

3. Volatilidades Associadas ao Risco dos Projetos de Investimento

Os gastos associados aos projetos são irreversíveis quando específicos de uma empresa ou indústria. A presença desta irreversibilidade significa que o detentor de uma opção real sobre um projeto possui o direito – e não necessariamente a obrigação – de realizar os gastos necessários para a implementação dos investimentos. Assim como uma opção financeira, a opção de se realizar um investimento em capital é valiosa, afinal, ao se investir, é impossível saber o valor futuro do ativo real. Como existem contingências para o investimento da firma, ou seja, há uma probabilidade de que o investimento resulte em perda, a oportunidade de adiar a decisão possui valor.

Reconhecer que uma oportunidade de investimento é análoga a uma opção pode ajudar os empreendedores a entender o papel crucial da incerteza presente no processo das decisões sobre os investimentos em capital fixo. Assim como na avaliação das opções financeiras, quanto maior a volatilidade do ativo objeto, maior será o valor da opção e maiores serão os incentivos para se esperar e manter a opção viva, ao invés de exercê-la. Isto é verdade devido à assimetria dos ganhos de uma opção: quanto maior for a probabilidade de uma alta no preço do ativo objeto, maior o pagamento líquido no seu exercício. O mesmo tipo de raciocínio valerá para os investimentos em capital. Quanto maior for a incerteza sobre a possível lucratividade ou sobre a perda de um projeto, maior será o incentivo para se esperar, mantendo a oportunidade de investimento viva, ao invés de exercê-la de uma vez. Interpretando uma estratégia de investimento como uma opção, estamos dando uma ênfase maior ao papel do risco em relação a outras variáveis tradicionalmente importantes como o nível das taxas de juros.

No capítulo anterior, obtivemos uma regra para o investimento em capital levando em consideração as suas características de incerteza nos fluxos de caixa do projeto, assumindo que haveria um momento ótimo para realizar o empreendimento. Conseguimos verificar explicitamente o valor da opção por flexibilidade na decisão de adiar os gastos iniciais em troca da obtenção de novas informações. A regra ótima para o investimento é uma função da taxa de juros

livre de risco, do valor presente dos fluxos de caixa do projeto, do custo de oportunidade de manter a opção pela flexibilidade viva e da volatilidade que caracteriza a incerteza associada ao investimento.

A taxa de juros real livre de risco pode ser obtida através da taxa dos títulos do tesouro americano de curto prazo, como as notas do tesouro de três meses de maturidade ou os *fed funds*, utilizados para a condução da política monetária, descontando a respectiva inflação do período. O valor do projeto de investimento V , assim como o seu ativo replicante X , segue um movimento browniano geométrico, logo o seu valor no momento presente é conhecido, ou seja, no momento de análise do projeto, definido por t^* , tanto $V(t^*)$ quanto $X(t^*)$ serão observados. O custo de oportunidade de manter viva a opção pelo investimento também é uma variável observável. No caso de um projeto cujos fluxos de caixa estejam relacionados a uma *commodity*, δ será o ganho relacionado à obtenção deste ativo.¹ Também podemos interpretar este parâmetro como os dividendos pagos pela carteira replicante.

A volatilidade, o coeficiente de difusão que define a incerteza associada ao investimento, é o único parâmetro não observável, sendo necessário um estimador. No apreçamento das opções financeiras, este parâmetro exógeno é da maior importância para se obter uma avaliação correta. O modelo original, proposto por BLACK, SCHOLES (1973) e MERTON (1973b), assume uma volatilidade constante, obtida através de uma série de preços históricos. BLACK (1989) admite que esta hipótese é uma das deficiências do modelo, a volatilidade do ativo objeto não é constante e uma medida possível de incerteza seria a volatilidade da própria volatilidade.² Modelos desenvolvidos posteriormente por HULL e WHITE (1987), AMIN e NG (1993) e DUAN (1995), assumem explicitamente uma estrutura estocástica para a volatilidade e, a partir deste ponto, resolvem um problema de apreçamento mais complexo, pois existem dois

¹ *Convenience yield*.

² Estas deficiências em relação às hipóteses originais do modelo de Black-Scholes não invalidam a sua contribuição para a metodologia do apreçamento de ativos, nem a sua utilidade prática. DUFFIE (1998) é uma referência em relação à importância destas idéias inovadoras para a teoria econômica.

componentes de incerteza: o primeiro representado pelo coeficiente de difusão do ativo objeto; e o segundo, pelo coeficiente de difusão do processo da volatilidade.

Na avaliação das opções reais, além da incerteza em relação ao método de estimação da volatilidade em séries de tempo e o seu conseqüente impacto sobre o seu apreçamento, existe o problema de distinção entre as *proxies* de risco de um projeto. Como um projeto de investimento não é transacionado em mercados, precisamos de ativos que repliquem as características de risco relacionadas ao empreendimento. Naturalmente devem existir diversos candidatos, resultando em mais de uma *proxie* para a incerteza de um investimento de longo prazo. Tal fato proporciona um problema de identificação das características das *proxies* de volatilidade quando avaliamos um ativo real através das equações (15)-(18).

Por exemplo, dentre três *proxies* para o risco de um investimento qual delas devemos utilizar? Elas são estatisticamente iguais ou diferentes? Isto fará diferença no valor obtido para a opção real de flexibilidade do empreendimento? Qual será o impacto de diferentes *proxies* da volatilidade sobre o tempo de espera do investimento em cada setor?

Nesta avaliação do valor das opções reais de espera associadas a possíveis investimentos nos setores de telecomunicações e petróleo foram escolhidos três ativos, candidatos a representantes do risco de um projeto de investimento em cada uma das indústrias. Queremos identificar as diferenças estatísticas destas *proxies* e seu impacto sobre os valores das opções reais associadas à flexibilidade de adiar a decisão pelo investimento.

3.1. Escolha das *Proxies* para o Risco dos Projetos

Quando utilizamos a metodologia das opções reais necessitamos da volatilidade dos ganhos futuros associados ao investimento. Apesar de um projeto não possuir um preço de transação, este ativo real possui características de risco e retorno que podem ser replicadas pelos ativos existentes na economia. Estes ativos possuem um preço estabelecido em mercados financeiros e apresentam uma alta correlação com o valor do projeto realizado pela firma, podendo servir de *proxie* para o risco do investimento. Essas *proxies* fornecem as volatilidades, coeficientes

de difusão da sua lei de movimento, utilizadas na regra de investimento fornecida pelas equações (15)-(18).

Podemos destacar duas classes principais de risco: o risco idiossincrático, específico da firma, e o do setor do qual a firma faz parte. O risco idiossincrático está relacionado a choques específicos da empresa que está realizando o projeto de investimento. Tais eventos podem estar relacionados à eficiência da sua gestão, às mudanças nas preferências dos consumidores, às alterações na estrutura do seu mercado de atuação, à presença de novos competidores ou até mesmo às danificações das suas instalações. Todos esses eventos estão associados a diferentes estados da natureza do processo produtivo específico de cada firma, sem que seja possível prevêê-los com exatidão.

O risco da indústria está relacionado à incerteza sobre o desempenho do setor como um todo. Nesse caso, os choques não afetam as firmas isoladamente, mas em conjunto. Dentro de tal classe de risco podemos diferenciar a incerteza associada a projetos realizados no Brasil dos investimentos no mercado internacional. Agora estamos considerando o impacto de mudanças institucionais, de ações de novos governos, além de todos os efeitos de políticas macroeconômicas sobre o comportamento da economia. A incerteza de um investimento no mercado internacional está relacionada ao risco da tecnologia de produção da indústria. A busca por constantes inovações implica necessariamente em elevados gastos com pesquisas arriscadas.

Podemos concluir que basicamente os ativos que podem representar o risco de um projeto estarão relacionados ao preço da ação de uma firma, a uma *commodity* associada ao processo produtivo do projeto, a uma carteira de firmas que representam esta indústria no Brasil e a uma carteira de firmas que representam a indústria no exterior. Assim, no setor de telecomunicações foram escolhidas as volatilidades dos seguintes ativos: o valor da ação da Telemar, o valor de uma carteira representativa do setor de telefonia no Brasil e o valor de uma carteira representativa do setor de telefonia no mercado internacional. No setor de petróleo foram escolhidas as volatilidades dos seguintes ativos: o valor da ação da Petrobrás, o preço do petróleo tipo *brent* e o valor de uma carteira das maiores empresas petrolíferas do mundo, denominadas *oil majors*.

3.2. Descrição dos Dados Utilizados

Os dados utilizados para a análise empírica do risco de um investimento em capital fixo abrangem os dias úteis entre 01/07/1999 e 31/10/2002. O período representa o tempo de análise para a possível realização dos projetos de investimento nos setores escolhidos. Ou seja, esta será a janela de decisão que o empreendedor possui como hipótese para analisar a implementação ou não do seu empreendimento.³ Os dados são de frequência diária, com cotações de fechamento. Existem algumas observações faltando na amostra em virtude dos finais de semana, além de uma diferença nos dias de negociação do mercado brasileiro em relação aos mercados americano e londrino, devido à existência de feriados distintos. Tais valores foram preenchidos com a média da última observação com a observação mais próxima. Os valores de todos os ativos estão apresentados em US\$. Os ativos nacionais tiveram seus valores convertidos pela cotação diária de fechamento do câmbio, fornecida pelo Banco Central do Brasil.

Para o setor de telecomunicações temos como *proxie* para o risco idiossincrático de um investimento a volatilidade do preço de fechamento da ação da Telemar PN, maior empresa de telefonia nacional, convertido em US\$. Como *proxie* para o risco de um investimento no setor de telecomunicações no Brasil, temos a volatilidade do valor de uma carteira de empresas de telecomunicações composto pela Telemar PN, Telemar Norte Leste PN, Brasil Telecom PN, Telesp Celular Participações PN e Telesp Operacional PN. A participação de cada um destes ativos na carteira foi de respectivamente:

<i>Telesp Celular Part.</i>	<i>Telesp Operacional PN</i>	<i>Telemar PN</i>	<i>Telemar Norte Leste PN</i>	<i>Brasil Telecom PN</i>
36.4%	26.5%	17.8%	12.3%	6.9%

Tabela 3.1 – Composição da Carteira de Telecomunicações Brasileira

Representando o risco desta indústria ou tecnologia no mercado mundial, temos a volatilidade de uma carteira de empresas de telecomunicações no

³ O horizonte de tempo escolhido para a análise é compatível com uma avaliação de um único projeto de investimento com uma maturidade típica de 5 a 10 anos em cada um dos dois setores escolhidos. Trata-se de uma análise no nível microeconômico de uma empresa que decide o momento ótimo para realizar os gastos irreversíveis referentes a um único projeto, entre 01/07/1999 até 31/10/2002

mercado internacional, composta pela British Telecom, AT&T, Telefônica de Espanha e TIM. A participação de cada uma destas empresas na carteira foi de respectivamente:

<i>British Telecom</i>	<i>AT&T</i>	<i>Telefônica Espanha</i>	<i>TIM</i>
37.2%	23.9%	22.3%	16.6%

Tabela 3.2 – Composição da Carteira de Telecomunicações Internacional

No setor de telefonia possuímos um total de 847 observações. Para análise de um investimento no setor de petróleo foram escolhidos como *proxies* de risco a volatilidade do preço da ação da Petrobrás PN, representando o risco idiossincrático de investimentos realizados por uma empresa, a volatilidade do preço do petróleo, o *European Brent Crude Oil*, como a *commodity* associada a um projeto de investimento neste setor e a volatilidade do valor de uma carteira das *oil majors*, representando o risco de toda a indústria no mercado internacional. Esta carteira possui as seguintes empresas: Exxon, British Petroleum, Royal Dutch e Texaco. A participação de cada uma destas firmas na carteira foi de respectivamente:

<i>Exxon</i>	<i>British Petroleum</i>	<i>Royal Dutch</i>	<i>Texaco</i>
40.50%	31.10%	19.10%	9.30%

Tabela 3.3 – Composição da Carteira das Oil Majors

Neste setor possuímos um total de 870 observações devido a uma quantidade maior de dias de negociação para o petróleo, ajustado para os demais ativos. Todas as séries dos ativos nacionais foram obtidas através do banco de dados *Económica*, enquanto que a fonte dos dados para os ativos negociados no mercado internacional foi a *Bloomberg*.

3.3. Volatilidade das *Proxies* Escolhidas

Necessitamos de um estimador para o parâmetro de difusão da lei de movimento das *proxies* para o risco de um projeto em cada um dos dois setores. Trata-se de uma estimação paramétrica dos coeficientes de um movimento

browniano.⁴ Partindo do processo de difusão para o valor do projeto ou valor da carteira replicante, temos um vetor de parâmetros desconhecidos θ que pertence a um espaço de parâmetros Θ , satisfazendo a seguinte equação de movimento:

$$dX(t) = a(X; t; \alpha)dt + b(X; t; \beta)dz \quad (33)$$

onde z é um processo de Wiener padrão e $\theta \equiv (\alpha; \beta)$ são os parâmetros desconhecidos. As funções $a(X; t; \alpha)$ e $b(X; t; \beta)$ são respectivamente os coeficientes de *drift* e difusão do movimento browniano. No caso de um processo de difusão lognormal temos:

$$a(X; t; \alpha) = \mu X \quad (34)$$

$$b(X; t; \beta) = \sigma X \quad (35)$$

Estamos interessados em obter as estimativas para θ , afinal a fórmula de apreçamento da opção real sobre o valor do projeto depende deste parâmetro. A expressão explícita para a opção real ou regra de decisão da firma é definida por $F(X(t))$. Segundo essa análise, podemos escrevê-la como $F(X(t); \theta)$. Um estimador para o valor da opção real sobre o projeto pode ser representado por $\hat{F} = F(X(t); \hat{\theta})$, onde $\hat{\theta}$ é o estimador dos parâmetros θ . As suas propriedades estão diretamente relacionadas com as propriedades de $\hat{\theta}$. Estimadores imprecisos de θ resultarão em valores imprecisos para o valor da opção real. Para estimar este parâmetro por máxima verossimilhança a partir dos dados históricos partimos da seqüência de $n+1$ observações passadas de $X(t)$ colhidas em uma amostra não estocástica de datas, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, necessariamente não igualmente espaçadas. $X(t)$ é um processo markoviano por construção, logo amostras irregulares não constituem um problema para a inferência estatística. O estimador de máxima verossimilhança é assintoticamente eficiente e pertence à classe dos estimadores consistentes e uniformemente assintoticamente normais, ou seja, possui a menor variância assintótica dentro desta classe, logo trata-se do método de estimação preferível quando ele é disponível. No caso de estimações de

⁴ Chama-se de estimação paramétrica pois a lei de movimento fundamental para o ativo foi estabelecida. No caso de uma estimação não-paramétrica, o processo para os preços dos ativos não é previamente especificado e o seu objetivo é justamente obtê-lo através dos dados.

parâmetros para o processo de difusão a função densidade de transição, definida por f_k , deve possuir uma forma fechada o que muitas vezes não é o caso.

Segundo o teorema demonstrado por Lo (1988),⁵ podemos caracterizar f_k como uma solução de uma equação diferencial parcial, fixando as variáveis condicionais $X(k-1)$ e t_{k-1} , permitindo que f_k seja uma função de $X(k)$ e t_k . Em alguns casos, mesmo obtendo f_k os estimadores de máxima verossimilhança não satisfazem as condições de consistência e normalidade assintótica, como por exemplo no caso do processo de difusão $dX = \mu X dt + \sigma X dz$. Entretanto este fato pode ser contornado realizando a inferência sobre as taxas de retorno de $X(t)$, isto é, sobre $r(t) \equiv LN(X(t)/X(t-1))$. Obtemos uma seqüência estacionária $r(1), r(2), \dots, r(n)$ de onde podemos extrair os estimadores dos parâmetros do processo de difusão, em particular o estimador de σ . Segundo esta análise, os estimadores de máxima verossimilhança serão⁶:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k \quad ; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r_k - \hat{\alpha})^2 \quad (36)$$

Como os retornos são *iid* com distribuição normal, as condições de regularidade para a consistência e normalidade assintótica dos estimadores são satisfeitas. A questão principal será a escolha da amostra, ou período de risco analisado. Faremos uma análise comparativa entre as *proxies* dos estimadores estabelecidos supondo janelas de 30, 90, 180 e 360 dias para as observações, construindo curvas para a volatilidade ao longo do período de possível realização dos projetos. Assim, teremos 12 curvas de volatilidade para cada setor, afinal individualmente os setores possuem três candidatos a *proxies* para o risco dos projetos.

O intervalo de tempo para a avaliação da opção real de flexibilidade do investimento compreende o período de 01/07/1999 até 31/10/2002. Desta forma, a construção das curvas de volatilidade anuais foi feita dentro do seguinte procedimento: a primeira observação da curva de volatilidade anual de 30 dias

⁵ Equação (6)

⁶ Para maiores explicações ver apêndice A.

possui $n=30^7$, que compreende uma amostra de 01/07/1999 até 11/08/1999, a segunda observação possui $n=30$, correspondendo a uma amostra de 02/07/1999 até 12/08/1999 e assim sucessivamente. As curvas de volatilidade de 90, 180 e 360 dias foram construídas através da mesma metodologia.

Gráfico 3.1: Volatilidade de 30 dias - Telecomunicações

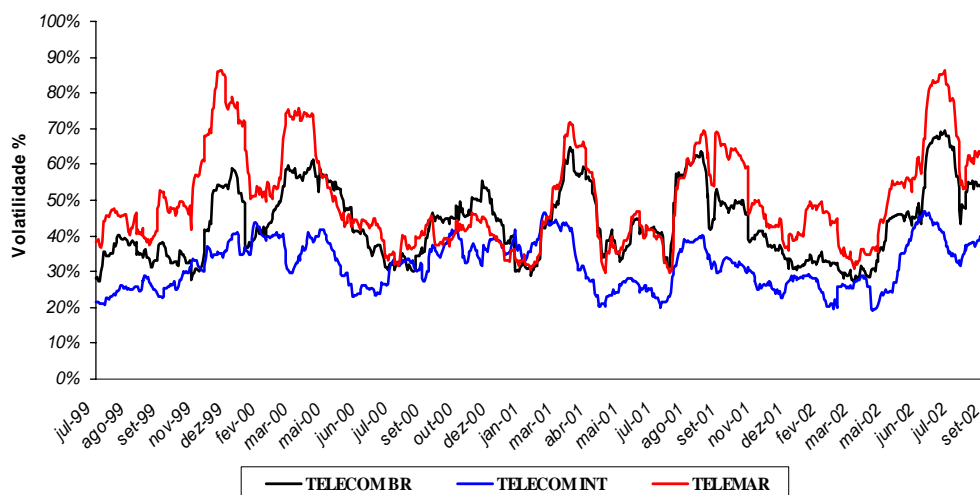
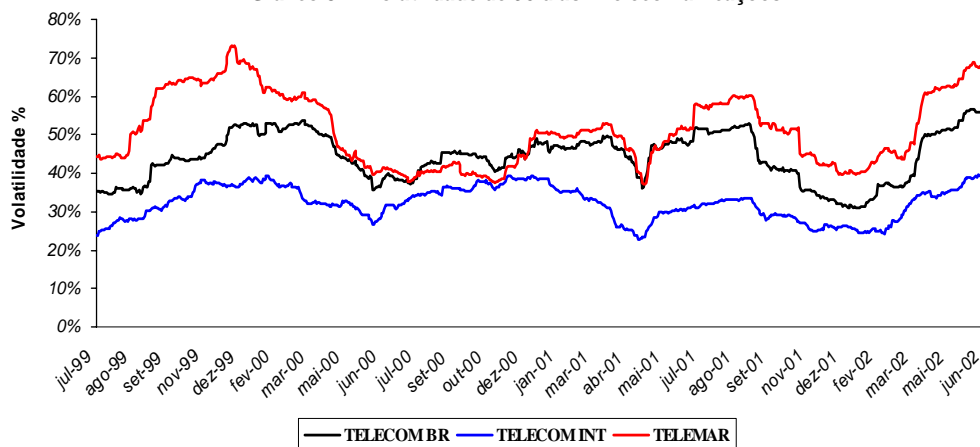


Gráfico 3.2: Volatilidade de 90 dias - Telecomunicações



⁷ O estimador de máxima verossimilhança para a volatilidade é viesado, por isso usamos um fator de correção, multiplicando-o por $n/(n-1)$.

Gráfico 3.3 : Volatilidade de 180 dias - Telecomunicações

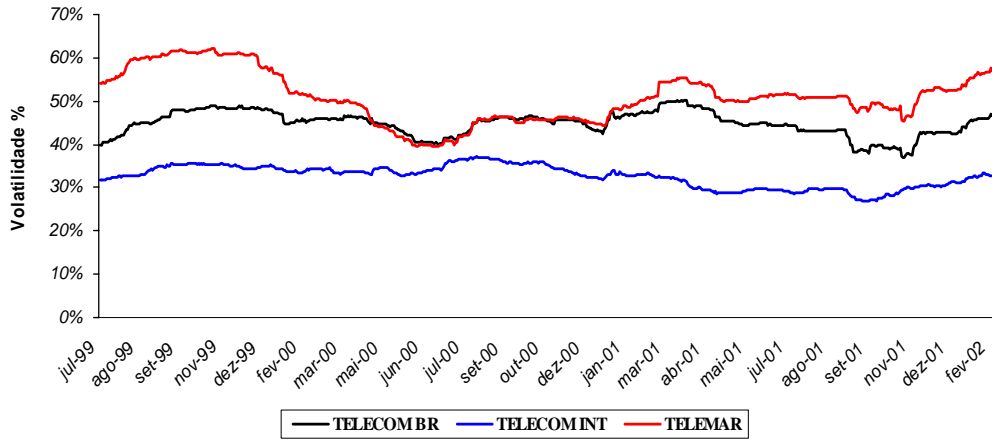


Gráfico 3.4: Volatilidade de 360 dias - Telecomunicações

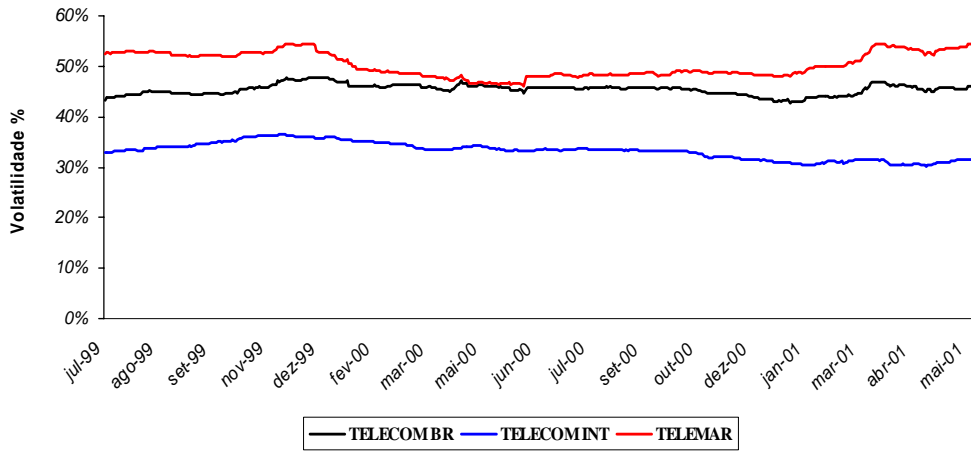


Gráfico 3.5 : Volatilidade de 30 dias - Petróleo

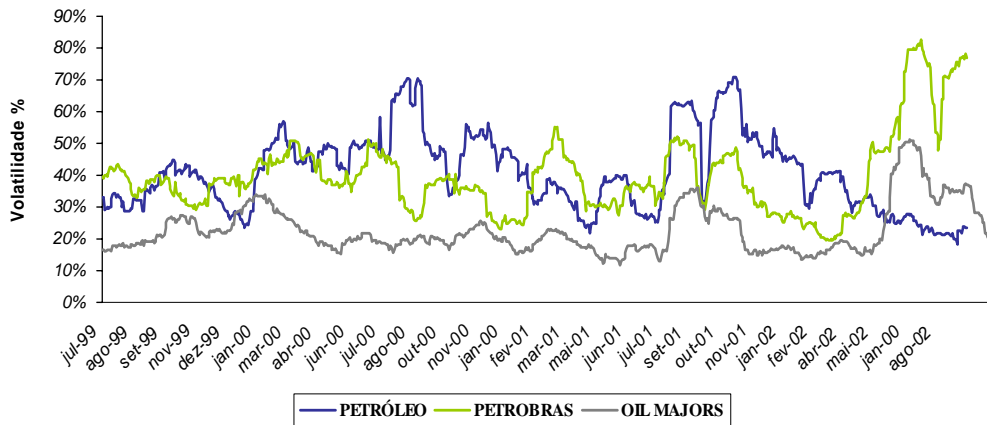


Gráfico 3.6: Volatilidade de 90 dias - Petróleo

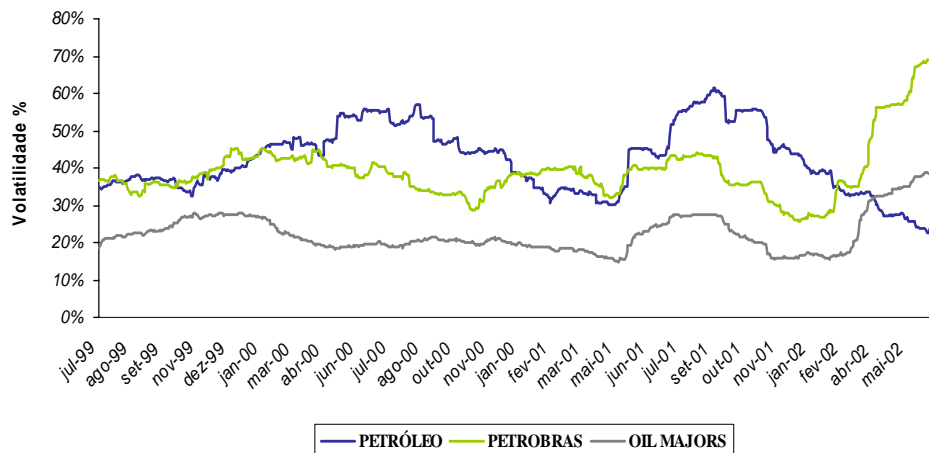


Gráfico 3.7: Volatilidade de 180 dias - Petróleo

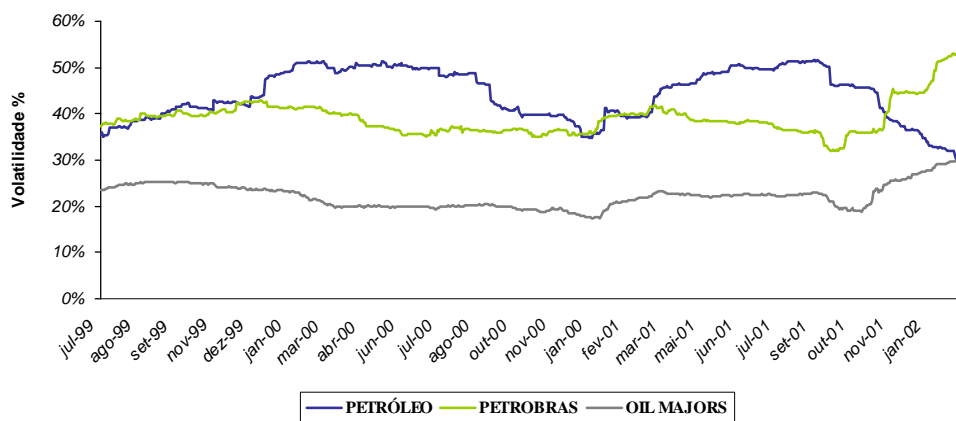
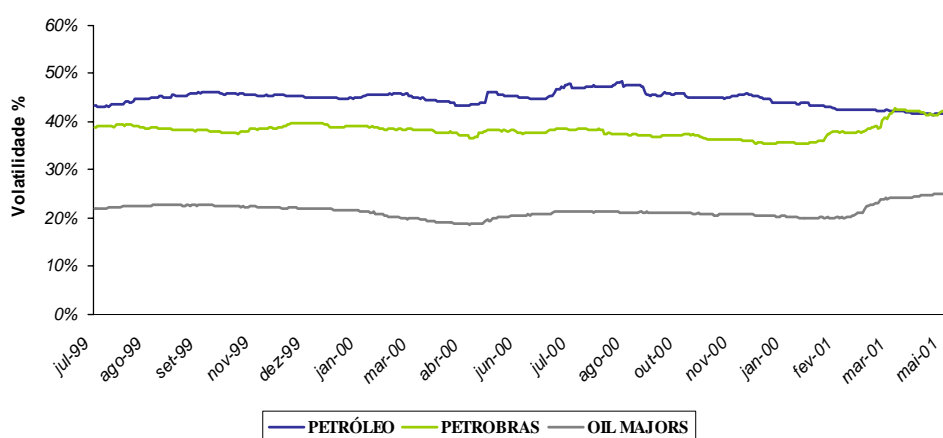


Gráfico 3.8: Volatilidade de 360 dias - Petróleo



A volatilidade de 30 dias pode ser considerada uma medida de risco para um investimento de curto prazo, sujeita a choques relacionados às mudanças nas expectativas dos agentes sobre a valorização ou desvalorização dos ativos, enquanto que a volatilidade de 360 dias se aproxima da volatilidade incondicional

da série, podendo ser considerada uma medida de volatilidade de longo prazo, dado que o seu valor é relativamente estável ao longo do período de análise, aproximadamente três anos. As volatilidades de 90 e 180 dias são medidas de dispersão intermediárias, pois não apresentam as mudanças instáveis de uma volatilidade de curto prazo, nem a estabilidade de uma medida de volatilidade de longo prazo.

Esse estimador com janelas móveis pode ser considerado o primeiro modelo da família Arch,⁸ dado que a escolha dos intervalos para a estimação das volatilidades revela características de heteroscedasticidade presentes no retorno dos ativos especialmente construídos para modelar as variâncias condicionais, definindo-as como uma variável dependente de seus valores passados e de movimentos inesperados ou choques. Estes modelos foram inicialmente propostos por ENGLE (1982) e foram generalizados por BOLLERSLEV (1986).⁹

Apesar de a motivação inicial ter sido estudos na macroeconomia relacionados à volatilidade da inflação, NELSON (1990) aproximou tal literatura ao campo de finanças mostrando que os modelos podem servir como uma aproximação em tempo discreto para os processos de difusão com volatilidade estocástica. O resultado é bastante útil, pois a sua estimação por máxima verossimilhança é mais direta. Os modelos da família Arch ainda possuem um componente adicional além da estimação: com eles, pode-se realizar previsões da variância condicional para períodos futuros. Os estudos demonstram que a volatilidade é razoavelmente previsível no curto prazo, mas não completamente.

O modelo padrão para a modelagem da variância nesta literatura é o Garch (1,1). A sua dinâmica é descrita por duas equações:

$$r_t = c + \varepsilon_t \quad (37)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 \quad (38)$$

⁸ Estamos considerando que a família Arch é composta pelos modelos: Arch, Garch, Egarch e Tarch,

⁹ BOLLERSLEV, CHOU, e KRONER (1992) apresentam uma resenha sobre o assunto.

O coeficiente α mede a extensão que um choque na volatilidade hoje afeta a volatilidade do próximo período, enquanto que $\alpha+\beta$ mede a taxa da morte desse efeito ao longo do tempo. A equação (37) representa os retornos como uma função da sua média incondicional e um termo de erro. A variância condicional especificada pela segunda equação é uma função de três termos: da média; das inovações sobre a volatilidade do período anterior, ou termo Arch, medida como uma defasagem dos resíduos ao quadrado; e a variância do período anterior, termo Garch. A interpretação em termos de finanças está relacionada ao fato de o agente prever a volatilidade do período como uma média ponderada de uma variância de longo prazo, a constante, a previsão da volatilidade do período anterior, o termo Garch e a informação sobre a volatilidade observada no período anterior, termo Arch. Existe uma representação alternativa da equação da variância que pode fornecer uma outra interpretação para o modelo. Substituindo recursivamente as variâncias defasadas no lado direito da equação, podemos expressar a variância condicional como uma média ponderada de todas as defasagens dos quadrados dos resíduos.

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} \varepsilon_{j-1}^2 \quad (40)$$

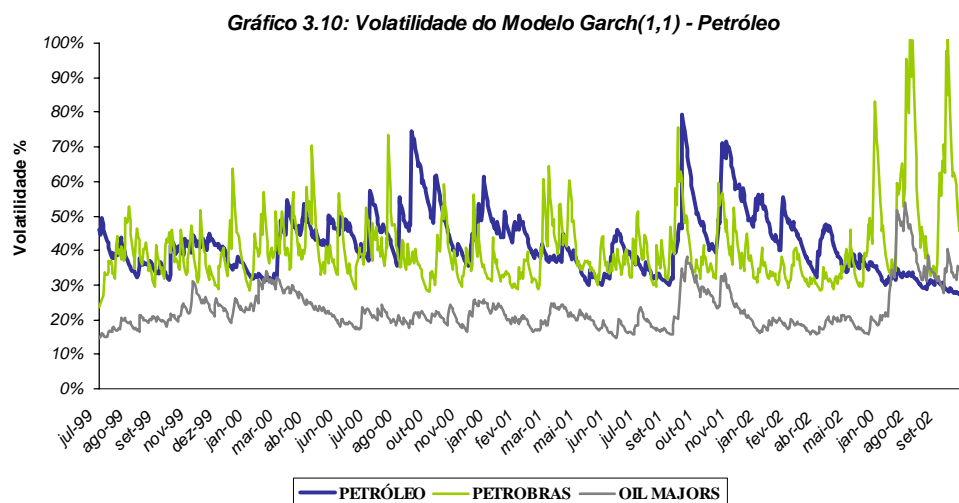
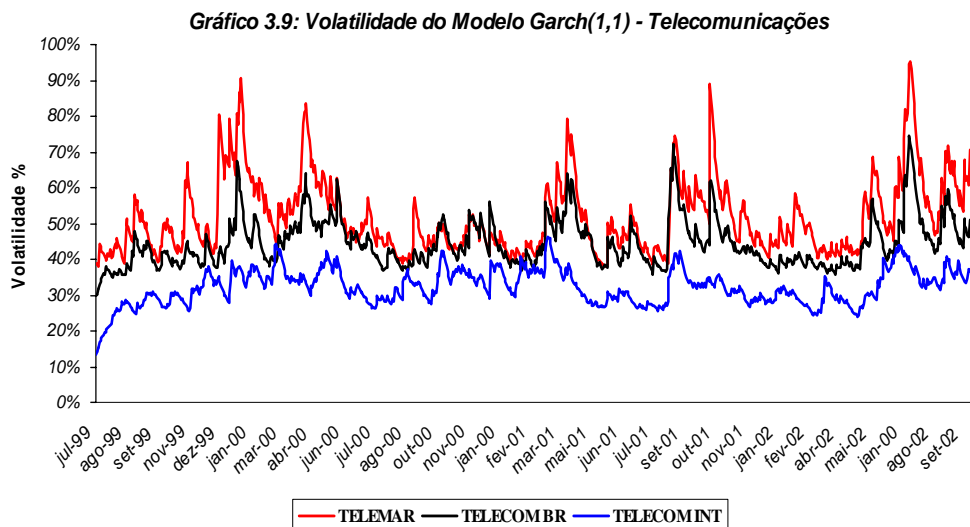
Esta especificação é análoga à variância do estimador de máxima verossimilhança para janelas móveis, mas o modelo estabelece uma ponderação menor nos desvios mais distantes.

As volatilidades estimadas pelos modelos da família Arch respondem com uma maior intensidade a mudanças abruptas nos preços dos ativos, capturando mais rapidamente as mudanças de regime nas volatilidades. O impacto dessas observações também desaparece numa velocidade maior, proporcionado por um peso mais elevado para as observações mais recentes. Podemos observar estes fatos através da estimação do modelo Garch (1,1) exposto nos gráficos 3.9 e 3.10.¹⁰

Portanto, trata-se de uma modelagem perfeita para a volatilidade de curto prazo dos investimentos em ativos financeiros, ou para o cálculo do risco da

¹⁰ Maiores detalhes podem ser encontrados no apêndice A.

variação de uma carteira, horizontes de análise típicos de um dia, de uma semana ou no máximo de um mês¹¹.



¹¹ Segundo ENGLE (2001) existem alguns fatos estilizados sobre as propriedades da volatilidade dos ativos que devem ser compatíveis com um bom modelo. Em primeiro lugar, a qualidade de um modelo de volatilidade está relacionada a sua capacidade de realizar previsões futuras, pois todos os usos modernos desta medida de incerteza estão associados a esta propriedade. Dentre os fatos estilizados estão: 1- A Persistência demonstrada pela volatilidade ou *clustering*. Altas variações nos preços dos ativos são acompanhadas de outras mudanças elevadas. 2- A volatilidade apresenta uma reversão à média, o efeito do *clustering* é temporário, após um período de alta volatilidade, teremos uma provável queda de nível para um patamar mais estável. 3- Inovações possuem um impacto assimétrico sobre a volatilidade dos retornos dos ativos, os choques negativos possuem um impacto maior sobre a volatilidade que choques positivos. 4-Varáveis exógenas podem ajudar a explicar a volatilidade, logo um bom modelo deve incorporar este fato. 5- A distribuição incondicional dos retornos apresenta caldas largas, este fenômeno deve ser incorporado pelo modelo de volatilidade. 6 - Um bom modelo deve fornecer uma boa previsão da volatilidade segundo critérios pré-estabelecidos.

Na análise de investimentos através da metodologia das opções reais, estamos em busca de características estruturais do risco de um projeto, afinal trata-se de um investimento de longo prazo, com um horizonte típico de três a dez anos. A modelagem dinâmica para a incerteza deve considerar alterações nos níveis de volatilidade em um determinado período de tempo, procurando excluir choques de curto prazo sobre os retornos dos ativos, justamente a principal característica dos modelos Arch. Em relação ao problema de diferenciação das *proxies* para a incerteza de um projeto, a modelagem dinâmica do comportamento da volatilidade seria a princípio de pouca utilidade, afinal a grande contribuição desses modelos ocorre na parametrização do comportamento da volatilidade ao longo do tempo, analisando uma única série segundo critérios estatísticos de aderência para a seleção de modelos distintos, além da sua capacidade preditiva dentro e fora da amostra. Desta forma, estaremos assumindo as hipóteses estabelecidas por MERTON (1980). Se um ativo segue um processo de difusão, isto é, um movimento browniano geométrico, sua volatilidade pode ser estimada através de um estimador de máxima verossimilhança com uma relativa precisão em uma amostra fixa de tempo se o retorno dos ativos for medido com uma frequência suficientemente alta.¹² A volatilidade assumirá valores constantes em intervalos finitos de tempo n , exatamente durante o período das janelas de estimação da amostra. Ou seja, estaremos assumindo que para um ε pequeno, existe um intervalo finito n tal que:

$$Prob \left\{ \left| \sigma^2(s) - \overline{\sigma^2(t)} \right| > \varepsilon \mid s \in (t, t+n) \right\} \quad (41)$$

será zero quando $\overline{\sigma^2(t)} \equiv \left[\int_t^{t+n} \sigma^2(s) ds \right] / n$.

Sabemos que $\sigma(t)$ pode variar ao longo do tempo, mas estaremos assumindo que trata-se de uma função com variações lentas em relação às mudanças nos preços dos ativos, ou seja, a variação dos retornos é muito maior que a respectiva variação da sua volatilidade. O estimador de máxima verossimilhança pondera igualmente todas as suas observações e isto significa um

¹² Páginas 330-331, 337-338 e apêndice A. Já existia na década de 70 uma forte evidência sobre as variações nas volatilidades dos ativos ao longo do tempo, exposta em ROSENBERG (1972) e BLACK (1976).

forte impacto de observações distantes sobre o nível da volatilidade. As curvas refletem níveis de volatilidade de tamanho n . A volatilidade tende a permanecer em um determinado patamar até o momento da chegada ou saída de uma observação mais elevada.

3.4. Testes Comparativos para as Volatilidades

O objetivo desta seção é identificar as diferenças entre as medidas de volatilidade propostas como *proxies* para a incerteza de um projeto de investimento em cada um dos setores escolhidos. Queremos saber o quanto estas *proxies* de risco diferem, considerando um mesmo período de tempo para a estimação. Isto significa que estaremos verificando a magnitude da diferença entre os candidatos e a medida de incerteza em cada um dos setores, podendo posteriormente verificar a sua influência sobre o apreçamento do valor da flexibilidade associada ao investimento.

Para alcançar tal objetivo, calculamos o valor absoluto das diferenças entre as volatilidades das *proxies* nos dois setores para cada uma das janelas de estimação. Essa análise simples possibilita uma distinção entre riscos específicos representados por cada uma das *proxies*. Depois realizamos um teste estatístico procurando definir através de uma medida de confiança a semelhança entre as volatilidades.

A diferença entre as curvas de volatilidade calculadas nos permite verificar comparativamente a magnitude do risco entre as *proxies* escolhidas. No setor de telecomunicações, o valor da carteira de ações de empresas de telefonia no Brasil representa o risco de um investimento neste setor no país, enquanto que o valor da carteira de empresas de telefonia no mercado internacional representa o risco da tecnologia associada a um empreendimento nesta indústria no mundo. A diferença entre as duas seria uma medida de volatilidade associada ao prêmio de risco de um investimento nesse setor no país. Da mesma forma, a volatilidade do preço do barril de petróleo representa o risco da *commodity* associada ao processo produtivo de um projeto no setor, comum a todas as empresas dessa indústria, enquanto que a volatilidade do preço da ação da Petrobras representa o risco

idiossincrático do investimento de uma única firma. A diferença entre as duas pode ser interpretada como um risco idiossincrático líquido.

Começamos com o setor de telecomunicações, para cada curva de volatilidade, 30, 90, 180 e 360 dias, calculamos as seguintes diferenças entre as medidas de risco:

$|\sigma_{Telemar} - \sigma_{Telecom Br}|$, representando a diferença entre o risco idiossincrático do investimento de uma firma e o risco de um investimento de todo setor no Brasil.

$|\sigma_{TecomBr} - \sigma_{Telecom Int}|$, representando a diferença entre o risco de um investimento de todo setor no Brasil e o risco da tecnologia da indústria no mundo.

$|\sigma_{Telemar} - \sigma_{Telecom Int}|$, representando a diferença entre o risco idiossincrático do investimento de uma firma no Brasil e o risco tecnológico do setor no mundo.

Gráfico 3.11: Diferença das Volatilidades Anuais de 30 dias em Valor Absoluto - Telecomunicações

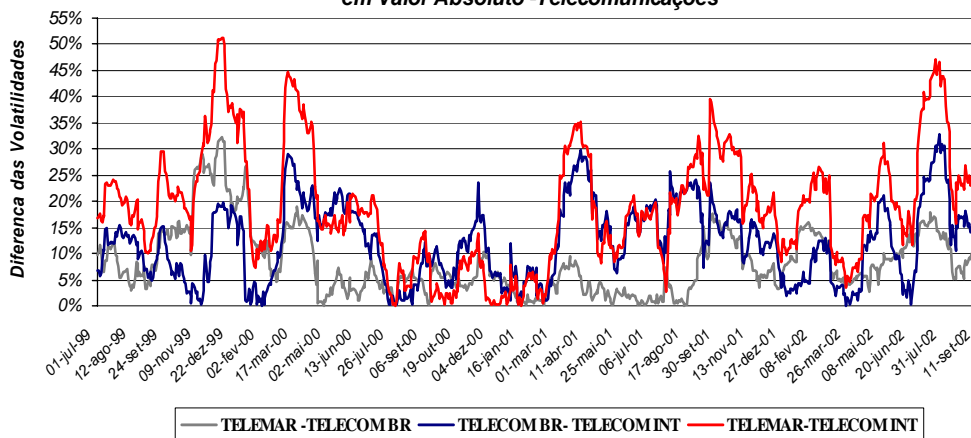


Gráfico 3.12: Diferença das Volatilidades Anuais de 90 dias em Valor Absoluto - Telecomunicações

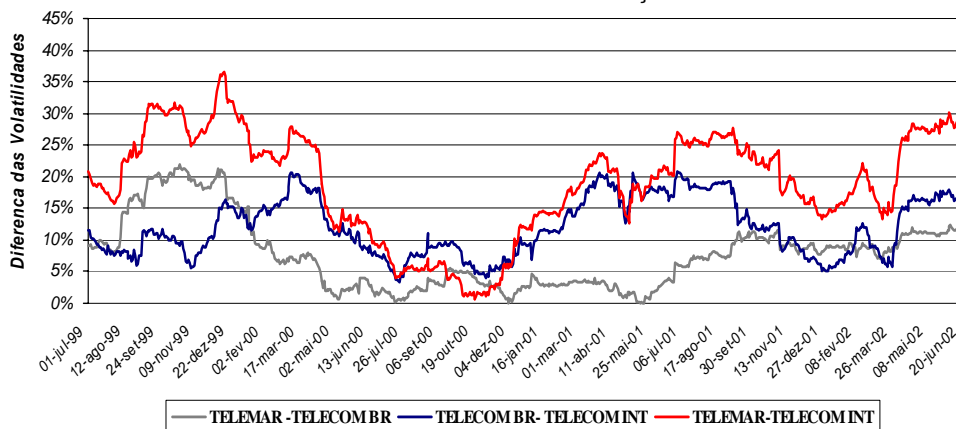
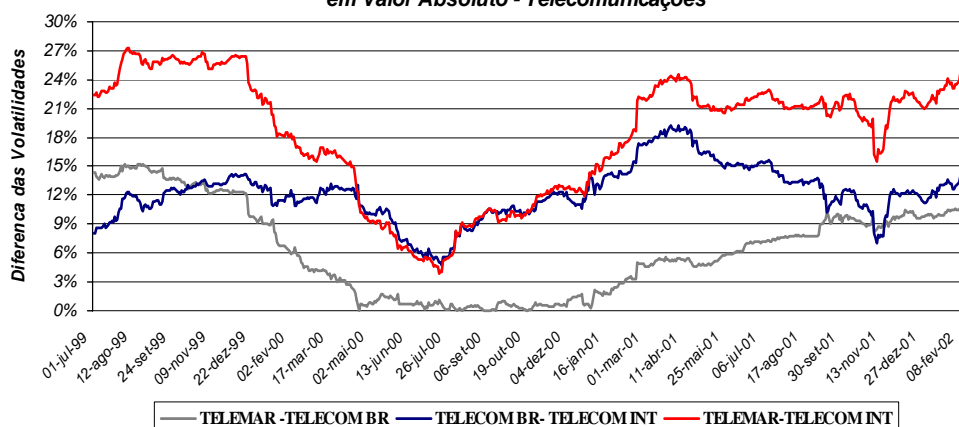
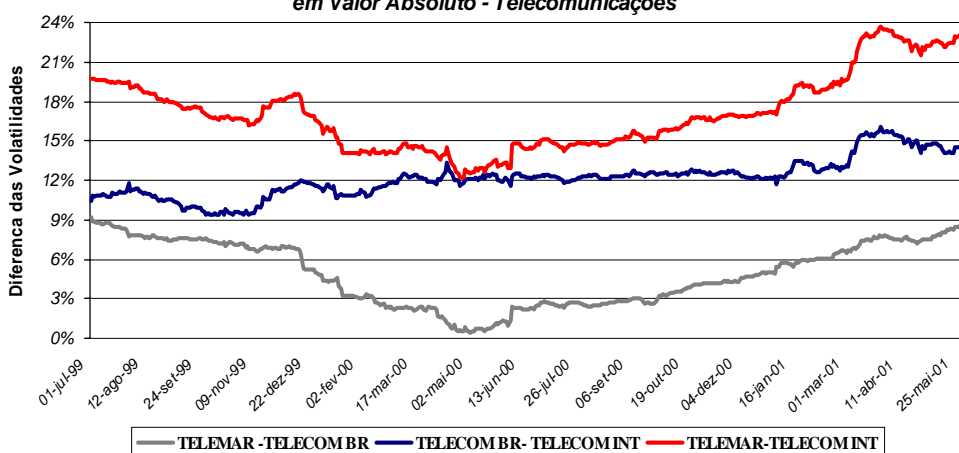


Gráfico 3.13: Diferença das Volatilidades Anuais de 180 dias em Valor Absoluto - Telecomunicações



Diferença entre as Volatilidades Anuais de 360 dias em Valor Absoluto - Telecomunicações



Observando o gráfico 3.11, referente às diferenças das volatilidades de 30 dias, fica difícil estabelecer um padrão de comportamento para esses representantes da incerteza de um projeto, devido à característica de curto prazo das medidas de risco. Essas volatilidades são muito sensíveis aos choques nos retornos dos ativos, logo estão mais contaminadas pelo comportamento do mercado como um todo. Já através dos gráficos 3.12, 3.13 e 3.14 podemos observar um padrão nítido de comportamento entre as medidas de risco. A diferença entre o risco idiossincrático de um investimento feito por uma firma brasileira e o risco do setor de telefonia no mundo é superior à diferença entre o risco do setor no Brasil e ao risco tecnológico do setor internacional em todos as demais curvas de volatilidade. Este, por sua vez, supera a diferença entre o risco idiossincrático e o risco do setor de telefonia brasileiro.

Quando uma firma realiza um investimento, o retorno do seu projeto estará sujeito a riscos específicos da empresa, tais como a eficiência da sua gerência, a qualidade dos seus serviços, sua tecnologia de produção e seu poder de mercado em relação às demais firmas da mesma indústria. Já uma carteira composta por empresas do setor de telecomunicações atuantes no Brasil representa a incerteza de um investimento neste setor no país. Isto significa que na maior parte do tempo seu risco será menor que o risco idiossincrático de uma empresa, devido ao efeito de diversificação proporcionado pelas correlações entre os ativos da carteira. A diferença entre a volatilidade da Telemar e a volatilidade de uma carteira composta pelas principais empresas do setor de telecomunicações no Brasil caracteriza o risco específico de um investimento realizado por uma única empresa, medindo a diferença entre o risco idiossincrático de um investimento em relação ao risco de todo setor no país. Podemos observar o efeito da diversificação sobre a maior parte da amostra. No entanto, durante o segundo semestre de 2000 este efeito foi praticamente nulo. Durante esse intervalo da amostra, os riscos idiossincráticos de um projeto e o risco representativo do setor no país são muito parecidos, logo, a princípio, podemos utilizar durante o período qualquer uma das duas medidas de risco para a avaliação da opção real de espera associada a um projeto.

Em relação à diferença entre as volatilidades de uma carteira das empresas de telecomunicações no Brasil e uma carteira de empresas de telecomunicações no mercado internacional, podemos verificar nas três curvas de volatilidade a presença do risco adicional que um investimento no Brasil representa em relação a um investimento neste setor no mercado internacional. A volatilidade de uma carteira representativa do setor de telefonia no exterior significa todo o risco tecnológico deste tipo de serviço, incluindo inovações nos produtos oferecidos, reduções de custos, mudanças na demanda que podem provocar alterações estruturais significativas no setor, como um todo. A diferença entre essa medida de risco e a volatilidade de uma carteira de telecomunicações atuante no mercado nacional demonstra o excesso de volatilidade associada a investimentos no Brasil.

Diferença entre as Volatilidades	Máximo	Mínimo	Média	Variância
Telemar-Telecom Br	9.21405%	0.43355%	4.81902%	0.05876%
Telemar-Telecom Int	23.71758%	12.18089%	16.77364%	0.08068%
Telecom Br-Telecom Int	16.03057%	9.34655%	12.20176%	0.02080%

Tabela 3.4 – Diferença entre as Volatilidades de 360 dias – Telecomunicações

Através da estabilidade presente nas volatilidades de 360 dias expostas na tabela 3.4 podemos observar o excesso de volatilidade consistente com a incerteza de investimentos com horizontes de longo prazo no país. A diferença entre o risco de um investimento no setor de telecomunicações no Brasil em relação a um investimento no exterior representa uma média de 12,20%. Tal diferença entre as volatilidades está necessariamente relacionada a um prêmio de risco mais elevado sobre os retornos dos projetos para compensar o investimento com essas características de incerteza.

No setor de petróleo, para cada curva de volatilidade calculada, 30, 90, 180 e 360 dias temos as seguintes diferenças entre as medidas de risco:

$|\sigma_{\text{Petróleo}} - \sigma_{\text{Petrobras}}|$, representando a diferença entre o risco da *commodity* associada ao investimento de uma firma e o risco idiossincrático de um investimento no Brasil.

$|\sigma_{\text{Petrobras}} - \sigma_{\text{Oil Majors}}|$, representando a diferença entre o risco idiossincrático de um investimento no Brasil e o risco de toda indústria no mundo.

$|\sigma_{\text{Petróleo}} - \sigma_{\text{Oil Majors}}|$, representando a diferença entre o risco da *commodity* associada ao investimento e o risco tecnológico do setor no mundo.

Gráfico 3.15: Diferença das Volatilidades Anuais de 30 dias em Valor Absoluto - Petróleo

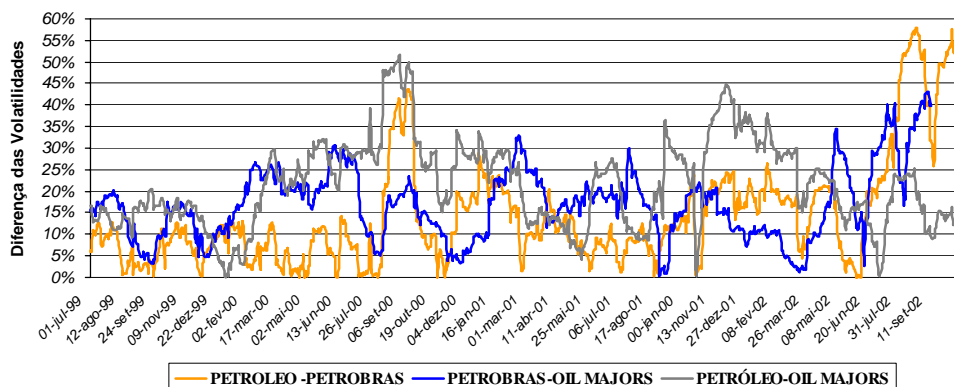
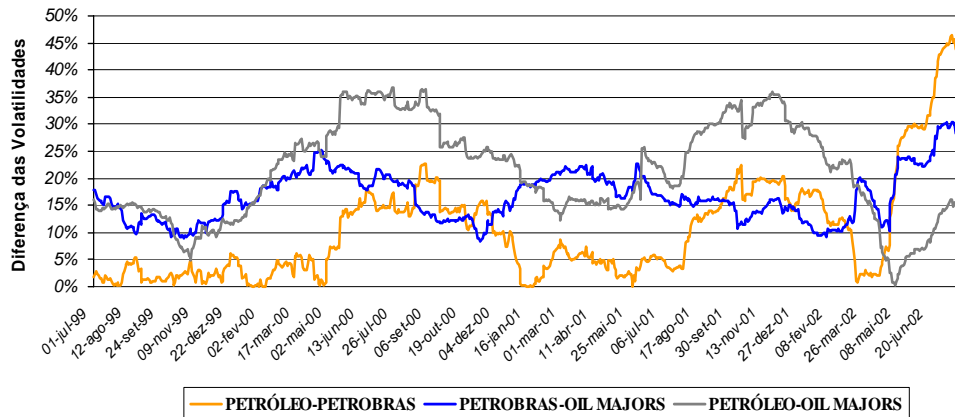
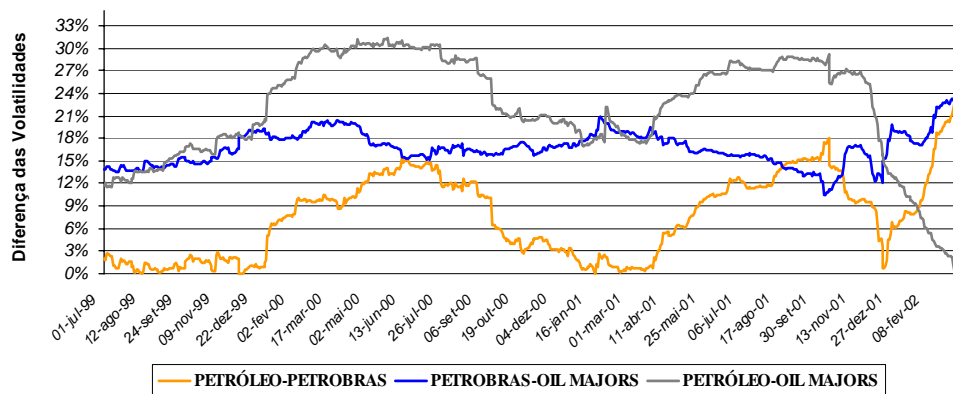


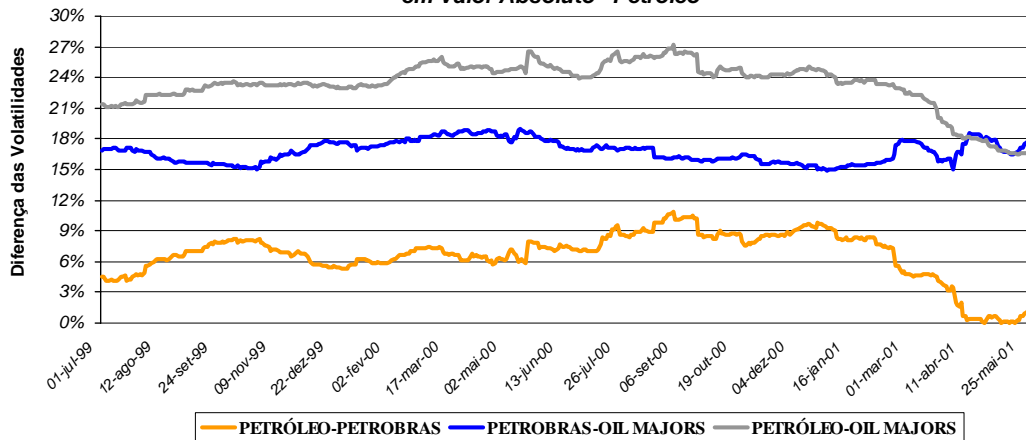
Gráfico 3.16: Diferença das Volatilidades Anuais de 90 dias em Valor Absoluto - Petróleo



Diferença das Volatilidades Anuais de 180 dias em Valor Absoluto - Petróleo



Diferença entre as Volatilidades Anuais de 360 dias em Valor Absoluto - Petróleo



Assim como na análise das *proxies* para as volatilidades no setor de telecomunicações, as curvas de 30 dias fornecem pouca informação devido à contaminação desta medida de risco pelo comportamento de curto prazo do

retorno dos ativos. Já em relação às curvas de volatilidade de 90, 180 e 360 dias, podemos perceber um nítido padrão de comportamento. A diferença entre a volatilidade do petróleo, *commodity* associada ao processo produtivo de um investimento neste setor, e a volatilidade de uma carteira das maiores empresas do mundo neste setor supera as demais diferenças na maior parte da amostra. A diferença entre a volatilidade da Petrobras e a volatilidade da carteira composta pelas *oil majors* supera a diferença entre o risco de uma *commodity* associada ao processo de produção do setor e o risco idiossincrático de um projeto realizado por uma firma no país, representado pela diferença entre a volatilidade do petróleo e a volatilidade da Petrobras.

Podemos observar, através dos gráficos 3.16 e 3.17, que durante o segundo semestre de 1999 e no começo de 2001 os valores da volatilidade do petróleo e da volatilidade da Petrobras são muito próximas, o que significa que durante os períodos específicos da amostra, a avaliação de uma opção real de espera para um projeto no setor pode ser realizada com qualquer uma das duas medidas de incerteza.

Também podemos verificar, segundo as estatísticas da tabela 3.5, a estabilidade da volatilidade extra de um investimento de longo prazo no Brasil, representado pela diferença entre as volatilidades de 360 dias da Petrobras e a volatilidade das *oil majors*, com uma média em torno de 16,86%.

<i>Diferença entre as Volatilidades</i>	<i>Máximo</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
<i>Petróleo-Petrobras</i>	10.92322%	0.01014%	7.07785%	0.05677%
<i>Petróleo-Oil Majors</i>	27.16798%	16.04472%	23.61630%	0.05477%
<i>Petrobras-Oil Majors</i>	18.93584%	14.88303%	16.86259%	0.01132%

Tabela 3.5 – Diferença entre as Volatilidades de 360 dias – Petróleo

Agora, depois de verificar a magnitude do valor absoluto das diferenças entre os estimadores de volatilidade para cada um dos setores, realizaremos um teste estatístico para diferenciar as volatilidades de acordo com alguma medida de confiança. Isto permite uma análise mais acurada de quão próximas estatisticamente estas *proxies* de incerteza estão associadas a um projeto. Se duas volatilidades são estatisticamente semelhantes durante algum intervalo de tempo da amostra, isto significa que podemos utilizar qualquer uma das duas medidas de risco no apreamento do valor da flexibilidade operacional de um investimento.

O teste utilizado para analisar a semelhança entre as *proxies* de incerteza nos setores de telecomunicações e petróleo é proporcionado pela razão das funções de verossimilhança de duas amostras de populações normais, utilizando como estatística a razão das variâncias estimadas e a distribuição de probabilidade F . Segundo as hipóteses estabelecidas para o movimento estocástico do valor do projeto ou do valor da carteira replicante, $dX = \mu X dt + \sigma X dz$ e conforme o desenvolvimento da seção 2.1, considerando duas amostras para os retornos dos ativos, $r_1(1), r_1(2), \dots, r_1(n)$ e $r_2(1), r_2(2), \dots, r_2(n)$, onde temos que $r(t) \equiv LN(X(t)/X(t-1))$, através do lema de Itô:¹³

$$dr = d \ln X = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \quad (42)$$

Como $X(t)$ possui distribuição de probabilidade lognormal, isto significa que para uma variação infinitesimal de $r(t)$ temos que:

$$\ln X(T) - \ln X(t) = \ln \frac{X(T)}{X(t)} \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right] \quad (43)$$

As taxas de retorno instantâneas dos ativos são variáveis aleatórias *iid* com distribuição normal de média $\alpha(T-t) \equiv (\mu - \sigma^2/2)(T-t)$ e variância $\sigma^2(T-t)$. Os estimadores de máxima verossimilhança da média e da variância amostrais são definidos por:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r(t) ; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r(t) - \hat{\alpha})^2$$

Desta forma, sabemos que para a primeira amostra dos retornos, $r_1(1), r_1(2), \dots, r_1(n)$:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_1(t) - \hat{\alpha}_1)^2}{\sigma_1^2} \quad (44)$$

¹³ Se definimos $G(V,t) = \ln V$, segundo Lema de Itô:

$$dG(V,t) = \left(\frac{\partial G}{\partial V} \mu V + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial V} \sigma V dz, \text{ resultando na equação (42).}$$

é uma variável aleatória χ^2 com $n-1$ graus de liberdade. Da mesma forma, para a segunda amostra de retornos $r_2(1), r_2(2), \dots, r_2(n)$:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_2(t) - \hat{\alpha}_2)^2}{\sigma_2^2} \quad (45)$$

também é uma variável aleatória χ^2 independente com $n-1$ graus de liberdade. A razão definida por:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_1(t) - \hat{\alpha}_1)^2}{(n-1)\sigma_1^2} \bigg/ \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_2(t) - \hat{\alpha}_2)^2}{(n-1)\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 \hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2 \hat{\sigma}_2^2} \quad (46)$$

possui distribuição F com $n-1$ e $n-1$ graus de liberdade. Definidas essas duas variáveis, podemos escrever o seguinte intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança para a razão das variâncias das duas populações σ_2^2 / σ_1^2 ¹⁴:

$$P\left(F_{\alpha/2} \leq \frac{\sigma_2^2 \hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2 \hat{\sigma}_2^2} \leq F_{1-\alpha/2}\right) = \gamma = 1 - \alpha \quad (47)$$

$$P\left(\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} F_{\alpha/2} \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\right) = \gamma = 1 - \alpha \quad (48)$$

onde $F_{\alpha/2}$ e $F_{1-\alpha/2}$ são valores obtidos da distribuição F . Estes intervalos de confiança podem ser naturalmente transformados em regiões de “aceitação”, isto é, não-rejeição na realização de testes de hipóteses.

Convertendo o intervalo de confiança proposto para a razão das variâncias populacionais das duas amostras para um teste de hipótese, temos:

$$H0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ Hipótese nula} \quad ; \quad H1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ Hipótese alternativa}$$

Sabemos que o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para σ_2^2 / σ_1^2 possui dois limites:

$$\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} F_{\alpha/2}(n-1; n-1) \quad \text{e} \quad \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} F_{1-\alpha/2}(n-1; n-1) \quad (49)$$

¹⁴ Teorema 7.4.2 de LARSON (1982), p. 403-404.

A região de rejeição quando testamos $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, consiste nos valores amostrais que não pertencem ao intervalo de confiança, isto é, rejeitamos a hipótese nula quando o intervalo de confiança não inclui o ponto $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1$, ou seja, se ocorrem os casos:

$$\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} F_{\alpha/2}(n-1; n-1) > 1 \quad ; \quad \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} F_{1-\alpha/2}(n-1; n-1) < 1 \quad (50)$$

De outra forma:

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} > F_{\alpha/2}(n-1; n-1) \quad ; \quad \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} < F_{1-\alpha/2}(n-1; n-1) \quad (51)$$

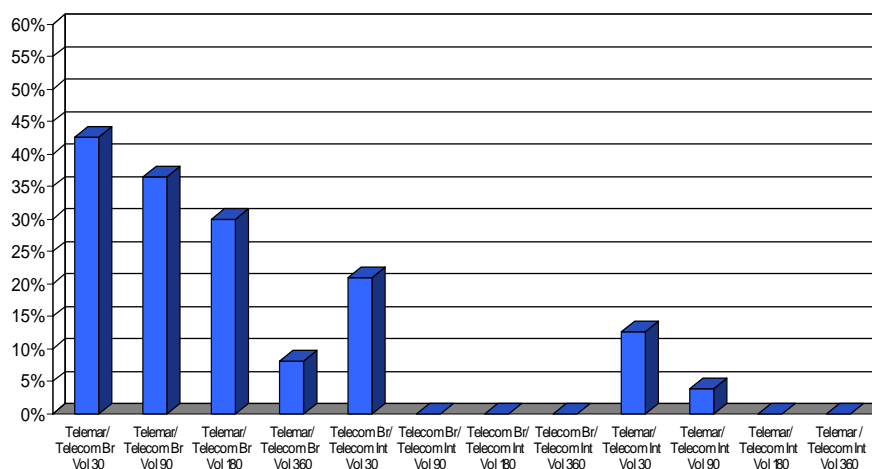
Este teste de hipótese também pode ser obtido usando o critério do teste da razão da verossimilhança generalizada.¹⁵ Realizamos testes de hipóteses com um nível de significância de 5%. Isto significa que rejeitamos H_0 quando a estatística da razão das variâncias não satisfaz as condições estabelecidas por $F_{2,5\%}$ e $F_{97,5\%}$.

Os testes de hipótese com as volatilidades de 30 dias do setor de telecomunicações indicam que as volatilidades de curto prazo são semelhantes durante alguns períodos da amostra.¹⁶ Neste caso, como estamos comparando medidas de volatilidade de curto prazo, existe um excesso de movimentos comuns refletindo uma influência do comportamento do mercado financeiro como um todo. As volatilidades de 90, 180 e 360 dias proporcionam uma distinção mais apropriada entre as volatilidades, afinal estas medidas de incerteza estão mais próximas de um valor estrutural para uma *proxie* de risco de um projeto. De acordo com os resultados do teste expostos no gráfico 3.19, podemos perceber uma forte evidência contra a rejeição da hipótese nula de igualdade quando comparamos as volatilidades da Telemar e a da carteira de empresas do setor de telecomunicações no Brasil. A hipótese nula de igualdade das variâncias não foi rejeitada em pelo menos 30% da amostra para as volatilidades de 30, 90 e 180 dias.

¹⁵ Ver LARSON (1982) p. 445-451, RAMANATHAN (1993) p. 221-229 e DEGROOT (1986) p. 499-505.

¹⁶ Para o setor de telecomunicações, calculamos as seguintes estatísticas: $T1 = \text{Variância Telemar} / \text{Variância da Telecom.}$, $T2 = \text{Variância Telecom Br.} / \text{Variância da Telecom Int.}$ e $T3 = \text{Variância Telemar} / \text{Variância da Telecom Int.}$

Gráfico 3.19: Não-Rejeição da Hipótese Nula em % da Amostra - Telecomunicações



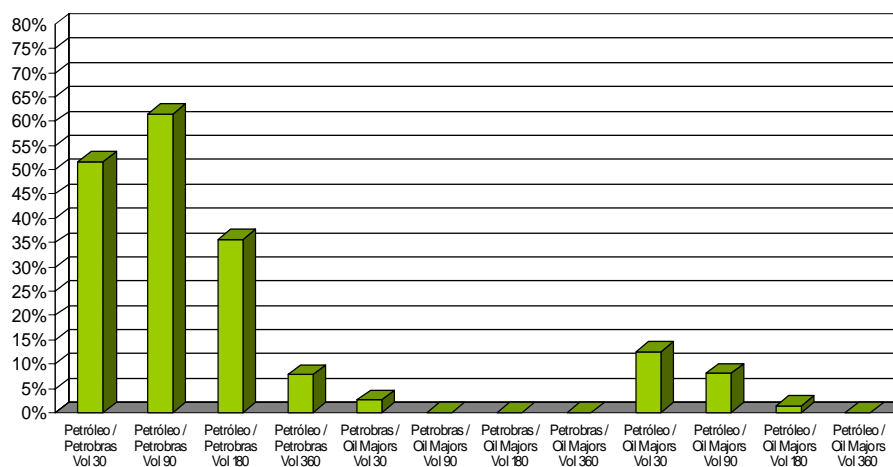
Também podemos verificar a não-rejeição da hipótese nula em 20% da amostra para as variâncias de 30 dias da Telecom Br. e Telecom Int., entretanto este fato não se verifica para as volatilidades de 90, 180 e 360 dias. Em relação ao teste entre as variâncias de 30 dias da Telemar com as da Telecom Int., observamos a não-rejeição da hipótese nula em 11% da amostra. É importante perceber que existe uma diferença estrutural presente nas volatilidades de 360 dias, principalmente quando comparamos as *proxies* de risco para investimentos realizados no Brasil com as *proxies* de incerteza de um investimento no mercado internacional. Neste caso, ocorre a rejeição da hipótese nula de igualdade das variâncias.

Em relação aos testes realizados com as curvas de volatilidade no setor de petróleo, podemos dizer que os resultados obtidos pelos testes para as volatilidades de 30 dias¹⁷ possuem uma forte influência de movimentos comuns destes ativos no curto prazo. Como estamos em busca de uma análise comparativa entre possíveis representantes do risco estrutural associado a um projeto de investimento, será mais interessante observarmos o resultados dos testes para as estatísticas obtidas com as volatilidades de 90, 180 e 360 dias. Verificamos a não-rejeição da hipótese nula em mais de 35% da amostra quando comparamos as volatilidades de 30, 90 e 180 dias do petróleo e da Petrobras. Isto significa que

¹⁷ O mesmo teste foi realizado para as curvas de volatilidade no setor de petróleo a partir das seguintes estatísticas: $T1 = (\text{Variância Petróleo} / \text{Variância da Petrobras})$, $T2 = (\text{Variância Petrobras} / \text{Variância da Oil majors})$ e $T3 = (\text{Variância Petróleo} / \text{Variância da Oil Majors})$.

durante períodos específicos, o cálculo do valor da opção real de espera pode ser realizado com qualquer uma destas duas medidas de risco.

Gráfico 3.20: Não-Rejeição da Hipótese Nula em % da Amostra - Petróleo



No entanto, em relação aos resultados dos testes obtidos pelas volatilidades de 90, 180 e 360 dias da Petrobras e das *oil majors*, apesar de não podermos rejeitar a hipótese nula em 12% da amostra quando comparamos as variâncias de 360 dias do Petróleo com as variâncias das *oil majors*, observamos um padrão claro de rejeição da hipótese de igualdade das variâncias. Com relação às demais volatilidades de 360 dias, a hipótese nula é sempre rejeitada.

De acordo com as análises comparativas realizadas sobre as volatilidades, tanto em relação à distinção da magnitude do risco das *proxies* quanto em relação ao teste estatístico para verificar as suas semelhanças, obtemos algumas conclusões sobre as características das volatilidades associadas a projetos de investimento. Quando avaliamos o valor da flexibilidade dos empreendimentos que possuem custos operacionais irreversíveis através da metodologia das opções reais, necessitamos de uma medida de risco de longo prazo associada a este tipo de investimento. A volatilidade para tal tipo de apreçamento deve excluir, na medida do possível, comportamentos de curto prazo do mercado financeiro relacionados aos choques provocados pela chegada de novas informações.

A volatilidade de um projeto está relacionada a variações de longo prazo no retorno do investimento, refletindo as características estruturais do setor procurando sempre evitar a análise conjuntural. Podemos constatar a presença de um excesso de volatilidade de investimentos no Brasil, através de uma diferença

estável entre as volatilidades de 360 dias das *proxies* das empresas que representam as características de risco de projetos realizados no Brasil, em relação a projetos implementados no exterior. Também podemos afirmar que existe uma forte evidência de igualdade entre as volatilidades de 30, 90 e 180 dias da Telemar e da carteira Telecom Br. em alguns períodos da amostra, assim como entre as volatilidades do petróleo e da Petrobras.

