat{P}, \gamma_{yu}; K)$ ).

Essa perspectiva tem por base a solução de um tipo de problema  $H_2/H_\infty$  cujo funcional de custo  $H_2$  corresponde ao desempenho de um dado sistema nominal em malha fechada e cuja restrição  $H_\infty$  corresponde a um valor mínimo prescrito ( $\mu^{-1}$ ) para a margem de estabilidade do mesmo. Denotando o controlador obtido com base nesse problema para um dado valor de  $\mu$  por  $K_{rob}(\mu)$ , o procedimento de síntese consiste em escolher  $\mu$  em um conjunto predeterminado de modo a minimizar o limitante superior sobre o valor do funcional de custo correspondente ao desempenho em malha fechada do sistema de DI original (i.e.,  $\min_{\mu \in S_\mu} \bar{\eta}(\hat{P}, \gamma_{yu}; K_{rob}(\mu))$ ).

Nos exemplos simples utilizados para ilustrar esse procedimento, observou-se que o limitante superior em questão leva a escolhas “cautelosas” da margem de estabilidade nominal (afastando-a do seu valor crítico para assegurar estabilidade em malha fechada do sistema de DI original) mas que acarretam perdas relativamente pequenas no desempenho estimado com base em modelos aproximantes de maior dimensão do que o nominal utilizado no processo de síntese.

Com relação a trabalhos subsequentes pode-se mencionar:

- a Busca de soluções aproximadas ou “heurísticas” para os problemas de localização de sensores e/ou atuadores, avaliando uma dada localização (digamos,  $\mathcal{X}$ ) pelo desempenho garantido para o sistema de DI obtido com o controlador resultante do procedimento acima i.e.,  $\bar{\eta}(\hat{P}(\mathcal{X}), \gamma_{yu}(\mathcal{X}); K_{rob}(\mu_*(\mathcal{X}), \mathcal{X}))$ .
- b Estender o procedimento utilizado de forma a incluir objetivos de rastreamento, visando à síntese de controladores com “dois graus de liberdade”  $(\mathcal{K}(Q), \mathcal{K}_r(Q, Q_r))$ .
- c Explorar possíveis escolhas das funções de ponderação  $W_L$  e  $W_R$  com vistas à obtenção de um melhor desempenho garantido para o controlador obtido.
- d Possíveis refinamentos do procedimento de síntese acima com base em um outro limitante superior para  $\eta(P, K_r)$ , potencialmente menos conservador, como aquele dado  $\bar{\mathcal{J}}(Q, Q_r)$  (Capítulo 4).
- e Explorar um outro procedimento de síntese, computacionalmente mais complexo baseado no problema *min – max* Problema c (Capítulo 4).
- f Viabilizar a aplicação do procedimento acima para sistemas de DI dados pela equação (2.13) onde  $A$  não tem uma base ortonormal de autovetores; i.e., estudar a obtenção de aproximações racionais para as correspondentes funções de transferência e de limitantes superiores nas normas  $H_\infty$  dos erros de aproximação resultantes.

## Referências Bibliográficas

- [Ahmed e Teo, 1981] AHMED, N. U.; TEO, K. L.. **Optimal Control of Distributed Parameter Systems**. Elsevier North Holland, New York, 1981. 1.1
- [Ball, 1977] BALL, J. M.. **Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formulas**. Proceedings of the American Mathematical Society, 63:370–373, 1977. 2.6, 2.7
- [Balas, 1980] BALAS, M.. **Towards a (More) Practical Control Theory for Distributed Parameter Systems, Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Applications, Vol.18, C.T. Leondes (ed)**. Academic Press, New York, 1980. 1.1
- [Bank e Kunisch, 1984] BANKS, H.; KUNISCH, K.. **The linear regulator problem for parabolic systems**. SIAM Journal on Control and Optimization, 22:684–698, 1984. 1.1
- [Bernstein e Haddad, 1989] BERNSTEIN, D. S.; HADDAD, W. M.. **LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: A riccati equation approach**. IEEE Transactions on Automatic Control, 34:283–305, 1989. 5.3
- [Bontsema et al. 1988] BONTSEMA, J.; CURTAIN, R. F. ; SCHUMACHER, J. M.. **Robust control of flexible structures: A case study**. Automatica, 24:177–186, 1988. 1.1
- [Borggaard et al. 2009] BORGGAARD, J.; BURNS, J. A.; SURANA, A. ; ZIETSMAN, L.. **Control, estimation and optimization of energy efficient buildings**. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Missouri, 2009. ACC. 1.1
- [Boyd et al. 1988] BOYD, S. P.; BALAKRISHNAN, V.; BARRATT, C. H.; KHRAISHI, N. M.; LI, X.; MEYER, D. G. ; NORMAN, S. A.. **A new cad method and associated architectures for linear controllers**. Automatic Control, IEEE Transactions on, 33(3):268–283, 1988. 5.3
- [Boyd et al. 1994] BOYD, S. P.; EL GHAOU, L.; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V.. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, volumen 15. SIAM, 1994. 5.4

- [Brockett, 1970] BROCKETT, R. W.. **Finite Dimensional Linear Systems**. John Wiley and Sons, New York, 1970. 1.1, 2.2.1
- [Burns et al. 1985] BURNS, J.; CLIFF, E. M. ; POWERS, R. K.. **Computational methods for the control of distributed parameter systems**. In: PROCEEDINGS OF THE 24TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, Florida, 1985. IEEE. 1.1
- [Butkovsky, 1969] BUTKOVSKY, A. G.. **Theory of Optimal Control of Distributed Parameters Systems**. American Elsevier, New York, 1969. 1.1
- [Callier e Desoer 1978] CALLIER, F.; DESOER, C.. **An algebra of transfer functions for distributed linear time-invariant systems**. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 25:651–662, 1978. 1.1
- [Chen e Desoer, 1982] CHEN, M. J.; DESOER, C. A.. **Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems**. International Journal of Control, 35:255–267, 1982. 1.1
- [Cifdaloz et al. 2007] CIFDALOZ, O.; RODRIGUEZ, A. A.; MCCULLEN, R. ; J., D..  **$H_\infty$  mixed-sensitivity optimization for distributed parameter plants subject to convex constraints**. In: PROCEEDINGS OF THE 46TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, New Orleans, 2007. CDC. 1.1
- [Cifdaloz et al. 2008] CIFDALOZ, O.; RODRIGUEZ, A. A. ; ANDERIES, J.. **Control of distributed parameter systems subject to convex constraints: Applications to irrigation systems and hypersonic vehicles**. In: PROCEEDINGS OF THE 47TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, Cancun, 2008. CDC. 1.1
- [Corrêa, 1992] CORRÊA, G. O.. **Uma introdução à teoria de controle por realimentação**. In: XV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMATICA APLICADA Y COMPUTACIONAL. CNMAC, 1992. 5.2
- [Corrêa et al. 1997] CORRÊA, G. O.; SALES, D. M. ; SOARES, T. M.. **Approximate solutions to  $H_2/H_\infty$  problems via sequences of  $H_2$ -cost/ $H_2$ -constraint optimization problems**. International Journal of Control, 67:333–353, 1997. 5.2

- [Corrêa e Sales, 2003] CORRÊA, G. O.; SALES, D. M.. **Transfer functions optimization procedure for the  $H_2/H_\infty$  problem.** Journal of Optimization Theory and Applications, 116:531–558, 2003. 5.3
- [Corrêa e Sales, 2010] CORRÊA, G. O.; SALES, D. M.. **A duality - based approach to the multiobjective  $H_2/H_\infty$  optimization problem.** International Journal of Control, 83:1758–1770, 2003. 5.3, 5.3.2, 5.3.2
- [Corrêa e Freire, 2008] CORRÊA, G. O.; FREIRE, E. S.. **Robust  $H_2$  control with dynamic multipliers.** International Journal of Control, 81:1831–1848, 2008. 4.3
- [Corrêa e Talavera, 2014] CORRÊA, G. O.; TALAVERA, A.. **Finite dimensional controllers for stable parameter systems.** Technical report, LNCC/MCT, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2014. 3.2
- [Curtain e Pritchard, 1978] CURTAIN, R. F.; PRITCHARD, A. J.. **Infinite Dimensional Linear Systems Theory.** Springer-Verlag, Berlin, 1978. 1.1
- [Curtain e Glover, 1986] CURTAIN, R. F.; GLOVER, K.. **Robust stabilization of infinite dimensional systems by finite dimensional controllers.** Systems and Control Letters, 7:41–47, 1986. 1.1
- [Curtain, 1990] CURTAIN, R. F.. **Robust stabilizability of normalized coprime factors: The infinite-dimensional case.** International Journal of Control, 51(6):1173–1190, 1990. 1.1
- [Curtain e Zwart, 1995] CURTAIN, R. F.; ZWART, H. J.. **An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory.** Springer-Verlag, Berlin, 1995. 1.1, 2.2.1, 2.2.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.2.1, 2.4, 2.5, 2.3, 2.3, 3.1, 3.1, A.7, A.8
- [Curtain e Zhou, 1996] CURTAIN, R. F.; ZHOU, Y.. **A weighted mixed-sensitivity  $H_\infty$ -control design for irrational transfer matrices.** Automatic Control, IEEE Transactions on, 41(9):1312–1321, 1996. 1.1
- [DeSantis et al. 1993] DESANTIS, A.; GERMANI, A. ; JETTO, L.. **Approximation of the algebraic riccati equation in the hilbert space of hilbert-schmidt operators.** SIAM Journal on Control and Optimization, 31:847–874, 1993. 1.1



- [Demetriou e Grigoriadis, 2004] DEMETRIOU, M. A.; GRIGORIADIS, K. M.. **Collocated actuator placement in structural systems using an analytical bound approach**. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004. PROCEEDINGS OF THE 2004, volumen 2, p. 1604–1609. IEEE, 2004. 1.1
- [Doyle et al. 1990] DOYLE, J. C.; ZHOU, K. ; BODENHEIMER, B.. **Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives II: Optimal control**. IEEE Transactions on Automatic Control, 39:1575–1587, 1990. 5.3
- [Dullerud e Paganini, 2000] DULLERUD, G.; PAGANINI, F.. **Course in Robust Control Theory**. Springer-Verlag, New York, 2000. 1.2
- [Evans, 2010] EVANS, L. C.. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, United Sates of America, 2010. 2
- [Fahroo e Demetriou, 2000] FAHROO, F.; DEMETRIOU, M. A.. **Optimal actuator/sensor location for active noise regulator and tracking control problems**. Journal of Computational and Applied Mathematics, 114(1):137–158, 2000. 1.1
- [Figueiredo, 2012] FIGUEIREDO, D. G.. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. IMPA; 4ta ed. 2012 edição, Rio de Janeiro, 2012. 2.2.1
- [Francis, 1987] FRANCIS, B. A.. **A Course in  $H_\infty$  Control Theory**. Springer-Verlag, Berlin, 1987. 5.2, 5.3
- [Gahinet e Nemirovski, 1997] GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.. **The projective method for solving linear matrix inequalities**. Mathematical programming, 77(1):163–190, 1997. 5.3.1
- [Gibson, 1983] GIBSON, J. S.. **Linear quadratic optimal control of hereditary differential systems: Infinite dimensional riccati equations and numerical approximations**. SIAM Journal on Control and Optimization, 21:95–139, 1983. 1.1
- [Glover e Mustafa, 1989] GLOVER, K.; MUSTAFA, D.. **Derivations of the maximum entropy  $H_2$  controlles and a state space formula for its entropy**. International Journal of Control, 50:899–916, 1989. 5.3
- [Gu et al. 1989] GU, G.; KHARGONEKAR, P. P. ; LEE, E. B.. **Approximation of Infinite-Dimensional Systems**. IEEE Transactions on Automatic Control, 34:610–618, 1989. 1.1

- [Gustafson, 1999] GUSTAFSON, K. E.. **Introduction to Partial Differential Equation and Hilbert Space Methods**. Dover, New York, 1999. 2, 2.1.1
- [Hasan et al. 2010] HASAN, A.; SAGATUN, S. ; FOSS, B.. **Well rate control design for gas coning problems**. In: 49TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, Atlanta, 2010. IEEE. 1.1
- [Heirari et al. 2010] HEIDARI, H.; ZWART, H. ; MALEK, A.. **Analysis of the three dimensional heat conduction in nano-or microscale**. In: PROCEEDINGS OF THE 19TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL THEORY OF NETWORKS AND SYSTEMS, Budapest, 2010. MTNS. 1.1
- [Ito, 1990] ITO, K.. **Finite dimensional compensators for infinite dimensional systems via galerkin type approximation**. SIAM Journal on Control and Optimization, 28:1251–1269, 1990. 1.1
- [Kasinathan e Morris, 2013] KASINATHAN, D.; MORRIS, K..  **$H_\infty$ -Optimal Actuator Location**. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, 58(10):2522–2535, 2013. 1.1
- [Khargonekar e Rotea, 1991] KHARGONEKAR, P.; ROTEA, M.. **Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach**. IEEE Transactions on Automatic Control, 36:824–837, 1991. 5.3
- [Kreyszig, 1978] KREYSZIG, E.. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Wiley, New York, 1978. A.4
- [Krstic et al. 2007] KRSTIC, M.; GUO, B.-Z. ; SMYSHYAEV, A.. **Boundary controllers and observers for schrodinger equation**. In: 46TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, New Orleans, 2007. IEEE. 1.1
- [Kubrusly e Malebranche, 1985] KUBRUSLY, C. S.; MALEBRANCHE, H.. **Sensors and controllers location in distributed systems - A survey**. Automatica, 21(2):117–128, 1985. 1.1
- [Kubrusly, 2011] KUBRUSLY, C. S.. **The Elements of Operator Theory**. Birkhäuser; 2nd ed. 2011 edition, Berlin, 2011. A.2, A.3, A.5
- [Kumar e Narayanan, 2007] KUMAR, K. R.; NARAYANAN, S.. **The optimal location of piezoelectric actuators and sensors for vibration control of plates**. Smart Materials and Structures, 16(6):2680, 2007. 1.1

- [Lions, 1969] LIONS, J. L.. **Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, Berlin, 1971. 1.1
- [Morris, 1994] MORRIS, K. A.. **Design of finite dimensional controllers for infinite dimensional systems by approximation**. Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, 4:1–30, 1994. 1.1
- [Morris e Demetriou, 2010] MORRIS, K.; DEMETRIOU, M. A.. **Using  $H_2$ -control metrics for the optimal actuator location of infinite-dimensional systems**. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Baltimore, 2010. ACC. 1.1
- [Morris, 2011] MORRIS, K.. **Linear-quadratic optimal actuator location**. IEEE Transactions on Automatic Control, 56:113–124, 2011. 1.1
- [Mustafa, 1989] MUSTAFA, D.. **Realtions between maximun entropy/ $H_\infty$  control and combined  $H_\infty$ /LQG control**. System and Control Letters, 12:193–203, 1989. 5.3
- [Naylor and Sell, 1971] NAYLOR, A.; SELL, G.. **Linear Operator Theory in Enginnering and Science**. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971. A.1
- [Orner, 1971] ORNER, P. A.; FOSTER, A. M.. **A design procedure for a class of distributed parameter control systems**. Transactions A.S.M.E. Series G Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control, 93:86–93, 1971. 1.1
- [Özzbay e Tannenbaum, 1991] ÖZBAY, H.; TANNENBAUM, A.. **On the structure of suboptimal  $H_\infty$  controllers in the sensitivity minimization problem for distributed stable plants**. Automatica, 27(2):293–305, 1991. 1.1
- [Padhi, 2009] PADHI, R.; FARUQUE, A.. **An account of chronological developments in control of distributed parameter systems**. Annual Reviews in Control, 33:59–68, 2009. 1.1
- [Pazy, 1983] PAZY, A.. **Semigroups of Linear Operators and Applications for Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983. 2.2.1
- [Peng et al. 2005] PENG, F.; NG, A. ; HU, Y.-R.. **Actuator placement optimization and adaptive vibration control of plate smart**

- structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(3):263–271, 2005. 1.1
- [Robu et al. 2009] ROBU, B.; BAUDOUIN, L. ; PRIEUR, C.. A controlled distributed parameter model for a fluid-flexible structure system: numerical simulations and experiment validations. In: 48TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND 28TH CHINESE CONTROL CONFERENCE, Shanghai, 2009. IEEE. 1.1
- [Rodriguez, 1995] RODRIGUEZ, A. A.. Weighted  $H_\infty$  mixed-sensitivity minimization for stable MIMO distributed parameter plants. *IMA J. of Mathematical Control and Information*, 12(3):219–233, 1995. 1.1
- [Rudin, 1987] RUDIN, W.. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1974. A.6
- [Schumacher, 1983] SCHUMACHER, J. M.. A direct approach to compensator design for distributed parameter systems. *SIAM journal on control and optimization*, 21(6):823–836, 1983. 1.1
- [Scherer, 1995] SCHERER, C.. *Mixed  $H_2/H_\infty$  Control, Trends in control: A European Perspective*. Springer Verlag, Berlin, 1995. 5.3
- [Troltzsch, 2010] TROLTZSCH, F.. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications*. American Mathematical Society, USA, 2010. 1.1
- [Vidyasagar, 1984] VIDYASAGAR, M.. The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29:403–418, 1984. 1.1
- [Vires et al. 2007] VIRES, D.; KEESMAN, K. J. ; ZWART, H.. A luenberger observer for an infinite dimensional bilinear systems: A UV disinfection. In: 3RD IFAC SYMPOSIUM ON POWER SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, Foz do iguacu, 2007. IFAC. 1.1
- [Xiao e Basar, 1999] XIAO, M.; BASAR, T.. Finite dimensional compensators for the  $H_\infty$  optimal control of infinite dimensional systems via a galerkin type approximation. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 37:1614–1647, 1999. 1.1
- [Yeh et al. 1990] YEH, H.; BANDA, S. ; CHANG, B.. Necessary and sufficient conditions for mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  control. In: 46TH IEEE

CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, p. 1564–1574. IEEE, 1990.  
5.3

[Zhou et al. 1990] ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. ; BODENHEIMER, B..  
**Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives I: Robust performance  
analysis.** IEEE Transactions on Automatic Control, 39:1564–1574, 1990.  
5.3

[Zhou and Doyle, 1998] ZHOU, K.; DOYLE, J. C.. **Essentials of Robust  
Control.** Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998. 5.3.1

[Zuazua, 2002] ZUAZUA, E.. **Controllability of partial differential  
equations and its semi-discrete approximations.** Discrete and  
Continuous Dynamical Systems, 8:469–513, 2002. 1.1

## A Apêndice

### A.1

#### Definições gerais

**Definição A.1 (Função absolutamente contínua)** *Seja  $I$  um intervalo compacto. Uma função  $F$  é absolutamente contínua em  $I$ . Se para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que, para qualquer  $I_k = [a_k, b_k]$  intervalo não sobreposto em  $I$  com  $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| \leq \delta$ , têm-se  $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| \leq \epsilon$ . Se  $I$  é um intervalo arbitrário, nos dizemos que  $F$  é absolutamente contínuo em  $I$  se  $F$  é absolutamente contínuo em cada intervalo compacto ((Naylor and Sell, 1971) pg. 180).*  $\nabla$

**Definição A.2 (Transformação linear limitada)** *Uma transformação linear  $T$  de um espaço normado  $\mathcal{X}$  para um espaço normado  $\mathcal{Y}$  é limitado se existe uma constante  $\beta \geq 0$  tal que*

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \geq \beta \|x\|_{\mathcal{X}}$$

*para cada  $x \in \mathcal{X}$ . (A norma do lado esquerdo da equação de acima é a norma em  $\mathcal{Y}$  e a norma do lado direito é a norma em  $\mathcal{X}$ ). ((Kubrusly, 2011) pg. 215).*  $\nabla$

**Definição A.3 (Transformação linear contínua)** *Seja  $T$  uma transformação linear de um subespaços linear normado  $\mathcal{X}$  para um subespaço linear normado  $\mathcal{Y}$  sobre o mesmo campo  $\mathbb{F}$ .  $T : D(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é contínuo a  $x_0 \in \mathcal{X}$  se, dado um  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que*

$$\|T(x) - T(x_0)\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon, \quad \text{sempre que} \quad \|x - x_0\|_{\mathcal{X}} < \delta$$

*$T$  é contínuo em  $D(T)$  se é contínuo para cada ponto em  $D(T)$ . ((Kubrusly, 2011) pg. 217).*  $\nabla$

**Definição A.4 (Transformação linear fechada)** *Seja  $T$  uma transformação linear de um subespaço linear normado  $\mathcal{X}$  para um subespaço linear normado  $\mathcal{Y}$  sobre o mesmo campo  $\mathbb{F}$ .  $T : D(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é fechado se somente se*

$$\text{para toda sequência } \{x_n\} \subset D(T) \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$$

então  $x \in D(T)$  e  $Tx = y$ . ((Kreyszig, 1978) pg. 293).

▽

**Definição A.5** *Seja um operador linear fechado  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{X}$ , onde  $\mathcal{X} \neq [0]$  é um espaço normado e  $D(T)$  é o domínio de  $T$  onde  $D(T) \subset \mathcal{X}$ . Seja  $I$  a identidade em  $\mathcal{X}$ . O conjunto resolvente  $\rho(T)$  de  $T$  é o conjunto de todos os escalares  $\lambda \in \mathbb{F}$  para o qual  $(\lambda I - T)^{-1}$  existe e é um operador linear limitado em um domínio denso de  $\mathcal{X}$ . ((Kubrusly, 2011) pg. 449).*

▽

$\lambda \in \rho(T)$  se e somente se  $(\lambda I - T)^{-1}$  é um operador linear limitado de  $\mathcal{X}$  para  $\mathcal{X}$ .  $(\lambda I - T)^{-1}$  é chamado de operador resolvente de  $T$ .

**Definição A.6** *Suponha que  $f$  seja uma função complexa definida em  $\Omega$  (sendo  $\Omega$  um conjunto aberto no plano). Se  $z_0 \in \Omega$  e*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, denotamos o limite por  $f'(z_0)$  e a chamaremos de derivada de  $f$  em  $z_0$ . Se  $f'(z_0)$  existe para cada  $z_0 \in \Omega$ , dizemos que  $f$  é holomórfica (ou analítica) em  $\Omega$ . A classe de todas as funções holomórficas em  $\Omega$  é denotado por  $H(\Omega)$ . ((Rudin, 1987) pg. 197).

▽

**Teorema A.7** ((Curtain e Zwart, 1995) pg. 21-24) *Continuação do Teorema 2.3.*

*Seja  $T(t)$  um semigrupo fortemente contínuo em um espaço de Hilbert  $Z$  com um gerador infinitesimal  $A$ , então:*

1.  $T(t)z_0 - z_0 = \int_0^t T(s)Az_0 ds$  para  $z_0 \in D(A)$ ;
2.  $\int_0^t T(s)z ds \in D(A)$  e  $A \int_0^t T(s)z ds = T(t)z - z \quad \forall z \in Z$ , e  $D(A)$  é denso em  $Z$ ;
3.  $A$  é um operador linear fechado;
4.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$  é denso em  $Z$ .

▽

**Teorema A.8** (Teorema de Hille-Yosida (Curtain e Zwartz, 1995) pg.26-28)

Uma condição necessária e suficiente para um operador linear  $A$  (não limitado) definido denso e fechado em um espaço de Hilbert  $Z$  ser um gerador infinitesimal de um  $C_0$  – semigrupo  $T(t)_{t \geq 0}$ , é existir um número real  $M$  e  $w$  tal que para todo real  $\alpha > w$ ,  $\alpha \in \rho(A)$ , o conjunto resolvente de  $A$ , e

$$\|R(\alpha; A)^n\| \leq \frac{M}{(\alpha - w)^n} \quad \forall n \geq 1.$$

onde  $R(\alpha; A) = (\alpha I - A)^{-1}$  é o operador resolvente. Nesse caso  $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ .

▽

## A.2

### Condução de calor numa barra

É considerada uma barra com comprimento  $L$ , cuja secção transversal tem área  $A$ , feita de um material condutor uniforme de calor. Suponha-se que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de modo a não permitir, a través dela, transferências de calor com o meio ambiente. Transferências podem, entretanto, ocorrer através das extremidades da barra.

A uniformidade do material e o isolamento térmico lateral implicam que o fluxo de calor se dê na direção longitudinal, portanto é um problema de condução de calor em uma dimensão. A lei do resfriamento de Fourier diz o seguinte: considere duas placas,  $P_1$  e  $P_2$ , de áreas iguais a  $A$ , mantidas constantemente às temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , respetivamente; se colocadas paralelamente a uma distancia  $d$  uma da outra, haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria, e a quantidade de calor, por unidade de tempo, transferida de uma placa para outra é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d} \quad (\text{A-1})$$

onde  $k$  é a conductibilidade térmica do material entre as placas. Representa-se por  $u(x, t)$  a temperatura de um ponto na abcissa  $x$  (como na figura A.1) no tempo  $t$ .

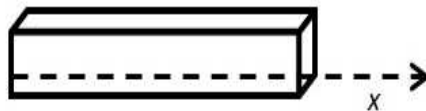


Figura A.1: Barra colocada no eixo  $x$

São tomadas duas secções transversais da barra localizadas em  $x$  e  $x + d$ . Para aplicar a lei de Fourier, se vai introduzir a grandeza do fluxo do calor



através de uma seção  $x$ , em um instante  $t$ , que sera feito do seguinte modo: fixar o tempo  $t$  da equação (A-1), fazer  $T_2 = u(x + d, t)$  e  $T_1 = u(x, t)$ , e passar ao limite quando  $d$  tende a zero. Tal limite será  $kA|u_x(x, t)|$ . Definindo então, o fluxo de calor na direção positiva do eixo  $x$  como uma função  $q(x, t)$  dada por

$$q(x, t) = -kAu_x(x, t). \quad (\text{A-2})$$

Fixando agora um elemento da barra entre  $x_0$  e  $x_0 + \delta$ , e vejamos qual é a quantidade de calor ( $q$ ) que aí entra, no período de tempo entre  $t_0$  e  $t_0 + \tau$ . Usando o fluxo do calor  $q(x, t)$  pode-se ver que

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt,$$

ou seja,

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)] A dt. \quad (\text{A-3})$$

Sabendo que o calor específico ( $c$ ) de uma substância é a quantidade de calor necessária para elevar em  $1^\circ\text{C}$  a temperatura de um grama dessa substancia. Portanto  $q$  pode ser também escrito como

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} cu_t(x, t) - u_x(x_0, t) dt \rho A dx, \quad (\text{A-4})$$

onde  $\rho$  é a densidade da substância. Utilizando o teorema fundamental del cálculo em (A-3) e igualando o valor de  $q$  assim obtido com o valor de  $q$  dado em (A-4), obtemos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x, t) dx dt. \quad (\text{A-5})$$

Como a expressão (A-5) é válida para todo  $t_0 > 0$ , todo  $0 < x_0 < L$  e todos  $\tau > 0$  e  $\delta > 0$ , concluímos que

$$ku_{xx}(x, t) = c\rho u_t(x, t),$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{A-6})$$

onde  $K = \frac{k}{c\rho}$  é a difusibilidade térmica com dimensões  $\text{cm}^2/\text{s}$ . A equação (A-6) é chamada a equação do calor, e é a lei de variação de temperatura  $u(x, t)$  em uma barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente.