# 2. Projetos de Investimento como Opções Reais

Uma firma que possui uma oportunidade de investimento adquiriu algo semelhante a uma opção de compra financeira: ela possui o direito, mas não necessariamente a obrigação de comprar um projeto em algum momento no futuro. Quando a empresa realiza este investimento, ela automaticamente exerce a sua opção de compra. Assim, os investimentos em capital físico são essencialmente opções sobre ativos reais.

Ao longo dos últimos anos, economistas exploraram esta idéia relacionando-a à existência de uma flexibilidade operacional para a realização dos gastos e chegaram à conclusão que interpretar estratégias de investimentos como opções reais muda a teoria e a prática das decisões corporativas de investimentos.

Quando avaliamos oportunidades de investimento reconhecemos a importância de três características dos projetos: a irreversibilidade presente na decisão sobre a sua implementação ou não, a incerteza em relação ao valor dos fluxos de caixa esperados e a escolha do momento ótimo para a realização dos gastos. O ambiente econômico no qual a maioria das firmas deve operar é muito mais volátil e imprevisível nos dias de hoje do que foi há 20 anos atrás. Esta incerteza requer que os empreendedores sejam mais sofisticados e cuidadosos com contabilização do risco. Como as opções reais contabilizam o valor da flexibilidade em um mundo incerto, a habilidade de se avaliar as incertezas associadas aos projetos é crucial para a realização dos investimentos em capital fixo.

Neste capítulo, começaremos a análise da influência da volatilidade através do desenvolvimento de uma regra ótima de decisão para o investimento. Estaremos assumindo que a firma possui um monopólio sobre o seu projeto, logo não existe interação estratégica entre os participantes de uma mesma indústria. A análise será realizada através do modelo proposto por MCDONALD e SIEGEL (1986). A escolha deste modelo resulta na avaliação do problema mais fundamental do investimento irreversível na presença de fluxos de caixa estocásticos. Suas hipóteses básicas e características não exclusivas permitem uma adaptação para a avaliação de projetos em qualquer um dos dois setores escolhidos: telecomunicações e petróleo. Desta forma, podemos nos concentrar na análise da influência da volatilidade sobre o valor da flexibilidade associada à decisão sobre a realização de um típico projeto de investimento. Existem modelos de investimento sob incerteza que possuem uma estrutura mais específica e provavelmente seriam mais adequados para a avaliação de projetos em cada uma destas duas indústrias, adaptando-se mais facilmente às peculiaridades do setor produtivo, à sua estrutura de custos, à interação estratégica entre competidores e ao próprio mercado consumidor. Entretanto, estas considerações adicionais não invalidam os resultados obtidos na análise da influência da volatilidade sobre o problema básico de avaliação da opção de espera de um investimento.[1]

## 2.1. Modelo de McDonald e Siegel

Considere um projeto de investimento com características de incerteza nos fluxos de caixa e irreversibilidades nos gastos iniciais. Dentro deste contexto, um modelo para a avaliação de tal investimento procura responder à seguinte pergunta: Qual seria o momento ótimo para se pagar um custo irreversível $I$, implementando um projeto cujo valor presente dos fluxos de caixa, representado por $V$, segue um movimento browniano geométrico?

A regra tradicional, baseada no valor presente líquido, nos diz que devemos realizar o investimento quando o valor presente dos fluxos de caixa superar os gastos iniciais, ou seja, quando $V>I$. No entanto, quando existe a possibilidade de adiar o investimento esta opção de espera possui um valor, denotado por $F(V)$. A possibilidade de adiar a decisão sobre a realização dos gastos necessários para implementação está associada à obtenção de novas informações sobre preços, custos e outras condições de mercado relevantes para a atuação da firma, podendo inclusive determinar a própria viabilidade ou não do empreendimento. Levando em consideração o valor associado a esta opção real de flexibilidade do

[1] No caso do setor de exploração de petróleo, uma outra possibilidade seria o modelo proposto por PADDOCK, SIEGEL e SMITH (1988), aplicado para o caso brasileiro em DIAS (1996). Para o setor de telecomunicações, se considerarmos a análise de um investimento estabelecido pelo programa de antecipação de metas de universalização da Anatel, temos que considerar o comportamento estratégico entre as firmas, de acordo com a metodologia proposta por GRENADIER (2002). Uma aplicação desta análise para o setor de telecomunicações no Brasil foi desenvolvida por GONÇALVES e MEDEIROS (2002).

investimento, a firma, agora, investirá somente quando o valor presente dos fluxos de caixa esperados do projeto ultrapassar um valor crítico $V^*$, determinado de forma endógena pelo modelo. Este valor crítico é superior a $I$, podendo ser duas ou três vezes maior.

Assim, uma oportunidade de investimento é semelhante a uma opção de compra perpétua, sem data de expiração. A decisão sobre o momento ótimo para o investimento é semelhante à decisão de quando exercer tal opção. Isto significa que o problema do investimento pode ser visto como o apreçamento de uma opção financeira.

A avaliação dessa opção pela flexibilidade pode ser realizada através da metodologia de apreçamento dos ativos contingentes, ou através da programação dinâmica, onde a análise sobre o adiamento ou implementação do investimento é feita em intervalos de tempo infinitesimais, caracterizando a existência de uma regra ótima para a maximização dos ganhos líquidos da firma em cada período.[2] Utilizaremos inicialmente a abordagem proposta pela metodologia dos ativos contingentes, sendo necessária uma importante hipótese sobre o mercado de ativos.

Suponha que duas empresas dos setores de telecomunicações e petróleo, escolhidos para esta análise possuem oportunidades de investimento do tipo: a construção de uma nova fábrica devido a uma expansão da sua área de atuação no setor, através de um investimento em telefonia fixa ou móvel, segundo as metas estipuladas pela Anatel; ou um investimento em uma nova plataforma de perfuração, após a descoberta de um lençol petrolífero. A presença da irreversibilidade dos custos iniciais significa que estas oportunidades devem ser avaliadas sob a perspectiva de se obter um momento ótimo para a realização dos gastos. Devido à característica das firmas monopolistas deste investimento específico, os projetos podem, por hipótese, ser implementados em qualquer momento no futuro. Ou seja, em vez de a empresa ter que decidir se implementa ou não o projeto no momento inicial, ela possui a opção de espera, podendo adiar o investimento em busca de novas informações para qualificar mais a sua decisão.

---

[2] Equação de Bellman.

Queremos determinar uma regra de decisão ótima através da qual a empresa possa determinar o momento ideal, definido por *t**, para exercer esta oportunidade de investimento. Estaremos considerando como horizonte de análise o período de 01/07/1999 até 31/10/2002.[3] Dentro deste intervalo de tempo, estamos interessados na influência da incerteza sobre o valor da opção de se esperar ou investir. A solução esse problema, estabelece que o investimento só será realizado quando o valor do projeto ultrapassar um valor crítico maior do que os custos iniciais, isto é, quando $V>V^*>I$.

O custo de implementação do projeto $I$ é não estocástico e conhecido em $t=0$, logo não existe necessidade de uma análise mais detalhada desta variável. Já o valor do projeto evolui estocasticamente ao longo tempo, sujeito à revelação de novas informações sobre os potencias de lucro do investimento. Assume-se que o valor do projeto segue um movimento browniano geométrico padrão, um passeio aleatório em tempo contínuo do tipo:[4]

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \tag{1}$$

onde $dz$ é um incremento de um processo de Wiener.[5]

Existe uma propriedade importante neste tipo de hipótese sobre a lei de movimento para o valor do projeto: seu valor corrente $V(t)$, sendo $t$ o momento analisado, é conhecido, apesar dos seus valores futuros possuírem uma distribuição lognormal com uma variância crescente ao longo do tempo. Esta hipótese estabelece que o valor do projeto na data de análise será conhecido. Apesar da chegada de novas informações provocar alterações em $V$, observadas pela firma, os seus valores futuros serão sempre estocásticos. Isto significa que quando calculamos o valor da flexibilidade do projeto em $t$, definida por $F(V(t))$ saberemos exatamente o valor do projeto na data prevista. Por exemplo, no

---

[3] Não estamos supondo que o investimento deve ser realizado dentro deste período, trata-se apenas de um período para a análise e estimação dos parâmetros.

[4] $V$ é o valor presente dos fluxos de caixa proporcionados pelo projeto, desta forma:

$$V = \int_t^{\infty} FC(t) e^{-\mu\tau} d\tau$$

[5] Uma variação no processo de Winer pode ser definida por, $dz = \varepsilon(t)\,(dt)^{1/2}$ , onde $\varepsilon\,(t)$ é uma variável aleatória com distribuição normal padrão.

momento ótimo para o investimento, determinado por $t^*$, será possível observar o valor presente do projeto necessário para o calculo de $F(V(t^*))$.

A hipótese sobre a lei de movimento para $V$ é uma abstração teórica. Provavelmente o valor do projeto não segue um movimento browniano geométrico. Por exemplo, suponhamos que os custos do projeto já implementado são positivos e a firma decida fechar temporariamente a fábrica instalada quando o preço do produto final estiver abaixo do custo variável. Neste caso, $V$ não seguirá a lei de movimento estabelecida pelo modelo. Se o custo variável da firma for positivo e ela não possuir a opção de encerrar suas atividades, devido a restrições de regulação no setor, $V$ pode tornar-se negativo, violando a hipótese de lognormalidade.

Outro argumento contra esta hipótese é o fato de que, em um mercado competitivo, o preço final não poderá ser muito maior que o custo marginal de longo prazo da indústria, tornando mudanças estocásticas no preço infrequêntes, logo $V$ deveria seguir um processo de reversão à média ou um processo de Poisson, incorporando saltos. Apesar das falhas, essa hipótese permite a avaliação do valor da flexibilidade de um investimento através do mesmo instrumental matemático utilizado no apreçamento das opções financeiras, devido à analogia entre os dois problemas. Estaremos ignorando as deficiências sobre a lei de movimento de $V$ para poder concentrar a atenção na influência da volatilidade sobre o tempo ótimo de espera para a realização do investimento.

O estudo da economia financeira proporcionou o desenvolvimento de teorias descrevendo a decisão de investidores, o equilíbrio de mercado resultante do agregado das decisões individuais e o conseqüente preço de equilíbrio destes ativos. O seu objeto de estudo é uma economia onde são negociados diversos ativos, financeiros e reais, com características de risco e retorno distintas. Para obter o apreçamento de um novo ativo, financeiro ou real, tentamos replicar suas características de risco e retorno através de um ativo ou uma carteira de ativos com preços já estabelecidos. Se a replicação das suas características de risco e retorno for possível, isso é, se os mercados forem dinamicamente completos, o preço do novo ativo deve ser igual ao preço da carteira replicante, caso contrário existirá uma oportunidade de arbitragem.[6]

Como a firma possui uma opção real de espera, isto é, tem a oportunidade de pagar um custo irreversível $I$ em troca de um projeto $V$ que evolui de forma estocástica, podemos encontrar o valor desta opção real através da metodologia dos ativos contingentes, determinando a regra ótima para o seu exercício. Mas, antes, precisamos de uma hipótese sobre a estrutura da incerteza presente nas mudanças de $V$. Estaremos assumindo que os valores estocásticos de $V$ podem ser expandidos[7] pelos ativos existentes. Como a incerteza nessa economia é descrita por processos de Itô, necessitamos da existência de um mercado com uma quantidade suficiente de ativos para que o componente estocástico da lei de movimento do projeto seja exatamente replicado pelo componente estocástico de um ativo negociável.[8] Através dessa hipótese, poderemos encontrar um ativo ou construir uma carteira dinâmica de ativos com características de risco semelhantes às do projeto $V$. Apesar de um projeto de investimento representar um ativo novo na economia, suas características de risco e retorno não afetam o conjunto de oportunidades dos investidores.

Tal hipótese será valida para a maioria dos projetos que possuem valor relacionado a *commodities* negociadas no mercado à vista e no mercado futuro. No caso de investimentos que resultam na produção de bens manufaturados ou na prestação de serviços, também podemos considerar a existência de uma correlação entre o risco do projeto e o risco do preço da ação da empresa que realiza o investimento, ou até mesmo o preço de uma carteira de empresas dessa indústria. Entretanto, quando se trata do desenvolvimento de um novo produto, como um novo medicamento na indústria farmacêutica, esta hipótese não será mais válida. Provavelmente os retornos obtidos por um projeto que desenvolve um produto inovador serão superiores aos retornos típicos da sua indústria.

[6] Ver HUANG e LITZENBERGER (1988) cap. 8.

[7] Spaninng.

[8] Para maiores detalhes sobre as condições que permitem a replicação do risco de um projeto ver DIXIT e PINDYCK (1994) cap. 4.

Através da hipótese de replicação dos movimentos estocásticos de $V$ por ativos existentes, podemos determinar a regra ótima de investimento sem qualquer hipótese sobre preferências sobre risco ou taxas de desconto. O problema do investimento da firma se reduz a um problema de apreçamento de um ativo contingente.

Definindo $X$ como o preço do ativo replicante que possui, por construção, uma correlação com $V$ denotada por $\rho_{VX.}$[9] Como conseqüência, a correlação de $V$ com a carteira de mercado, denotada por $\rho_{VM,}$ será igual à correlação entre $X$ e a carteira de mercado. A evolução de $X$ é descrita por:

$$dX = \mu Xdt + \sigma X dz \tag{2}$$

onde μ é o coeficiente de *drift* do processo, representando sua taxa de crescimento estocástica e σ é o parâmetro de difusão que corresponde à magnitude da incerteza do incremento no processo de Wiener. Estaremos assumindo que este ativo é negociado nos mercados de ativos financeiros e possui um preço já estabelecido. Um caso típico de tal situação seria o de firmas em que o produto final associado ao projeto de investimento está associado a *commodities*, como petróleo ou cobre.

Como qualquer ativo, o ativo $X$ só será demandado pelos investidores se proporcionar um retorno esperado alto o suficiente para compensar seu risco idiossincrático ou não–diversificável. A carteira de mercado proporciona o máximo de diversificação disponível para o investidor. Desta forma, a covariância do retorno do ativo com o retorno da carteira de mercado[10] determina o prêmio de risco pago pelo ativo. Segundo a equação fundamental de equilíbrio do *CAPM*, o retorno esperado do ativo $X$ é definido por:

$$E(R_X) = \mu = r + \lambda \rho_{XM} \sigma \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M}$$

[9] Na verdade, é suficiente que apenas o componente de risco na dinâmica de $V$, definido por $dz$, seja replicado por uma carteira de ativos negociados.

[10] Segundo ROLL (1977), não podemos identificar a carteira de mercado do modelo *CAPM*, o que torna seus testes empíricos inválidos. Não estamos levando em consideração esta crítica ao modelo, com o objetivo de simplificar a análise.

O parâmetro $\lambda$ representa o preço de risco do mercado; a taxa de juros sem risco é definida por $r$ e $\mu_M$ é o retorno da carteira de mercado.

Queremos obter o apreçamento da oportunidade de investimento $F(V)$ através da construção de uma carteira de ativos negociados com valores já estabelecidos,[11] replicando as suas características de risco e retorno. Na avaliação do investimento, $\mu$ representa a taxa de retorno esperada de possuir o projeto completo, trata-se de uma taxa de retorno de equilíbrio estabelecida pelo mercado, incluindo o prêmio de risco adequado. Estamos assumindo que $\alpha$, a taxa de crescimento esperada de $V$, é menor que o seu retorno ajustado pelo risco $\mu$. Denotamos por $\delta$ a diferença entre $\mu$ e $\alpha$, isto é:

$$\mu = \alpha + \delta \tag{4}$$

Podemos interpretar $\delta$ como um custo de oportunidade de adiar a execução do investimento em troca de manter viva a opção pelo investimento. Se $\delta$ for igual a zero, não haverá nenhum custo de oportunidade de manter a opção viva e o investimento por parte das firmas nunca ocorrerá, independente do valor presente líquido esperado do projeto. Logo precisamos que o fluxo de caixa do projeto seja positivo, isto é $\delta > 0$. Por outro lado, se o valor de $\delta$ for muito elevado, o valor da opção pelo investimento será pequena, afinal o custo de oportunidade de se esperar será muito alto. Quando temos que $\delta \rightarrow \infty$, o valor da opção pela flexibilidade vai para zero e as únicas possibilidades são investir agora ou nunca investir, voltando para o caso do valor presente líquido tradicional. Nos modelos envolvendo interação estratégica entre as firmas, $\delta$ pode refletir o processo de entrada de novas firmas no mercado e a capacidade de expansão de competidores, ou simplesmente pode representar os fluxos de caixa proporcionados pelo desenvolvimento do projeto.

A avaliação do investimento através da metodologia dos ativos contingentes ocorre da seguinte maneira: construímos uma carteira composta por $F(V)$, o valor da opção pelo investimento, e vendemos a descoberto $dF/dV$ unidades do projeto ou do ativo $X$. O valor da carteira em $t=0$ é dada por :

[11] COCHRANE (2001) chama esta metodologia de "apreçamento relativo dos ativos".

$$\Phi = F(V) - \frac{dF}{dV}V \qquad (5)$$

Um investidor racional, mantendo uma posição comprada no projeto ou no ativo *X*, demandará uma taxa de retorno ajustada pelo risco de $\mu V$, que inclui os ganhos de capital mais os fluxos de caixa $\delta V$. Como a posição vendida possui $dF/dV$ unidades de *V*, ela requer o pagamento de $\delta V dF/dV$ por período, caso contrário nenhum investidor racional entraria no lado oposto de tal operação. O retorno instantâneo total dessa carteira será:

$$d\Phi = dF(V) - \frac{dF}{dV}dV - \delta V \frac{dF}{dV}dt \qquad (6)$$

Trata-se de um ativo sem risco. Para verificar este fato, encontramos através do lema de Itô a expressão para $dF(V)$:[12]

$$dF(V) = \frac{dF}{dV}dV + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dV^2}(dV)^2 \qquad (7)$$

onde $(dV)^2 = (\alpha V dt)^2 + (\sigma V dz)^2 + 2(\alpha V dt)(\sigma V dz) = \sigma^2 V^2 dt$ ;

logo temos que:

$$d\Phi = \left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dV^2}\sigma^2 V^2 - \delta V \frac{dF}{dV}\right)dt \qquad (8)$$

Como a variação infinitesimal desta carteira não possui o termo *dz*, o processo de Wiener do movimento browniano, trata-se de uma carteira livre de risco. Isto significa que seu retorno deve ser igual à taxa de juros livre de risco, logo:

$$d\Phi = r\left(F(V) - \frac{dF}{dV}V\right)dt \qquad (9)$$

Igualando as duas equações temos que:

$$d\Phi = \left(\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dV^2}\sigma^2 V^2 - \delta V \frac{dF}{dV}\right)dt, \quad d\Phi = r\left(F(V) - \frac{dF}{dV}V\right)dt$$

---

[12] Note que *F* é função apenas de *V*, por isso temos a expressão do lema de Itô em termos de diferenciais no lugar das derivadas parciais.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dV^2}\sigma^2V^2 - \delta V\frac{dF}{dV} = rF(V) - r\frac{dF}{dV}V \qquad (10)$$

Arrumando os termos, encontramos a equação diferencial homogênea de apreçamento da opção real do investimento:

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{d^2F}{dV^2} + (r-\delta)V\frac{dF}{dV} - rF = 0 \qquad (11)$$

Esta equação deve se resolvida respeitando as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{cases} F(0)=0 & (12) \\ F(V^*)=V^*-I \text{ – } \textit{Value Matching} \text{ (Ao investir a firma recebe } V^*-I\text{)} & (13) \\ F'(V^*)=1 \text{ – } \textit{Smooth-Pasting} \text{ (Condição técnica de otimização)} & (14) \end{cases}$$

A equação (11) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, mas existem três condições para sua solução, pois não conhecemos $V^*$. A primeira condição nos diz que se $V$ for para zero, isto é, se o valor do projeto for nulo ele permanecerá estável neste mesmo ponto, logo a opção pelo investimento não possuirá nenhum valor. Como $V^*$ é o valor crítico para o investimento, a firma realizará os gastos iniciais se $V>V^*$, então quando $V=V^*$ temos que $F(V^*)=F(V)$. A terceira condição é uma condição técnica que garante a maximização do valor da opção no momento do exercício.[13]

A equação (13) possui uma outra interpretação interessante, podemos escrevê-la como $V^*-F(V^*)=I$. Quando a firma investe, ela recebe o valor do projeto em troca da oportunidade ou opção pelo investimento. De forma equivalente, podemos escrever $V^*= I + F(V)$, onde o valor crítico do projeto será igual ao custo total, isto é, o custo de implementação mais o custo de oportunidade de realizar o investimento.

A solução para o caso de perpetuidade[14] deste problema resulta numa fórmula fechada para o valor da opção *F(V),* obtida através da resolução da

---

[13] Maiores detalhes podem ser obtidos em DIXIT e PINDYCK (1994) capítulo 4.

[14] Perpetuidade significa que a opção de investir não tem prazo de vencimento, isto é, $T=\infty$.

equação diferencial (11), sujeita às condições de fronteira. O resultado é o seguinte sistema de equações abaixo:

$$F(V) = AV^{\beta 1} \tag{15}$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \tag{16}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{17}$$

$$A = \frac{V^* - I}{V^{*\beta 1}} = \frac{(\beta_1 - 1)^{(\beta_1 - 1)}}{(\beta_1)^{\beta 1} I^{\beta 1 - 1}} \tag{18}$$

Ou seja:

$$Se\ \ V > V^* \rightarrow F(V) = V - I \tag{19}$$

$$Se\ V \leq V^* \rightarrow F(V) = \left(\frac{V^* - I}{V^{*\beta 1}}\right) V^{\left(\frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}\right)} \tag{20}$$

$$= F(V) = \frac{(\beta_1 - 1)^{(\beta_1 - 1)}}{(\beta_1)^{\beta 1} I^{\beta 1 - 1}} V^{\left(\frac{1}{2} - \frac{(r-\delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}\right)} \tag{21}$$

Esta regra ótima de decisão de investimento pode ser resumida através da análise das duas primeiras equações. Na primeira, o valor da opção de espera, definido por *F(V)*, é igual a uma constante multiplicada pelo valor do projeto elevado a um expoente maior que *1*. Este expoente é função de parâmetros como a taxa de juros sem risco, do fluxo de caixa do projeto e da volatilidade. A segunda equação define o valor crítico para o investimento, *V**. A regra ótima de decisão, no sentido de maximização do valor de mercado da firma, define que o investimento só será realizado se o valor do projeto superar este valor crítico. A variável *A* é determinada pelo parâmetro $\beta_1$ e pelo custo do investimento *I*.

Podemos notar que como $\beta_1 > 1$, temos que $\beta_1/(\beta_1 - 1) > 1$ e necessariamente $V^* > I$. Isto significa que a regra tradicional de valor presente líquido pode ser bastante incorreta, afinal aceita-se todos os projetos que possuem $V > I$. O valor crítico assume valores sempre maiores que 1, como 2 ou 3. Trata-se de uma razão que aumenta de valor quanto maior for a volatilidade. Isto significa que, dependendo da incerteza associada ao projeto, o valor presente dos fluxos de caixa do investimento deve ser duas ou três vezes maior que o seu custo inicial para que o empreendimento seja implementado. A presença da irreversibilidade e de uma maior incerteza sobre o investimento provoca um distanciamento entre $V^*$ e $I$. O fator deste distanciamento depende diretamente da incerteza associada ao projeto, afinal o parâmetro beta é função da volatilidade, isto é $\beta_1(\sigma)$.

De acordo com a discussão anterior, nem sempre será possível replicar as características de risco de um projeto de investimento. Se a replicação não for possível, o valor ótimo para a opção real do projeto ainda pode ser encontrado através da programação dinâmica, estabelecendo uma taxa de desconto exógena $\mu$. Como o objetivo é encontrar uma regra que maximize o valor da oportunidade de investimento, denotada por $F(V)$, o problema da firma pode ser definido por:

$$F(V) = Máx\, E_t\left\{(V_{t^*} - I)\, e^{-\mu t^*}\right\} \qquad (22)$$

onde $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$ e $t^*$ é a data desconhecida em que o projeto será executado.

A condição de otimização deste problema de maximização intertemporal, a equação de Bellman[15], proporciona o equilíbrio através de uma quebra da otimização em uma seqüência de problemas compostos por duas etapas, uma condição referente ao momento inicial, onde as variáveis de estado e as variáveis de controle são conhecidas e um segundo momento representando toda a incerteza estabelecida pelas variáveis de estado dos demais períodos. A equação de Bellman desse problema possui o seguinte formato:

$$\mu F dt = E_t(dF) \qquad (23)$$

De outra forma:

$$\mu F = \left(\frac{1}{dt}\right) E_t(dF) \qquad (24)$$

A opção real $F(V)$ não proporciona nenhum fluxo de renda no momento presente, logo a equação de Bellman deste problema iguala a taxa de retorno

---

[15] Assume-se que a taxa de desconto e maior que a taxa de retorno esperada do valor do projeto, $\mu > \alpha$ e denotamos $\delta = \mu - \alpha$.

instantânea do investimento $\mu Fdt$ à taxa de valorização esperada do capital definida por $E_t dF$ , equilibrando a otimização intertemporal da firma. Utilizando o lema de Itô obtemos a seguinte expressão para a lei de movimento de *F(V)*:

$$dF = \alpha V \frac{dF(V)}{dV} dt + \sigma V \frac{dF(V)}{dV} dz + \left(\frac{1}{2}\right) \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F(V)}{dV^2} dt \qquad (25)$$

Como $E_t(dz)=0$ e $E_t(dF) = \alpha V \frac{dF(V)}{dV} dt + \left(\frac{1}{2}\right) \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F(V)}{dV^2} dt$, podemos reescrever a equação de Bellman da seguinte forma :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F(V)}{dV^2} + \alpha V \frac{dF(V)}{dV} - \mu F = 0 \qquad (26)$$

Substituindo $\delta = \mu - \alpha$ , temos que:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F(V)}{dV^2} + (\mu - \delta) V \frac{dF(V)}{dV} - \mu F = 0 \qquad (27)$$

Trata-se que uma equação diferencial quase idêntica à equação (11), logo deve ser resolvida respeitando as mesmas condições de fronteira. As soluções serão equivalentes quando existir a possibilidade de replicação e quando houver inexistência de arbitragem, ou seja, sob neutralidade perante o risco.[16]

## 2.2. Influência de Variações nos Parâmetros da Regra Ótima de Investimento

No modelo analisado na seção anterior, a firma que realiza o investimento possui monopólio sobre os fluxos de caixa provenientes do projeto de investimento. Desta forma, estamos ignorando qualquer tipo de competição entre as firmas da mesma indústria e suas interações estratégicas. Como conseqüência, o valor do projeto pode ser modelado como um movimento browniano aleatório sujeito somente a choques exógenos.

[16] Neste caso, segundo o teorema de Girsanov, a lei de movimento do valor do projeto pode ser substituída por $dV = rVdt + \sigma Vd\widetilde{W}$, tornando $Ve^{-rt}$ um martingal sob a medida martingal equivalente.

Assim como no caso de uma opção financeira, o valor da opção de investir e o valor crítico aumentam quanto maior for a volatilidade associada ao projeto de investimento. Trata-se de um parâmetro crucial nas análises das opções reais. Em um ambiente de maior incerteza a firma realizará menos investimentos e talvez até mesmo reduza a sua produção.

Faremos agora uma análise de sensibilidade da regra de investimento ótima proposta pelas equações (15)-(18). Os exemplos numéricos ajudam a ilustrar os resultados principais do modelo e a influência de variações nas suas principais variáveis. Para fins ilustrativos da regra ótima de decisão, foram escolhidos os seguintes valores para os parâmetros: $r=0.04$, $\delta= 0.08$, $I=1$ e $V = 2$. Analisaremos a influência sobre o valor da opção do projeto dos seguintes valores para a volatilidade: $\sigma=0.2$, $\sigma=0.3$, $\sigma=0.4$, $\sigma=0.5$ *e* $\sigma=0.6$. Em economias mais instáveis, como a brasileira, estes valores não são necessariamente elevados e a volatilidade de um projeto investimento pode exceder 40%.

Através da tabela 2.1, podemos observar a influência de um aumento na incerteza sobre o valor da opção do projeto. Uma maior incerteza provoca a elevação do valor da opção de flexibilidade do investimento, assim como do seu valor crítico $V^*$. Isto significa que o empreendimento só ocorrerá se o valor do projeto for elevado o suficiente para compensar o risco. Se o cálculo do valor desta opção real de adiar o investimento for ignorada, estaremos desconsiderando o custo de oportunidade de aguardar novas informações. O valor deste custo de oportunidade é exatamente $F(V)$. Quando $V<V^*$, ou seja, $V< I +F(V)$, o valor do projeto é menor que o valor do custo total de produção que inclui o custo de oportunidade do investimento. Para qualquer valor positivo de $\sigma$, o valor crítico para o investimento será sempre maior que os gastos iniciais, $V^*>I$. Logo, a regra tradicional de investir quando o valor do projeto é maior que os seus custos operacionais está incorreta. No ponto onde o valor do projeto ultrapassa o valor critico, $V>V^*$, a firma realiza os gastos operacionais necessários para a implementação do projeto e o valor da opção de espera torna-se $V$-$I$.

| $\sigma$ | $\delta$ | $r$ | $V^*$ | $B1$ | $A$ | $I$ | $V$ | $F(V)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20% | 0.08 | 0.04 | 1.390 | 3.562 | 0.12070 | 1 | 2 | 1 |
| 30% | 0.08 | 0.04 | 1.782 | 2.279 | 0.20961 | 1 | 2 | 1 |
| 40% | 0.08 | 0.04 | 2.281 | 1.781 | 0.29499 | 1 | 2 | 1.01362 |
| 50% | 0.08 | 0.04 | 2.889 | 1.529 | 0.37293 | 1 | 2 | 1.07642 |
| 60% | 0.08 | 0.04 | 3.612 | 1.383 | 0.44224 | 1 | 2 | 1.15333 |

Tabela 2.1 – Influência da Volatilidade sobre as Variáveis da Regra de Investimento

A incerteza aumenta o valor das oportunidades de investimento da firma, mas provoca um crescimento em $V^*$, ajudando a reprimir o investimento. É importante perceber que os efeitos de um aumento na incerteza sobre o valor do investimento independem de hipóteses sobre preferências sobre o risco das firmas, ou da correlação do valor de $V$ com uma carteira de mercado. As firmas podem ser neutras ou avessas ao risco e a evolução estocástica de $V$ pode ser completa ou parcialmente diversificada.

Em relação ao parâmetro $\delta$, o seu aumento resulta em um decréscimo de $F(V)$ e em uma diminuição no valor crítico $V^*$. No limite, quando $\delta$ vai para o infinito, $F(V)$ tende a zero quando $V<I$ e $V^*$ tende para $I$. Isto significa que se os fluxos de caixa proporcionados pelo investimento forem muito altos, a decisão ótima será investir imediatamente, afinal não existe valor associado à espera. Podemos observar tais fatos na tabela 2.2.

$$dV = (\mu - \delta)Vdt + \sigma Vdz \tag{28}$$

Na medida em que $\delta$ cresce, a taxa de crescimento de $V$ diminui, segundo a equação (28), reduzindo a expectativa de um aumento no valor do projeto de investimento.

| $\delta$ | $\sigma$ | $r$ | $V^*$ | $B1$ | $A$ | $I$ | $V$ | $F(V)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 20% | 0.04 | 2.000 | 2.000 | 0.25000 | 1 | 2 | 1 |
| 0.08 | 20% | 0.04 | 1.390 | 3.562 | 0.12070 | 1 | 2 | 1 |
| 0.15 | 20% | 0.04 | 1.173 | 6.794 | 0.05851 | 1 | 2 | 1 |
| 0.25 | 20% | 0.04 | 1.094 | 11.671 | 0.03294 | 1 | 2 | 1 |
| 0.35 | 20% | 0.04 | 1.064 | 16.620 | 0.02282 | 1 | 2 | 1 |

Tabela 2.2 – Influência do Fluxo de Caixa sobre as Variáveis da Regra de Investimento

Apesar do valor da flexibilidade de se adquirir $V$, se os fluxos de caixa do projeto, definida por $F(V)$, possuírem um valor menor, haverá uma quantidade maior de empreendimentos sendo realizados. Torna-se mais caro esperar, ao invés de realizar imediatamente os gastos irreversíveis.

A elevação da taxa de juros real livre de risco provoca um aumento no valor da opção real de se esperar, assim como no seu valor crítico $V^*$. A elevação em $F(V)$ ocorre pois o valor presente do gasto $I$ realizado no ótimo para o investimento $t^*$ é definido por $Ie^{-rt^*}$, enquanto que o valor presente do projeto é $Ve^{(-\mu+\alpha)t^*}=V\hat{e}^{\,-\,\delta t^*}$. Mantendo δ fixo, um aumento em $r$ provoca uma redução no valor presente do custo do investimento sem reduzir o seu pagamento esperado. Apesar deste aumento no valor das oportunidades de investimento da firma, o resultado final é uma redução do investimento, afinal uma quantidade menor de projetos será realizada. Um aumento nas taxas de juros reais provoca uma diminuição no investimento agregado, no entanto temos uma interpretação para este fato diferente da análise tradicional.

| $r$ | $\sigma$ | $\delta$ | $V^*$ | $B1$ | $A$ | $I$ | $V$ | $F(V)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 20% | 0.08 | 1.390 | 3.562 | 0.12070 | 1 | 2 | 1 |
| 0.08 | 20% | 0.08 | 1.640 | 2.562 | 0.18024 | 1 | 2 | 1 |
| 0.15 | 20% | 0.08 | 2.315 | 1.760 | 0.30003 | 1 | 2 | 1.01649 |
| 0.20 | 20% | 0.08 | 2.883 | 1.531 | 0.37219 | 1 | 2 | 1.07568 |
| 0.25 | 20% | 0.08 | 3.476 | 1.404 | 0.43066 | 1 | 2 | 1.13959 |

Tabela 2.3 – Influência da Taxa de Juros sobre as Variáveis da Regra de Investimento

## 2.3. Examinando as Elasticidades do Valor Crítico

O valor crítico do projeto representa um *mark-up* sobre o seu custo irreversível. Trata-se de uma variável endógena importante para a avaliação dos investimentos, afinal o seu valor determina o quanto o valor de um projeto deve superar o seu custo para justificar o exercício da opção pela firma. Este valor crítico é uma função de três variáveis: da taxa de juros real livre de risco;do fluxo de caixa, ou custo de oportunidade do projeto; e da volatilidade do investimento.

Na seção anterior, verificamos a influência sobre $V^*$ das variações nestes parâmetros e, nesta seção, estamos interessados em realizar uma análise comparativa entre as elasticidades do valor crítico. Como o valor crítico do projeto é definido pela equação (16), substituindo a fórmula obtida para $\beta_1$ , equação (17), temos que:

$$V^*(\sigma;r;\delta)=\left\{\frac{1}{2}-\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}+\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}}\Bigg/\frac{1}{2}-\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}+\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}}-1\right\}I \quad (29)$$

O conceito de elasticidade é freqüentemente utilizado como uma medida de sensibilidade que independe da escolha de unidades das variáveis analisadas. Para alcançar tal objetivo utilizamos as variações percentuais no lugar das variações totais. Em relação ao valor crítico do projeto, este tipo de análise nos fornece sua variação percentual resultante de um aumento de 1% nas suas variáveis exógenas. As expressões analíticas para as elasticidades de *V** são definidas por:

$$\textit{Elasticidade-Volatilidade}: \varepsilon_\sigma=\frac{\partial V^*}{\partial\sigma}\frac{\sigma}{V^*}=\frac{\partial V^*}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}\frac{\sigma}{V^*} \quad (30)$$

$$=\frac{(\beta_1-1)-\beta_1}{(\beta_1-1)^2}I\frac{2(r-\delta)}{\sigma^3}\frac{\sigma}{V^*}-\frac{(\beta_1-1)-\beta_1}{(\beta_1-1)^2}I\frac{1}{2\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}}}\left\{2\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2(r-\delta)}{\sigma^3}\right)-\frac{4r}{\sigma^3}\right\}\frac{\sigma}{V^*}$$

$$\textit{Elasticidade-Juros}: \varepsilon_r=\frac{\partial V^*}{\partial r}\frac{r}{V^*}=\frac{\partial V^*}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}\frac{r}{V^*} \quad (31)$$

$$=\frac{(\beta_1-1)-\beta_1}{(\beta_1-1)^2}I\frac{(-1)}{\sigma^2}\frac{r}{V^*}+\frac{(\beta_1-1)-\beta_1}{(\beta_1-1)^2}I\frac{1}{2\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}}}\left\{2\left(\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)+\frac{2}{\sigma^2}\right\}\frac{r}{V^*}$$

$$\textit{Elasticidade-Fluxo de Caixa}: \varepsilon_\delta=\frac{\partial V^*}{\partial\delta}\frac{\delta}{V^*}=\frac{\partial V^*}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}\frac{\delta}{V^*} \quad (32)$$

$$=\frac{(\beta_1-1)-\beta_1}{(\beta_1-1)^2}I\frac{1}{\sigma^2}\frac{\delta}{V^*}-\frac{(\beta_1-1)-\beta_1}{(\beta_1-1)^2}I\frac{1}{2\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}}}\left\{2\left(\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right\}\frac{\delta}{V^*}$$

As elasticidades foram calculadas em termos de variações contínuas, ou seja, são medidas de elasticidade-ponto. Uma análise comparativa interessante pode ser obtida ao examinarmos a magnitude destas elasticidades supondo os mesmos valores para as variáveis exógenas utilizadas na seção anterior: *r=4%* para a taxa de juros real sem risco, *δ= 8%* para a taxa de dividendos ou fluxo de renda das *commodities* e para custo de implementação do investimento temos que $I = 1$. Como estamos interessados no impacto de variações da incerteza sobre a avaliação das opções reais, consideramos os seguintes valores para as volatilidades: $\sigma = 30\%$, $\sigma = 35\%$, $\sigma = 37\%$, $\sigma = 40\%$, $\sigma = 45\%$ e $\sigma = 50\%$.

| *Volatilidade- σ* | *30%* | *35%* | *37%* | *40%* | *45%* | *50%* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Elasticidade Volatilidade* | *0.20503* | *1.07882* | *1.21341* | *1.31564* | *1.35637* | *1.33389* |
| *Elasticidade Juros* | *0.02640* | *0.13860* | *0.15739* | *0.17415* | *0.18720* | *0.19232* |
| *Elasticidade Fluxo de Caixa* | *-0.06279* | *-0.37324* | *-0.43662* | *-0.49824* | *-0.55031* | *-0.57107* |

Tabela 2.4 – Elasticidades do Valor Crítico do Projeto – V*

Podemos tirar algumas conclusões a partir dos resultados da análise comparativa, expostos na tabela 2.4. A volatilidade é o parâmetro de maior elasticidade, possuindo uma magnitude superior a três vezes a elasticidade dos fluxos de caixa e aproximadamente sete vezes a elasticidade das taxas de juros. Isto significa que a incerteza associada a um projeto de investimento é a variável mais importante para determinar o seu valor. Em relação aos demais parâmetros do modelo, as mudanças na volatilidade provocam um maior impacto sobre o seu valor crítico, o que significa um aumento ou uma redução na quantidade de projetos realizados. Como existe um valor associado à flexibilidade, resultante da possibilidade de se esperar para realizar os gastos irreversíveis, quanto maiores forem as incertezas associadas aos retornos dos investimentos, menor será a quantidade de projetos implementados. O risco possui um papel crucial na sua determinação, tanto no nível microeconômico quanto no nível agregado.

Se um dos objetivos dos formuladores de política econômica é fornecer incentivos ao investimento, a simples existência de custos irreversíveis para a realização dos projetos implica que uma redução da incerteza produz impactos mais expressivos sobre a quantidade de projetos de investimento realizados do que um simples corte nas taxas de juros, ou até mesmo incentivos fiscais. A instabilidade na condução das políticas macroeconômicas de um país aumenta as incertezas associadas aos investimentos de longo prazo, provocando um crescimento nos valores críticos dos projetos.